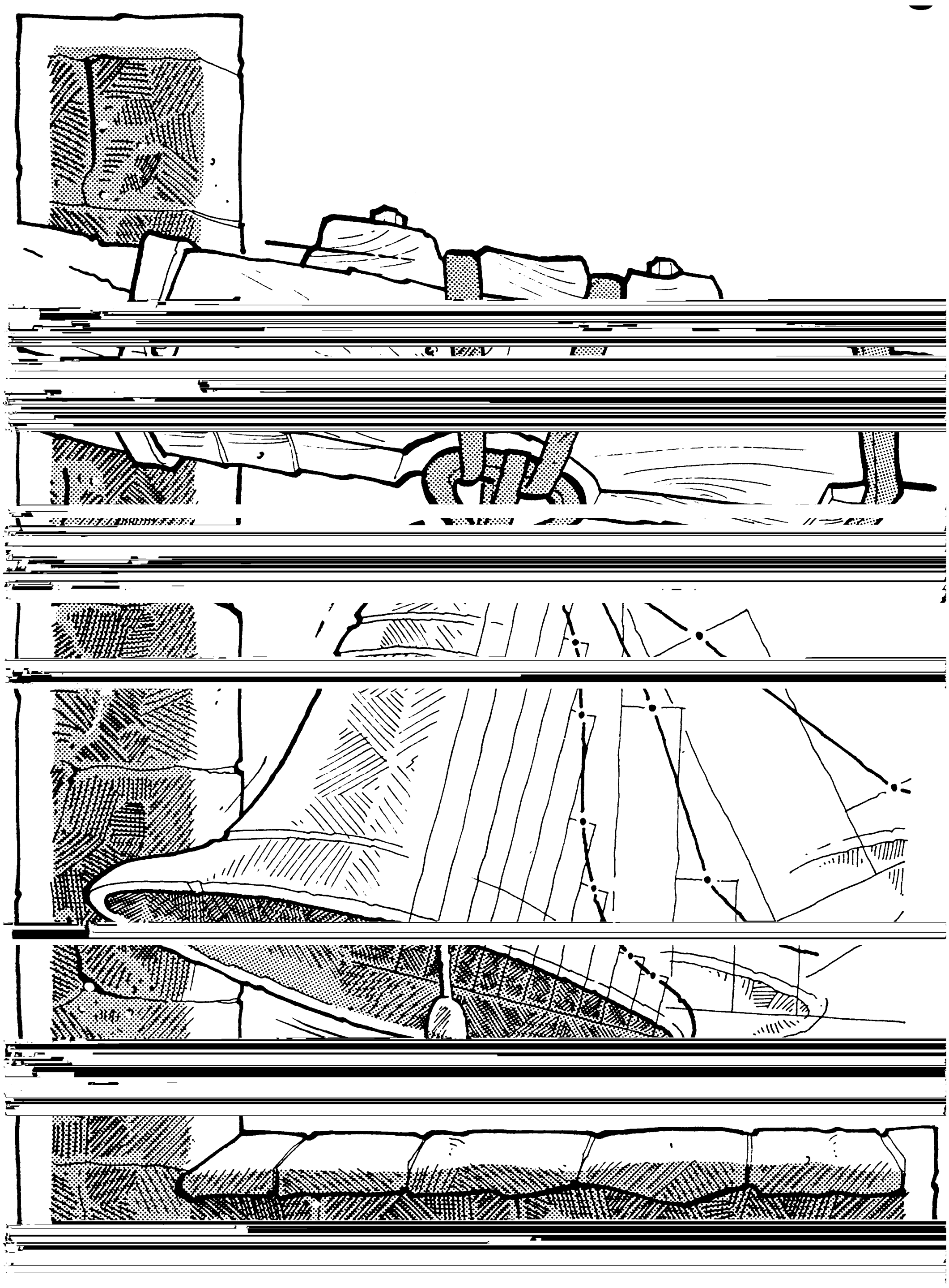
Normale verdelingen

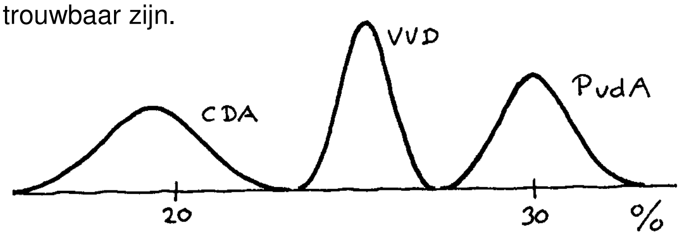


Inhoudsopgave

8 De klokvorm

1 Peiling

Op 6 mei 1998 vonden er verkiezingen voor de Tweede Kamer plaats. De laatste dagen voor de verkiezingen werd de uitslag voorspeld. Er zijn twee grote bureaus die zich daarmee bezighouden: Inter/View en Nipo. Zij houden peilingen onder de Nederlandse bevolking. Op grond van die peilingen voorspellen de bureaus voor elke politieke partij een percentage van de stemmen. Maar dat voorspelde percentage klopt natuurlijk zelden precies: er is een onzekerheid. Welke percentages voorspeld werden voor de drie grote partijen, drie dagen voor de verkiezingen, kun je aflezen uit onderstaand plaatje. Bovendien kun je de erin zien in hoeverre de voorspellingen betrouwbaar zijn.



We bekijken het percentage voor de PvdA.

a. Welk percentage voorspeld voor de PvdA ?

b. Tussen welke twee grenzen ligt het percentage (met grote waarschijnlijkheid) ?

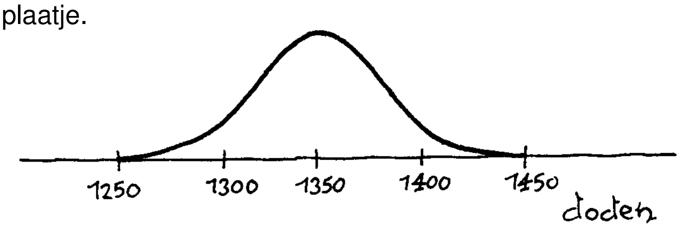
c. Bij welke partij is de onzekerheid van de voorspelling het grootst ? Bij welke partij is de onzekerheid het kleinst ? Waar zie je dat aan ?

d. De oppervlakte onder elk van de drie grafieken is hetzelfde. Waarom moet dat zo zijn ?

e. Hoe groot ongeveer is volgens het plaatje de kans dat de PvdA meer dan 31% van de stemmen haalt ?

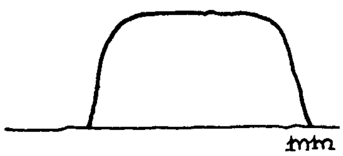
2 Verkeersdoden

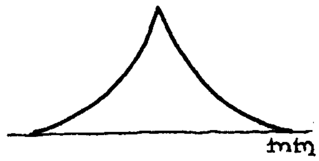
Het aantal verkeersdoden in een jaar in Nederland schommelt de laatste jaren rond de 1350. Op grond van het verleden wordt het aantal verkeersdoden voor komend jaar voorspeld. De voorspelling en de onzekerheid van de voorspelling kun je aflezen uit het volgende plaatje.



a. Schat hoe groot de kans is dat het aantal verkeersdoden boven de 1410 ligt.
b. Schat hoe groot de kans is dat het aantal verkeersdoden ligt tussen 1370 en 1400.

3 Het weer
Vanaf 1848 worden systematisch allerlei gegevens over het weer bijgehouden. Gemiddeld valt er jaarlijks 780 mm neerslag in de Bilt. Grotere afwijkingen dan 380 mm van dit gemiddelde zijn nooit voorgekomen. Op grond van die jarenlange ervaring maakt men een plaatje van de voorspelling voor het komend jaar.
a. Hoe ziet dat plaatje eruit, denk je ? Vermeld de relevante gegevens.
b. Stel dat er in een jaar 500 mm neerslag viel.
Vind je dat extreem weinig of valt het wel mee ?
Waarom ?
Hieronder staan twee mogelijke antwoorden op vraag **a**.

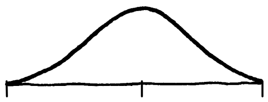




c. Wat is je bezwaar tegen elk van deze antwoorden ?

Oversg

het idee van de “volmaakte” mens in: dat is de mens die alle grootheden gemiddeld heeft. Heel iets anders dan wat als ideaal gezien wordt!



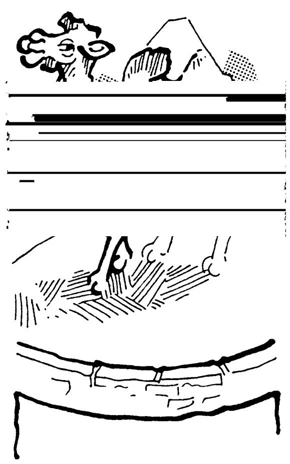
4 Voorbeelden van situaties met de klokvorm

Teken voor elk van de volgende voorbeelden een plaatje zoals hiernaast. Op de horizontale as wordt de genoemde grootheid uitgezet.
Schrijf bij de horizontale as de eenheid waarin je meet. (Bij het eerste voorbeeld is dat de grootheid *lengte* en is de eenheid *cm*.) Schrijf bij de drie streepjes op de horizontale as redelijke getallen.

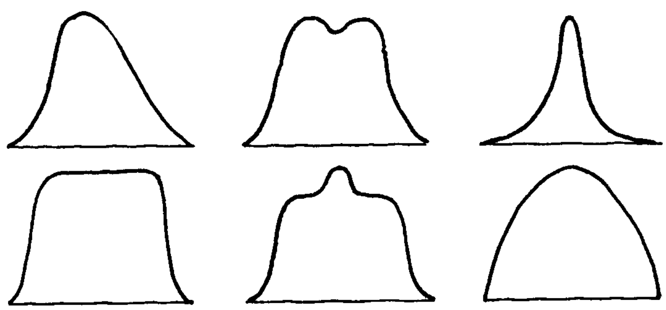
- Lengte van Nederlandse jongens van 18 jaar.
- Leeftijd van de vrouw als ze moeder wordt (haar eerste kind krijgt).
- Tijdsduur van een autorit Arnhem-Nijmegen (18 km) in de ochtendspits.
- Het precieze gewicht in een zogenaamd kilopak suiker.
- Het aantal keer kop bij 100 worpen met een muntstuk.

Zoals gezegd, zijn veel verdelingen klokvormig, of ze lijken daar sterk op. We spreken wel van een **normale verdeling**. De term normale verdeling is ingevoerd door de Engelse statisticus Karl Pearson (1857-1936).
Maar niet alle verdelingen zijn normaal.

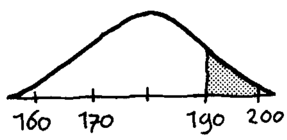
5 **a.** Geef zelf nog een paar praktijkvoorbeelden van (ongeveer) normale verdelingen.
b. Geef zelf ook een paar voorbeelden waarbij de verdeling duidelijk niet normaal is.



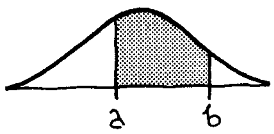
6 Geen van de volgende verdelingen is klokvormig.
Zeg van elke verdeling, waarom hij niet klokvormig is.



Zoals je gezien hebt, kun je uit een verdelingskromme kansen of percentages aflezen. Daarvoor is de *oppervlakte* onder de grafiek bepalend.



7 De lengte van 18-jarige jongens in Nederland is klokvormig verdeeld.
a. Het percentage van de jongens dat langer is dan 190 cm wordt gegeven door de grijze oppervlakte.
Hoe groot schat jij dat dat percentage ongeveer is ?
b. Schat hoeveel procent van de jongens een lengte heeft tussen 170 en 180 cm.

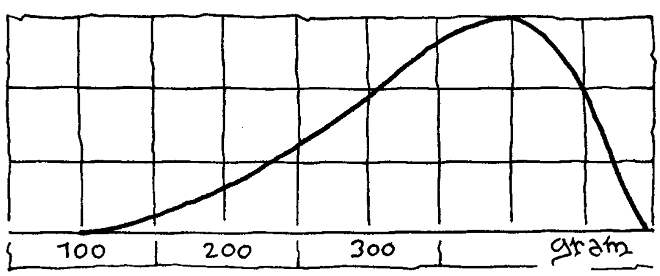


Een grootheid X is verdeeld volgens de grafiek hiernaast. Op de horizontale as zijn twee mogelijke waarden van X aangegeven: a en b.
De kans (of het percentage) dat de waarde van X ligt tussen a en b wordt gegeven door de oppervlakte onder de grafiek tussen a en b.
Preciezer:
Zeg dat de gearceerde oppervlakte p% is van de totale oppervlakte onder de grafiek. Dan geldt:

- in p% van de gevallen zal X een waarde tussen a en b aannemen,
- de kans dat $a \le X \le b$ is $\frac{p}{100}$.

De totale oppervlakte onder een verdelingskromme is 100%.

