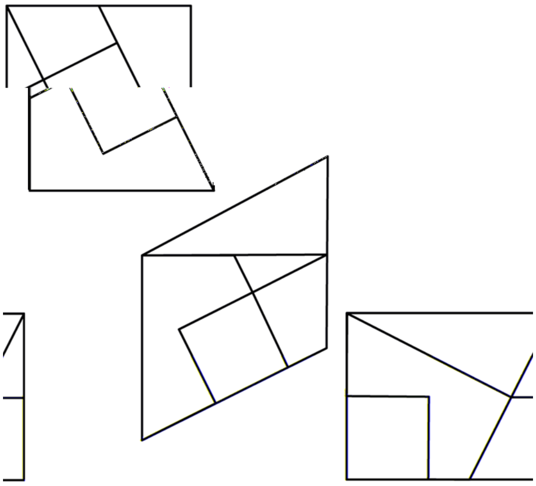
Hoofdstuk 21 OPPERVLAKTE VWO

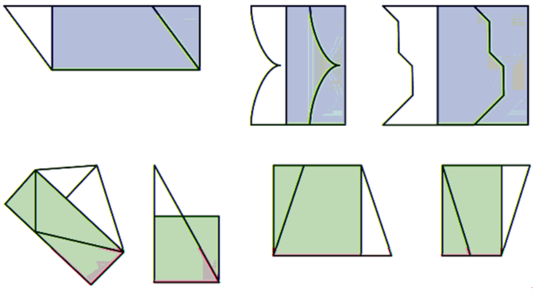
21.0 INTRO

1



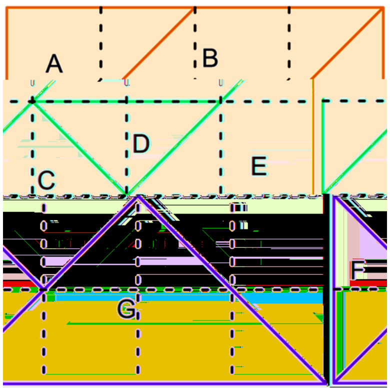
21.1 DE OPPERVLAKTE VAN EEN PARALLELLOGRAM

2



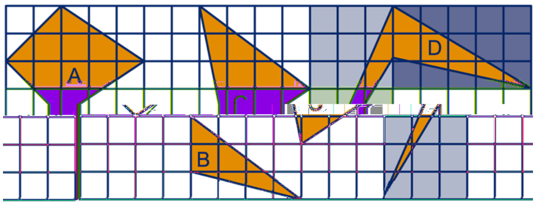
Opp. bovenste rij: 10 cm^2 ; 8 cm^2 ; 12 cm^2
Opp. onderste rij: 6 cm^2 ; 4 cm^2 ; 9 cm^2 ; 6 cm^2

3



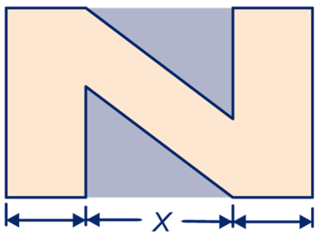
A: $\frac{1}{8}$ 36 $4\frac{1}{2}$ B: $4\frac{1}{2}$ C: $4\frac{1}{2}$
D: $\frac{1}{2}$ $4\frac{1}{2}$ $2\frac{1}{4}$ E: 2 $4\frac{1}{2}$ 9 F: $2\frac{1}{4}$
G: 9

4 *A*: 4 + 6 = 10 *B*: 4 *C*: $8\frac{1}{2}$ *D*: 8



Als voorbeeld de oppervlakte van *D*:
De donkerblauwe rechthoek heeft oppervlakte 5·4 = 20. Daar gaan twee halve rechthoeken vanaf, één met oppervlakte $\frac{1}{2}$ 5 2 5 en de ander met oppervlakte $\frac{1}{2}$ 5 4 10 .
De lichtblauwe rechthoek heeft oppervlakte 7·3 = 21. Daar gaan twee halve rechthoeken vanaf, één met oppervlakte $\frac{1}{2}$ 3 5 $7\frac{1}{2}$ en de ander met oppervlakte $\frac{1}{2}$ 3 7 $10\frac{1}{2}$.
De oppervlakte van *D* is:
21 20 (5 10 $7\frac{1}{2}$ $10\frac{1}{2}$) 8 .

