meetkunde havo d
1 inhouden

de Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN xxx
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Dit is het eerste hoofdstuk meetkunde voor havo d.
Dit hoofdstuk gaat over inhouden van ruimtelijke figuren.

Op 8 december 2013 is geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Zijn bijdragen aan dit hoofdstuk zijn substantieel en kenmerkend voor zijn stijl.
Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We missen nog altijd zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie.
Maar wij zetten zijn werk in zijn geest voort.

De auteurs van de Wageningse Methode

Er worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf weer. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een voorbeeld gegeven wordt. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort.

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

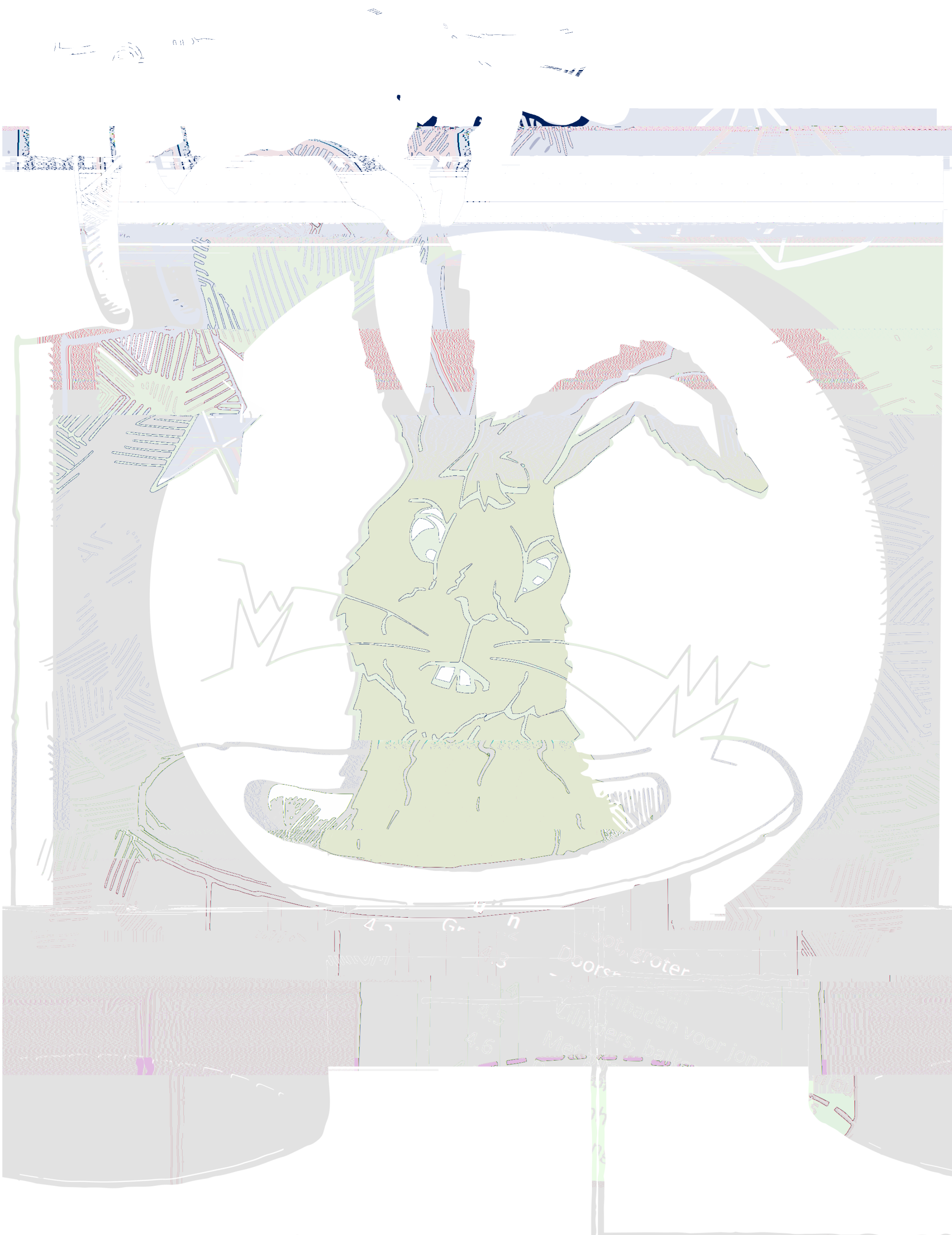
Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad.
Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

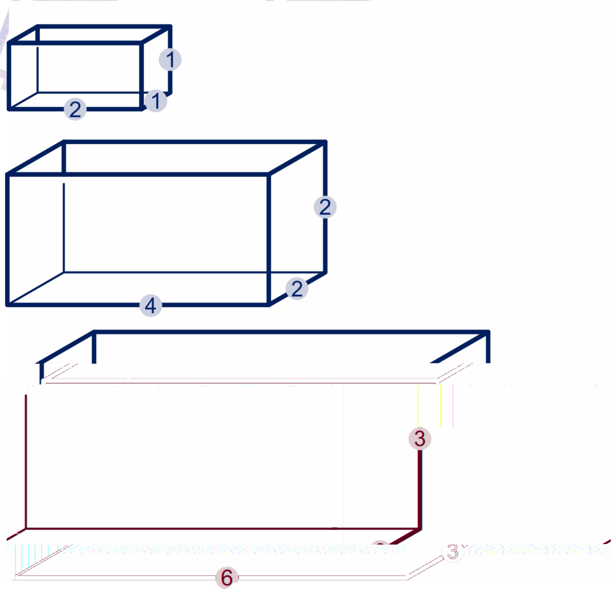
Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.

Het hoofdstuk is ook digitaal beschikbaar:
https://www.wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y45h-d



1

Een aquarium had vroeger randen van hoekijzer; tegenwoordig worden ze ook helemaal van glas gemaakt. De glasplaten worden met speciale lijm aan elkaar geplakt. De drie aquaria hieronder zijn van boven open. De maten staan erbij (in decimeters).



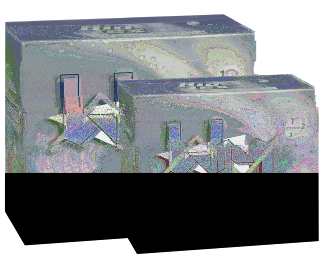
a Hoe kun je aan de afmetingen zien dat ze gelijkvormig zijn?
b Neem de tabel over en vul hem in.

	kleinste	middelste	grootste
Totale lengte lijmnaden			
Totale oppervlakte glasplaten			
Inhoud			

c Hoeveel keer past het kleinste aquarium in elk van de twee andere? Laat dat ook zien in de plaatjes of op het werkblad.

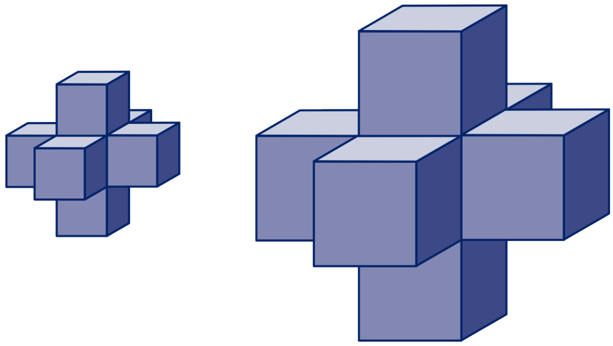
2

Het waspoeder WM wordt in twee verpakkingen verkocht. Van de grote doos zijn de afmetingen $1\frac{1}{2}$ keer zo groot als van de kleine doos. De kleine doos kost € $5{,}00$, de grote doos € $16{,}25$. In welke verpakking is het wasmiddel het duurste?



3

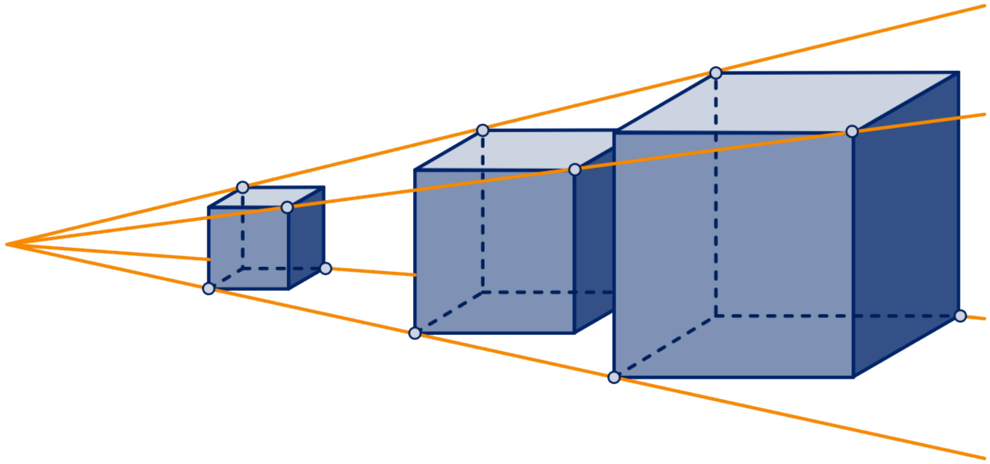
We bekijken twee driedimensionale 'kruisen'. Het kleine kruis is opgebouwd uit kubusjes met ribbe 1, het grote is opgebouwd uit kubusjes met ribbe 2.



Geef van beide kruisen:
- de totale lengte van de ribben,
- de totale oppervlakte,
- de inhoud.

4

Hieronder zie je hoe vanuit een centrum een kubus wordt vermenigvuldigd met factor 2 en met factor 3.

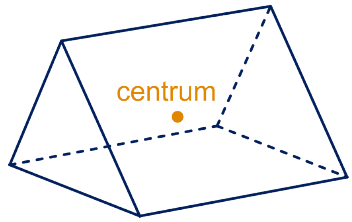


Alle hoekpunten komen 2 respectievelijk 3 keer zover van het centrum af te liggen. Van de drie kubussen verhouden zich de ribben als $1 : 2 : 3$.

a Hoe verhouden zich de oppervlakten?
En de inhouden?

b Bij welke vermenigvuldigingsfactor wordt de oppervlakte 64 keer zo groot?
En bij welke factor wordt de inhoud 64 keer zo groot?

5 We gaan het prisma hieronder vermenigvuldigen met factor 2 vanuit het aangegeven centrum.



a Kleur op het werkblad de beeldfiguur die je dan krijgt.

b Hoeveel keer zo lang zijn de ribben geworden?
Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte geworden?
Hoeveel keer zo groot is de inhoud geworden?

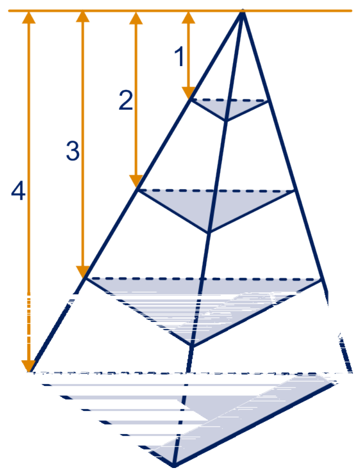
We vermenigvuldigen een ruimtelijke figuur met een positieve factor p.

c Hoeveel keer zo lang worden de ribben?
Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte?
Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud?

Een ruimtelijke figuur wordt uitvergroot met een positieve factor p. Dan

- worden de lengten met factor p vergroot,
- wordt de oppervlakte met factor p^2 vergroot en
- wordt de inhoud met factor p^3 vergroot.

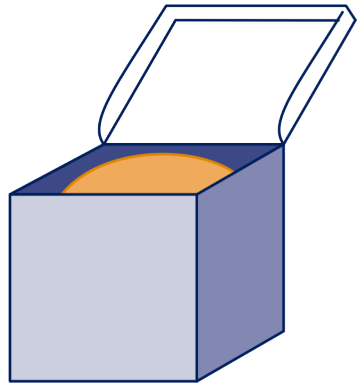
6 We bekijken een nest van vier gelijkvormige piramides. De hoogten verhouden zich als $1 : 2 : 3 : 4$.



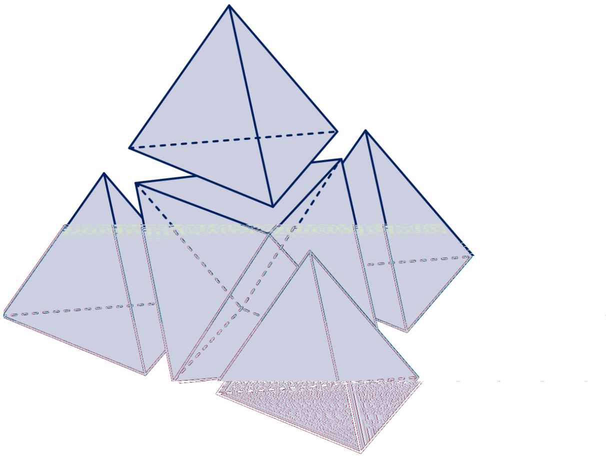
a Vanuit welk punt moet je de kleinste piramide vermenigvuldigen om de andere piramides te krijgen?

b Hoe verhouden zich de oppervlakten van de vlakken van de vier piramides?
En hoe verhouden zich de inhouden?

7 Een pingpongballetje past precies in een doosje van 4 bij 4 bij 4 cm. Een voetbal past precies in een doos van 24 bij 24 bij 24 cm.
De inhoud van het pingpongballetje is ongeveer $33\frac{1}{2}$ cm^3.
Hoe groot is de inhoud van de voetbal? Geef je antwoord in dl nauwkeurig.