8 Het gewicht van sinaasappelen in de oogst in Spanje van 1994 is verdeeld volgens onderstaande grafiek. Voor het gemak is de grafiek getekend op roosterpapier.



a. Hoe zie je aan de grafiek dat het gewicht van de sinaasappels niet zuiver normaal verdeeld is ?
b. Bepaal zo nauwkeurig mogelijk hoeveel procent van de sinaasappels een gewicht heeft tussen 200 en 350 gram.
c. De zwaarste 30% van de sinaasappels worden verkocht aan luxe restaurants.
Hoe zwaar zijn die ?

Bij een verdeling hoort een gemiddelde en een standaardafwijking.

9 **a.** Hoe groot schat jij dat het gemiddelde gewicht is van de sinaasappels uit de vorige opgave ?

Het gemiddelde gewicht vind je als volgt:
- bepaal van elke sinaasappel zijn gewicht,
- tel al die gewichten op,
- deel door het totaal aantal sinaasappels.

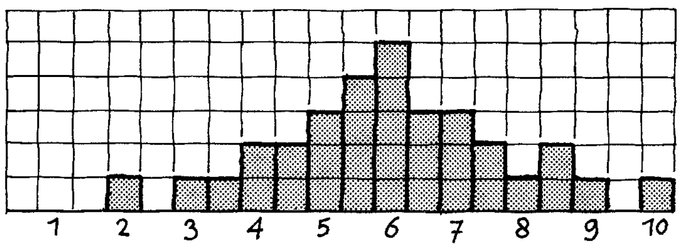
De uitkomst is het gemiddelde gewicht.

Stel dat je voor elke sinaasappel bepaalt hoeveel zijn gewicht afwijkt van het gemiddelde gewicht (lichte sinaasappels hebben een negatieve afwijking, zware sinaasappels een positieve), en je telt al die afwijkingen op.
b. Welke uitkomst krijg je dan ?

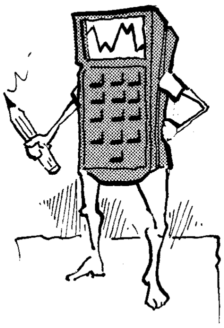
Voor de standaardafwijking Sd heb je een methode geleerd in paragraaf 7. Die gaat als volgt:
- je bepaalt voor elke sinaasappel het kwadraat van zijn afwijking van het gemiddelde,
- je telt al die kwadraten op,
- je deelt door het totaal aantal sinaasappels,
- je trekt de wortel.

De uitkomst is de standaardafwijking.

10 Hieronder staat een histogram van de cijfers van een wiskunde B-toets.



a. Bereken het gemiddelde cijfer.
b. Bereken de standaardafwijking van de cijfers.



Op de GR kun je het gemiddelde en de standaardafwijking als volgt uitrekenen.

- Voer in lijst L_1 de cijfers in en in lijst L_2 de frequenties.
- STAT CALC 1-Var Stats L_1,L_2 ENTER

De GR geeft dan onder andere $\overline{x}$ (het gemiddelde) en σx (dat is de Sd).

c. Voor de berekening op de GR uit.

Het gemiddelde en de standaardafwijking worden berekend met de volgende formules.

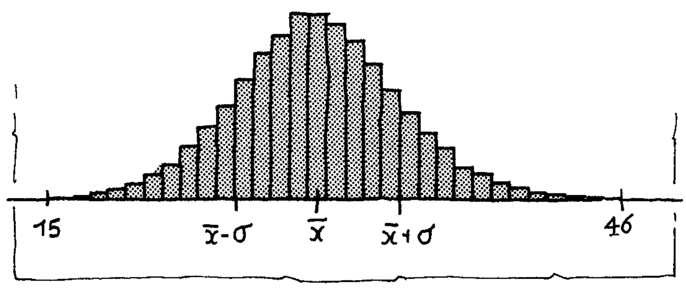
Gegeven is een bestand van in totaal n data. Stel dat er vier verschillende waarden zijn: x_1, x_2, x_3, x_4 met frequenties f_1, f_2, f_3, f_4. Dan geldt:

- $f_1+f_2+f_3+f_4 = n$
- het gemiddelde $\overline{x} = a \cdot (f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + f_4 \cdot x_4)$
- de standaardafwijking Sd =

$$\sqrt{f_1(x_1-\overline{x})^2 + f_2(x_2-\overline{x})^2 + f_3(x_3-\overline{x})^2 + f_4(x_4-\overline{x})^2}$$

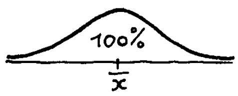
11 Hieronder staan een frequentietabel en een frequentiehistogram van de leeftijd van de moeders van levendgeborenen in 1988.

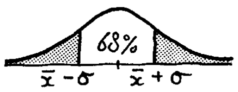
leeftijd moeder	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
frequentie (‰)	0,3	1,3	4,0	7,5	12,9	19,7	28,0	40,6	58,3	72,7	93,2	114,0
leeftijd moeder	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
frequentie (‰)	127,4	139,1	139,4	135,8	122,4	104,8	84,5	67,9	50,8	38,5	25,7	20,4
leeftijd moeder	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
frequentie (‰)	12,7	8,6	5,3	3,0	2,4	1,3	0,7	0,6	0,3	0,4	0,1	

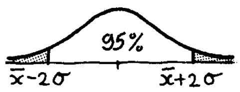


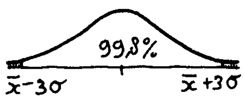
Voer op de GR de leeftijden in in bijvoorbeeld lijst L_1 en de frequenties in L_2. De leeftijden kun je een voor een invoeren, maar ook sneller als volgt:
LIST, OPS, 5:seq(K,K,15,49), ENTER, STO, L_1.
Voor de frequenties zit er niets anders op dan ze een voor een in te voeren.
a. Teken het histogram via STAT PLOT op de GR.
b. Bereken op de GR via STAT CALC het gemiddelde en de standaardafwijking van de leeftijd van de moeders.

Als je als leeftijden 15, 16, ... invoert, krijg je als gemiddelde ongeveer 29 jaar. In werkelijkheid is het gemiddelde echter 29,5 jaar.
c. Kun je dat halve jaar verschil verklaren ?
d. Ga na dat in het frequentiehistogram $\overline{x}$, $\overline{x}+\sigma$ en $\overline{x}-\sigma$ goed zijn aangegeven.
e. Schat hoeveel procent van de moeders ouder is dan $\overline{x}$, hoeveel procent ouder is dan $\overline{x}+\sigma$ en hoeveel procent ouder is dan $\overline{x}+2\cdot\sigma$.









Klokvormige verdelingen
Veel bestanden zijn zo ongeveer "klokvormig" verdeeld zoals hiernaast schetsmatig is aangegeven. Er is één top en de verdeling is symmetrisch en loopt geleidelijk af tot 0. Zie opgave **11**, maar je kunt ook denken aan juli-temperaturen, lengte van rekruten, de eindexamencijfers voor het vak wiskunde A of het aantal jongens bij 1000 geboortes in een zekere gemeente. Bij zo'n verdeling zijn grote afwijkingen van het gemiddelde zeldzaam.

Vuistregel
Bij klokvormige verdelingen gelden de volgende vuistregels voor de afwijkingen van het gemiddelde:
- afwijkingen van meer dan σ zijn heel gewoon: in 32% van de gevallen,
- afwijkingen van meer dan $2\cdot\sigma$ zijn tamelijk zeldzaam: in 5% van de gevallen,
- afwijkingen van meer dan $3\cdot\sigma$ zijn uiterst zeldzaam: in 0,2% van de gevallen.

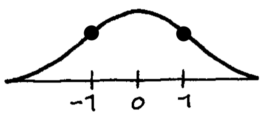
9 Normale verdelingen

In de vorige paragrafen hebben we beschreven wat we onder een normale verdeling verstaan.
Nog even de belangrijke kenmerken op een rijtje:

- de grafiek is symmetrisch,
- de totale oppervlakte onder zijn grafiek is 1,
- de grafiek heeft twee buigpunten.

Zoals elke verdeling, heeft ook een normale verdeling een gemiddelde en een standaardafwijking.

Er zijn allerlei normale verdelingen. In alle gevallen blijft de grafiek symmetrisch en blijft de totale oppervlakte onder de grafiek gelijk aan 1. We kunnen wel variëren met het gemiddelde en de standaardafwijking. Als *standaard* kiezen we de normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1. Alle andere normale verdelingen ontstaan uit deze door horizontale verschuiving en oprekken in horizontale en verticale richting.



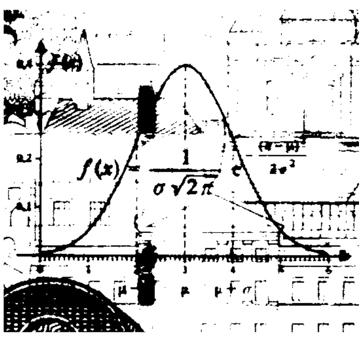
De **standaard normale verdeling** is de normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1.

Opmerking

De formule is: $y = 0{,}4 \cdot 0{,}6^{x^2}$ beschrijft de normale verdeling. Hierin zijn de getallen 0,4 en 0,6 benaderingen. De grafiek heeft de gewenste klokvorm en de oppervlakte onder de grafiek is gelijk is aan 1.

Deze formule is voor het eerst beschreven door de Frans/Engelse wiskundige Abraham de Moivre (1667-1754). Ook door andere wiskundigen is er veel onderzoek gedaan op het gebied van de klokkromme. Een van de onderzoekers was Carl Friedrich Gauss. De kromme wordt daarom ook wel **Gausskromme** genoemd.

Op het Duitse 10-markbiljet staat de beeltenis van C.F. Gauss met de grafiek van de normale verdeling. Deze grafiek is hieronder uitvergroot.

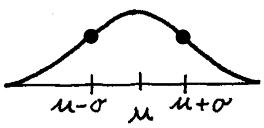


1 Als we de standaardnormale verdeling 2 keer zo smal maken, moet hij ook twee keer zo hoog worden.
a. Leg uit waarom.
b. Hoe verandert dan het gemiddelde ?
c. Hoe verandert dan de Sd ?

We verschuiven de standaardnormale verdeling 2 eenheden naar rechts.
d. Hoe verandert dan het gemiddelde ?
e. Hoe verandert dan de Sd ?

Bij een normale verdeling onderscheiden we twee parameters:
- gemiddelde μ ,
- standaardafwijking σ .

De bijbehorende verdelingskromme krijg je door de standaardnormale verdeling μ naar rechts te schuiven en σ keer zo breed te maken.



Het gemiddelde en de standaardafwijking worden in de statistiek met Griekse letters aangegeven:
- μ (spreek uit *mu*) voor het gemiddelde,
- σ (spreek uit *sigma*) voor de standaardafwijking.

2 We nemen aan dat de lengte van 18-jarige jongens normaal verdeeld is met gemiddelde 182 cm en Sd 10 cm.
Bijna alle lengtes liggen tussen $\mu-3\sigma$ en $\mu+3\sigma$.
a. Welke zijn deze twee grenzen ?

Er is een snelle manier om op de GR een plaatje van de verdeling te tekenen. Als volgt.
b. Type in: Y = normalpdf(X,182,10). Normalpdf vind je in het menu DISTR. Kies het window: $152 \leq x \leq 212$ en $0 \leq y \leq 0.05$

3 Neem aan dat de lengte van meisjes normaal verdeeld is met gemiddelde 174 cm en SD 8 cm.
Teken ook deze verdeling op de GR. Kies zelf een geschikt window.

4 Een normale verdeling ligt pas vast als je het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ kent.
a. Neem $\sigma = 3$. Neem verschillende waarden voor μ tussen 5 en 15. Teken de grafieken van de normale verde-

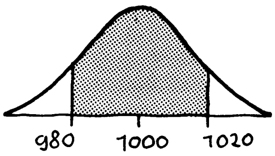
lingen op de GR in één plaatje. Neem het x-domein van 0 tot 20.
Wat verandert aan de grafiek als je μ verandert en σ vast houdt ?
b. Neem $\mu = 8$. Neem verschillende waarden voor σ tussen 0,1 en 3. Teken de grafieken van de normale verdeling op de GR in één plaatje. Kies het x-domein van 0 tot 20 en het y-domein van 0 tot 1.
Wat verandert aan de grafiek als je σ verandert en μ vast houdt ?

Zoals gezegd, zal een praktijkvoorbeeld nooit precies voldoen aan de formule van de normale verdeling, maar wel ongeveer. We spreken dan van **bij benadering normaal verdeeld**.
Vaak is het niet zo gemakkelijk om te beslissen of een verdeling wel bij benadering normaal is of niet. In beide plaatjes hieronder is behalve een normale verdeling nog een andere kromme getekend. Die lijkt misschien wel normaal, maar is het niet.

5 Als je een kilopak suiker koopt, mag je verwachten dat er 1000 gram suiker in zit. Dat staat per slot van rekening op de verpakking. Deze pakken worden in de fabriek machinaal gevuld. De vulmachine kan wel keurig op 1000 gram zijn ingesteld, maar in de praktijk zal er in het ene pak wat meer en in het andere pak wat minder suiker te-

Stel dat de machine inderdaad op 1000 gram is ingesteld. De hoeveelheid suiker in een pak is normaal verdeeld met gemiddelde 1000 gram en Sd 10 gram.

a. Teken de bijbehorende normale kromme op de GR.