5 a

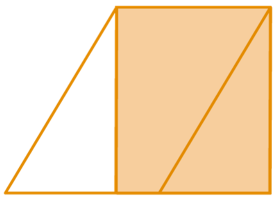


x berekenen in een blauwe driehoek:
x $\sqrt{25 \quad 15}$ 20 , de totale breedte is dus 20 + 2·10 = 40 cm.

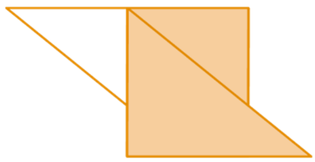
b Oppervlakte is 40·25 – 15·20 = 700 cm^2.

6 a Nee.
b In het begin: 1,5·5 = 7,5 cm^2,
in het andere geval: 0,5·5 = 2,5 cm^2.

7 Alledrie 20 cm^2, het eerste:



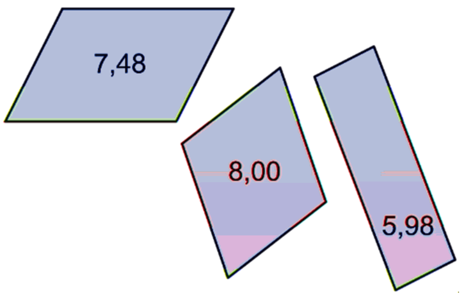
het derde:



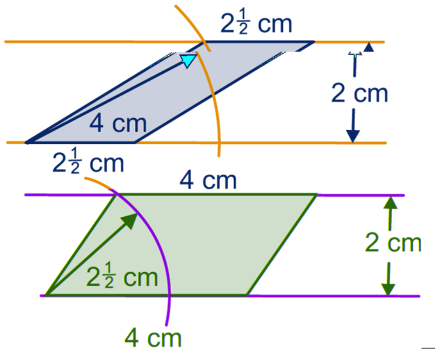
na de eerste keer

na de tweede keer

8



9 a



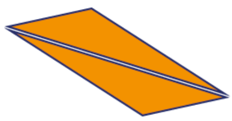
b Oppervlakte bovenste parallellogram is $2\frac{1}{2}\ \ 2\ \ \ 5\ \text{cm}^2$.

Oppervlakte onderste parallellogram is $2\ \ 4\ \ \ 8\ \text{cm}^2$.

10 19,2 : 4 = 4,8 cm of 19,2 : 6 = 3,2 cm.

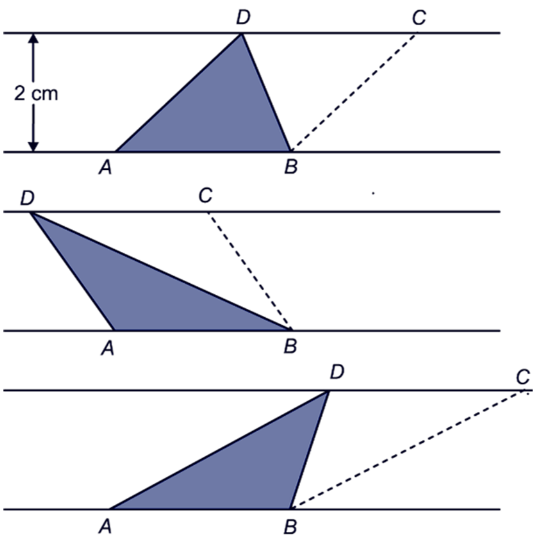
21.2 DE OPPERVLAKTE VAN EEN DRIEHOEK

11 a



b 20 cm^2 en 15 cm^2

12 a



b oppervlakte van een parallellogram = 6 cm^2 ; oppervlakte van een driehoek = 3 cm^2

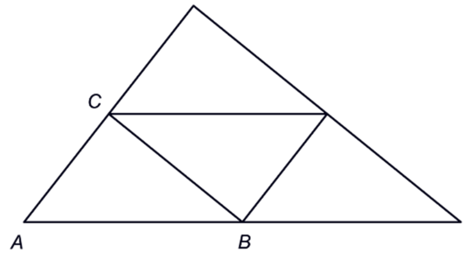
13 Oppervlakte *ABC* is $\frac{1}{2}\ \ 5\ \ 3\ \ \ 7\frac{1}{2}\ \text{cm}^2$.