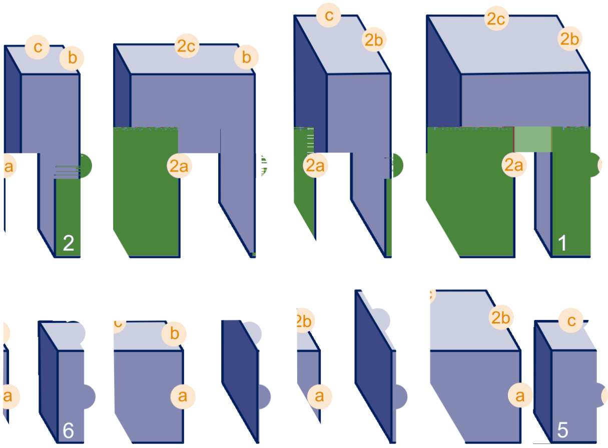


8 In de figuur hieronder staan vier regelmatige viervlakken en een regelmatig achtvlak met even lange ribben. Hiermee kun je een groter viervlak bouwen.



We bekijken de verhouding van de inhoud van een regelmatig viervlak en een regelmatig achtvlak met even lange ribben. Wat is die verhouding exact?

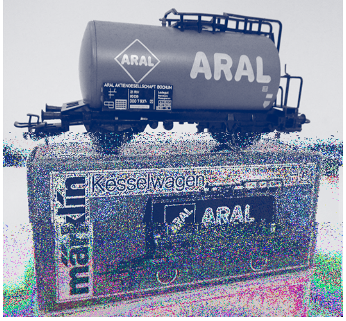
9 De acht balken in de figuur zijn genummerd, de afmetingen staan erbij.



a Welke balken hebben dezelfde inhoud?
b Zijn er gelijkvormige balken bij?

10

Modelspoorbanen heb je in verschillende schalen. De meest voorkomende schaal is HO ($1:87$), onder andere geleverd door Märklin. Märklin levert ook modellen met schaal Z($1:220$). De lengte van de tankwagen in schaal HO hiernaast is $11{,}5$ cm.

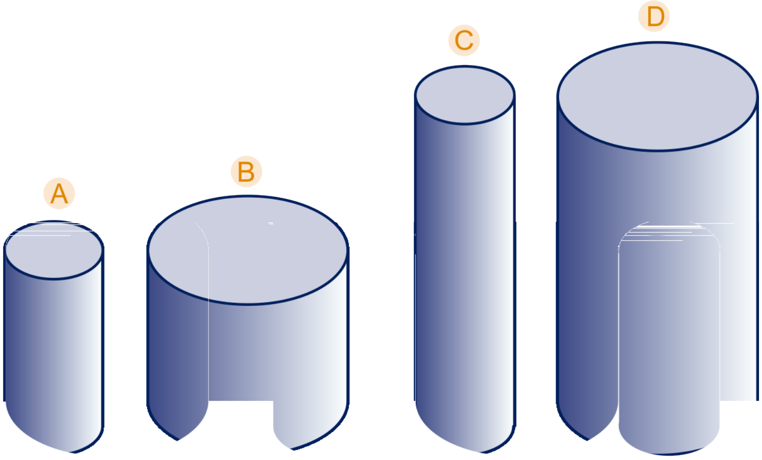


a Wat is de werkelijke lengte van de tankwagen in dm nauwkeurig?

b Hoe verhoudt zich de inhoud van het model van de tankwagen in Z tot het model in HO? Geef je antwoord in de vorm $1:\ldots$ met het getal op de stippellijn in twee decimalen nauwkeurig.

11

A, B, C en D zijn cilinders.
B is twee keer zo breed als A en even hoog.
C is twee keer zo hoog als A en even breed.
D is twee keer zo breed als A en ook twee keer zo hoog.

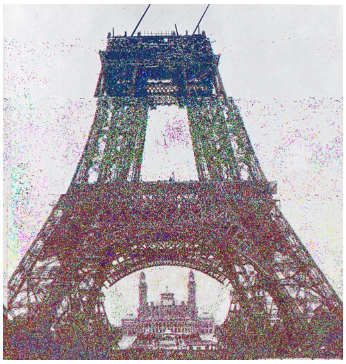


a Wat is de verhouding van hun inhouden? Licht je antwoord toe.

b Zijn er gelijkvormige cilinders bij dit viertal?

12

In 1889 werd de beroemde Eiffeltoren voltooid, 300 meter hoog, toen het hoogste bouwwerk ter wereld.
Enkele gegevens:
- de toren weegt 7000 ton, dat is 7 miljoen kg,
- het vierkante grondvlak is ongeveer 16000 m^2,
- de vier poten zijn 26 meter breed.



Veronderstel dat je een maquette van de Eiffeltoren gaat maken van hetzelfde materiaal als de toren zelf. Je maakt je model 1 meter hoog.

a Hoe breed worden de poten van je model?

b Hoe groot wordt de oppervlakte van het grondvlak?

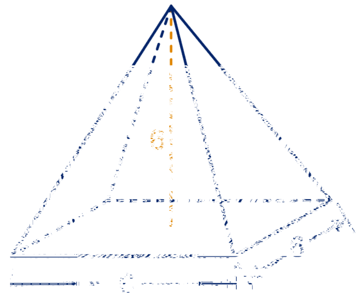
c Hoeveel gaat je model wegen?

Op 57 meter hoogte bevindt zich een restaurant met een vloeroppervlakte van 5000 m^2.

d Hoe hoog is dat bij het model en hoe groot is dan de oppervlakte?

13

Hiernaast staat een regelmatige vierzijdige piramide. Het grondvlak is een vierkant van 6 bij 6; de hoogte van de piramide is ook 6.
We doorsnijden de piramide horizontaal (dat wil zeggen evenwijdig aan het grondvlak) op hoogte 2 en op hoogte 4.
We krijgen dan twee vierkante snijfiguren.

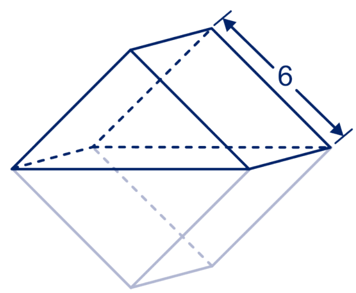


a Teken die snijfiguren op het werkblad.
b Wat is de oppervlakte van de snijfiguren?

De piramide wordt door de twee vierkanten verdeeld in drie stukken. Zonder de inhouden van deze stukken uit te rekenen, kun je zeggen hoe de inhouden zich verhouden.
c Wat is de verhouding van hun inhouden?

14

Een diagonaalvlak verdeelt een kubus met ribbe 6 in twee helften. Eén van die helften is hiernaast getekend, met het diagonaalvlak als grondvlak.



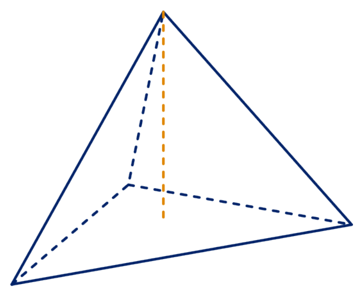
a Hoe noem je zo'n lichaam?
b Hoe hoog is het lichaam exact, dat wil zeggen hoe ver ligt de bovenste ribbe van het grondvlak?

We doorsnijden het lichaam op halve hoogte met een vlak evenwijdig aan het grondvlak.
c Wat zijn de afmetingen van de doorsnede (dat is de snijfiguur)?

Het lichaam is verdeeld in twee stukken.
d Is het bovenste stuk gelijkvormig met het hele lichaam?
e Hoe verhouden zich de inhouden van de twee stukken?

15

In de piramide hiernaast is de hoogtelijn uit de top getekend. Dat is de lijn loodrecht op het grondvlak. We doorsnijden de piramide met een horizontaal vlak op hoogte $\frac{1}{5}$.

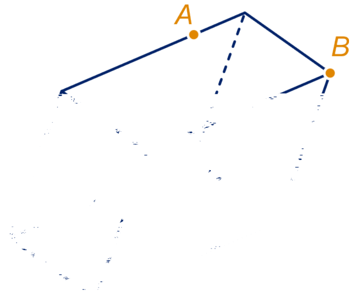


a Teken de doorsnede op het werkblad.

De doorsnede verdeelt de piramide in twee stukken.
b Welk stuk heeft de grootste inhoud, het bovenste of het onderste? Hoeveel procent van de totale inhoud?

16

Een "scheve balk" noemt men wel een ;
de zes grensvlakken zijn parallellogrammen, twee aan twee congruent (precies op elkaar passend).



a Bepaal op het werkblad het middelpunt van het parallellepipedum.

We bekijken het vlak dat door het middelpunt gaat en door de punten A en B.

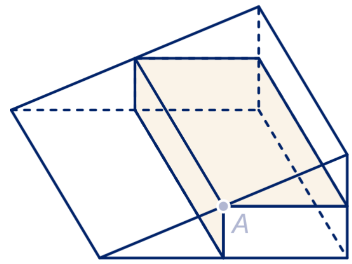
b Teken op het werkblad de doorsnede van dit vlak met het parallellepipedum.

c Wat voor vierhoek is de doorsnede?

d Wat is de verhouding van de inhouden van de stukken waarin het parallellepipedum is verdeeld?

17

A is het midden van een ribbe van het prisma hiernaast. We bekijken twee vlakken door A: het vlak evenwijdig aan het grondvlak en het vlak evenwijdig aan het rechter zijvlak. Deze vlakken verdelen het prisma in drie stukken.
Wat is de verhouding van de inhouden van deze stukken?



18

We nemen hetzelfde prisma als in de vorige opgave. Punt B verdeelt de ribbe in stukken die zich verhouden als $1 : 2$. We bekijken het vlak door B dat evenwijdig is aan het grondvlak en het vlak door B dat evenwijdig is aan het linker zijvlak.

a Teken op het werkblad de doorsneden van deze vlakken met het prisma.

b Wat is de verhouding van de inhouden van de stukken waarin het prisma is verdeeld?

19

Van een vierzijdige piramide staan linker zijvlak, achtervlak en grondvlak loodrecht op elkaar. A is het midden van een van de opstaande ribben. We bekijken drie vlakken door A: evenwijdig aan het grondvlak, evenwijdig aan het linker zijvlak en evenwijdig aan het achtervlak.

a Teken op het werkblad de doorsneden van deze vlakken met de piramide.

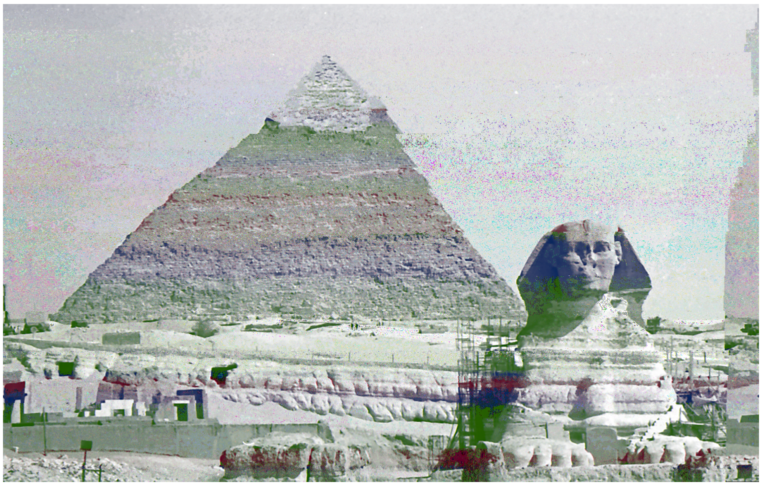
De vlakken verdelen de piramide in vijf stukken.

b Geef een volledige naam voor elk van deze stukken.

c Leg uit dat de twee prisma's dezelfde inhoud hebben.

Zeg dat de hele piramide inhoud 80 heeft. Twee van de vijf stukken zijn piramides.

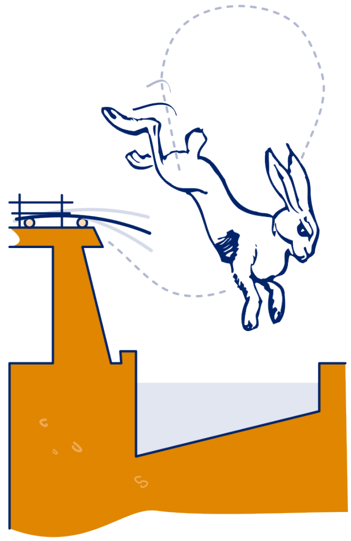
d Wat is dan de inhoud van deze piramides?
Wat is de inhoud van de andere drie stukken?



De piramide van Cheops bij Gizeh (gebouwd rond 2690 voor Chr.)

20 De bodem van een zwembassin loopt gelijkmatig af : bij de startblokken is het bad 3 meter diep, terwijl het aan de overkant 1 meter diep is. Het bassin is 50 meter lang en 20 meter breed.

a Bereken hoeveel m^3 water er in het bassin zit.



’s Winters laat men het bad leeglopen. De lange zijde van de bodem is iets langer dan 50 meter.

b Hoeveel langer?

De wanden zijn 50 cm hoger dan de waterspiegel.

c Bereken de oppervlakte van elk van de vier zijvlakken van het bassin.

d Bereken de hellingshoek van de bodem, dat is de hoek die de bodem maakt met een horizontaal vlak.

Het is snikheet. Tweehonderd badgasten hebben verkoeling gezocht in het bassin. Laten we de inhoud van een badgast eens op 75 liter stellen.

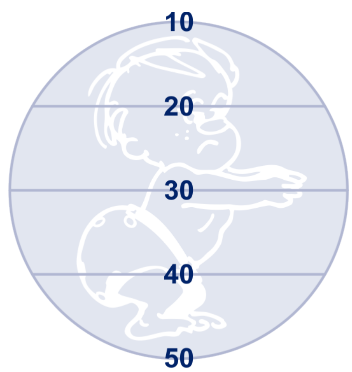
e Hoeveel zou het waterpeil dalen, als ze allemaal tegelijk het bad zouden verlaten?