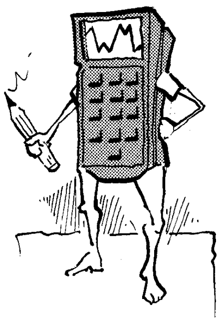


Je kunt op de GR berekenen hoeveel procent een gewicht heeft tussen 980 en 1020 gram. Als volgt:

- WINDOW: $970 \le x \le 1030$, $0 \le y \le 0.1$
- DISTR , DRAW , Shadenorm(980,1020,1000,10)

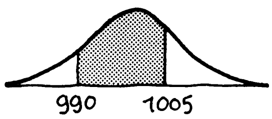
Op het scherm komt de normale kromme met gemiddelde 1000 en Sd 10 en daarbij geschaduwd de oppervlakte tussen 980 en 1020. Bovendien krijg je de oppervlakte van het gebied. En dat is het gevraagde percentage.

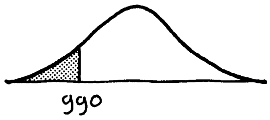
b. Hoe groot is dat percentage ?

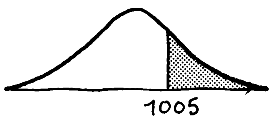


Als je alleen de oppervlakte wilt hebben en niet de tekening, dan kun je die berekenen met:
DISTR , normalcdf(980,1020,1000,10)

linker-grens rechter-grens gemid-delde μ Sd







c. Bereken met de GR hoeveel procent van de pakken suiker een gewicht heeft:

- tussen 990 en 1005 gram,
- minder dan 990 gram (Er moet bij Shadenorm altijd een linker- en rechtergrens opgegeven worden. Kies een zodanig klein of groot getal dat de oppervlakte daarbuiten praktisch 0 is),
- meer dan 1005 gram.

6 De **vuistregels** zeggen het volgende:

- 68% wijkt niet meer dan de Sd af van het gemiddelde,
- 95,5% wijkt niet meer dan 2·Sd af van het gemiddelde.

Controleer de vuistregels op de GR voor de pakken suiker van opgave **5**.

7 In een fabriek worden blikken gevuld met (gemiddeld) 1 liter verf. De standaardafwijking van de vulmachine is 15 milliliter. De inhoud van de blikken is normaal verdeeld.
We willen weten hoeveel procent van de blikken meer dan 30 ml verf te weinig bevat.

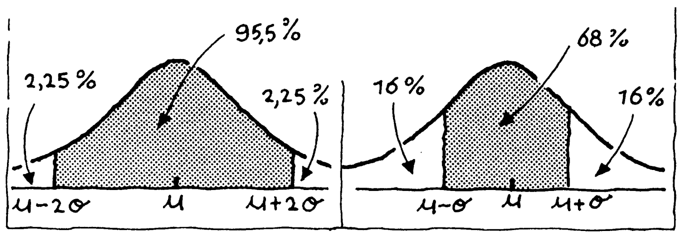
a. Schets ook een normale kromme en kleur de oppervlakte die hoort bij deze vraag.
b. Bereken hoeveel procent van de blikken meer dan 30 ml verf te weinig bevat.

Een liter verf weegt 2 kg.
c. Bereken hoeveel procent van de blikken minder dan 1980 gram verf bevat.

Vuistregels

Voor de **normale verdeling** met gemiddelde μ en standaardafwijking σ gelden de vuistregels:

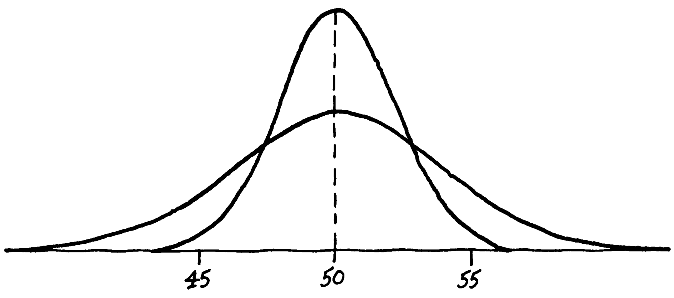
- 68 % ligt tussen $\mu-\sigma$ en $\mu+\sigma$,
- 95,5% ligt tussen $\mu-2\sigma$ en $\mu+2\sigma$.



8 Hoeveel procent ligt tussen $\mu-3\sigma$ en $\mu+3\sigma$?

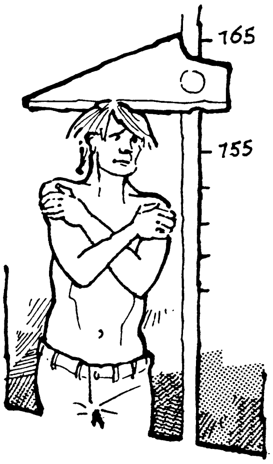
Met 2nd DISTR DRAW Shadenorm(kun je de oppervlakte onder een normale kromme berekenen:
Shadenorm(*linkergrens* , *rechtergrens* , μ , σ).

9 De twee normale krommen hieronder hebben beide gemiddelde $\mu = 50$. De standaardafwijkingen zijn verschillend.



Bepaal voor beide hoe groot de standaardafwijking ongeveer is.

10 Het gewicht van varkens in een bepaalde groep is normaal verdeeld met $\mu = 40$ kg en $\sigma = 8$ kg.
a. Bereken hoeveel procent van de varkens een gewicht heeft onder 30 kg.
b. Bereken hoeveel procent van de varkens een gewicht heeft boven 42 kg.
c. Bereken hoeveel procent van de varkens een gewicht heeft tussen 30 en 50 kg.

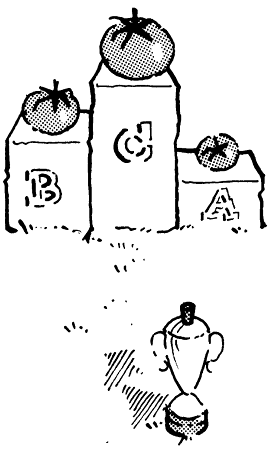


11 In 1986 werd van 103.370 dienstplichtige 18-jarigen de lengte opgemeten. Hun gemiddelde lengte bleek 181,8 cm te zijn en de standaardafwijking 7 cm.
We willen weten hoeveel jongens 190 cm of langer zijn.
a. Schets een normale kromme en geef daarbij de gegevens en het gevraagde aan.
b. Bereken met de normale verdeling hoeveel van de jongens naar verwachting 190 cm of langer waren.

Jongens die langer waren dan 200 cm of korter dan 160 cm werden op grond van hun lengte afgekeurd.
c. Teken weer een bijpassend plaatje.
Bereken met de normale verdeling hoeveel jongens er in 1986 op grond van hun lengte werden afgekeurd.

12 Een tomatenkweker heeft geoogst. De vruchten variëren in grootte en gewicht. Het gewicht is normaal verdeeld met $\mu = 90$ gram en $\sigma = 15$ gram. In totaal zijn 60.000 tomaten geoogst. De oogst wordt op gewicht gesorteerd.
De drie gewichtsklassen zijn:
- klasse A: tot 70 gram,
- klasse B: van 70 tot 100 gram,
- klasse C: meer dan 100 gram.

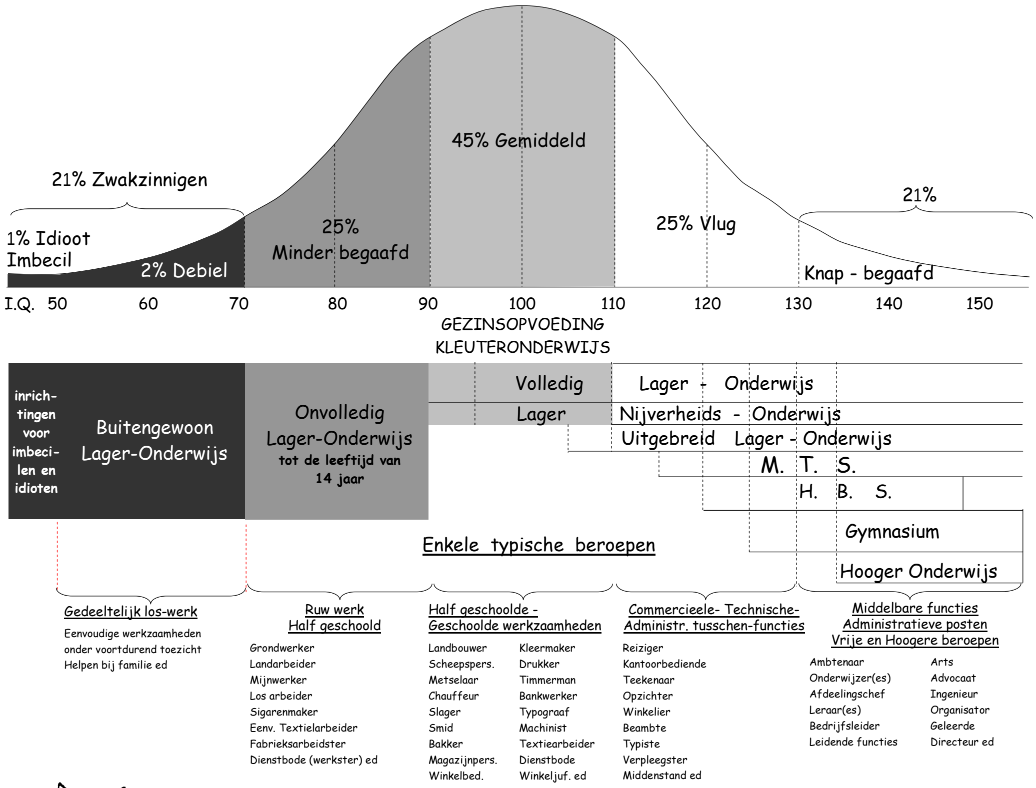
a. Hoeveel procent van de oogst komt in elk van de klassen terecht ?

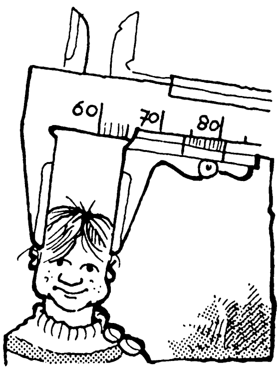


De opbrengst van een tomaat hangt af van zijn gewichtsklasse:
- klasse A: 20 cent,
- klasse B: 25 cent,
- klasse C: 30 cent.

b. Welke opbrengst mag de kweker voor zijn hele oogst verwachten ?

13 Intelligentie is een van de factoren die een rol spelen bij het met succes volgen van een schoolopleiding. In 1938 gebruikte een onderwijskundige onderstaande grafiek, waarin de mate van intelligentie (uitgedrukt in IQ) werd gekoppeld aan soorten opleidingen en mogelijke beroepen.





Het IQ van leerlingen is normaal verdeeld met $\mu = 100$.

a. Bepaal uit het plaatje hoe groot σ ongeveer is.

b. Bereken hoeveel procent van de bevolking in 1938 in staat werd geacht om ten minste de MTS als opleiding te volgen.

c. Bereken hoeveel procent in aanmerking kwam voor de HBS, maar niet voor het Gymnasium.

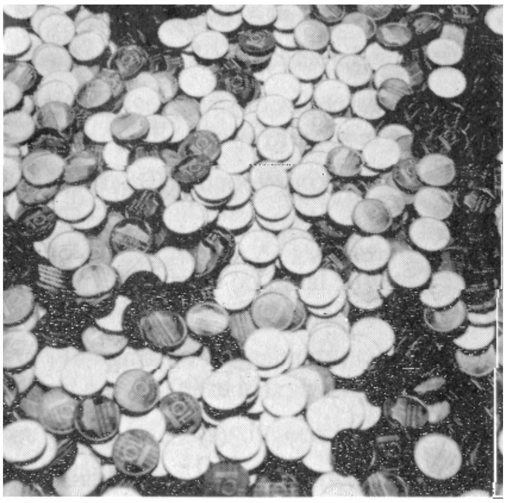
14 Twee fabrikanten brengen voor dezelfde prijs eenzelfde type lamp op de markt. Het aantal branduren is voor beide merken normaal verdeeld. Merk A heeft een gemiddelde van 1250 uur en een standaardafwijking van 300 uur. Merk B heeft een gemiddelde van 1200 uur en een standaardafwijking van 250 uur.

Je wilt een lamp kopen die minstens 1000 uur moet branden.

Welk merk heeft jouw voorkeur ?

15 Alle Nederlandse munten werden in Utrecht geslagen bij 's Rijks Munt. De afmetingen en gewichten waren aan zeer strikte regels gebonden.

