

Rijen met de Casio fx-CG20 en fx-CG50

Met de Casio kun je op diverse manieren rijen in beeld brengen. Verder kun je daarbij ook gemakkelijk somrijen en verschilrijen maken. Je kunt tijdgrafieken en webgrafieken tekenen.

Inhoud

- Rijen met directe formules
 - Invoeren als functie
 - Invoeren als lijst
 - Invoeren als rij
 - Recursief gegeven rijen
 - Tijdgrafieken en webgrafieken
 - Stelsels rijen en fasegrafieken
-

Rijen met directe formules

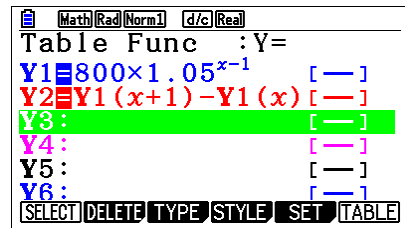
Rijen met **directe formules** kunnen op drie manieren worden ingevoerd. Ga uit van de rij met voorschrift:

$$u_n = 800 \cdot 1.05^{n-1}$$

te beginnen met $n = 1$.

Je kunt de **rij als een gewone functie** opvatten met als domein alleen de getallen (0), 1, 2, 3, 4, ...

- Voer in je tabelscherm het functievoorschrift in:
 $y_1(x) = 800 \cdot 1.05^{x-1}$. Zie hiernaast.
- Laat de tabel die bij deze functie hoort op je scherm weergegeven. Je ziet nu de termen van de rij. Zie hiernaast/onder.



Je kunt de bijbehorende **verschilrij** in beeld brengen via:

$$y_2(x) = y_1(x + 1) - y_1(x).$$

Zk cY₁ met **[VAR]** **[F4]** (**[GRAPH]**) **[F1]** (**[Y]**) **[1]**.

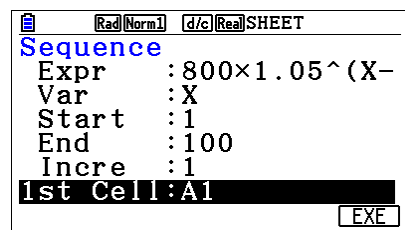
Gebruik **[X,0,T]** voor x . Zie de afbeeldingen hiernaast.

| X | Y1 | Y2 |
|---|-------|--------|
| 1 | 800 | 40 |
| 2 | 840 | 42 |
| 3 | 882 | 44.1 |
| 4 | 926.1 | 46.305 |

De bijbehorende **somrij** maken als functie is lastig/onmogelijk. De Casio ondersteunt geen sommeerfunctie in een functie.

Je kunt de **rij als een lijst met getallen** dekmizc Z jci]Zb Yvc ckdZgc c HegZVyh] ZZI...9V gaat zo:

- Druk in je hoofdscherm op **[4]** (Spreadsheet).
- Maak de sheet leeg met **[F5]** (Clear) **[F3]** (All) en ga terug naar het spreadsheet menu.
- Ga in cel A1 staan.
- Maak de rij met **[F2]** (Edit) **[F5]** (Seq), voer voor de expressie x in, voor de variabele ook x , voor de startwaarde 1, voor de eindwaarde 100 en voor de stapgrootte 1.
Controleer dat er nu in de eerste kolom de getallen 1 tot en met 100 staan.
Controleer of je nu snapt waar alle waarden in het venster voor stonden.
- Ga in cel B1 staan.
- Maak de rij zelf met **[F2]** (Edit) **[F5]** (Seq) en voer de expressie $800 \cdot 1.05^{x-1}$ in en verder variabele, startwaarde, eindwaarde en stapgrootte. Zie hiernaast.



- In kolom B komen nu de termen van de rij. Zie hiernaast.

De bijbehorende **somrij** kan in kolom C worden gezet als volgt:

- Ga in cel C1 staan.
- Voer in als celberekening: **SHIFT** ***** **(=)** **F5** **(cell)** **F5** **(sum)** **ALPHA** **B** **EXIT** **F2** **(\\$)** **1** **F3** **(:)** **B** **1**
Er staat nu in de cel: =CellSum(B\$1:B1). Hiermee wordt de som berekend van de cellen B1 tot B1

Recursief gegeven rijen

Bekijk nog eens de rij met direct voorschrift:

$$u_n = 800 \cdot 1,05^{n-1}$$

In recursieve vorm ziet diezelfde rij er zo uit:

$$\begin{cases} u(n+1) = 1,05 \cdot u(n) \\ u(1) = 800 \end{cases}$$

Als je een rij die gegeven is door een **recursieformule** wilt invoeren, gebruik je **rij invoeren als rij**.