21 Er is ook een kinderbad. Dat is vierkant: 30 bij 30 meter, met in het midden een betonnen eiland van 6 bij 6 meter.
Ook van het kinderbad loopt de bodem gelijkmatig af: aan de ene kant is het 50 cm diep, aan de overkant 1 meter. De wanden van het betonnen eiland zijn verticaal.
Hoeveel m^3 water zit er in het kinderbad?

22 We nemen ook het peuterbad onder de loep. Dat is cirkelvormig met diameter 20 m. De bodem loopt weer gelijkmatig af: de diepte neemt toe van 10 tot 50 cm.

a Hoeveel m^3 water zit er in het peuterbad?

Hint 1.



b Bereken de hellingshoek van de bodem.

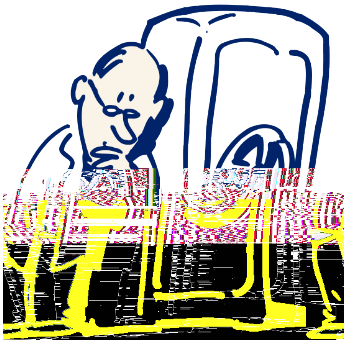
Er zijn op de bodem drie felgekleurde lijnen geverfd. De groene lijn geeft aan waar het bad 20 cm diep is, de blauwe waar het 30 cm diep is, de rode waar het bad 40 cm diep is.

c Bereken exact hoe lang elk van de lijnen is.

23 Een soeppan is 30 cm breed en 20 cm hoog.
Hoeveel liter (dm^3) is de inhoud?

24 Voor de centrale verwarming worden wel stalen buizen gebruikt met een buitendiameter van 24 mm en een wanddikte van 2 mm.
Bereken hoeveel zo'n buis van 1 meter lengte weegt.
(1 dm^3 staal weegt 7,8 kg.)

25 Een moderne brandkast is dubbelwandig: tussen de buiten- en binnenwand zit isolatiemateriaal dat bestand is tegen zeer hoge temperaturen (tot 1000°C).



a Waarvoor dient dit materiaal?

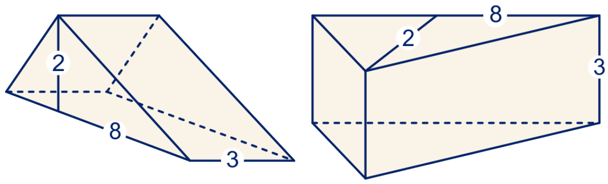
Van een brandkast zijn de buitenmaten 102, 62 en 62 cm en de binnenmaten 88, 48 en 48 cm.
Het plaatstaal is 1 cm dik.

b Bereken hoeveel dm^3 ruimte tussen de wanden zit.

26 De zijkanten van een tent zijn rechthoeken, 17 dm hoog en 20 dm lang. Voor (en achter) is de tent 16 dm breed.

Bereken de inhoud van de tent.

27 Neem van het prisma hieronder links de rechthoek van 8 bij 3 als grondvlak; de bijbehorende hoogte is 2. Door het prisma via de hoogtelijn (zie plaatje) door te zagen, krijg je twee halve balken.



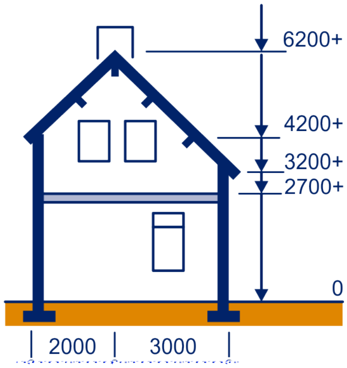
a Bereken exact de inhoud.

Neem in de figuur rechts de driehoek als grondvlak; de bijbehorende hoogte is 3.

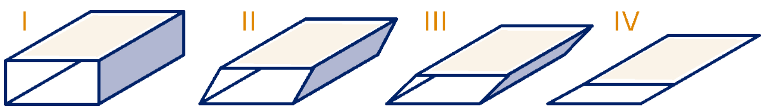
b Bereken de inhoud.

28 Uit een plank van 5 cm dikte heeft iemand een stuk gezaagd met zijden van 60 en 50 cm. De zaagsneden maken hoeken van 30° met de plank.
Bereken de inhoud van het stuk.

29 Een architect heeft een vrijstaand huis ontworpen. Het is 6 meter breed; zie voor de overige maten de doorsnede. Om de bouwkosten te schatten hanteert de architect de volgende vuistregel: elke m^3 kost € 350 (prijs van 2014).
Op welk bedrag schat de architect de bouwkosten?



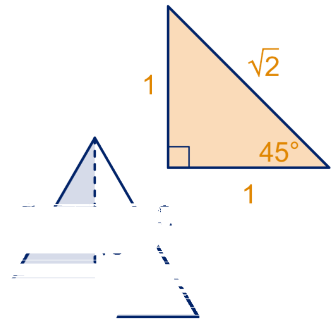
30 Een luciferdoosje meet 1 bij 3 bij 5 cm.
We duwen het omhulsel scheef. In stand I is de opening nog rechthoekig. In stand II is de opening een parallellogram met een hoek van 60°. In stand III is die hoek 45° en in stand IV 30°.
Je kunt het doosje ook nog helemaal platdrukken, dan is de inhoud 0.



Bereken de inhoud binnen het omhulsel in elk van deze standen. Geef zowel de exacte antwoorden als benaderingen in mm^3 nauwkeurig.

Opmerking

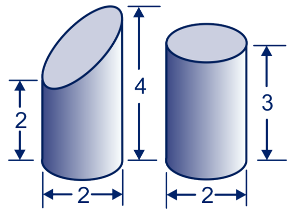
De halve gelijkzijdige driehoek heeft hoeken van 30°, 60° en 90°;
de "geodriehoek" heeft hoeken van 45°, 45° en 90°.
De zijden van deze driehoeken hebben bekende verhoudingen, zie plaatje.



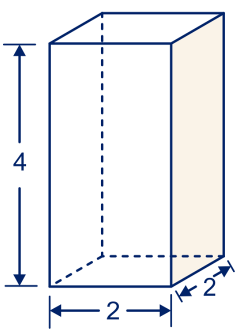
31 We vergelijken een scheefafgezaagde cilinder met een gewone cilinder. De afmetingen zijn hiernaast vermeld.

a Leg uit dat de lichamen dezelfde inhoud hebben.
Hoe groot is die inhoud?

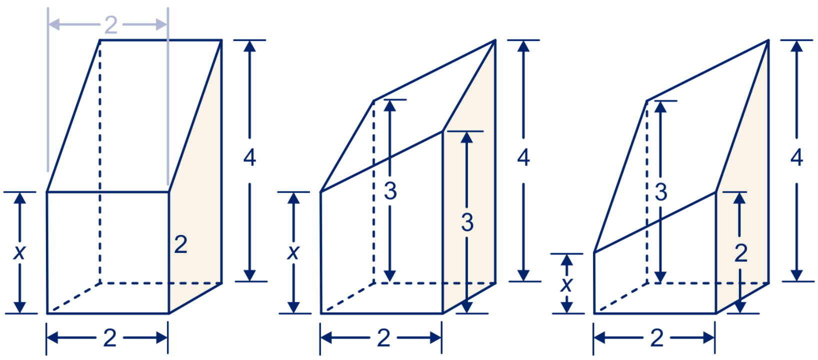
b Hebben de cilindermantels dezelfde oppervlakte? (De mantel van een cilinder is het gebogen deel.)
Hoe groot is die oppervlakte exact?



32 We zagen de balk van 2 bij 2 bij 4 uit figuur 1 op drie manieren scheef af, zie figuur 2.
Van drie van de verticale ribben is de lengte vermeld.



figuur 1



figuur 2

a Hoe lang is de vierde verticale ribbe?

b Bereken de inhoud van elk van de afgezaagde lichamen.

c Bereken de hellingshoek van het zaagvlak van de eerste twee lichamen. (Bij het derde lichaam is dat veel moeilijker.)

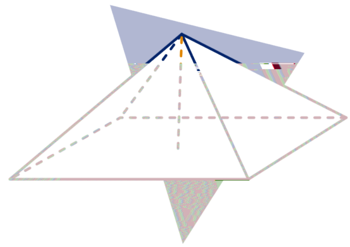
In de oorspronkelijke balk vormen de punten op hoogte 3 een vierkant. We doorsnijden de drie afgezaagde balken ook op hoogte 3.

d Teken de doorsneden op ware grootte. Neem 1 cm als eenheid.

e Bereken de oppervlakte en de omtrek van deze doorsneden.

1.5 Met piramides een kubus bouwen

33



Een regelmatige vierzijdige piramide heeft een vierkant grondvlak van 1 bij 1. De top ligt recht boven het middelpunt van het grondvlak op hoogte $\frac{1}{2}$.

a Hoe lang zijn de opstaande ribben exact?

b Met hoeveel van zulke piramides kun je een kubus bouwen? Laat op het werkblad zien hoe de piramides in de kubus zitten.

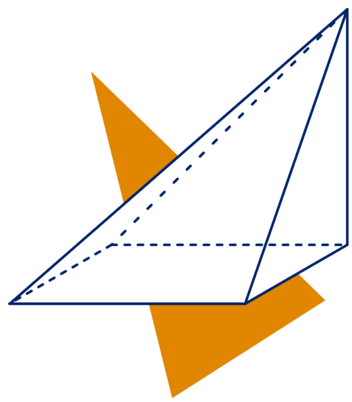
c Wat is dus de inhoud van de piramide?

We bekijken nu een zelfde piramide met grondvlak van r bij r en hoogte r.

d Hoe lang zijn de opstaande ribben?

e Wat is de inhoud van de piramide?

34



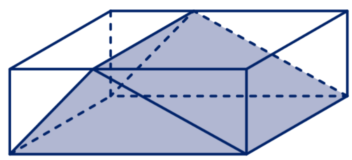
Een piramide heeft een vierkant grondvlak van r bij r. De top ligt recht boven een hoekpunt op hoogte r.

a Hoe lang zijn de opstaande ribben?

b Met hoeveel van zulke piramides kun je een kubus bouwen? Laat op het werkblad zien hoe de piramides in de kubus zitten.
Op het knipblad staan bouwplaatjes voor de piramide. Hiermee kun je controleren of je met zulke piramides inderdaad een kubus kunt bouwen.

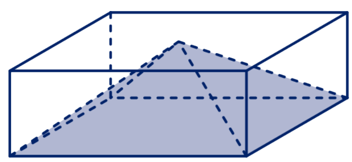
c Wat is dus de inhoud van de piramide?

35



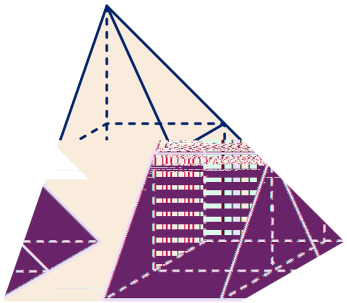
In een balk is een driezijdig prisma getekend. De balk en het prisma hebben hetzelfde grondvlak en zijn even hoog.

a Beredeneer dat de inhoud van het prisma precies de helft is van de inhoud van de balk.



In een balk is een piramide getekend. De balk en de piramide hebben hetzelfde grondvlak en zijn even hoog. Uit de vorige vraag is duidelijk dat de inhoud van de piramide minder dan de helft van de inhoud van de balk is. In de volgende paragraaf zullen we zien dat de inhoud van de piramide het eenderde deel is van de inhoud van de balk.

b Controleer deze factor 'een derde' bij de speciale piramides van opgave 33 en opgave 34.

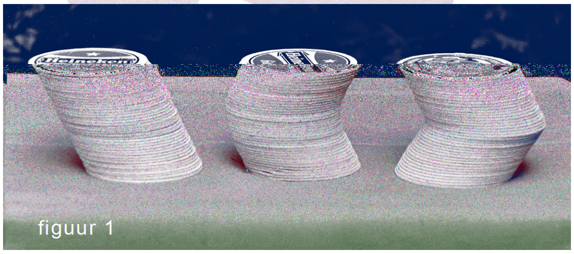


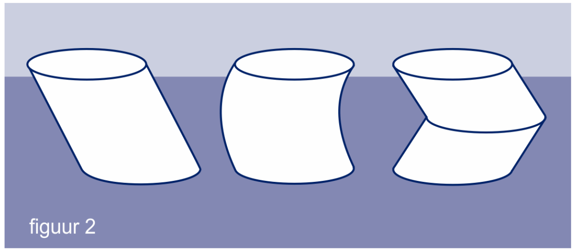
In opgave 19 hebben we een piramide verdeeld in vijf stukken. Uitgaande van de totale inhoud 80 hebben we de inhoud van elk van de stukken bepaald.

c Vergelijk de balk met één van de piramides. Hebben ze een zelfde grondvlak? Én zijn ze even hoog? Is de inhoud van de piramide eenderde van de inhoud van de balk?

36

Anneke speelt met bierviltjes. Zij heeft drie torens gemaakt, elk 40 bierviltjes hoog. Uiteraard hebben de torens dezelfde inhoud. Als de viltjes maar dun genoeg zijn, benaderen de torens 'gladde cilinders' (figuur 2).

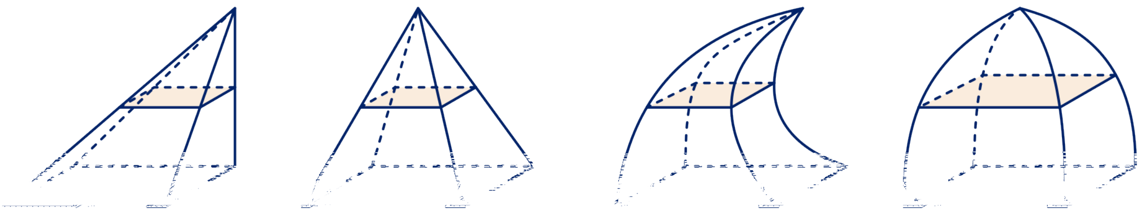

figuur 1


figuur 2

De bierviltjes van Anneke hebben een diameter van $10{,}6$ cm en zijn $2{,}5$ mm dik.

a Bereken de inhoud van de drie cilinders.