Muntsoort	metaal	middellijn in mm	gewicht in gr	tolerantie in duizensten
vijftigguldenmunt	zilver	38,0	25,0	5
tienguldenmunt	zilver	38,0	25,0	3
vijfguldenmunt	verbronsd nikkel	23,5	9,25	27
rijksdaalder	nikkel	29,0	10,0	15
gulden	nikkel	25,0	6,0	15
kwartje	nikkel	19,0	3,0	15
dubbeltje	nikkel	15,0	1,5	15
stuiver	brons	21,0	3,5	15



Container met 400.000 nieuw geslagen dubbeltjes (foto 's Rijks Munt)

Het gewicht van een nieuw geslagen gulden is normaal verdeeld met $\mu = 6000$ mg en $\sigma = 6$ mg. Munten die meer dan 15 mg afwijken van het vereiste gewicht mogen niet in omloop worden gebracht.

a. Waarom gelden zulke strikte eisen voor het toegestane gewicht ?

b. Bereken welk percentage van de nieuw geslagen guldens niet in omloop zal worden gebracht.

c. Per jaar zijn er 25 miljoen nieuwe guldens nodig. Hoeveel moeten er geslagen worden om aan die vraag te kunnen voldoen ?

16 We gaan terug naar de vulmachine die pakken vult met

10 De standaard normale tabel

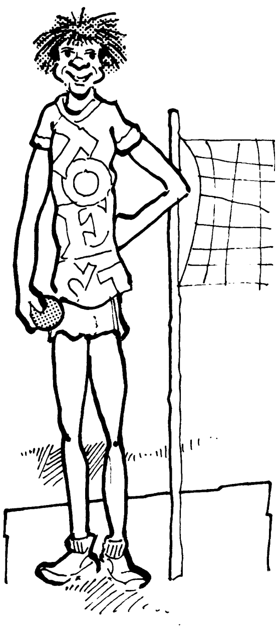
1 **a.** Gemiddeld bedraagt de temperatuur in De Bilt in de maand juli 16,6 °C. In 1983 was de gemiddelde juli-temperatuur in De Bilt 20,1 °C.
Is dat uitzonderlijk hoog ? Wat denk jij ?
b. Anneke simuleert op de computer het gooien met een dobbelsteen. De computer "gooit" 1000 keer met een dobbelsteen. Ze verwacht ongeveer 167 keer zes ogen te krijgen, met een standaardafwijking van 12. Bij de simulatie krijgt ze maar 150 keer zes ogen.
Is dit uitzonderlijk weinig ? Wat vind jij ?
c. De consumentenbond controleert een kilopak suiker. Gemiddeld behoren de pakken 1000 gram te bevatten. Het gecontroleerde pak bleek 982 gram te bevatten. Vind jij dit uitzonderlijk ?

Vaak is het lastig om, zo op het oog, te beoordelen of een waarneming uitzonderlijk is. Daarom gebruiken we een methode. De volgende:
Bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking. Kijk hoeveel keer de SD de waarneming afwijkt van het gemiddelde. Hoe hoger dit aantal keer, des te uitzonderlijker is de waarneming.

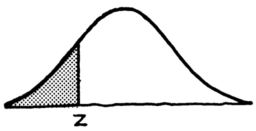
2 **a.** De juli-temperatuur (in °C) in De Bilt is normaal verdeeld met gemiddelde 16,6 en standaardafwijking 1,4. In 1983 was de gemiddelde juli-temperatuur in De Bilt 20,1 °C.
Hoeveel keer de SD wijkt deze waarneming af van het gemiddelde ?
Is de juli-temperatuur van 1983 uitzonderlijk, vind jij ?
b. De consumentenbond controleert een kilopak suiker. Het gewicht van een pak is gemiddeld 1000 gram, met een standaardafwijking van 10 gram. Het gecontroleerde pak bleek 982 gram te bevatten.
Hoeveel keer de SD wijkt deze waarneming af van het gemiddelde ?
Is een pak met 982 gram uitzonderlijk, vind jij ?

Het aantal keer de standaardafwijking dat een waarneming afwijkt van het gemiddelde, heet de z-waarde.

$$\textbf{z-waarde} = \frac{\text{waarneming} - \text{gemiddelde}}{\text{SD}}$$

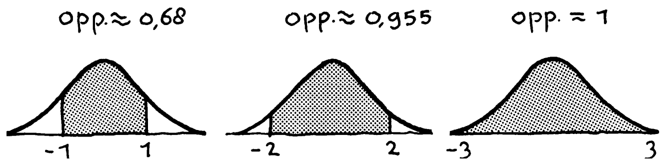


3 We bekijken de lengten in twee groepen: 16-jarige jongens en 16-jarige meisjes. Bij de jongens is de gemiddelde lengte 176 cm en de standaardafwijking 12 cm. Bij de meisjes is de gemiddelde lengte 164 cm en de standaardafwijking 10 cm.
Een jongen en een meisje uit deze groepen krijgen verkering. Ze zijn beiden erg lang: de jongen 196 en het meisje 186.
a. Bereken de z-waarde van de lengte van de jongen en van de lengte van het meisje om te bepalen wie van de twee de grootste uitschieter is qua lengte binnen zijn/haar groep.
b. Hoe lang is een meisje dat een z-waarde heeft van 0 ?
c. Hoe lang is een meisje dat een z-waarde heeft van -1,6 ?



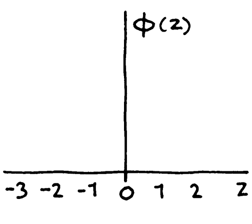
We kijken nu naar de oppervlakte onder de standaardnormale kromme die links van een aangegeven punt z ligt. De grijze oppervlakte noemen we $\Phi(z)$, spreek uit: *fie-zet.*

4 De standaard normale tabel
In het volgende plaatje zie je nog eens de vuistregels:



a. Maak hiermee een tabel voor $\Phi(z)$:

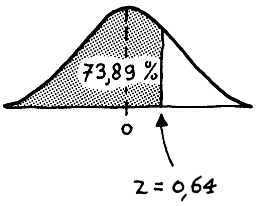
z-waarde	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\Phi(z)$	0						



b. Maak een grafiek van Φ op grond van de tabel.

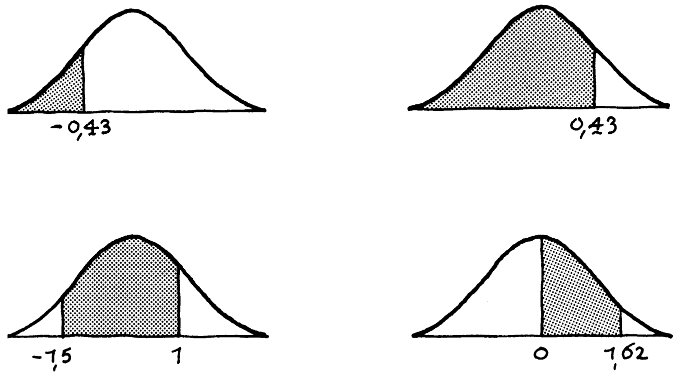
Een fijnere tabel staat op bladzijde 153 en 154. Een stukje daarvan is hieronder afgebeeld:

z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0,0..	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1..	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2..	0,5793	0,5382	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3..	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4..	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5..	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6..	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	**0,7389**	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7..	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8..	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9..	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

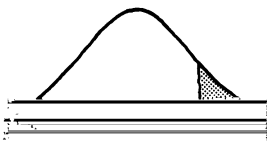


In de eerste kolom staan de z-waarden tot in één decimaal nauwkeurig. Achter $z = 0,6$ staan 10 getallen. Dat zijn de oppervlaktegetallen $\Phi(z)$ die horen bij achtereenvolgens $z = 0,60$, $z = 0,61$, $z = 0,62$, ... , $z = 0,69$.
Voorbeeld: $\Phi(0,64) = 0,7389$, zie het kader in de tabel.
De oppervlaktegetallen zijn niet in procenten, maar als getallen van 0,0000 tot 1,0000. Het getal 0,7389 kan dus ook gelezen worden als 73,89%.
De betekenis van $\Phi(0,64) = 0,7389$ wordt in het plaatje hiernaast nog eens gegeven .

5 Bepaal met de tabel op bladzijde 153 en 154 de oppervlakte van de grijze stukken.



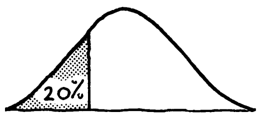
6 Onder de standaardnormale kromme is hiernaast een oppervlakte aangegeven. Deze oppervlakte kan op twee manieren bepaald worden .
Op welke manieren ?

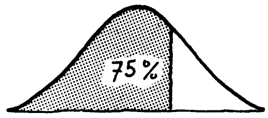


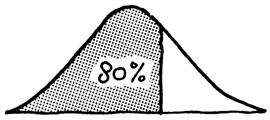
De tabel kan dus gebruikt worden om bij gegeven z-waarde de oppervlakte $\Phi(z)$ op te zoeken. Omgekeerd kan bij een gegeven oppervlakte de bijbehorende z-waarde gevonden worden.
Voorbeeld: voor de gevraagde z hiernaast moet gelden : $\Phi(z) = 0{,}60$. De z-waarde die daar het dichtst in de buurt komt, is $z = 0{,}25$.

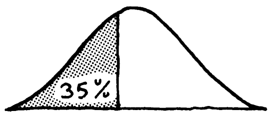
7 Controleer dit in de tabel.

8 Welke z-waarden passen het best bij de volgende oppervlakten ?

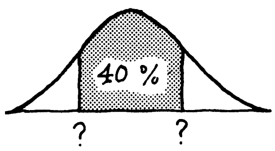


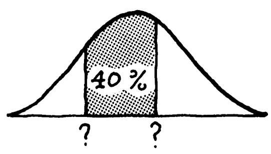






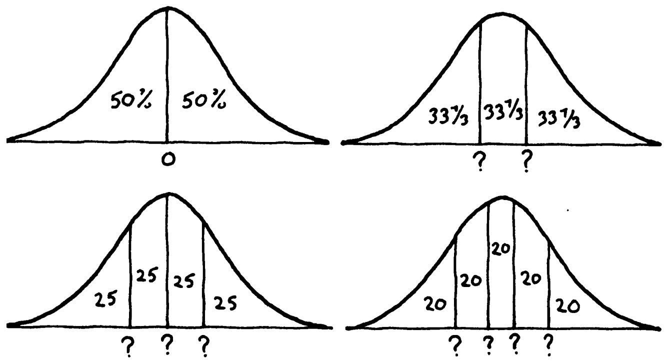
✂ **9** Bij oppervlakten tussen twee z-waarden lukt het terugzoeken meestal niet.
Twee situaties:





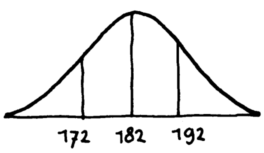
In het linkerplaatje liggen de linker- en rechtergrens even ver van het midden. Bij het rechter plaatje is dat niet zo.
a. Bepaal de z-waarden in het linker plaatje.
b. Kun je de z-waarden ook in het rechter plaatje bepalen ?

✂ **10** De lijn bij $z = 0$ deelt het gebied onder de normale kromme in twee symmetrische helften, elk met oppervlakte 50%.



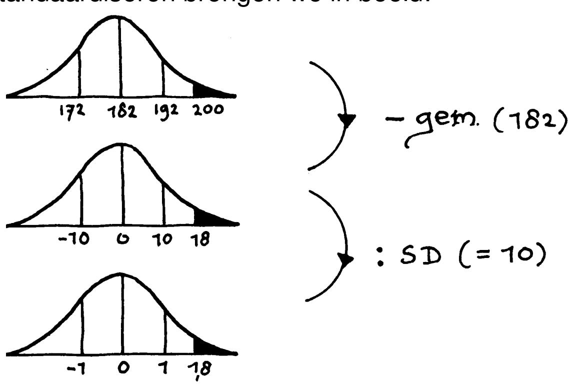
Bepaal de z-waarden die de oppervlakte verdelen in drie gelijke stukken.
Ook de z-waarden die de oppervlakte verdelen in vier gelijke stukken en in vijf gelijke stukken.

We hebben een tabel voor de normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1. Als de verdeling niet standaardnormaal is, kunnen we deze herleiden tot de standaardnormale verdeling. Dit noemen we ***standaardiseren****. Dat doen we door de z-waarden te berekenen en daarna de tabel te gebruiken.*



11 De lengte van 18-jarige jongens is normaal verdeeld met gemiddelde 182 cm en standaardafwijking 10 cm. We willen weten hoeveel procent langer is dan 192 cm.
a. Wat is de z-waarde van een lengte van 192 cm ?
b. Leg uit dat het deel dat langer is dan 192 cm gelijk is aan $1 - \Phi(1)$.
Hoe groot is dat percentage dat langer is dan 192 cm ?

Je hebt een vraag over de normale verdeling met gemiddelde 182 en standaardafwijking 10 teruggebracht naar een vraag over de standaard normale verdeling. Dat standaardiseren brengen we in beeld:



Je ziet drie keer hetzelfde plaatje, alleen met verschillende schaalverdeling op de horizontale as.

- Het eerste plaatje betreft de echte lengtes (in cm).
- Het tweede plaatje geeft de afwijkingen van het gemiddelde.
- Het derde plaatje geeft de z-waarden.