Deze rekenmachine noteert in het recursieve rij-scherm $a_{n+1} =$ in plaats van $u(n+1) = \dots$

Voer nu de rij in als volgt:

- Ga via het hoofdmenu naar $GZXj \text{ } \phi \text{ } dc \dots$
- Kies het type rij, in dit geval recursief met alleen gebruik van de vorige term: $F3$ (type) $F2$ (alleen gebruik van de vorige term (en eventueel ook nog n , maar dat doen we hier niet)).
- Toets $a_n = 1.05 \times F4$ (rijvariabelen) $F2$ (a_n) EXE
- Stel nu de goede beginwaarde en eindwaarde in: $F5$ (set), maak Start 1 en End 100
- Geef de goede beginwaarde op: $F2$ (a_1 opgeven), maak a_1 gelijk aan 800, EXE
- Vraag nu de tabel op: $F6$ (Table)

Het resultaatsscherm ziet er bijna hetzelfde uit, zie hiernaast.

| n+1 | a_{n+1} | Σa_{n+1} |
|-----|-----------|------------------|
| 1 | 800 | 800 |
| 2 | 840 | 1640 |
| 3 | 882 | 2522 |
| 4 | 926.1 | 3448.1 |

800

Oefen het werken met rijen gegeven door een recursieformule.

Hier zie je hoe een rij van Fibonacci kan worden ingevoerd:

| n+2 | a_{n+2} | Σa_{n+2} |
|-----|-----------|------------------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 7 |
| 4 | 5 | 12 |

| n+2 | a_{n+2} | Σa_{n+2} |
|-----|-----------|------------------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 7 |
| 4 | 5 | 12 |

| n+2 | a_{n+2} | Σa_{n+2} |
|-----|-----------|------------------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 7 |
| 4 | 5 | 12 |

1



Tijdgrafiek en webgrafiek

Je kunt bij rijen twee soorten grafieken maken:

- 'gewone' grafieken of tijdgrafieken
- webgrafieken

Gebruik weer dezelfde rij als in de rest van het practicum met directe formule:

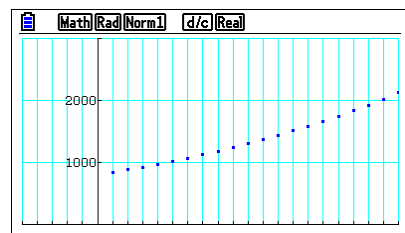
$$u_n = 800 \cdot (1,05)^{n-1}$$

en recursieformule:

$$\begin{cases} u(n) = 1,05 \cdot u(n-1) \\ u(1) = 800 \end{cases}$$

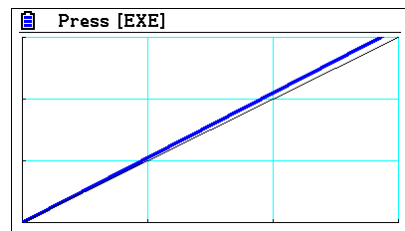
De **tijdgrafiek** verschijnt in beeld als de formule is ingevoerd en je vanuit de tabel [Gph-plt] (losse punten) en daarna a_n kiest. Stel daarna de juiste scherminstellingen in (laat n lopen van 1 t/m 20, $u(n)$ loopt van ongeveer 800 tot 2000).

Je ziet dan de afbeelding hiernaast.