In de onderstaande figuur staan vier 'piramides' met een zelfde grondvlak en gelijke hoogte. De doorsnede op halve hoogte is bij alle vier aangegeven.



b Hoe kun je met behulp van bierviltjes uitleggen dat de eerste twee piramides even grote inhoud hebben?

De opstaande 'ribben' van de derde en vierde piramide zijn gekromd.

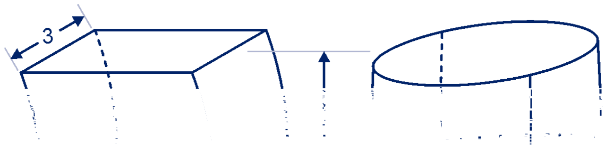
c Waarom kan de derde piramide wel een even grote inhoud hebben als de eerste twee, en de vierde niet?

We bekijken twee lichamen. Veronderstel dat op elke hoogte de doorsnede van het ene lichaam even groot is als de doorsnede van het andere lichaam. Dan hebben de lichamen even grote inhoud.
Dat is goed te begrijpen door beide lichamen horizontaal in plakjes (bierviltjes) te snijden.
We noemen dat de **bierviltjesmethode**.

1.6 De bierviltjesmethode

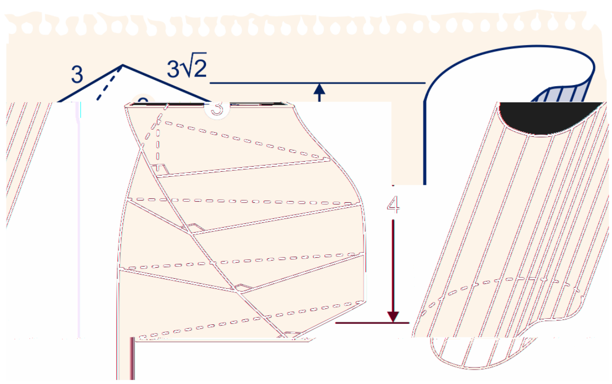
De bierviltjesmethode staat in de wiskunde ook bekend als de **methode van Cavalieri**. Bonaventura Cavalieri (1598 of eerder - Bologna, 1647) was een Italiaans wiskundige, natuurkundige, sterrenkundige en astroloog. Hij werd bekend om zijn nieuwe methoden ter berekening van inhouden en oppervlakken, zoals de methode van Cavalieri.

37 Een scheefgetrokken 'balk' heeft hoogte 4. Het vierkante grondvlak meet 3 bij 3. Het vreemde lichaam daarnaast heeft een cirkelvormig bovenvlak en een vierkant grondvlak. Daartussen zitten allerlei overgangsvormen als horizontale doorsneden. Gegeven is dat op elke hoogte de doorsnede oppervlakte 9 heeft. De hoogte van het lichaam is 4.



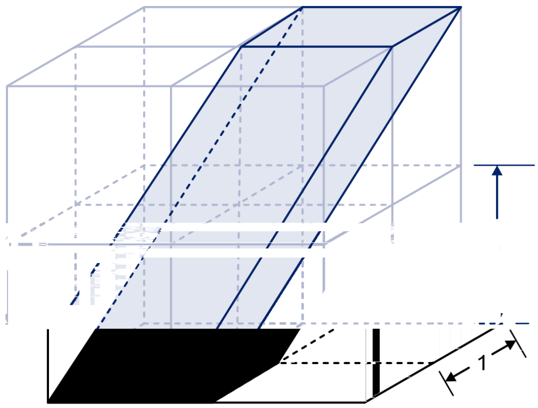
a Bereken van beide lichamen de inhoud.

Een gedraaid prisma heeft hoogte 4. Op elke hoogte is de doorsnede een rechthoekige driehoek met zijden 3, 3 en $3\sqrt{2}$. Het lichaam daarnaast is een scheef soort cilinder met een ongewoon grondvlak van oppervlakte 2. Alle horizontale doorsneden zijn congruent met het grondvlak. De hoogte van het lichaam is 4.



b Bereken van beide lichamen de inhoud.

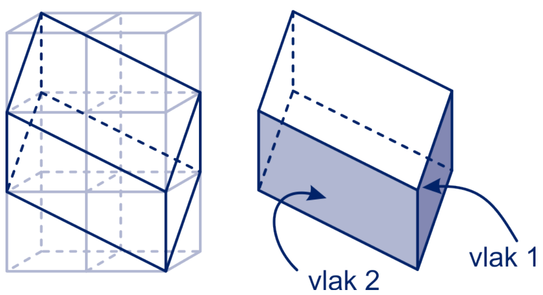
38 In een rooster van kubussen met ribbe 1 is een parallellepipedum getekend.



a Hoe lang zijn de ribben van het parallellepipedum?
b Hoe lang zijn de vier lichaamsdiagonalen van het parallellepipedum?
c Bereken de inhoud van het parallellepipedum.

Op het werkblad is een begin gemaakt met een uitslag van het parallellepipedum. Er ontbreken nog twee grensvlakken.
d Teken die erbij, grenzend aan de gestippelde ribben.

39 In een zelfde kubussenrooster is een tweede parallellepipedum getekend.



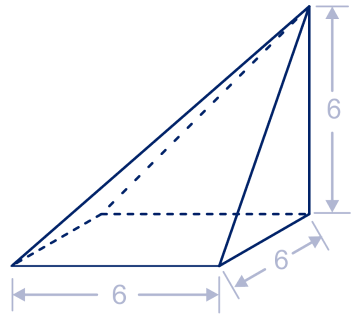
a Hoe lang zijn de ribben?

We nemen zijvlak 1 als grondvlak.
b Wat is de oppervlakte van zijvlak 1?
Wat is de bijbehorende hoogte?
Wat is dus de inhoud?

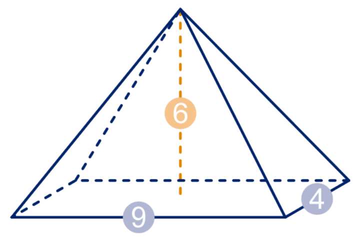
We nemen zijvlak 2 als grondvlak.
c Wat is de oppervlakte van zijvlak 2?
Wat is de bijbehorende hoogte?
Wat is dus de inhoud?

40

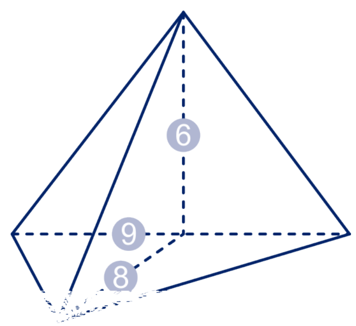
We bekijken drie piramides met hoogte 6. Van de eerste piramide is het grondvlak een vierkant van 6 bij 6 en ligt de top recht boven een van de hoekpunten.
Van de tweede piramide is het grondvlak een rechthoek van 9 bij 4 en ligt de top recht boven het middelpunt. Van de derde piramide is het grondvlak een driehoek met basis 9 en hoogte 8; de top ligt recht boven het midden van de basis.



figuur 1



figuur 2



figuur 3

a Kleur op het werkblad de horizontale doorsneden van deze drie piramides op de hoogten 1, 3 en 5.

b Bereken de oppervlakte van elk van die doorsneden.

c Leg uit dat de oppervlakte van de horizontale doorsnede op hoogte h gelijk is aan $36 \cdot \dfrac{(6-h)^2}{h^2}$.

Met behulp van 34 kun je de inhoud van de eerste piramide geven.

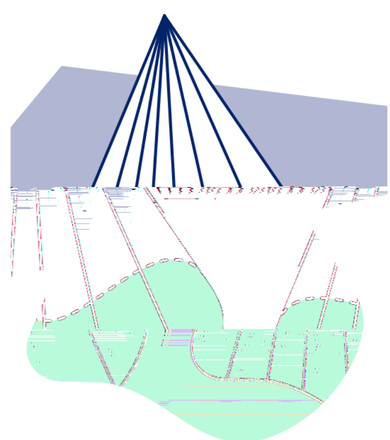
d Hoe groot is die inhoud?

e Leg met behulp van de bierviltjesmethode uit dat de drie piramides dezelfde inhoud hebben.

f Doet de plaats van de top er eigenlijk wel toe?
Wat moet je precies weten om de inhoud van een piramide uit te kunnen rekenen?

De inhoud van de piramide van opgave 40 was het eenderde deel van de inhoud van de balk met hetzelfde grondvlak en gelijke hoogte. In opgave opgave 45 bewijzen we dat dat voor elke vierzijdige piramide het geval is.

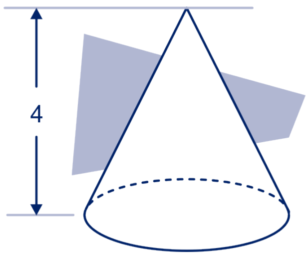
Inhoud van een piramide = $\frac{1}{3}\cdot$ oppervlakte grondvlak $\cdot$ hoogte.



Deze formule geldt voor alle piramideachtige lichamen, dat zijn lichamen met een grondvlak en een top, waartussen rechte lijnen lopen. Met de bierviltjesmethode is duidelijk dat de vorm van het grondvlak er niet toe doet.
In het bijzonder geldt deze formule als het grondvlak een cirkel is; dan is het lichaam een kegel.

41 Een kegel heeft hoogte 4. De straal van de grondcirkel is 4.

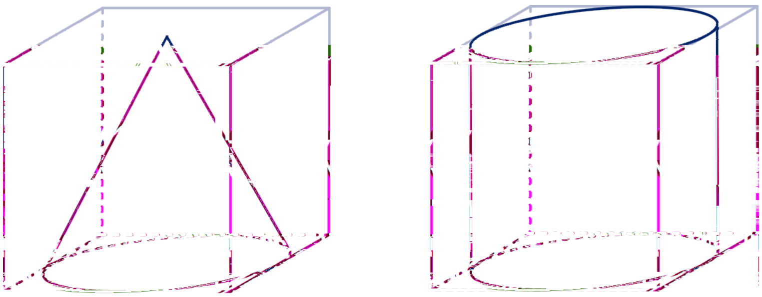
a Bereken de inhoud van de kegel. Geef het antwoord exact en in twee decimalen nauwkeurig.



Een kegel heeft hoogte h. De straal van de grondcirkel is r.

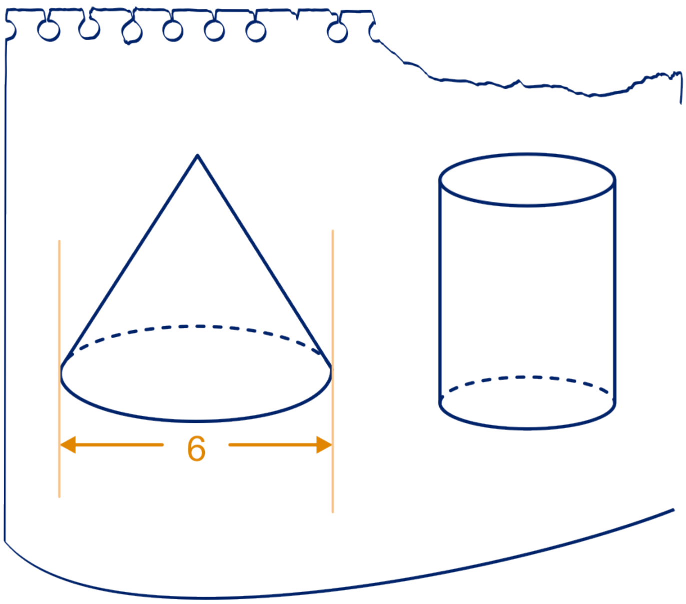
b Wat is de inhoud van de kegel? Laat π gewoon in je antwoord staan.

42 Een kegel en een cilinder passen precies in een kubus met ribbe 1.



Bereken van beide de inhoud.

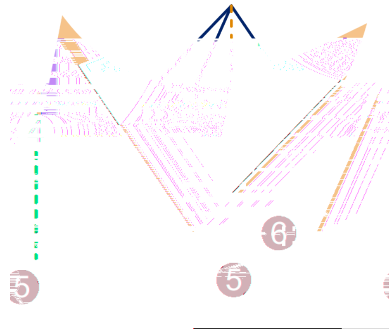
43 Een kegel en een cilinder zijn even hoog en hebben een even grote inhoud. De diameter van de grondcirkel van de kegel is 6.



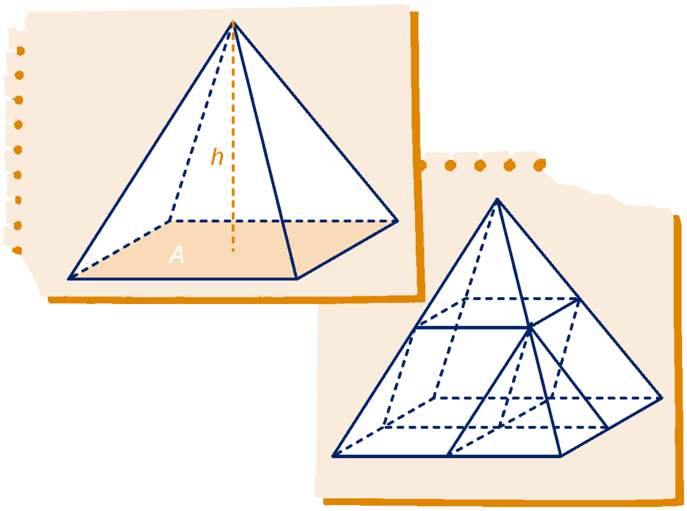
Bereken de diameter van de grondcirkel van de cilinder.