De bijbehorende twee rekenstappen zijn naast de plaatjes geschreven. Wat verandert er bij die rekenstappen aan het gemiddelde en de standaardafwijking ?

	gemiddelde	SD	
lengte (cm)	182	10	← *min 182*
afwijkingen van gem.	0	10	
z-waarde	0	1	← *deel door 10*

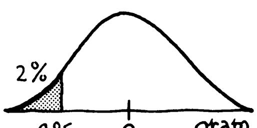
Als je 182 van de lengtes aftrekt, wordt het nieuwe gemiddelde 0; de standaardafwijking blijft onveranderd 10. Als je dan door 10 deelt, blijft het gemiddelde 0, maar wordt de standaardafwijking 10 keer zo klein, dus 1.

Bij andere voorbeelden gaat dat natuurlijk precies hetzelfde.

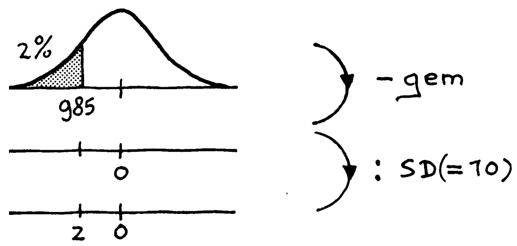
> De z-waarden van een normaal verdeelde stochast zijn standaard normaal verdeeld.

12 De lengte van de meisjes in een zekere groep is normaal verdeeld met $\mu = 170$ cm en $\sigma = 8$ cm.
Hoeveel procent van de groep heeft een lengte tussen 160 en 180 cm ? Gebruik eerst alleen maar de tabel en controleer je antwoord daarna met de GR.

13 De vulmachine



Aan het einde van paragraaf 2 hebben we een probleem laten liggen:
Op welk gemiddelde gewicht moet de machine worden afgesteld opdat aan de EU-richtlijn wordt voldaan dat slechts 2% van de pakken een gewicht heeft onder de 985 gram (σ = 10 gram) ?
Zie plaatje.
Los dit probleem op door te standaardiseren.



14 Uit een onderzoek bleek dat de scores van leerlingen bij het CSE wiskunde A havo bij benadering normaal verdeeld zijn. In 1991 was het gemiddelde 62 punten en 28% van de leerlingen hadden een onvoldoende (54 punten of minder).
a. Bereken de standaardafwijking.
b. Bereken hoeveel punten je moet hebben om bij de 20% besten te horen.

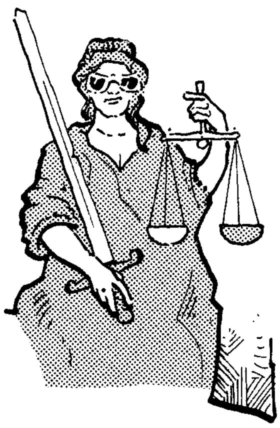
15 Veronderstel dat de puntenaantallen bij het CSE van een bepaald vak bij benadering normaal verdeeld zijn en dat we weten dat de standaardafwijking 12 is. Het percentage onvoldoende (54 punten of minder) is 10%.
Bereken het gemiddelde puntenaantal.

16 Bij vraagstukken rond de normale verdeling draait alles om drie grootheden: het gemiddelde μ, de standaardafwijking σ en een percentage (oppervlakte onder de normale kromme). De drie grootheden zijn gekoppeld: als er twee bekend zijn, kun je de derde uitrekenen. In principe zijn er dus drie verschillende soorten vragen mogelijk. Van elk soort volgt nu een voorbeeld.

a. μ en σ zijn bekend
Auto's worden op de lopende band in elkaar gezet. Een robot heeft voor het monteren van een wiel gemiddeld 96 seconden nodig met een standaardafwijking van 5 seconden.
Er treedt vertraging op in de totale montagelijn als de robot meer dan 110 seconden nodig heeft.
Bereken in hoeveel procent van de gevallen er vertraging zal optreden.

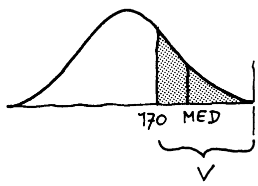
b. μ en percentage zijn bekend
Een robot heeft gemiddeld 80 seconden nodig voor het bevestigen van een bumper. In zo'n 20% van de gevallen is hij al na 77 seconden klaar.
Bereken hoe groot de standaardafwijking is.

c. σ en percentage zijn bekend
De robot die de deuren inzet, heeft daarvoor in 8 op de 1000 gevallen meer dan 105 seconden nodig. De standaardafwijking voor de bewerking bedraagt 4 seconden. Bereken hoeveel seconden de robot gemiddeld doet over zijn karwei.



17 In de rechtzaal
In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen nieuwe personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm, De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen, omdat ze niet aan deze eis voldeden.
De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van de aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van Volksgezondheid.
Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = 160{,}4$ cm en standaardafwijking σ.
a. Toon aan dat $\sigma = 7{,}2$ cm.

De groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 noemen we V. De mediaan van de lengte van de vrouwen in V noemen we even MED.
b. Hoeveel procent van de vrouwen in V is langer dan MED ?



c. Toon aan dat MED = 172,6 cm (uitgaande van $\sigma = 7{,}2$ cm en $\mu = 160{,}4$ cm).

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91 sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselecte steekproef van 1000 vrouwen tussen 18 en 65 jaar werd bij 117 vrouwen een lengte gemeten van meer dan 172,6 cm.
Neem aan dat de standaardafwijking ongewijzigd is, dus $\sigma = 7{,}2$ cm.
d. Wat is de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek ?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen.

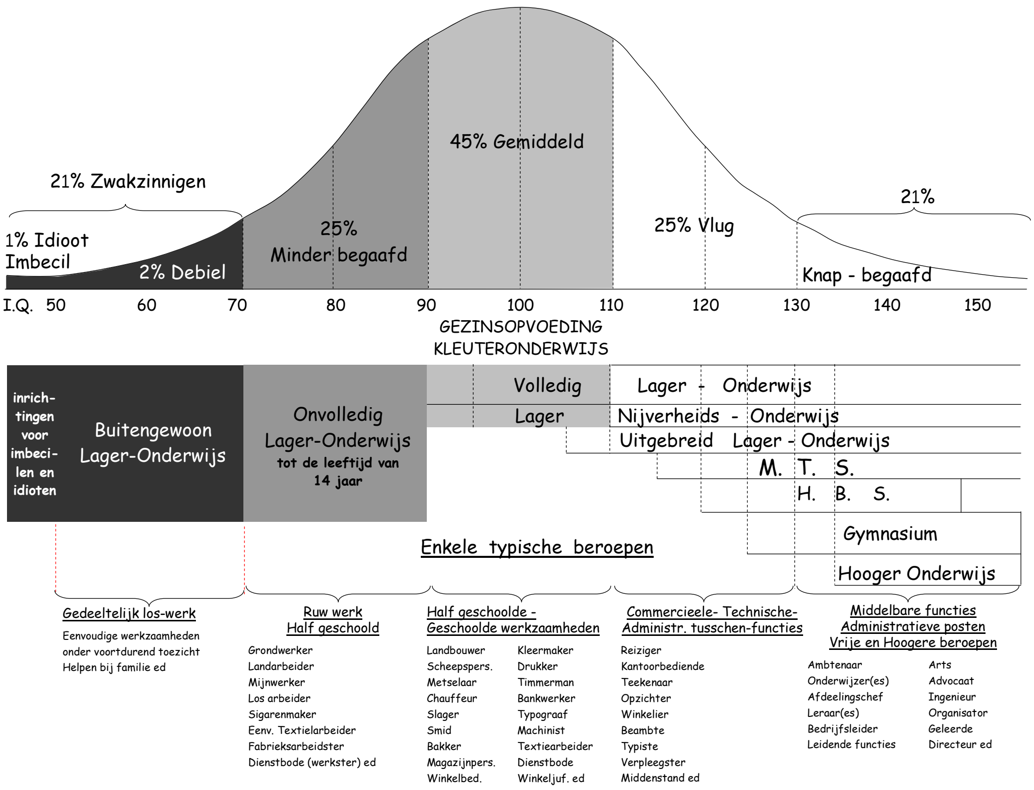
Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164{,}0$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

e. Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

Naar: Examen vwo wiskunde A 1990

✂ 18 Nogmaals IQ

Onderstaande gegevens hebben we al eerder ontmoet. Toen heb je de SD van de normale verdeling uit de grafiek afgelezen. Nu zijn we ook in staat deze te berekenen.



Het gemiddelde IQ is 100.

a. 271 % heeft een IQ kleiner dan 90.
Bereken uit dit gegeven de standaardafwijking.

b. 971 % heeft een IQ kleiner dan 130.
Bereken de standaardafwijking ook uit dit gegeven.

c. De antwoorden in **a** en **b** zijn niet hetzelfde.
Hoe kan dat nou ?

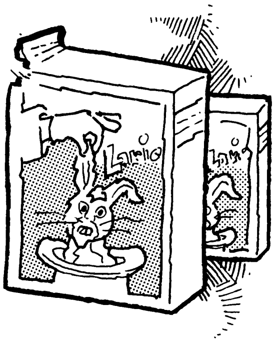
19 De EU-voorschriften betreffende vulgewichten zijn in Nederland vastgelegd in het zogenaamde Hoeveelheidsaanduidingenbesluit (de Warenwet). De bedoeling van deze normen is dat de consument niet onaangenaam verrast wordt door een artikel waar veel minder in zit dan er op de verpakking staat. De fabrikanten die zich aan deze normen houden, tonen dat door op de verpakking aan de inhoudsopgave de letter “e” toe te voegen.

In deze voorschriften worden de volgende begrippen gebruikt:

- nominale hoeveelheid: de hoeveelheid die op het pak vermeld staat (dus bijvoorbeeld 1 kg suiker),
- fout in minus: de hoeveelheid die de werkelijke inhoud kleiner is dan de nominale hoeveelheid.

Artikel 3 van de voorschriften zegt nu ongeveer het volgende:

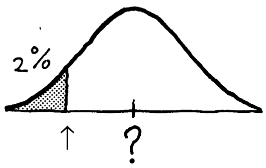
- de werkelijke hoeveelheid mag gemiddeld niet kleiner zijn dan de nominale hoeveelheid,
- bij een statistische controle (steekproef) mag hoogstens 2% van de pakken een hoeveelheid bevatten die een grotere fout heeft dan de toegelaten fout in minus (zie tabel).



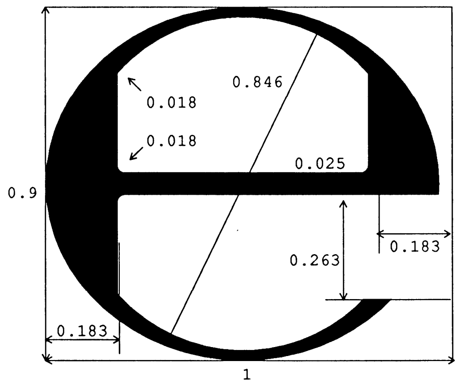
Nominale hoeveelheid Q_n van een e-verpakking in gram of in milliliter	toegelaten fout in minus	
	in % van Q_n	in gr. of ml.
van 5 tot 50	9	--
van 50 tot 100	--	4.5
van 100 tot 200	4.5	--
van 200 tot 300	--	9
van 300 tot 500	3	-
van 500 tot 1000	--	15
van 1000 tot 10000	1.5	--

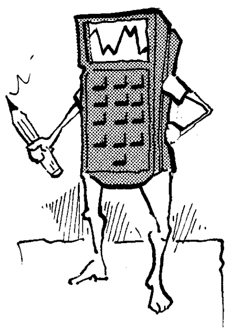
a. Lees af hoe groot de toegelaten fout in minus is van een 11 -literfles cola.
En van een blikje cola van 33 cl.

Pakken koffie worden machinaal gevuld door een machine die bij iedere ingestelde hoeveelheid een standaardafwijking heeft van 5 gram. We nemen aan dat de gemiddelde hoeveelheid koffie in de pakken gelijk is aan de ingestelde hoeveelheid. We bekijken de pondspakken (500 gram).
b. Bereken op welke hoeveelheid de machine moet worden ingesteld als aan beide eisen van artikel 3 voldaan moet worden.



Naast pondspakken zijn er ook nog halfpondspakken in de handel. Ook deze pakken moeten aan de EU-normen voldoen.
c. Onderzoek of de fabrikant bij halfpondspakken meer, minder of evenveel koffie verbruikt per nominaal gewicht van 1 kg vergeleken met pondspakken.