14 a Oppervlakte *ABC* is $\frac{1}{2}\ \ 12\ \ 8\ \ \ 48$.

b De oppervlakte is ook $\frac{1}{2}\ \ 10\ \ AC$.

Dus $10\ \ AC\ \ \ 96$, dus *AC* = 9,6.

15 ab



21.3 ALLERLEI OPPERVLAKTES

16 Verdeel het trapezium in twee driehoeken: de kleine driehoek heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\ \ 3\ \ 3\ \ \ 4\frac{1}{2}$ en de grote $\frac{1}{2}\ \ 6\ \ 3\ \ \ 9$.

De oppervlakte van het trapezium is $4\frac{1}{2}\ \ \ 9\ \ \ 13\frac{1}{2}$.

17 $\frac{3}{4}$ deel van 20 = 15

18 a $BC\ \ \ \sqrt{20^2\ \ \ 15^2}\ \ \ 25$

b Oppervlakte *ABC* is $\frac{1}{2}\ \ 20\ \ 15\ \ \ 150$

c $\frac{1}{2}\ \ BC\ \ AD\ \ \ 150$, dus *BC*·*AD* = 300,

dus *AD* = 300 : *BC* = 12

d *ADC* = *BAC* en *DBA* = *CBA*

e De vergrotingsfactor van groot naar klein is: $\frac{AB}{BC}\ \ \ \frac{4}{5}$, dus *AD* = $\frac{4}{5}$ ·*AC* = 12.

19 a Een hellende kant is 20 bij $\sqrt{8^2\ \ \ 15^2}\ \ \ 17$

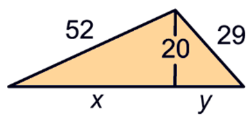
Oppervlakte voorkant: $\frac{1}{2}\ \ 16\ \ 15\ \ \ 120$

Oppervlakte hellende kant: 17·20 = 340

Totaal: 2·120 + 2·340 = 920 dm^2

b Inhoud tent is $\frac{1}{2}\ \ 16\ \ 15\ \ 20\ \ \ 2400\ \text{dm}^3$.

20 a Zie plaatje voor letters.



$x\ \ \ \sqrt{52^2\ \ \ 20^2}\ \ \ 48$

$y\ \ \ \sqrt{29^2\ \ \ 20^2}\ \ \ 21$

Dus het andere latje is 48 + 21 = 69 cm.

b Oppervlakte papier is 40 · 69 = 2760 cm^2.

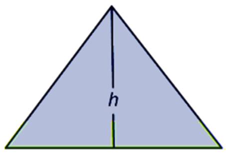
c Oppervlakte vlieger is 2760 : 2 = 1380 cm^2.

d Oppervlakte vlieger is 50 · 80 : 2 = 2000 cm^2.

21 Oppervlakte kleine driehoek is
$\frac{1}{2}$ 25 20 250 cm^2.
Oppervlakte grote driehoek is
$\frac{1}{2}$ 50 20 500 cm^2.
Oppervlakte trapezium is 250 + 500 = 750 cm^2.

22 a Lange diagonaal is $\sqrt{5^2 \quad 12^2}$ 13 .
b Oppervlakte van een van de driehoeken is:
$\frac{1}{2}$ 5 12 30 , dus oppervlakte vlieger is 60.
Dus het halve oproduct van de diagonalen is 60, de korte diagonaal is 2 60 : 13 $9\frac{3}{13}$.