1.7 De inhoud van een piramide

44 Een driezijdige piramide heeft hoogte 4. Het grondvlak is een driehoek met zijden 5, 5 en 6, zie de figuur hiernaast.
Bereken de inhoud van de piramide.



45 **Het bewijs**
Een vierzijdige piramide heeft hoogte h; de oppervlakte van het grondvlak is A. De inhoud van de piramide noemen we V.
We gaan in deze opgave afleiden dat geldt: $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$.
Om een overzichtelijk plaatje te krijgen kiezen we een parallellogram als grondvlak; de afleiding kan echter bij elk vierhoekig grondvlak gehouden worden.
Vanuit de middens van de ribben verdelen we de piramide in vijf stukken: twee kleinere piramides, twee prisma's en één parallellepipedum.



a Druk de inhoud van het parallellepipedum uit in A en h.
Druk de inhoud van de (scheve) prisma's uit in A en h.

De bovenste kleine piramide ontstaat uit de hele piramide door deze vanuit een zeker centrum met een zekere factor te vermenigvuldigen.

b Welk centrum en welke factor?
Dezelfde vraag voor de andere kleine piramide.

c Wat is dus de inhoud van deze piramides, uitgedrukt in V?

V is de som van de inhouden van de vijf stukken.

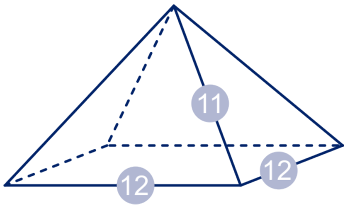
d Ga na dat dit de volgende vergelijking levert voor V:
$V = \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}Ah$.

e Laat zien dat uit de vergelijking volgt: $V = \frac{1}{3}h \cdot A$.

Afgeknotte piramides en kegels

46 Van een regelmatige vierzijdige piramide is het grondvlak een vierkant van 12 bij 12 en hebben de opstaande ribben lengte 11.

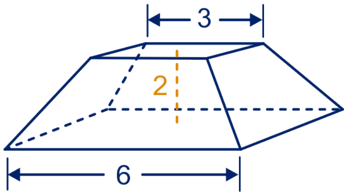
a Bereken de inhoud.



Het horizontale vlak op halve hoogte verdeelt de piramide in twee delen. Het onderste deel is een afgeknotte piramide.

b Bereken de inhoud van deze afgeknotte piramide.

47 Een afgeknotte piramide heeft een vierkant bovenvlak van 3 bij 3 en een vierkant ondervlak van 6 bij 6. De hoogte is 2. Door de opstaande ribben te verlengen maak je er een complete piramide van.



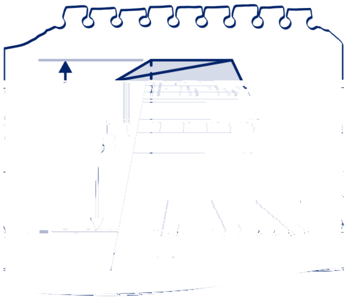
a Hoe hoog is die complete piramide?

b Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide.

48 Eenzelfde opgave als 47 maar dan met een ondervlak van 5 bij 5; de andere afmetingen blijven hetzelfde.
Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide.

Hint 2.

49 Een afgeknotte driezijdige piramide heeft hoogte 3. Het bovenvlak heeft oppervlakte 1, het ondervlak heeft oppervlakte 3.
Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide.



50 Een emmer heeft boven een diameter van 4 cm; de bodem heeft een diameter van 16 cm. De emmer is 25 cm hoog.
De emmer heeft de vorm van een afgeknotte kegel.

a Maak in gedachten de kegel af.
Hoe hoog wordt die kegel?

b Bereken de inhoud van de emmer in dl nauwkeurig.

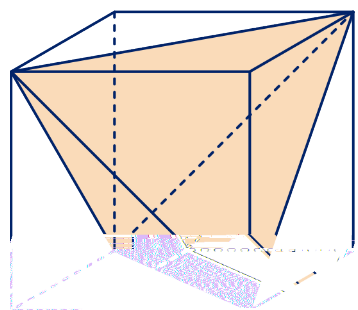
Gevarieerde opgaven

51 In de figuur staat een rechte balk van a bij b bij c. De vier lichaamsdiagonalen verdelen de balk in zes piramides.
Welke van die zes heeft de grootste inhoud?

52 Van een halve cirkelschijf kun je een kegel maken. Probeer maar! De halve cirkel heeft straal 4.

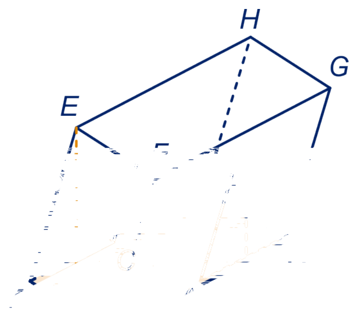
a Wat is exact de straal van de grondcirkel van de kegel?
b Bereken de hoogte van de kegel exact en de tophoek in graden nauwkeurig.
c Bereken de inhoud van de kegel exact.

53 In een kubus met ribbe 1 zijn zes zijvlaksdiagonalen getekend. Het zijn de ribben van een regelmatig viervlak.
Je kunt dat viervlak ook in een andere positie in de kubus tekenen: met een hoekpunt links-voor-onder.
a Doe dat op het werkblad.



Als je het viervlak uit de kubus weghaalt, houd je vier congruente piramides over.
b Bereken de inhoud van zo'n piramide.
c Wat is dus de inhoud van het viervlak?
d Hoe lang zijn de ribben van het viervlak?
e Met welke factor moet je het viervlak vermenigvuldigen om een viervlak met ribbe 1 te krijgen?
f Wat is dus de inhoud van een regelmatig viervlak met ribbe 1 exact?

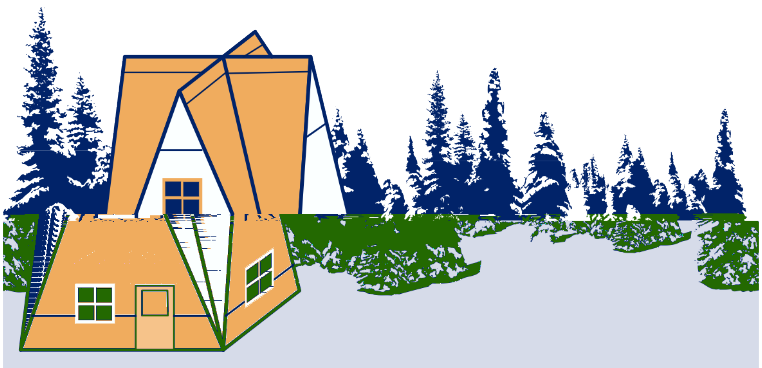
54 De inhoud van parallellepipedum $ABCD.EFGH$ is 30.



a Wat is de inhoud van het prisma $ABCD.GH$?
En van het prisma $ABCD.EH$?

b Wat is de inhoud van de piramide $ABCD.E$?
En van de piramide $ABC.E$?

55 Herinner je je het vakantiehuisje uit het hoofdstuk Pythagoras nog? De vier gevels hebben de vorm van een gelijkbenige driehoek. Het huisje is $4{,}80$ m hoog, 4 m breed en 4 m lang.

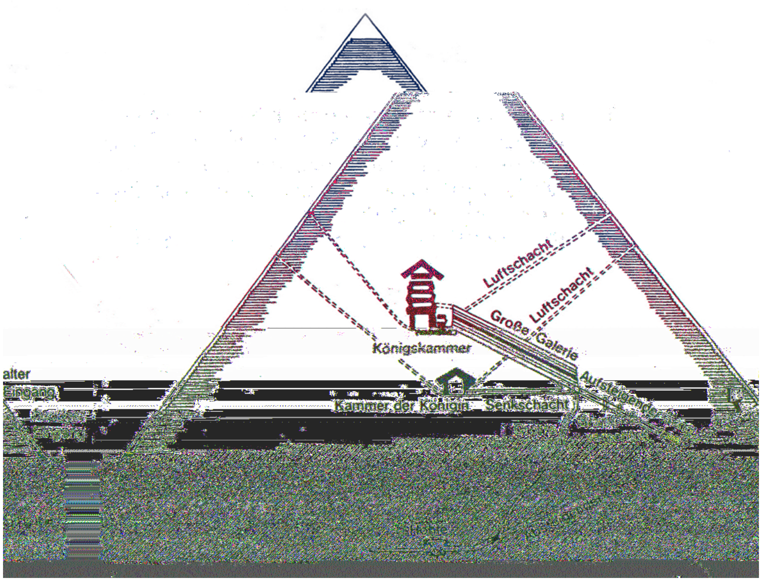


a Bereken de inhoud van het huis.

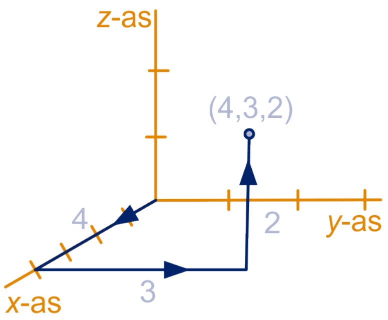
Hint 3.

We bekijken de horizontale doorsneden van het huisje op de hoogten $1{,}20$ m, $2{,}40$ m en $3{,}60$ m.

b Teken deze doorsneden op schaal.



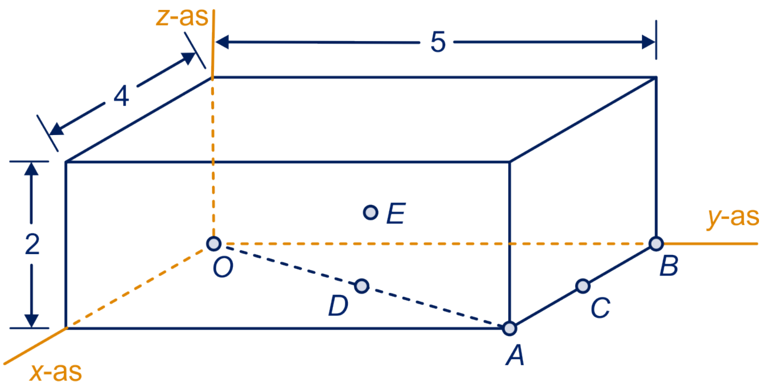
De inhoud van de piramide van Chefren



In de tweede klas heb je leren werken met coördinaten in de ruimte. We herhalen even het belangrijkste.

Net als in het platte vlak kunnen we in de ruimte elk punt van coördinaten voorzien. Alleen hebben we nu drie getallenlijnen nodig, de zogenaamde . De assen snijden elkaar loodrecht in de , dat is het punt met coördinaten $(0,0,0)$.
Als je vanuit de oorsprong 4 eenheden langs de x-as (dat is naar voren) gaat, daarna 3 eenheden evenwijdig aan de y-as (dat is naar rechts) en dan nog 2 eenheden langs de z-as (dat is naar boven), dan kom je in het punt $(4,3,2)$.

56 In de figuur is in zo'n assenstelsel een balk getekend waarvan de ribben 4, 5 en 2 lang zijn. O is de oorsprong, A en B zijn hoekpunten, C is het midden van AB, D is het midden van zijvlaksdiagonaal OA en E is het middelpunt van de balk.



Geef van elk van deze punten de coördinaten.

57 Op het werkblad is een assenstelsel getekend.

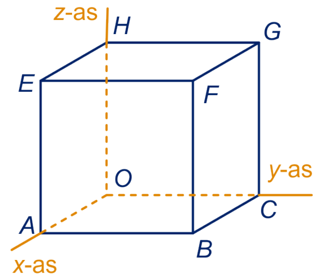
a Kleur in het assenstelsel op het werkblad: rood de verzameling punten $(a,4,0)$ met $-2 \leq a \leq 5$, blauw de verzameling punten $(0,3,b)$ met $-2 \leq b \leq 5$.

We bekijken de verticale lijn door het gemeenschappelijke punt van het rode en het blauwe lijnstuk.

b Teken die lijn op het werkblad.

c Wat weet je van de coördinaten van een punt dat op deze verticale lijn ligt?

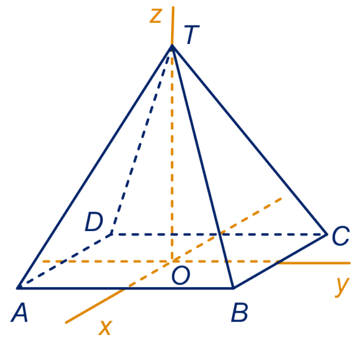
58 De ribben van de kubus in de figuur zijn 4.



a Kleur op het werkblad binnen de kubus:
het vlakdeel waar de punten liggen met $y = 3$,
en met een andere kleur het vlakdeel waar de punten liggen met $z = 2$.

b Wat weet je van de punten die in beide vlakdelen liggen?

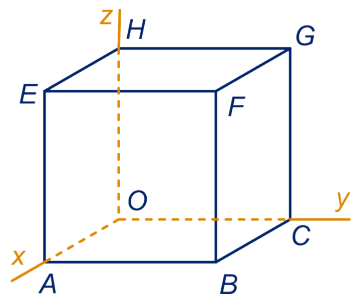
59 Van de piramide $T.ABCD$ is het grondvlak een vierkant met zijden 6 en is de hoogte ook 6. We doorsnijden de piramide met het vlak met vergelijking $z = 2$.



a Kleur op het werkblad de doorsnede.

b Bereken de inhoud van elk van de stukken waarin dit vlak de piramide verdeelt.

60 De ribben van de kubus in de figuur zijn 4. We bekijken de punten waarvoor de som van de coördinaten 4 is.
Drie hoekpunten van de kubus hebben deze eigenschap.



a Welke hoekpunten zijn dat?

De punten (x, y, z) waarvoor de som van de coördinaten 4 is, liggen in één vlak. In formule: $x + y + z = 4$.

b Kleur op het werkblad de doorsnede van dit vlak met de kubus.

c Bereken de inhoud van elk van de stukken waarin het vlak de kubus verdeelt.