Op de GR

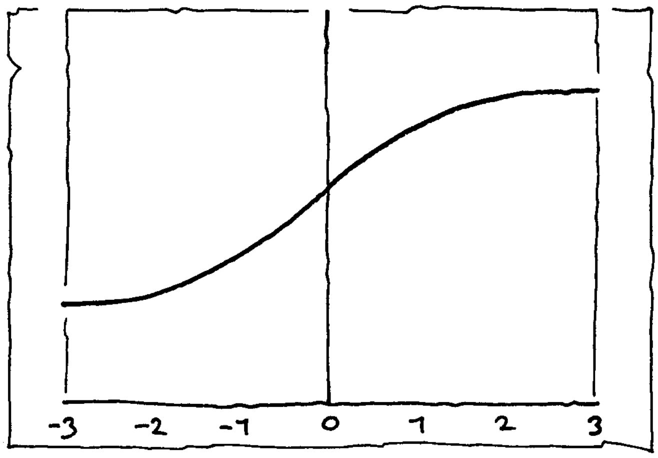
Het terugzoeken van de z-waarde bij een normale verdeling als het percentage gegeven is, kan ook zonder tabel: DISTR , 3:invNorm(.
Als bij een normale verdeling μ of σ gevraagd wordt, kan dat met behulp van MATH , 0:Solver.

Voorbeeld
Opgave **14b**: $\mu = 62$, $\sigma = 13.79$, gevraagd de grens waarboven de beste 20% zit.
invNorm(0.8,62,13.79) geeft 73.6059... punten.

Voorbeeld
Opgave **16b**: $\mu = 89$, 20% is kleiner dan 77 , gevraagd σ.
MATH , 0:Solver , eqn: 0 = normalcdf(0,77,89,X) − 0.2 geeft X = 14,258... (dat is σ).

11 Wel of niet normaal ?

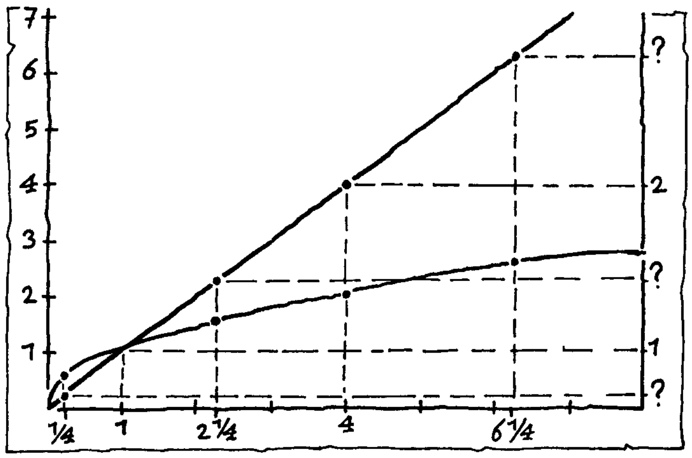
1 Zoals gezegd is Φ(z) de oppervlakte onder de standaard-normale kromme, links van z. Hieronder staat de grafiek van Φ.



a. De grafiek heeft twee horizontale asymptoten.
Welke lijnen zijn dat ?
b. Het punt waarin de grafiek de y-as snijdt, kun je exact geven. Welk punt is dat ? Waarom ?

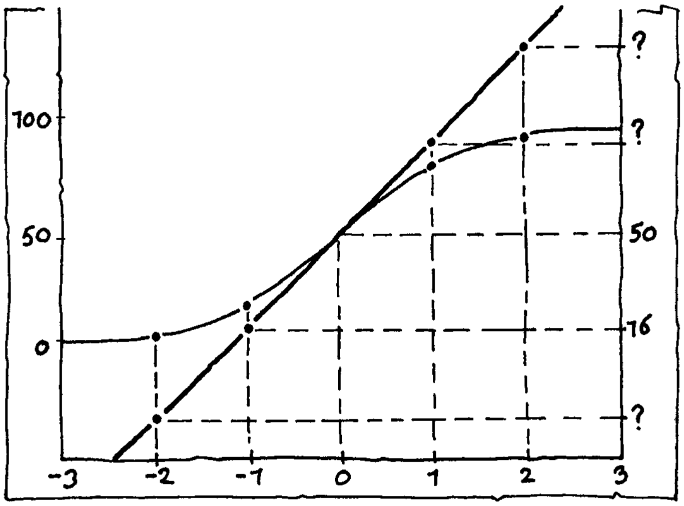
We gaan de schaal op de y-as zo aanpassen, dat de grafiek van Φ een rechte lijn wordt. Om goed te begrijpen hoe dat in zijn werk gaat, doen we iets dergelijks eerst bij een bekendere functie: $y = \sqrt{x}$.

2 We gaan de grafiek van de functie $y = \sqrt{x}$ "recht maken".

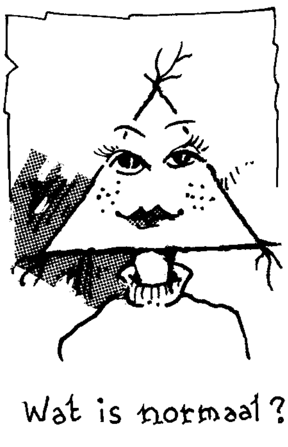


Hoe verder je naar rechts gaat, des te sterker moet de grafiek worden opgerekt. Daartoe passen we de schaal op de verticale as aan. Op de linker verticale as staat de gewone schaal, op de rechter verticale as staat de aangepaste schaal.
Wat zijn de drie getallen op de verticale as met het vraagteken ?

3 Na gaan we de grafiek van opgave **1** recht maken.
a. Welke stukken van de grafiek moeten het sterkst worden opgerekt ?

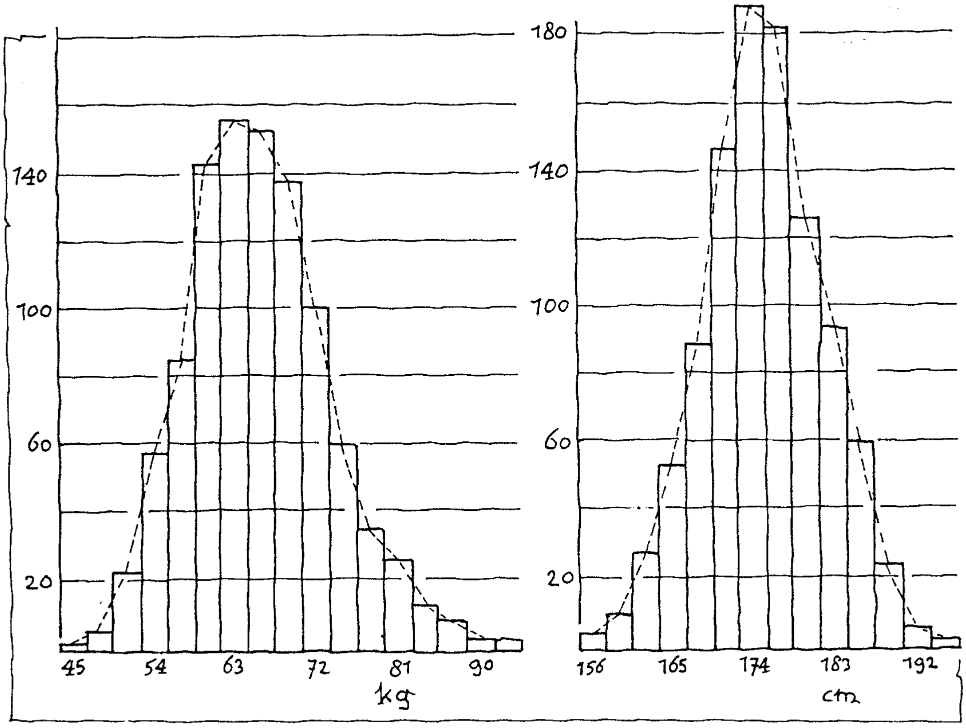


Op de linker verticale as staat de gewone schaal (procenten), rechts de aangepaste schaal.
b. Wat zijn de getallen bij de vraagtekens ? Denk aan de vuistregels.

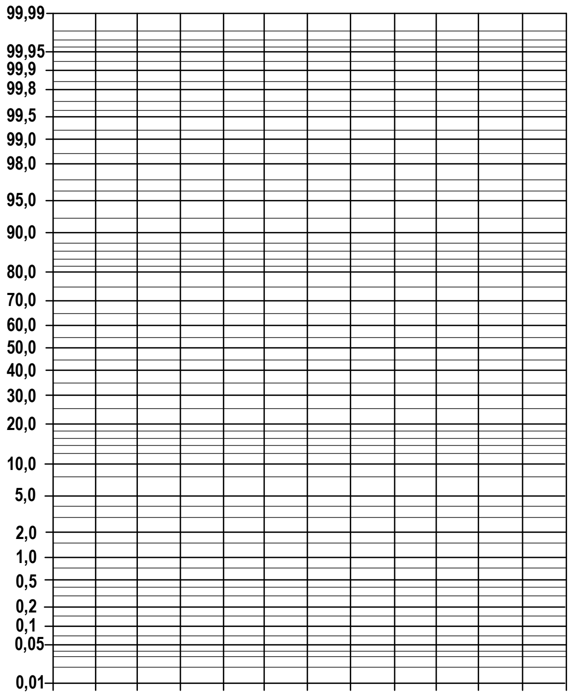


Op de volgende bladzijde staan de histogrammen van de lengte en het gewicht van duizend mannelijke studenten van de Harvard Universiteit. De verdelingen lijken in eerste instantie beide wel normaal. Maar de verdeling van het gewicht is wat minder symmetrisch. Dus is er (zeker bij het gewicht, maar misschien ook wel bij de lengte) reden om te twijfelen of de verdeling wel normaal is.

Op bladzijde 58 hebben we al gezien dat het moeilijk kan zijn om te beslissen of een verdeling normaal is. Er bestaat een hulpmiddel waarmee eenvoudig kan worden nagegaan of dat het geval is: **normaal waarschijnlijkheidspapier**. In opgave **3** heb je dat (in principe) zelf gemaakt.



Hieronder staat een vel normaal waarschijnlijkheidspapier. De getallen bij de verticale as zijn procenten.



Je werkt er als volgt mee:

- kies een geschikte schaal op de horizontale as (de z-as),
- als p% van de waarnemingen kleiner dan of gelijk aan z zijn, geef je dat aan met de stip (z,p); dus boven plaats z op de horizontale as zet je een stip op hoogte p%.

De schaalverdeling op de verticale as is zodanig dat bij een normale verdeling de stippen precies op een rechte lijn komen te liggen. Liggen de stippen (ongeveer) op een rechte lijn, dan is de verdeling (bij benadering) normaal; anders niet.

lengte ≤	cum. freq	
157,5	4	plus 10
160,5	14	plus 26
163,5	40	
166,5	91	
169,5	180	
172,5	326	
175,5	514	
178,5	695	
181,5	820	
184,5	912	
187,5	972	
190,5	994	
193,5	998	
196,5	999	
199,5	1000	

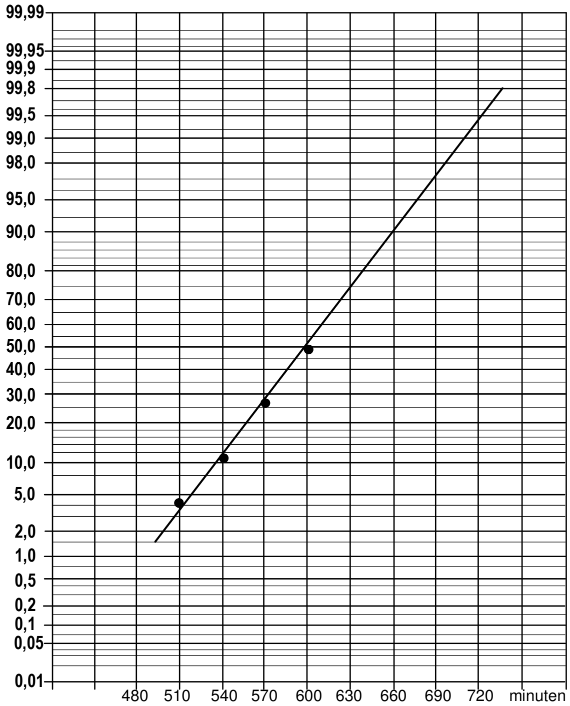
* **4** Bekijk het histogram van de lengte van de duizend Harvard studenten. De getallen onder de staven geven de klassemiddens aan. De klassegrenzen zijn dus: 154,5 , 157,5 , 160,5 , ...
Hiernaast staat een tabel van de cumulatieve frequenties.
a. Controleer de eerste drie cumulatieve frequenties met het histogram.
b. Teken op het werkblad de bijbehorende stippen op normaal waarschijnlijkheidspapier; kies eerst een geschikte schaal op de horizontale as.
c. Liggen de stippen ongeveer op een rechte lijn ? Trek die rechte lijn zo goed mogelijk.
Is de verdeling dus (bij benadering) normaal ?
d. Geef aan hoe je de gemiddelde lengte (= mediaan) met behulp van de grafiek kunt vinden. Zet μ bij deze gemiddelde lengte op de horizontale as.
e. Geef op de horizontale as ook de lengtes $\mu+2\sigma$ en $\mu-2\sigma$ aan. Gebruik de vuistregels.
f. Welke waarde voor σ vind je met behulp van **e** ?

gewicht ≤	cum. freq
46,5	1
49,5	6
52,5	28
55,5	86
58,5	170
61,5	312
64,5	466
67,5	618
70,5	756
73,5	856
76,5	916
79,5	950
82,5	975
85,5	987
88,5	994
91,5	996
97,5	998
100,5	998
103,5	998
106,5	1000

* **5** Bekijk het histogram van het gewicht van de duizend Harvard studenten. De getallen onder de staven geven de klassemiddens aan. De klassegrenzen zijn dus: 46,5 , 49,5 , ...
Hiernaast staat een tabel van de cumulatieve frequenties.
a. Teken op het werkblad de bijbehorende stippen op normaal waarschijnlijkheidspapier.
b. Liggen de stippen ongeveer op een rechte lijn ?
Is de verdeling dus (bij benadering) normaal ?