23 Noem de hoogte van de driehoek: *h*.
$h \quad \sqrt{10^2 \quad 6^2} \quad 8$
Oppervlakte is
$\frac{1}{2}$ 12 8 48



21.4 RECHTHOEKEN MET DEZELFDE OMTREK

24 b

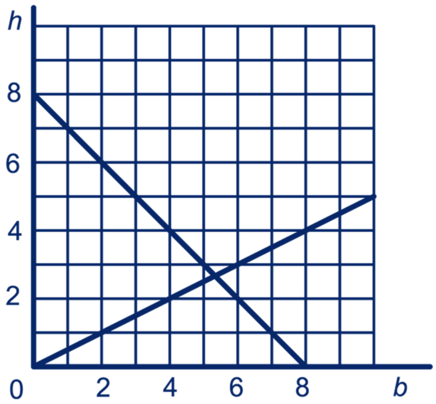
40	30	25	35	45	48
10	20	25	15	5	2
400	600	625	525	225	96

c 25 bij 25 m
d $h + b = 50$

25 b Ze liggen op één lijn.

26 a $BR = RQ = OP$ en $AP = PQ = OR$ want de driehoeken BRQ en PAQ hebben twee hoeken van 45 , dus ze zijn gelijkbenig.
b $OR + RQ = OR + RB = OB$ en
$OP + PQ = OP + PA = OA$
Dus: $OR + RQ + OP + PQ = OA + OB$

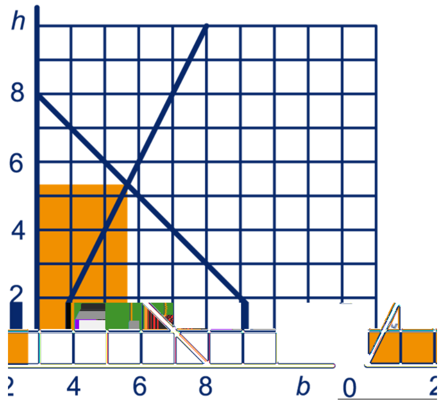
27 ac



b $h + b = 8$
d $2h = b$

28 a De omtrek is 2 · 9 = 18.
b $h : b \quad 1\frac{1}{4} : 1 \quad 5 : 4$
c $2\frac{1}{4}b \quad 9 \quad b \quad 4$
De breedte is 4 en de hoogte 5.

29 abc



d $h + b = 8$ en $h = 2b$
e $2b + b = 8$
$3b = 8$
$b = \frac{8}{3} \quad 2\frac{2}{3}$, dan
$h = 2 \quad 2\frac{2}{3} \quad 5\frac{1}{3}$

21.5 OPPERVLAKTE EN OMTREK VAN EEN CIRKEL

30 a Oppervlakte kleine vierkant is $2r^2$ en oppervlakte grote vierkant is $4r^2$.
c Oppervlakte als straal is 2 cm: 2 · 2 = 4 cm^2
Oppervlakte als straal is 5 cm: 5 · 5 = 25 cm^2

31 Wateroppervlakte is $50^2 \quad 25^2$
2500 625 1875 5890 m^2

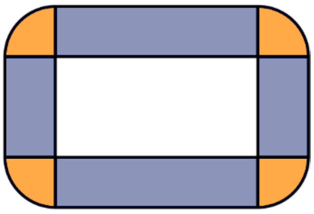
32 Oppervlakte ster is $4^2 \quad 2^2$ 16 4 3,43 cm^2

33 a Inhoud is 2 $1{,}5^2$ = 4,5 ≈ 14,1 dm^3, dus ongeveer 14 liter.
b Oppervlakte zijkant is 15 2 20 = 600 cm^2.
Oppervlakte onderkant is 15^2 = 225 cm^2.
Oppervlakte totaal is 825 ≈ 2592 cm^2.

34 Oppervlakte is $\frac{1}{2}$ 2^2 1^2 3,14 cm^2.
Omtrek is $\frac{1}{2}$ 2 2 2 1 4 12,6 cm.

35 Gewicht pijp is
($0{,}15^2$ $0{,}13^2$) 10 8,9 1,57 kg

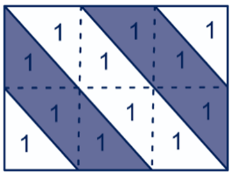
36 De vier oker stukken vormen een cirkel met straal 50.
De vier blauwe stukken zijn twee rechthoeken van 50 bij 100 en twee van 50 bij 200.