De punten (x, y, z) waarvoor geldt: $x + y + z = 6$ liggen ook allemaal in één vlak. Onder andere de middens van zes ribben van de kubus.

d Spoor die middens op en kleur op het werkblad de doorsnede van het vlak met de kubus.

e Ga na dat het middelpunt van de kubus in dat vlak ligt.

f Wat is de inhoud van elk van de stukken waarin dat vlak de kubus verdeelt?

g Vul in: voor de punten (x, y, z) in het vlak dat door E, B en G gaat, geldt: $x + y + z =$ _.

61 Gegeven zijn de punten: $O\,(0{,}0{,}0)$, $P(3{,}0{,}4)$, $Q\,(3{,}5{,}4)$, $A\,(6{,}0{,}0)$, $B\,(6{,}5{,}0)$ en $C\,(0{,}5{,}0)$.
Het lichaam met deze punten als hoekpunten noemen we L.

a Teken L op het werkblad.

b Kun je aan de coördinaten van de hoekpunten zien dat de ribben AB, OC en PQ evenwijdig en even lang zijn?
Wat voor soort lichaam is L dus?

c Geef een formule van vlak $OABC$, van vlak OAP en van vlak BCQ.

d Kleur de doorsnede van vlak BCP met L.

e Bereken de inhoud van elk van de stukken waarin vlak BCP het prisma L verdeelt.

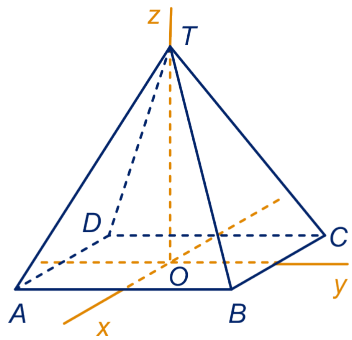
62

We bekijken opnieuw de piramide van opgave 59. M is het midden van ribbe CT, P ligt op ribbe BT en Q ligt op ribbe DT. P en Q hebben derde coördinaat 2.

a Geef de punten P, Q en M op het werkblad aan.

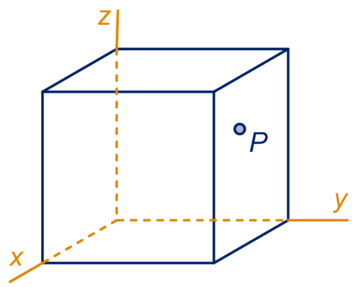
b Geef de coördinaten van de punten P, Q en M.

c Ga na dat de coördinaten van de punten A, P, Q en M aan de vergelijking $x - y + 3z = 6$ voldoen.



63

De kubus in de figuur heeft ribben van lengte 4. Het punt P ligt in het rechter zijvlak. De eerste coördinaat van P noemen we a, de derde coördinaat c. $P = (a,4,c)$.
Q is het spiegelbeeld van P in het vlak $y = x$, R is het spiegelbeeld van P in het vlak $y = 2$, S is het spiegelbeeld van P in het middelpunt van de kubus.
Wat zijn de coördinaten van Q, R en S (uitgedrukt in a en c)?



64

We bekijken het viervlak met hoekpunten $(6,0,0)$, $(0,6,0)$, $(6,6,0)$ en $(4,4,7)$.

a Teken het viervlak op het werkblad.

Het viervlak heeft een symmetrievlak.

b Welke formule geldt voor de punten (x, y, z) in dit symmetrievlak?

c Kleur de doorsnede van het symmetrievlak met de piramide.

d Bereken de inhoud van het viervlak.

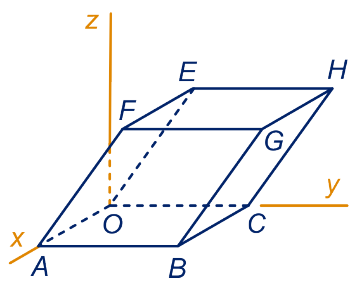
65

In de figuur is een parallellepipedum getekend. Van drie hoekpunten zijn de coördinaten gegeven: $A = (6,0,0)$, $C = (0,5,0)$ en $E = (-2,2,4)$.

a Geef de coördinaten van de andere hoekpunten.

b Geef de coördinaten van het middelpunt van het parallellepipedum.

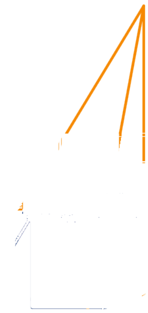
c Bereken de inhoud van het parallellepipedum.



lengte, oppervlakte, inhoud

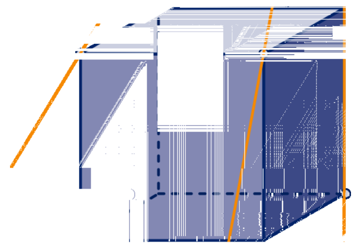
Als we een lichaam vanuit een zeker centrum vermenigvuldigen met een positieve factor p

- dan worden de lengten p keer zo lang,
- dan wordt de oppervlakte p^2 keer zo groot,
- dan wordt de inhoud p^3 keer zo groot.



de bierviltjesmethode

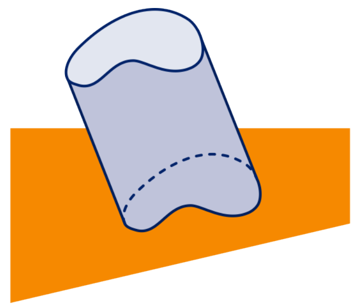
We bekijken twee lichamen. Veronderstel dat op elke hoogte de doorsnede van het ene lichaam even groot is als de doorsnede van het andere lichaam. Dan hebben deze lichamen een even grote inhoud. Dit is goed te begrijpen door beide lichamen in de horizontale richting in plakjes (bierviltjes) te snijden.



cilinders, prisma's, parallellepipeda, ...

Inhoud = oppervlakte grondvlak · hoogte

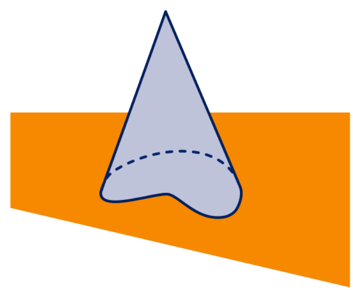
Deze formule geldt voor alle cilinderachtige lichamen, dat zijn lichamen die op elke hoogte even grote doorsnede hebben. In het bijzonder geldt de formule voor parallellepipeda.



piramides, kegels, ...

Inhoud = $\frac{1}{3}$· oppervlakte grondvlak· hoogte

Deze formule geldt voor elk piramide-achtig lichaam, dat is een lichaam met een grondvlak en een top, waartussen rechte lijnen lopen. Met de bierviltjesmethode is duidelijk dat de vorm van het grondvlak er niet toe doet. In het bijzonder geldt deze formule als het grondvlak een cirkel is.



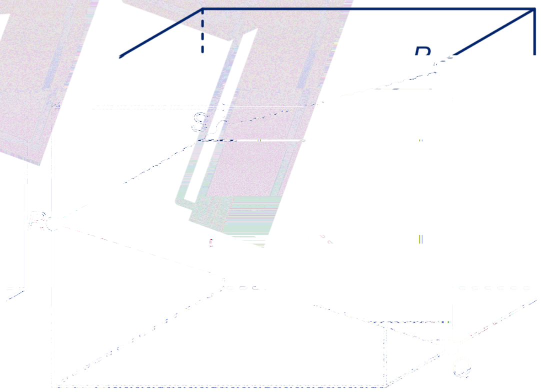
met coördinaten

We voorzien de ruimte van een assenstelsel. Zodoende wordt aan elk punt in de ruimte een drietal coördinaten toegekend.

1.11 Extra opgaven

1

In een balk van 5 bij 6 bij 7 is een viervlak $PQRS$ getekend. RS is een horizontaal lijnstuk in het linker zijvlak en PQ is een verticaal lijnstuk in het rechter zijvlak. In deze opgave gaan we de inhoud van dit viervlak berekenen.



We doorsnijden het viervlak met het horizontale vlak dat door RS gaat.

a Kleur op het werkblad de doorsnede.

Het punt van deze doorsnede dat op lijnstuk PQ ligt noemen we T. Het viervlak is nu verdeeld in twee driezijdige piramides: $P.RST$ en $Q.RST$.
Zeg dat de hoogte TQ van de tweede piramide h is. Dan is de hoogte PT van de andere piramide $5 - h$.

b Druk de inhoud van beide piramides uit in h.

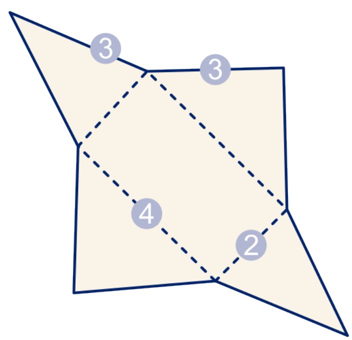
c Wat is dus de totale inhoud van het viervlak? Vereenvoudig je antwoord zo ver mogelijk.

Je kunt het bovenstaande ook uitvoeren in een balk van a bij b bij c.

d Wat is dan de inhoud van het viervlak (uitgedrukt in a, b en c)? Vereenvoudig je antwoord zo ver mogelijk.

2

In de figuur staat de uitslag van een piramide. De maten zijn erbij vermeld.
Bereken de inhoud.



1.11 Extra opgaven

3

450 gram suikerstroop is verpakt in een kartonnen potje.
De bodem heeft een diameter van 6 cm en het kartonnen afdekplaatje heeft een diameter van 8 cm.
Het potje is helemaal gevuld tot een hoogte van 9 cm. Hoeveel cm^3 stroop er in het potje zit, is er niet op vermeld.

a Bereken jij dat?

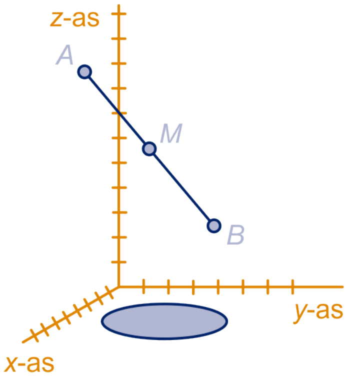
Van een grotere verpakking zijn alle afmetingen $1\frac{1}{2}$ keer zo groot.

b Hoeveel gram stroop zit er in deze grotere pot?

4

In een assenstelsel zijn gegeven de punten $A\,(6,1,10)$ en $B\,(-2,3,2)$. M is het midden van lijnstuk AB.

a Wat zijn de coördinaten van M?



In het Oxy-vlak (dat is het vlak waarin de x-as en y-as liggen) ligt een gebied met oppervlakte 10. We bekijken de drie kegels met dit gebied als grondvlak en achtereenvolgens A, M en B als top.

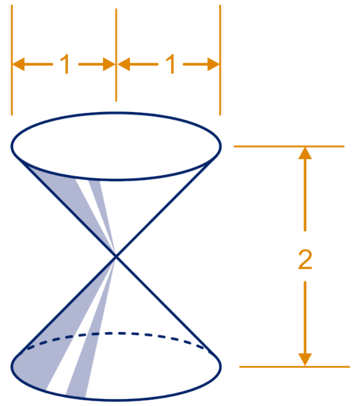
b Bereken de inhoud van elk van die kegels.

5

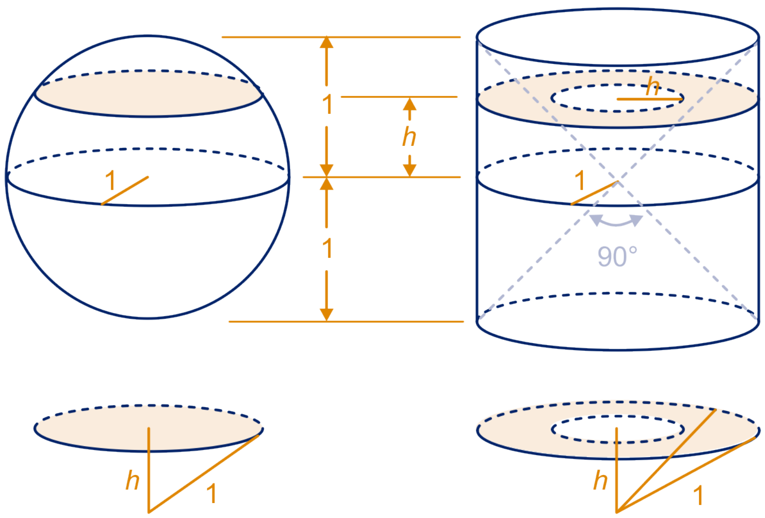
In Philadelphia (USA) is in 1976 een gigantische wasknijper gebouwd door de kunstenaar Claes Oldenburg met een totale hoogte van 14 meter. Een normale wasknijper is 7 cm hoog en weegt 6 gram.
Veronderstel dat de reuzenknijper van hetzelfde materiaal is vervaardigd als zijn kleine voorbeeld.
Hoe zwaar is de gigant dan?

6 In deze opgave berekenen we de inhoud van een bol.
Van een 'diabolo' (dubbele kegel) is de totale hoogte 2 en hebben de grond- en bovencirkel straal 1.

a Bereken de inhoud van de diabolo.



We vergelijken de bol met straal 1 en de cilinder met straal 1 en hoogte 2, waaruit de diabolo is weggesneden. We gaan met de bierviltjes methode aantonen dat de bol en de cilinder-zonder-diabolo gelijke inhoud hebben. Bekijk daartoe bij beide lichamen de doorsnede op hoogte h.



Bij de bol is de doorsnede cirkelvormig.

b Wat is de straal? En de oppervlakte?

Bij de cilinder-zonder-diabolo is de doorsnede ringvormig.

c Wat is de straal van de binnenste cirkel? En van de buitenste cirkel? Wat is dus de oppervlakte?