6 Batterijen

De research afdeling van een fabriek heeft een nieuw type batterij ontwikkeld, dat bijzonder geschikt is voor het aandrijven van speelgoedmotortjes. In de fabriek wordt de eerste dagen de productie nauwgezet gecontroleerd. Daarbij let men vooral op de levensduur van de batterijen bij aanhoudende belasting. Uit de totale productie van de eerste dag heeft men aselect 250 batterijen genomen en aan een duurproef onderworpen. Het aantal lege batterijen is geregistreerd na perioden van steeds 30 minuten. De ervaring leert dat de levensduur van de batterijen uit een dagproductie vrijwel normaal verdeeld is. Daarom zijn de resultaten van de duurproef op normaal waarschijnlijkheidspapier weergegeven.



a. Geef met behulp hiervan een schatting van het percentage batterijen van de gehele dagproductie waarvoor de levensduur tussen 8H uur en 11 uur lag. Licht je antwoord toe.

b. Geef met behulp van de grafiek een schatting van μ en van σ.

Neem aan dat op elke productiedag de levensduur van de die dag geproduceerde batterijen normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 50 minuten. Het gemiddelde μ in minuten is afhankelijk van een aantal factoren in het fabricageproces.

Omdat de fabrikant in reclameboodschappen beweert dat zijn batterijen erg lang meegaan, wil hij er voor zorgen dat hoogstens 7% van de batterijen uit een dagproductie een levensduur heeft van minder dan 81 uur.
c. Bereken in minuten nauwkeurig de kleinste waarde van μ waarvoor dit nog het geval is.

De controleur merkt dat bij het wisselen van een serie batterijen per ongeluk twee nieuwe batterijen bij een groepje van tien lege terecht zijn gekomen. Omdat aan de buitenkant niet zichtbaar is welke de nieuwe zijn, zit er niets anders op dan de batterijen een voor een door te meten totdat de twee nieuwe zijn teruggevonden.
d. Bereken de kans dat hij in totaal vier van de twaalf batterijen moet doormeten.

Examen wiskunde A, 1994 eerste tijdvak gedeeltelijk

* 7 Zwangerschap

Medische gegevens wijzen uit dat de duur van een zwangerschap bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 266 dagen en een standaardafwijking van 16 dagen.
a. Onderzoek of meer dan 1% van de zwangerschappen een duur heeft van 310 of meer dagen.

Aan de hand van de aantekeningen van een Amerikaanse verloskundige is het volgende overzicht opgesteld voor de duur van de zwangerschap in weken van 1415 pasgeborenen.

duur	≤30	31/32	33/34	35/36	37/38	39/40	≥41
aantal	13	18	54	245	668	362	55

b. Onderzoek met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier of de duur van de zwangerschappen van de 1415 pasgeborenen bij benadering normaal verdeeld genoemd mag worden. Licht je antwoord toe.
c. Wat is de mediaan van de duur van de zwangerschappen, in tienden van weken nauwkeurig ?

Naar het examen vwo wiskunde A 1993 eerste tijdvak

Opmerking

Tot de klasse "≤30" behoren alle zwangerschappen die hoogstens 30,5 weken duurden. Tot de klasse "31/32" behoren alle zwangerschappen die tussen 30,5 en 32,5 weken duurden. Er zijn dus 13 zwangerschappen die 30,5 weken of minder duurden; dat is 0,91%. Dat geeft een stip op hoogte 0,91 bij 30,5. Evenzo komen de volgende stippen bij 32,5 , 34,5 , 36,5 , 38,5 en 40,5.

12 De centrale limietstelling

In de paragrafen 4 en 7 heb je gezien:

Als de stochast X de waarden x_1, x_2, ..., x_n kan aannemen met de kansen p_1, p_2, ... , p_n, dan is:

- de verwachtingswaarde van X = E(X) = $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k$,
- de variantie van X = Var(X) = $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - EX)^2$,
- de standaardafwijking van X = Sd(X) = $\sqrt{Var(X)}$.

Voor verwachtingswaarde en variantie gelden de volgende rekenregels (zonder bewijs):

Somregel voor de verwachtingswaarde
Voor elk tweetal stochasten X en Y geldt:
E(X+Y) = E(X) + E(Y).

In woorden: de verwachtingswaarde van de som is de som van de verwachtingswaarden.

Somregel voor de variantie
Voor elk tweetal *onafhankelijke* stochasten X en Y geldt: Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).

In woorden: de variantie van de som is de som van de varianties, mits de stochasten onafhankelijk zijn.

De somregels gelden ook voor drie of meer stochas-

* **1** X is het aantal keren kop bij negen worpen met een munt.
$X_i = 1$ als de i^e worp kop is,
$X_i = 0$ als de i^e worp munt is.
Merk op: $X = X_1 + X_2 + ... + X_9$.
a. Bereken $E(X_i)$, $Var(X_i)$ en $Sd(X_i)$.
b. Bereken ook E(X), Var(X) en Sd(X).
c. Bereken de cumulatieve kansen $P(X \leq i)$, dus $P(X \leq 0)$, $P(X \leq 1)$, $P(X \leq 2)$, ... en zet deze uit op normaal waarschijnlijkheidspapier.
Is X bij benadering normaal verdeeld ?

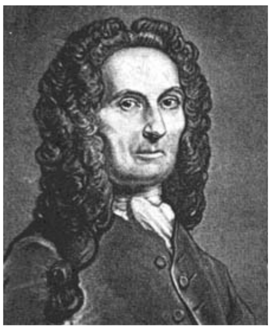
* **2** Y is het aantal keren zes bij negen worpen met een dobbelsteen.
$Y_i = 1$ als de i^e worp zes is,
$Y_i = 0$ als de i^e worp geen zes is.

Merk op: $Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_9$.
a. Bereken $E(Y_i)$, $Var(Y_i)$ en $Sd(Y_i)$.
b. Bereken ook E(Y), Var(Y) en Sd(Y).
c. Bereken de cumulatieve kansen $P(Y \leq i)$ en zet deze uit op normaal waarschijnlijkheidspapier.
Is X bij benadering normaal verdeeld ?

Als X binomiaal verdeeld is met parameters p en n (p is de kans op succes bij elk van de n onafhankelijke proeven), dan geldt:
$E(X) = n{\cdot}p$, $Var(X) = np(1-p)$, $Sd(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

3 **a.** Controleer deze formules bij de opgaven **1** en **2**.
b. Bewijs deze formules.

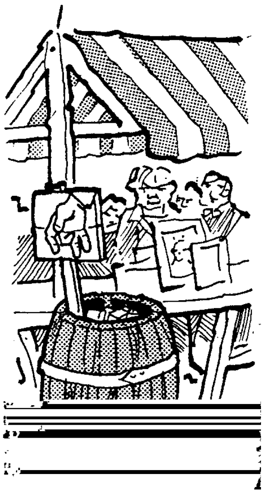
4 Uit een groep 17-jarigen worden telkens een jongen en een meisje gekozen. Van beiden wordt de lengte gemeten en wordt het lengteverschil L genoteerd.
Laat X de lengte van de jongen en Y de lengte van het meisje zijn (beide in cm). Neem aan dat X en Y normaal verdeeld zijn met E(X) = 180 cm, E(Y) = 168 cm en Sd(X) = Sd(Y) = 6 cm.
Dan is ook het lengteverschil $L = X - Y$ normaal verdeeld.
a. Hoe groot is E(L) ?
b. Bewijs dat Var(L) = 72.
Tip. $Var(L) = Var(X + -1 \cdot Y) = Var(X) + Var(-1 \cdot Y)$ en $Var(-1 \cdot Y) = Var(Y)$.
c. Hoe groot is de kans dat een gekozen jongen meer dan 10 cm groter is dan het tegelijk met hem gekozen meisje ? Schrijf deze kans eerst met behulp van de sochast L.
d. Hoe groot is de kans dat het meisje groter is dan de jongen ?
e. Hoe groot is de kans dat na tien keer kiezen minstens één keer het meisje groter is dan de jongen ?

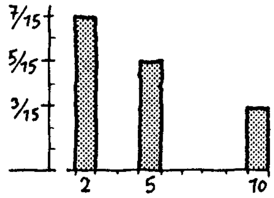

Abraham de Moivre
1667 - 1754

Dat binomiaal verdeelde stochasten goed benaderd kunnen worden met normaal verdeelde stochasten werd omstreeks 1720 ontdekt door De Moivre.
Latere onderzoekers toonden aan dat wat De Moivre ontdekt had een bijzonder geval was van het volgende.

Als je een zeker kansexperiment uitvoert, krijg je een uitkomst. Als je voortdurend, onafhankelijk van elkaar, ditzelfde experiment herhaalt en je telt de uitkomsten op, dan gaat de verdeling van de som steeds meer op een normale verdeling lijken, naarmate het aantal herhalingen toeneemt.

Dit resultaat staat bekend als **de centrale limietstelling**. Het bewijs ervan is moeilijk; wij zullen deze stelling dan ook alleen maar met een voorbeeld toelichten. Gelukkig is de toepassing van deze stelling eenvoudig.





5 Grabbelton

"Altijd prijs in de supergrabbelton" staat er bij een kraampje op de braderie. Tussen het zaagsel in de ton zijn tien plankjes verborgen: op zeven plankjes staat "2", op twee plankjes staat "5" en op één plankje staat "10". Na een inzet mag je twee plankjes grabbelen. Het hoogste getal dat op deze plankjes staat, is de uitbetaling X in euro's.

a. Ga na: $P(X = 5) = 2$.
b. Geef in een tabel de kansverdeling van X.
c. Bereken E(X) en Var(X).

Hiernaast is het histogram getekend van de uitbetaling bij één keer spelen in de grabbelton met de tien plankjes. Je ziet dat het histogram er niet normaal verdeeld uitziet, integendeel! Maar volgens de centrale limietstelling moet het histogram dat hoort bij vijftig keer spelen goed benaderd kunnen worden met een normale kromme.

d. Tussen welke twee bedragen ligt de totale uitbetaling bij vijftig keer spelen ?
e. Hoe groot is de kans op de laagst mogelijke en hoe groot is de kans op de hoogst mogelijke uitbetaling ?

* **6** In de tabel hieronder zie je het resultaat van 400 computersimulaties van vijftig keer spelen in de grabbelton. De uitbetalingen bij deze 400 simulaties zijn verdeeld in klassen met klassebreedte 10.
Achter elke klasse staat de daarbij behorende frequentie. In de tabel zijn de klassen met frequentie 0 niet opgenomen.

klasse	aantal	cumulatief	klasse	aantal	cumulatief
171 -180	2	2	231 -240	72	277
181 -190	7	9	241 -250	58	335
191 -200	25	34	251 -260	33	368
201 -210	43	77	261 -270	20	388
211 -220	63	134	271 -280	10	398
221 -230	71	205	281 -290	1	400

a. Wat zijn de klassengrenzen ?
b. Geef deze cumulatieve verdeling weer op normaal waarschijnlijkheidspapier en ga na dat de punten ongeveer op een rechte lijn liggen.
c. Geef in de grafiek aan hoe groot de mediaan en hoe groot de standaardafwijking is.

d. Geef in de grafiek ook aan hoe je de kans kunt aflezen op een uitbetaling tussen 224 en 255 (grenzen inbegrepen) en benader die kans met behulp van de grafiek.

7 T is de totale uitbetaling bij vijftig keer spelen in de grabbelton: $T = T_1 + T_2 + ... + T_{50}$, waarbij T_i de uitbetaling is bij de i^e keer spelen.
a. Bereken E(T) en Var(T) (gebruik opgave **5c**).
Ga na of de waarden die je met behulp van de grafiek vond in opgave **6** hiermee in overeenstemming zijn.
b. Benader met de GR: $P(224 \le T \le 255)$.
Klopt het antwoord ongeveer met het antwoord op **6d** ?

8 Drie echtparen Arno en Anneke, Bob en Bea en Cor en Crissy hebben een dansclubje. Elke dinsdagavond gaan ze dansen. Wie met wie danst, wordt elke dinsdag opnieuw door het lot bepaald.
X is het aantal mannen dat zijn eigen vrouw treft.
a. Ga na dat per dinsdag de volgende kansen gelden: $P(X=0) = 2$, $P(X=1) = 1$ en $P(X=3) = 5$.
b. Bereken E(X) en Sd(X).