De totale oppervlakte van de atletiekbaan is:
$50^2 \quad 2 \quad 50 \quad 100 \quad 2 \quad 50 \quad 200$
$2500 \quad\quad 30.000 \quad 37.854$ m^2.

SUPER OPGAVEN

8 donkere banen: 3
lichte banen: 1, 1 en 4



9 a $DE \quad \sqrt{5^2 \quad 4^2} \quad 3$,
oppervlakte = 10·3 = 30.
b oppervlakte parallellogram = 5·BF,
dus BF = 30:5 = 6.
c Ze hebben beide een rechte hoek en beide hoek A.
d De vergrotingsfactor van driehoek ADE naar ABF is AB : AD = 2, dus BF = 2·DE = 6.

16 a Als je als hoogte h van de twee driehoeken de afstand van de evenwijdige zijden neemt, dan:
oppervlakte $\quad ABD$: oppervlakte $\quad BCD$ =
$\frac{1}{2} \quad h \quad AB \quad : \quad \frac{1}{2} \quad h \quad CD \quad\quad AB : CD \quad\quad 2:1$
b Driehoek ASB krijg je uit driehoek CSD door met centrum S met -2 te vermenigvuldigen.
Dus de oppervlakten verhouden zich als 4:1.

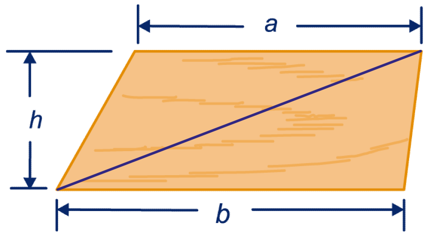
17 a Noem de afstand van C tot zijde AB = h.
Dan is de
oppervlakte van driehoek ADC = $\frac{1}{2} \quad 2 \quad h \quad\quad h$
en van driehoek BDC = $\frac{1}{2} \quad 6 \quad h \quad\quad 3h$.
Dus oppervlakte driehoek ADC = $\frac{1}{4} \quad 16 \quad\quad 4$
en oppervlakte driehoek BDC = 12.
b oppervlakte driehoek AXC = $\frac{1}{2} \quad AX \quad h$
oppervlakte driehoek BXC = $\frac{1}{2} \quad BX \quad h$

18 Oppervlakte AXC = $\frac{2}{3} \quad 60 \quad\quad 40$ en oppervlakte BXC = 20.
Het snijpunt van MN en CX noemen we S.
Dan zijn CAX en CBX uitvergrotingen van CMS en CNS met factor 2, dus:
oppervlakte CMS = $\frac{1}{4}$ · oppervlakte CAX = 10
en oppervlakte CNS = $\frac{1}{4}$ · oppervlakte CBX = 5
oppervlakte $AXSM$ = 30 en
oppervlakte $XBNS$ = 15.

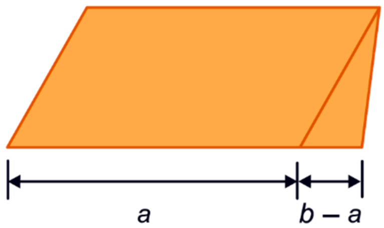
19 Als je AB als basis neemt, dan hebben de driehoeken ABD en ABC dezelfde hoogte, dus dezelfde oppervlakte. Als je van beide driehoek ABS weglaat, krijg je weer twee figuren met dezelfde oppervlakte.