Je ziet dat beide doorsneden gelijke oppervlakte hebben. Dat geldt voor elke hoogte h. Volgens de bierviltjesmethode geldt dan:
inhoud bol = inhoud cilinder-zonder-diabolo.

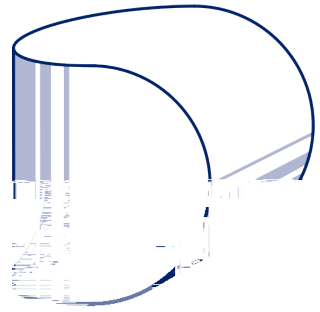
d Wat is dus de inhoud van de bol met straal 1?

e Wat is de inhoud van een bol met straal r?

De inhoud van een bol met straal r is $1\frac{1}{3}\pi r^3$.

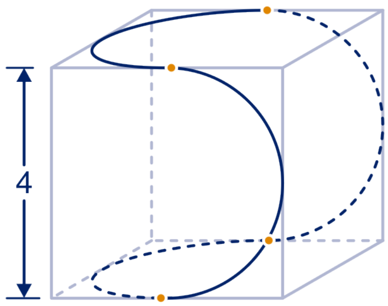
7 Een ruimtelijk lichaam past precies in een kubus met ribbe 4, zie figuur 1.
In de tweede figuur is de rand getekend: vier halve cirkels met straal 2, één in het bovenvlak, één in het voor-, één in het achter- en één in het ondervlak.
Als je de vorm bij de dik getekende punten (eerste plaatje) doorzaagt, krijg je twee congruente delen.

a Bereken de lengte van de rand van het lichaam.
b Bereken de totale oppervlakte.
c Bereken de inhoud.



figuur 1

Heb je ontdekt hoe je deze ingewikkelde vorm kunt maken? Zaag van een bezemsteel een stuk, waarvan de hoogte gelijk is aan de diameter. Zaag dit stuk door de as in twee symmetrische helften. Draai de ene helft een kwartslag en lijm hem aan de andere helft vast.



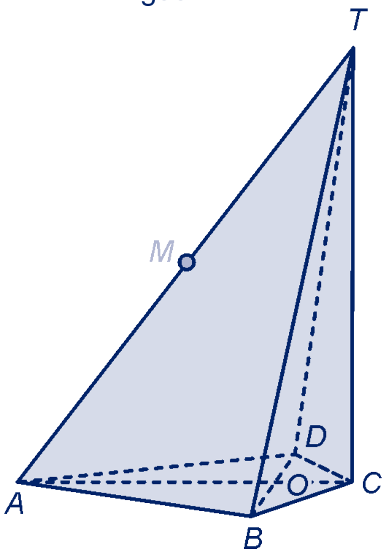
figuur 2

8 Van de piramide $T.ABCD$ is gegeven:
AC en BD snijden elkaar loodrecht in O. $OA = 7$, TC staat loodrecht op vlak $ABCD$, $OC = 2$, $OB = OD = 1\frac{1}{2}$, en $CT = 12$.

a Toon aan dat de inhoud van $T.ABCD$ gelijk is aan 54.

V is een vlak evenwijdig aan $ABCD$ dat van $T.ABCD$ een piramide afsnijdt met inhoud 16.

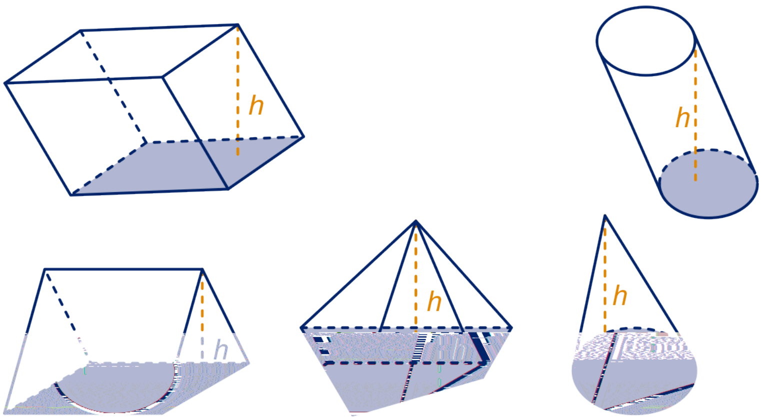
b Bereken de afstand van V tot $ABCD$.



9 Zou er niet één formule zijn waarmee je de inhoud van alle lichamen kunt berekenen? Dat zou natuurlijk prachtig zijn.
We gaan in deze opgave na of de volgende formule er zo een is:

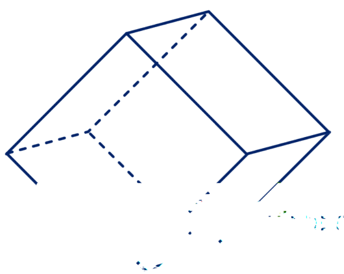
$I = \frac{1}{6}h \cdot (G + 4M + B)$.
Hierbij is h de hoogte van het lichaam, G de oppervlakte van het grondvlak, B de oppervlakte van het bovenvlak en M de oppervlakte van de doorsnede op halve hoogte.

a Ga voor de volgende lichamen na dat de formule de juiste inhoud oplevert, zie figuur 1. Noem steeds de hoogte h en de oppervlakte van het grondvlak G.
- Cilinder en parallellepipedum,
- driezijdig prisma
- piramide en kegel

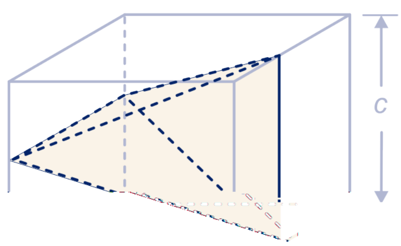


figuur 1

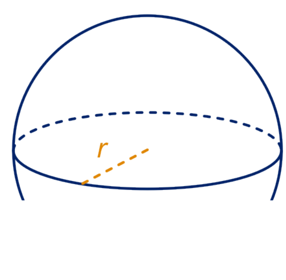
b Ga na of de formule de juiste inhoud oplevert voor een ’gekantelde’ kubus (met vier ribben horizontaal en acht ribben onder een hoek van 45° met een horizontaal vlak), zie figuur 2.



figuur 2



figuur 3



figuur 4

c Ga na of de formule de juiste inhoud oplevert voor het viervlak van extra opgave 1, in figuur 3.

d Ga na of de formule de juiste inhoud oplevert voor een bol (extra opgave 6, zie figuur 4).

Opmerking
Dat de formule ook geldt voor een regelmatig achtvlak en voor afgeknotte kegels en piramides, is lastiger na te gaan.

Natuurlijk is het geen superformule: je kunt hem niet voor elk lichaam gebruiken. Maar, hij geeft wel vaak een goede benadering.

1.11 Extra opgaven

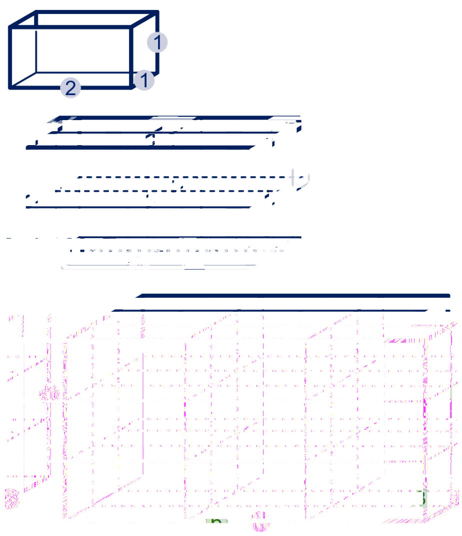
Groot, groter, grootst

1 a De verhouding lengte:breedte:hoogte is voor alledrie hetzelfde.

b

	kleinste	middelste	grootste
Totale lengte lijmnaden	10	20	30
Totale oppervlakte glasplaten	8	32	72
Inhoud	2	16	54

c Zie figuur.



8 keer in het middelste en 27 keer in het grootste.

2 In de kleine doos, want de grote doos heeft een $\left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ keer zo grote inhoud, dus hij zou $\frac{27}{8} \cdot 5 = 16{,}88$ euro moeten kosten als hij net zo duur was als de kleine.

3 60 en 120; 30 en 120; 7 en 56

4 a $1:4:9$; $1:8:27$

b Bij factor 8; bij factor 4

5 a Zie figuur op de volgende bladzijde.

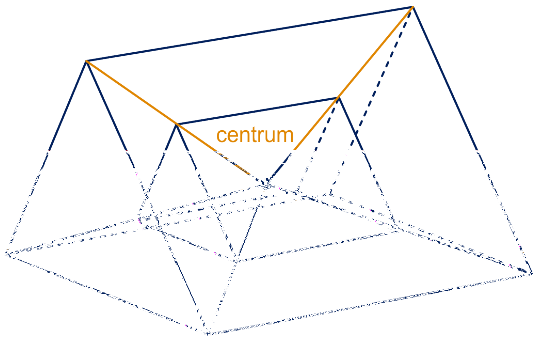
b 2 keer, 4 keer, 8 keer.

c p keer,
p^2 keer,
p^3 keer.

6 **a** Vanuit de top.
b $1:4:9:16$, $1:8:27:64$

7 $6^3 \cdot 33\frac{1}{2} = 7236$ cm^3, dus 72 dl.

8 Neem aan: het kleine viervlak heeft inhoud 10. Dan heeft het grotere viervlak heeft inhoud $2^3 \cdot 10 = 80$. Dus het achtvlak heeft inhoud 40. De verhouding is $1 : 4$.



figuur bij opgave 5

9 **a** De nummers 1, 6, 7 en 2, 3, 8
b Ja, 4 en 5 zijn gelijkvormig.

10 **a** $87 \cdot 11{,}5 = 1000{,}5$ cm , dus 100 dm.
b $87^3 : 220^3 = 1 : \left(\frac{220}{87}\right)^3 \approx 1 : 16{,}17$

11 **a** $1:4:2:8$
b Ja, A en D zijn gelijkvormig.

12 **a** 8,7 cm
b 17,8 dm^2
c 259,3 gram
d 19 cm; 5,6 dm^2

Doorsneden

13 **a** De antwoordfiguren staan aan het einde van de paragraaf.
b 4 en 16
c $1 : \left(2^3 - 1\right) : \left(3^3 - 2^3\right) = 1 : 7 : 19$

14 **a** prisma
b $3\sqrt{2}$
c 6 bij $3\sqrt{2}$
d Nee
e $1:3$

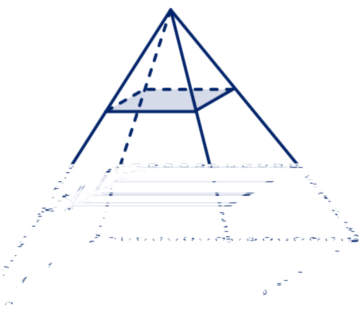
15 **a** Zie einde paragraaf.
b Het bovenste stuk is $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$ van het totaal. dat is 51,2% precies.

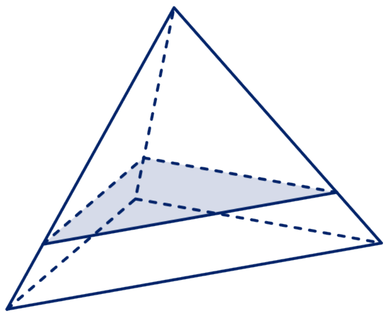
16 **a** Zie einde paragraaf.
b Zie einde paragraaf.
c Een parallellogram
d $1:1$

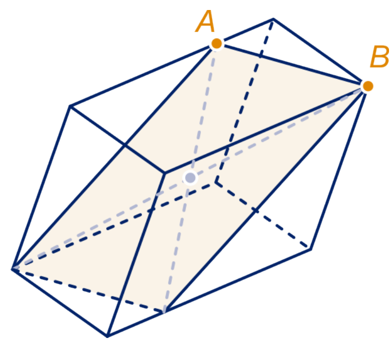
17 $1:2:1$

18
a Zie einde paragraaf.
b 4 : 4 : 1

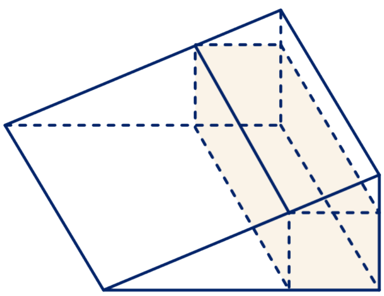
19
a Zie einde van de paragraaf.
b Twee vierzijdige piramides, twee driezijdige prisma's, een balk
c Allebei de helft van de balk
d 10
30, 15 en 15

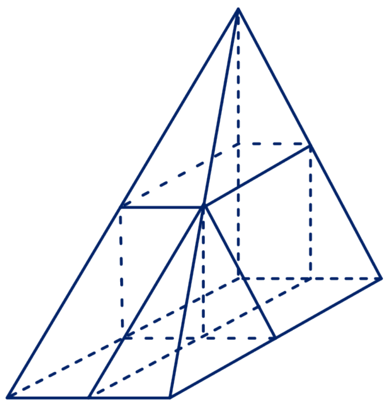

opgave 13


opgave 15



opgave 16


opgave 18


opgave 19

Zwembaden voor jong en oud

20
a 2000 m^3
b 4 cm langer
c Een zijvlak is 70 m^2, een zijvlak is 30 m^2 en twee zijvlakken zijn 125 m^2

Cilinders, balken, prisma's

23 14 liter

24 1,08 kg

25
a Ter bescherming van waardepapieren tegen grote hitte bij brand
b 162 dm^3

26 2,4 m^3

27
a 24
b 24

28 7500 dm^3

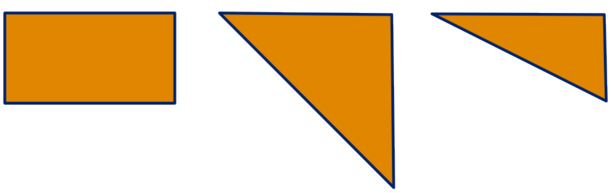
29 € 51450

30 Zie tabel.

	I	II	III	IV
exact in cm^3	15	$7\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$7\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$7\frac{1}{2}$
benaderd in mm^3	15000	12990	10607	7500

31
a Zaag bij de linker op hoogte 3 het topje eraf. Door het topje ondersteboven op het onderstuk te plaatsen krijg je precies de rechter cilinder.
b Om dezelfde reden als boven zijn de manteloppervlakten gelijk ; die zijn 6π.