De **webgrafiek** verschijnt in beeld als je het volgende doet:

- Voer de recursieve formule in. Zet de startwaarde op 800.
- Laat n lopen van 1 t/m 20, $u(n)$ loopt van ongeveer 800 tot 2000.
- Stel beide assen van de grafiek in op de geschikte waarde, in dit geval bijvoorbeeld 3000.
- Schakel nu de weergave van de webgrafiek in nadat je de tabel in het scherm hebt: [Web-gph]



Nu zie je een beeld zoals hiernaast. Niet erg interessant



Stelsels rijen en fasegrafieken

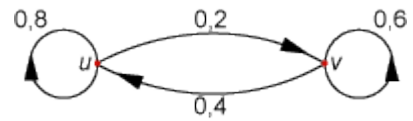
Er ontstaan stelsels rijen als je bijvoorbeeld te maken hebt met een migratiematrix, met de prooi-roofdier-cyclus, of bepaalde economische modellen. Een voorbeeld van zo'n stelsel is (de bijpassende migratiegraaf staat er naast):

$$u(n) = 0,8 \cdot u(n-1) + 0,4 \cdot v(n-1)$$

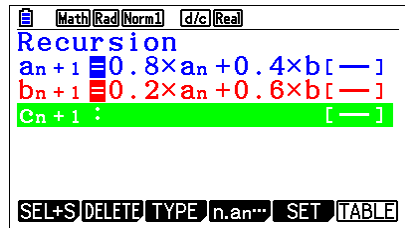
$$v(n) = 0,2 \cdot u(n-1) + 0,6 \cdot v(n-1)$$

met

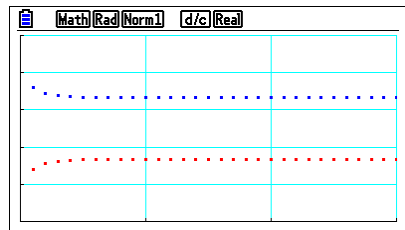
$$u(0) = 80 \text{ en } v(0) = 20.$$



Voer het stelsel rijen als volgt in $\text{V} \text{a} \text{il} \text{ Z} \text{Z} \text{g} \text{Zc} \text{ } \square \text{Z} \text{ } \text{g} \text{Z} \text{j} \text{ } \text{g} \text{Z} \text{ } \text{Z} \text{ZkZc} \text{g} \text{Zc} \text{:}$



Door de tabel even door te bladeren, zie je dat de waarden tussen de 0 en 100 liggen. Instellen van het grafiekvenster levert dan het beeld hiernaast. Controleer dat.



Juist bij stelsels rijen is het vaak nuttig om een zogenaamde *fasegrafiek* te maken, waarin de rij $u(n)$ op de horizontale as en de rij $v(n)$ op de verticale as is uitgezet.

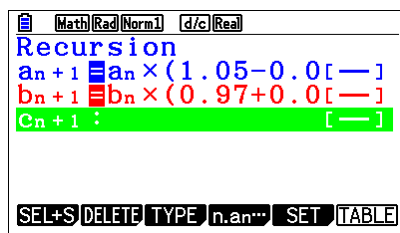
Dit zijn formules bij een prooiroofdiermodel:

$$u(n) = u(n-1) \cdot (1,05 - 0,001 \cdot v(n-1))$$

$$v(n) = v(n-1) \cdot (0,97 + 0,0002 \cdot u(n-1))$$

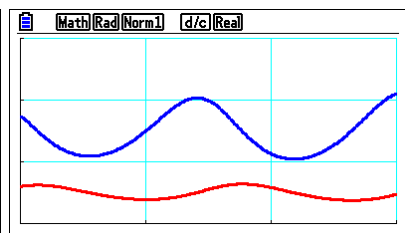
met beginwaarden $u(0) = 175$ en $v(0) = 60$.

Voer de formules in zoals hieronder en neem n maximaal 300.



| n+1 | a_{n+1} | b_{n+1} |
|-----|---------|---------|
| 1 | 173.25 | 60.3 |
| 2 | 171.46 | 60.58 |
| 3 | 169.65 | 60.84 |
| 4 | 167.81 | 61.079 |

173.25



Bekijk de hierboven getoonde grafiek met venster $[0,300] \times [0,300]$. Je ziet een soort golfbeweging ontstaan.

Door nu [Phase] te kiezen wordt de fasegrafiek getoond. Stel het venster in: $[100,250] \times [0,100]$. Je ziet dan de afbeelding zoals hiernaast. Nu begint het echte werk: Verander de beginwaarden $Zc \text{ } \text{V} \text{Z} \text{ } \text{I} \text{ } \text{M} \text{Zgb} \text{Z} \text{ } \text{YZ} \text{Wci} \text{Va} \text{Zc} \text{ } \text{kVc} \text{ } \text{YZ} \text{ } \text{YZgZc} \text{ } \text{ZVZj} \text{ } \text{g}$