20 Oppervlakte vierhoek is $\frac{1}{2} \quad 4 \quad 3 \quad\quad 6$ cm^2.

21 a De oppervlakte van de:

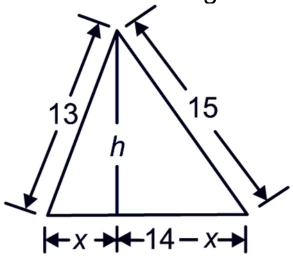


linker driehoek is $\frac{1}{2} \quad a \quad h$ en van de rechter $\frac{1}{2} \quad b \quad h$.
b De oppervlakte van het parallellogram is $a \quad h$ en van de driehoek $\frac{1}{2} \quad (b \quad a) \quad h$.



c $\frac{1}{2} \quad (b \quad a) \quad h \quad\quad a \quad h$
$\frac{1}{2}bh \quad \frac{1}{2}ah \quad ah$
$\frac{1}{2}bh \quad \frac{1}{2}ah$
d In formulevorm zegt Joris: oppervlakte trapezium is: $\frac{1}{2} \quad (a \quad b) \quad h$. Als je in deze formule de haakjes wegwerkt krijg je weer: $\frac{1}{2}ah \quad \frac{1}{2}bh$.

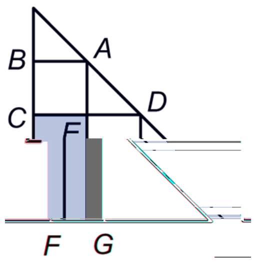
22 Twee keer stelling van Pythagoras:



$h^2 = 13^2 - x^2$ en $h^2 = 15^2 - (14 - x)^2$
Dus: $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$
$169 - x^2 = 225 - (196 - 28x + x^2)$
$169 - x^2 = 225 - 196 + 28x + x^2$
$140 = 28x$
$x = 5$, dus $h \quad \sqrt{13^2 \quad 5^2} \quad 12$
Oppervlakte driehoek is $\frac{1}{2} \quad 14 \quad 12 \quad\quad 84$.

29 a Omtrek is $2a$.

b De rechthoek en het vierkant hebben het grijze deel gemeen. Het restant van de rechthoek *ABCD* heeft een kleinere oppervlakte dan het restant van het vierkant *DEFG*, want *AE* = *ED*.

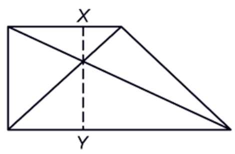


(driehoek *AED* is gelijkbenig: 45-45-90-graden driehoek) en *CE* is kleiner dan *EF* (want *EF* = *CD*).

21.7 EXTRA OPGAVEN

1 Noem het vierde hoekpunt *D* en noem *AB* = x, dan *BC* = 27 – x.
Oppervlakte *ABCD* = (27 – x)·8, maar ook:
oppervlakte *ABCD* = x · 10
Dus:
$10x = (27 - x)\ \ 8$
$10x = 216 - 8x$
$18x = 216$
$x = 12$
Dus x = *AB* = 12 m en *BC* = 27 – 12 = 15 m.

2 Zie plaatje voor letters.



Driehoek *DCS* is gelijkvormig met driehoek *BSA*, vergrotingsfactor = 2.
Dus *SY* = 2·*SX*, dus *SX* = 1 en *SY* = 2.

opp. driehoek *DCS*: $\frac{1}{2}\ \ 3\ \ 1\ \ \ 1\frac{1}{2}$

opp. driehoek *ASB*: $\frac{1}{2}\ \ 2\ \ 6\ \ \ 6$

opp. driehoek *ACS*: $\frac{1}{2}\ \ 3\ \ 3\ \ \ 1\frac{1}{2}\ \ \ 3$

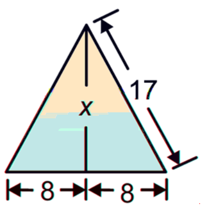
opp. driehoek *BSC*:
$\frac{1}{2}\ \ (3\ \ \ 6)\ \ 3\ \ \ 1\frac{1}{2}\ \ \ 6\ \ \ 3\ \ \ 3$

3 a Als je voor beide parallellogrammen als basis *CD* neemt, dan hebben ze dezelfde hoogte.

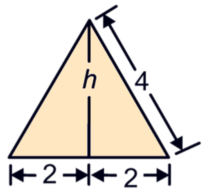
b Als je bij beide driehoek *GEF* weghaalt houdt je twee trapezia met dezelfde oppervlakte over.

4 1, 3 en 5 samen hebben dezelfde oppervlakte als 2, 4 en 6 samen. (beide de helft van een rechthoek). Verder hebben 5 en 6 dezelfde oppervlakte evenals 3 en 4 (zelfde argument).