Vandaag viert het dansclubje haar eerste lustrum: de afgelopen vijf jaar hebben ze geen dinsdagavond overgeslagen. S is het aantal keer dat in de vijf jaar een man zijn eigen vrouw trof. S is bij benadering normaal verdeeld.
c. Bereken E(S) en Sd(S).
d. Bereken met deze normale benadering de kans dat niet meer dan 250 keer een man zijn eigen vrouw trof.

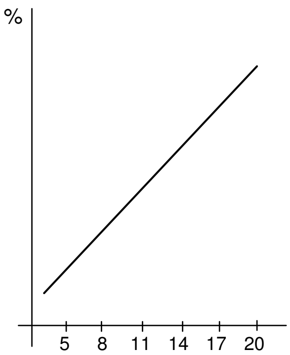
De $\sqrt{n}$ -wet

Laat $X_1, ..., X_n$ n onafhankelijke stochasten zijn, alle met dezelfde standaardafwijking σ.
Dan is de standaardafwijking van de som $X_1 + ... + X_n$ gelijk aan $\sqrt{n} \cdot \sigma$.

De standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast is hier een bijzonder geval van.

Deze wet berust op de somregel voor de variantie; zie bladzijde 82.

Overzichtsvragen



1 X is normaal verdeeld met gemiddelde 11 en standaardafwijking 3. Hiernaast staat de grafiek van de cumulatieve verdeling van X op normaal waarschijnlijkheidspapier.
Geef op de verticale as de volgende percentages aan: 50% , 16% , 84% , 2,3% en 97,7%.

2 44% van de volwassen mannen heeft schoenmaat van 42 of kleiner, 23% heeft schoenmaat 43 en 15% heeft schoenmaat 44. Deze gegevens geven bepalen drie stippen op normaal waarschijnlijkheidspapier.
Zeg waar die stippen precies komen te staan.

3 X en Y zijn twee onafhankelijke stochasten, met standaardafwijking 3, respectievelijk 4.
a. Wat is de standaardafwijking van $X + Y$?

X_1 , ... , X_{64} zijn vierenzestig onafhankelijke stochasten, elk met standaardafwijking 3.
b. Wat is de standaardafwijking van de som $X_1 + ... + X_{64}$?

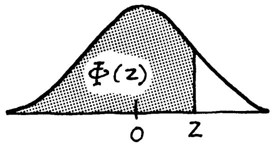
4 De uitkomst X van een experiment kan twee waarden aannemen: waarde 5 met kans 2 en waarde 8 met kans B. Het experiment wordt 100 keer herhaald; de herhalingen zijn onafhankelijk van elkaar. S is de som van de honderd uitkomsten.
Omdat het aantal herhalingen groot is, is S bij benadering normaal verdeeld.
a. Met welk gemiddelde en welke standaardafwijking ?
b. Bereken de kans dat $S > 697$.

De standaardnormale tabel

$\Phi(z)$ voor negatieve waarden van z

z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
-0,0..	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1..	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2..	0,4207	0,4618	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3..	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4..	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5..	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6.-	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7..	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8..	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9..	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0..	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1432	0,1401	0,1379
-1,1..	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2..	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3..	0,0968	0,9951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4..	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5..	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6..	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7..	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8..	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0303	0,0301	0,0294
-1,9..	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0..	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1..	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2..	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3..	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4..	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5..	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6..	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7..	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8..	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9..	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0..	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-3,1..	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,2..	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3..	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4..	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5..	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6..	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7..	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8..	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9..	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Φ(z) voor positieve waarden van z



z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0,0..	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1..	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2..	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3..	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4..	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5..	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6..	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7..	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8..	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9..	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0..	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8568	0,8599	0,8621
1,1..	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2..	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3..	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4..	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5..	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6..	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7..	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8..	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9697	0,9699	0,9706
1,9..	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0..	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1..	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2..	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3..	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4..	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5..	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6..	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7..	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8..	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9..	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0..	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1..	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2..	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,3..	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4..	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5..	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6..	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7..	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8..	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9..	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Antwoorden

Paragraaf 8   De klokvorm

1 **a.** 30%
b. Tussen 27% en 33%.
c. Bij CDA; bij VVD; de grafiek is bij CDA het breedst en bij VVD het smalst.
d. Het gebied onder elk van de grafieken vertegenwoordigt 100% van de stemmen op de partij.
e. 30%

2 **a.** 5%
b. 10%

3 **a.** Dezelfde vorm als bij opgave 2, met de top bij 780 en alle oppervlakte tussen 400 en 1160.
b. Dat is wel weinig, maar niet extreem weinig; er zit nog redelijk wat oppervlakte links van 500.
c. De waarden in een breed gebied zijn volgens het linker plaatje even waarschijnlijk en praktisch meteen daarbuiten zijn de waarden onmogelijk; dat is verkeerd6134(p)1.4422(p)1.44-11.3345
uiijnlij; 6134(p)1.4422(p)1.44-19.96 Tf T(c)1.4422(.)278T

11 b. $\bar{x} = 29$, $\sigma = 4{,}5$
c. De mensen van bijvoorbeeld 18 jaar leven gemiddeld al 18,5 jaar. Zo ook bij de andere leeftijden. Gemiddeld is men dus een half jaar ouder dan zijn leeftijd aangeeft.
d. $\bar{x} - \sigma = 25$, $\bar{x} + \sigma = 34$; klopt
e. 50% , ca 15% , ca 3%

Paragraaf 9 Normale verdelingen

1 a. De oppervlakte onder de grafiek moet 1 blijven.
b. Het gemiddelde blijft dan hetzelfde.
c. De standaardafwijking wordt 2 keer zo klein.
d. Het gemiddelde wordt 2 groter.
e. De standaardafwijking verandert niet.

2 a. 152 en 212 cm

4 a. Dan verschuift de grafiek in horizontale richting.
b. Dan wordt de grafiek smaller en hoger of breder en lager.

5 a. Y = normalpdf(X,1000,10)
b. 95,45%
c. 53,28% , 15,87% , 30,85%

6 normalcdf(990,1010,1000,10) = 0,6827
normalcdf(980,1020,1000,10) = 0,9545

7 b. 2,28%
c. 25,25%

8 99,73%

9 2,5 en 4,7

10 a. 10,56%
b. 40,13%
c. 78,87%

11 b. GR: 12,07% , tabel: 12,10%
c. GR: 577, tabel: 620.

12 a. A: 9,12%; B: 65,63%; C: 25,25%.
b. € 15.483,84

13 a. Ongeveer 15.
b. Ongeveer 16%.
c. Ongeveer 4,3%.

14 A, want de kans op meer dan 1000 branduren is bij merk A 79,77% en bij merk B 78,81%.

15 a. Die munten worden bijvoorbeeld in scherp afgestelde muntautomaten gebruikt.
b. 1,24%
c. 25.314.389 munten.

16 a. 6,6807228...%
b. 1006 gram.

Paragraaf 10 De standaard normale tabel

1 a. Het lijkt mij uitzonderlijk hoog, maar ik weet niet welke afwijkingen van het gemiddelde normaal zijn.
b. Lijkt mij niet erg uitzonderlijk; 17 is niet zo heel veel te weinig.
c. In de vorige paragraaf heb ik gezien dat niet zo heel veel pakken 18 gram te weinig bevatten.

2 a. 2,5 keer de Sd ; dus uitzonderlijk.
b. 1,8 keer de Sd ; dus vrij uitzonderlijk.

3 a. jongen: 1,67 ; meisje: 2,20.
b. 164 cm
c. 148 cm

4 a. 0 ; 0,0225 ; 0,16 ; 0,5 ; 0,84 ; 0,9775 ; 1

5 0,3336 ; 0,6664 ; 0,7745 ; 0,4474

6 1 – opp. links van 1,3 = 1 – $\Phi(1,3)$ = 1 – 0,9032 = 0,0968
In tabel aflezen bij $z = -1,3$: $\Phi(-1,3) = 0,0968$.

8 -0,84 , 0,67 , 0,84 , -0,39

9 a. -0,52 ; 0,52
b. Nee

10 drie: -0,43 ; 0,43
vier: -0,67 ; 0 ; 0,67
vijf: -0,84 ; -0,25 ; 0,25 ; 0,84

11 a. 1
b. $\Phi(1)$ is de oppervlakte links van 1, dus de fractie die kleiner is dan 192.

12 Tabel: tussen $z = -1,25$ en $z = 1,25$ ligt $\Phi(1,25) - \Phi(1,25)$ = 0,8944 – 0,1056 = 0,7888, dus 79%.
GR: normalcdf(160,180,170,8) = 0,7887.

13 z-waarde bij deze 2% = -2,05;
(985 – g) / 10 = -2,05 geeft g = 1005,5.

14 a. 13,79 punten.
b. z-waarde bij 0,8 is 0,84.
(g – 62) / 13,79 = 0,84 geeft 73,58, dus 74 punten

15 a. 69,4 punten.
b. Minstens 79,5 punten.

16 a. 0,26%
b. $\sigma = 3{,}57$ sec.
c. $\mu = 95{,}36$ sec.

17 a. $\sigma = 7{,}1641...$
b. 50%
c. MED = 172,64.
d. $\mu = 164{,}03$ cm.
e. tabel: 79,67% ; GR: 79,7671...%.

18 a. Sd = 16,67
b. Sd = 15,31
c. De verdeling is kennelijk niet zuiver normaal.

19 a. 22,5 ml; 9,9 ml.
b. 500 gram
c. $4 \cdot 251{,}25$ is meer dan $2 \cdot 495{,}25$. Dus meer.

Paragraaf 11 Wel of niet normaal ?

1 b. y = 0 en y = 1.
c. (0,1). Links van 0 zit exact de helft van de totale oppervlakte.

2 1 , 11 , 21

3 a. Hoe verder van 0 des te sterker moet er worden opgerekt.
b. 2,3 , 84 , 97,7

4 a. In de eerste klasse zitten 4 studenten.
In de eerste en tweede klasse samen (dus kleiner dan 160,5 cm) zitten 4 + 10 = 14 studenten.
In de eerste drie klassen samen (dus kleiner dan 163,5 cm) zitten 4 + 10 + 26 = 40 studenten.
c. Ja , ja
d. μ vind je via 50%.
e. $\mu-2\sigma$ vind je via 2,3% ; $\mu+2\sigma$ vind je via 97,7%.
f. $\mu \approx 175$ en $\mu+2\sigma \approx 188$ geeft $\sigma \approx 6{,}5$.

5 **b.** Nee , nee

6 **a.** Aflezen bij 8H u = 525 min. → 7,5%
Aflezen bij 11 u = 660 min. → 91%
Antwoord: 91% – 7,5% = 83,5%
b. Aflezen bij 50% → $\mu \approx 597$ min.
Aflezen bij 16% → $\mu - \sigma \approx 550$; dus $\sigma \approx 47$ min.
c. De kans dat de levensduur kleiner dan 510 min. is mag hoogstens 0,07 zijn.
De z-waarde van 0,07 is -1,48.
$\frac{510-\mu}{50} = -1{,}48 \rightarrow \mu = 584$ min.
d. Kort af: L = leeg, N = nieuw
Gevraagd wordt de kans op LNNL, NLNL of NNLL.
De kans is $\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{22}$

7 **a.** normcdf(0,309.5,266,16) = 0,9967, dus minder dan 1% duurt 310 dagen of meer.
b. De punten liggen niet op een rechte lijn dus geen normale verdeling.
c. 38,7

Paragraaf 12 De centrale limietstelling

1 **a.** 1 , 3 , 1
b. 41 , 23 , 11
c. Ja

2 **a.** 5 , $\frac{5}{36}$ $5\sqrt{5}$
b. 11 , 13 , $11\sqrt{5}$
c. Niet helemaal goed.

3 **b.** $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $P(X_i = 0) = 1-p$ en $P(X_i = 1) = p$.
Dus $E(X_i) = p$ en $Var(X_i) = p(1-p)$.
Met de somregels vind je: $E(X) = np$ en $Var(X) = np(1-p)$.

4 **a.** E(L) = 12
b. Var(L) = Var(X) + Var(-Y) = 36 + 36 = 72
c. $P(X > 10) \approx 0{,}5948$
d. $P(L < 0) \approx 0{,}0793$
e. $1 - (1-0{,}0793)^{10} \approx 0{,}5623$

5 **a.** Er zijn in totaal 90 tweetallen en bij 30 ervan is 5 het hoogste. Dus: $P(X = 5) = \frac{30}{90} = 2$.
b. $P(X = 2) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}$ 20) =

e. $(\frac{7}{15})^{50} \approx 0$, $(\frac{2}{10})^{50} \approx 0$

6 **a.** 170,5 , 180,5 , ... , 290,5
c. $\mu \approx 229$, $\sigma \approx 19$
d. 88% – 39% = 49%

7 **a.** E(T) = 50 · 4,6 = 230 , Var(T) = 50 · 9,04 = 452
228 ≈ 230 , $21^2 = 441 \approx 452$
b. normcdf (223.5,255.5,230,21.26) = 0,5049
Klopt niet helemaal.

8 **b.** 1 , 1
c. 262 dinsdagen, $\sqrt{262} = 16,2$
d. Normcdf(0,250,262,16,2) = 0,229