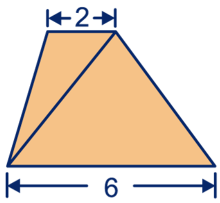
5 Noem de hoogte van de driehoek: x.
$x\ \ \ \sqrt{17^2\ \ \ 8^2}\ \ \ 15$
Oppervlakte driehoek is
$\frac{1}{2}\ \ 16\ \ 15\ \ \ 120$.



6 Noem de hoogte van de driehoek: h.
$h\ \ \ \sqrt{4^2\ \ \ 2^2}\ \ \ \sqrt{12}$
Oppervlakte driehoek is
$\frac{1}{2}\ \ 4\ \ \sqrt{12}\ \ \ 2\sqrt{12}$

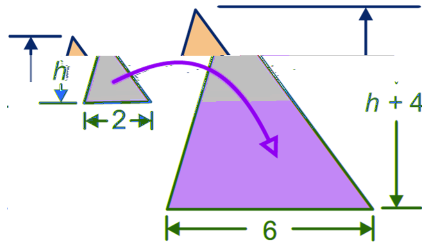


7 Verdeel het trapezium in twee driehoeken.



De kleine driehoek heeft oppervlakte
$\frac{1}{2}\ \ 2\ \ 4\ \ \ 4$ en de grote heeft oppervlakte
$\frac{1}{2}\ \ 6\ \ 4\ \ \ 12$.
De oppervlakte van het trapezium is
4 + 12 = 16.

8 a De vergrotingsfactor is 3, (vergelijk de zijden van 2 en 6), de hoogte van de grote driehoek is dus 3 keer de hoogte van de kleine.



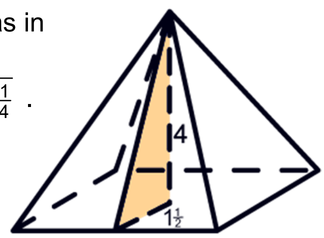
dus: $3h = h + 4$

b Dus $2h = 4$ $\quad h = 2$, dus de kleine driehoek heeft oppervlakte 2

c De oppervlakte van de grote driehoek is 9 keer de oppervlakte van de kleine, dus 18.
De oppervlakte van het trapezium is dus 16.

9 Neem aan dat de kleine driehoek hoogte h heeft, dan heeft de grote driehoek hoogte
$\frac{20}{12}\ h\ \ \ 1\frac{2}{3}h$, dus $2\frac{2}{3}h\ \ \ 4$, dus $h\ \ \ 1\frac{1}{2}$.
De kleine driehoek heeft oppervlakte
$\frac{1}{2}\ \ 1\frac{1}{2}\ \ 12\ \ \ 9$ en de grote $\frac{1}{2}\ \ 2\frac{1}{2}\ \ 20\ \ \ 25$.

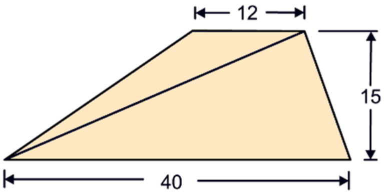
10 Stelling van Pythagoras in de oker driehoek:
$h\ \ \ \sqrt{(1\frac{1}{2})^2\ \ \ 4^2}\ \ \ \sqrt{18\frac{1}{4}}$.
Een zijkant heeft oppervlakte
$\frac{1}{2}\ \ 3\ \ \sqrt{18\frac{1}{4}}\ \ \ 1\frac{1}{2}\sqrt{18\frac{1}{4}}$.



Totaal is er $4\ \ 1\frac{1}{2}\sqrt{18\frac{1}{4}}\ \ \ 3\ \ 3\ \ \ 6\sqrt{18\frac{1}{4}}\ \ \ 9\ \text{dm}^2$ karton nodig.

11 a De zijde evenwijdig met die van 40 is 12. De diagonalen in het linker en rechter zijvlak van de balk zijn $\sqrt{12^2 \quad 9^2} \quad 15$.
De andere zijden van het trapezium zijn $\sqrt{15^2 \quad 20^2} \quad 25$ en $\sqrt{15^2 \quad 8^2} \quad 17$.

b Oppervlakte trapezium is
$\frac{1}{2} \; 12 \; 15 \quad \frac{1}{2} \; 40 \; 15 \quad 390$.

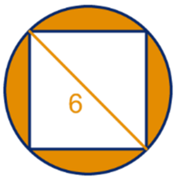


12 De driehoeken 1 en 2 samen zijn $\frac{2}{6}$ van driehoek *ABC*, dus samen 16.
Driehoek 1 is $\frac{1}{4} \; 16 \quad 4$ en driehoek 2 is $\frac{3}{4} \; 16 \quad 12$.
Driehoek 3 en 4 zijn samen 32.
Driehoek 3 is $\frac{3}{4} \; 32 \quad 24$ en driehoek 4 is 8.

13 Linksboven: 12 rechtsboven: 24
Linksmidden; 9 rechtsonder: 9
Linksonder: 18

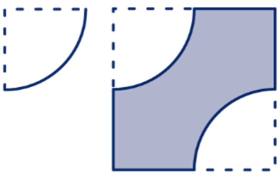
14 $CD = 2 \quad 84 : 14 = 12$
$BD \quad \sqrt{15^2 \quad 12^2} \quad 9$, $AD = 14 - 9 = 5$
$AC \quad \sqrt{5^2 \quad 12^2} \quad 13$

15 De oppervlakte van het witte vierkant is het halve product van de diagonalen is
$\frac{1}{2} \; 6 \; 6 \quad 18$.
De oppervlakte van het gekleurde deel is:
$3^2 \quad 6^2 : 2 \quad 9 \quad 18 \quad 10{,}3$.

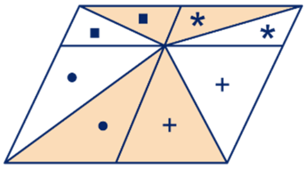


16 De oppervlakte van het parallellogram is $25 \cdot 30 = 750$.
Noem de lengte van die zijde *x*, dan:
$x \cdot 20 = 750$, dus $x = 37\frac{1}{2}$.

17 Oppervlakte kwartcirkel is
$\frac{1}{4} \quad 2^2 \quad$.
Oppervlakte figuur is
$4^2 \quad 2 \quad 9{,}72$ cm^2.

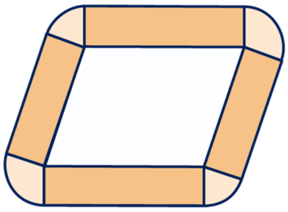


18 Zie plaatje:



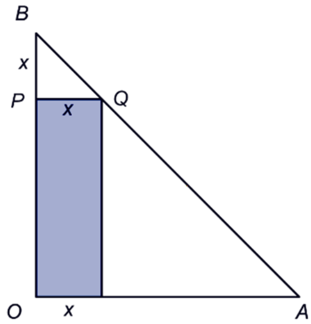
driehoeken met gelijke tekens hebben gelijke oppervlakte.

19 De vier rechthoekige stukken hebben oppervlakte
$2 \; 4 \; 1 \quad 2 \; 5 \; 1 \quad 18$
De vier lichte stukken vormen samen een cirkel met straal 1, dus oppervlakte = .
De oppervlakte van de strook is dus 18 + cm^2.



20 a Omdat $BP = PQ = x$, geldt: $OP = a - x$.

b Als je in beide vormen de haakjes wegwerkt, krijg je in beide gevallen: $ax - x^2$.



c $-(x \quad \frac{1}{2}a)^2 \quad \frac{1}{4}a^2$ is voor elke *x* groter of gelijk aan $\frac{1}{4}a^2$, omdat
$-(x \quad \frac{1}{2}a)^2$ voor elke *x* kleiner of gelijk aan 0 is (vanwege het kwadraat). Die minimale waarde $\frac{1}{4}a^2$ kun je krijgen als $(x \quad \frac{1}{2}a)^2 \quad 0$ en dat is als $x \quad \frac{1}{2}a$.