32
a 2, 2 en 1
b 12, 12 en 10
c 45° ; 35,3°
d Een rechthoek van 1 bij 2
Een rechthoekige gelijkbenige driehoek waarvan de rechthoekszijden 2 zijn.
Een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden 1 en 2 zijn.



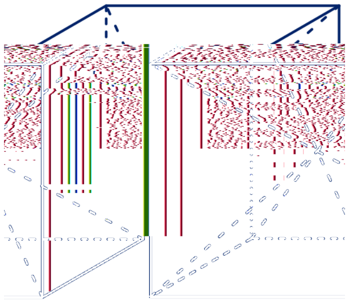
e Oppervlakte: 2, 2, 1
Omtrek: 6, $4+2\sqrt{2}$ en $3+\sqrt{5}$

Met piramides een kubus bouwen

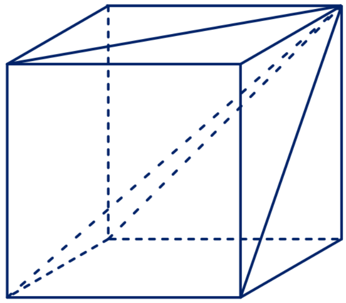
33
a $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b Zie opgave 34b: 6
c $\frac{1}{6}$
d $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r$
e $\frac{1}{6}r^3$

34
a $\sqrt{3} \cdot r$, $\sqrt{2} \cdot r$ en $\sqrt{2} \cdot r$
b 3, zie figuur.



figuur bij opgave 33



figuur bij opgave 34

c $\frac{1}{3}r^3$

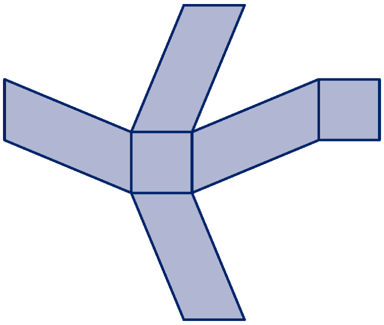
35
a Zaag het prisma verticaal door, door de bovenste ribbe, dan krijg je twee halve balken.
b Bij opgave opgave 33: de inhoud van de balk is $\frac{1}{2}r^3$ en $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}r^3 = \frac{1}{6}r^3$.
Bij opgave opgave 34: de inhoud van de balk is r^3.
c Ja, ze hebben een zelfde grondvlak; ja, ze zijn even hoog. De inhoud van de piramide is 10 en die van de balk is 30. Dus inderdaad het derde deel.

De bierviltjesmethode

36
a $882{,}5$ cm^3
b Op elke hoogte hebben de doorsnedes dezelfde oppervlakte, je kunt de piramides met dezelfde bierviltjes bouwen.
c De derde piramide kan op elke hoogte een doorsnede hebben met dezelfde oppervlakte als de eerste twee, dat kan bij de vierde niet, daar is op elke hoogte de oppervlakte groter.

37
a Beide hebben inhoud 36.
b Het linker lichaam heeft inhoud 18 en het rechter 8.

38
- **a** 1, 1 en $\sqrt{6}$
- **b** 2, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ en $2\sqrt{3}$
- **c** 2
- **d** Zie figuur.

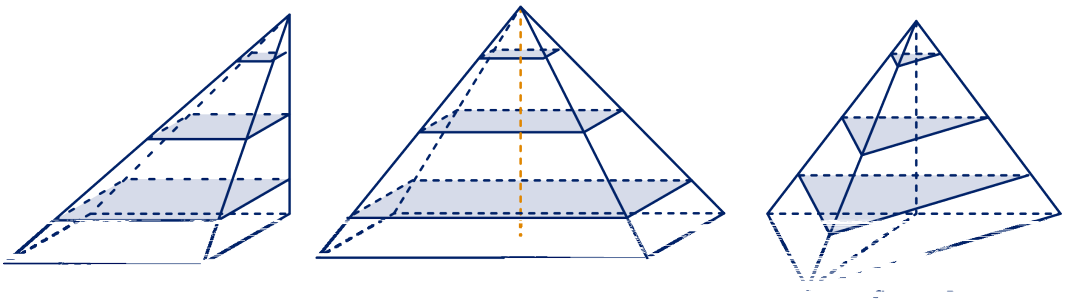


figuur bij opgave 38

39
- **a** 1, $\sqrt{2}$ en $\sqrt{5}$
- **b** $1, 2, 2$
- **c** $2, 1, 2$

De inhoud van een piramide

40
- **a** Zie figuur.



- **b** Bij alle drie de piramides hebben de doorsneden oppervlakte 25, 9 en 1.
- **c** De doorsnede op hoogte h krijg je door het grondvlak met de top als centrum te vermenigvuldigen met de factor $f = \frac{6-h}{h}$, de oppervlakte van die doorsnede is dus $36 \cdot f^2$.
- **d** $\frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72$
- **e** Op elke hoogte hebben de doorsneden van de piramides dezelfde oppervlakte, dus ze zijn uit even grote (qua oppervlakte) bierviltjes te bouwen.
- **f** De inhoud verandert niet als je de top horizontaal verschuift, want de horizontale doorsnedes blijven dan hetzelfde. Je moet weten wat de oppervlakte van het grondvlak is en de hoogte van de piramide.

41
- **a** $5\frac{1}{3} \cdot \pi \approx 16{,}76$
- **b** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

42
$\frac{1}{12}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$

43
$2\sqrt{3}$

44

De oppervlakte van het driehoekig grondvlak bereken je als volgt.
De hoogtelijn vanuit de top van de gelijkbenige drieheok is $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. De oppervlakte is dus: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.
De inhoud van de piramide is $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 4 = 16$.

45

- **a** $\frac{1}{8}Ah$, $\frac{1}{16}Ah$
- **b** Het centrum is de top, de factor is $\frac{1}{2}$.
  Het centrum is het hoekpunt rechts-beneden-voor en de factor is $\frac{1}{2}$.
- **c** $\frac{1}{8} \cdot V$
- **d** V is de totale inhoud, $\frac{1}{4} \cdot V$ is de inhoud van de twee kleine piramides samen, $\frac{1}{4}Ah$ is de inhoud van het parallellepipedum en de twee prisma's samen.
- **e** -

Gemengde opgaven

46

- **a** Noem de top van de piramide T, de projectie van de top op het grondvlak M en een hoekpunt van het grondvlak P.
  $PM = 6\sqrt{2}$, de hoogte van de piramide is MT.
  Er geldt: $MT^2 = TP^2 - PM^2 = 121 - 72 = 49$, dus de hoogte is 7 en de inhoud van de piramide is: $\frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 7 = 336$.
- **b** We berekenen eerst het deel dat er afgehaald is. Dat is een piramide die gelijkvormig is met de oorspronkelijke piramide met vergrotingsfactor $\frac{1}{2}$, dus met inhoud $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 336 = 42$.
  De afgeknotte piramide heeft dus inhoud $336 - 42 = 294$.

47

- **a** De complete piramide is op halve hoogte afgeknot, want de afmetingen van het snijvlak (bovenvlak) zijn half zo groot als die van het grondvlak. De complete piramide heeft dus hoogte 4.
- **b** De complete piramide heeft inhoud $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 48$. Het stuk dat er afgehaald is heeft inhoud $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 48 = 6$. De afgeknotte piramide heeft inhoud 42.

48

Het stuk dat er afgehaald is, is een piramide gelijkvormig met de complete piramide.
Noem de vergrotingsfactor van klein naar groot f, dan $3f = 5$, dus $f = 1\frac{2}{3}$.
Noem de hoogte van de piramide die er afgehaald is x, dan is de hoogt van de complete piramide $1\frac{2}{3}x$, dus de afgeknotte piramide heeft hoogte $\frac{2}{3}x = 2$, dus $x = 3$ en de hoogte van de complete piramide is 5.
De inhoud van de complete piramide is $\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \frac{125}{3}$. De inhoud van het stuk dat er afgehaald is, heeft inhoud $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{125}{3} = 9$, dus de afgeknotte piramide heeft inhoud $\frac{125}{3} - 9 = 32\frac{2}{3}$.

49

Het stuk dat er afgehaald is, is een piramide gelijkvormig met de complete piramide.
Noem de vergrotingsfactor van klein naar groot f, dan $1 \cdot f^2 = 4$, dus $f = 2$. De

hoogte van de complete piramide is 6.
De inhoud van de complete piramide is $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 = 8$. De inhoud van het stuk dat er afgehaald is, heeft inhoud $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8 = 1$, dus de afgeknotte piramide heeft inhoud 7.

50

a Het stuk dat er afgehaald is, is gelijkvormig met de complete kegel, de vergrotingsfactor f van klein naar groot is $\frac{24}{16} = 1\frac{1}{2}$.
De hoogte van de top noemen we x, dan is de hoogte van de complete kegel $1\frac{1}{2}x$ en van de emmer dus $\frac{1}{2}x$, dus de hoogte van de complete kegel is: 75 cm.

b De inhoud van de complete kegel is: $\frac{1}{3}\pi \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}2^2 = 3{,}6\pi$ dm^3. De inhoud van de top is $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3{,}6\pi$ dm^3, dus de inhoud van de emmer is: $\frac{19}{27} \cdot 3{,}6\pi$ dm^3, dus ongeveer 80 dl.

51

Ze hebben alle dezelfde inhoud. De piramide aan de voorkant bijvoorbeeld heeft een grondvlak met oppervlakte ab en hoogte $\frac{1}{2}c$, dus inhoud $\frac{1}{6}abc$.

52

a De halve cirkel van de uitslag wordt de grondcirkel van de kegel, dus de omtrek van de grondcirkel van de kegel is 4π. De straal van de grondcirkel is dus $\frac{4\pi}{2\pi} = 2$.

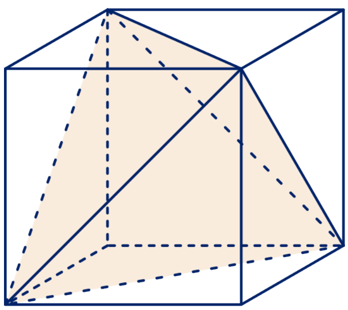
b Noem de top van de kegel T en het middelpunt van de grondcirkel M. Neem een punt op de grondcirkel P. Dan is de schuine zijde TP van driehoek TPM gelijk aan 4 en de rechthoekszijde $PM = 2$.
Dus driehoek TPM is een 30-60-90-graden driehoek, dus de tophoek is $60°$ en de hoogte van de kegel is $2\sqrt{3}$.

c $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$

53

a Zie figuur.

b Het grondvlak van zo'n piramide is een gelijkbenige rechthoekszijde driehoek waarvan de rechthoekszijden 1 zijn en de hoogte 1.
De inhoud is dus $\frac{1}{6}$.



c $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

d $\sqrt{2}$

e $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}\sqrt{2}$

54

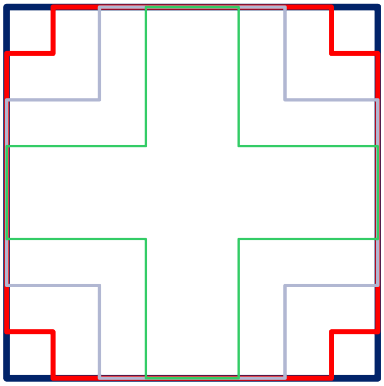
a $15, 15$

b $10, 5$

55

a Het huis bestaat uit een blok van 4 bij 4 bij $4{,}80$ waaruit vier piramides zijn weggehaald met een grondvlak van 2 bij 2 en hoogte $4{,}80$.
De inhoud is dus $4 \cdot 4 \cdot 4{,}8 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4{,}8 = 51{,}2$ m^3.

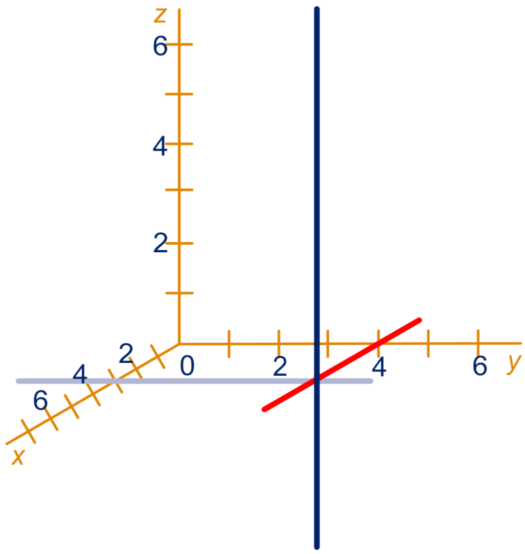
b Zie figuur.
Op hoogte $1{,}20$ m: rood, op hoogte $2{,}40$ m blauw en op hoogte $3{,}60$ m groen.



Met coördinaten

56 $O\,(0{,}0{,}0)$, $A\,(4{,}5{,}0)$, $B\,(0{,}5{,}0)$, $C\,(2{,}5{,}0)$, $D\left(2{,}2\tfrac{1}{2}{,}0\right)$, $E\left(2{,}2\tfrac{1}{2}{,}1\right)$

57 **a** Zie figuur.



b Zie vorige onderdeel.

c Dat zijn de punten met coördinaten $(3{,}4{,}z)$.

58

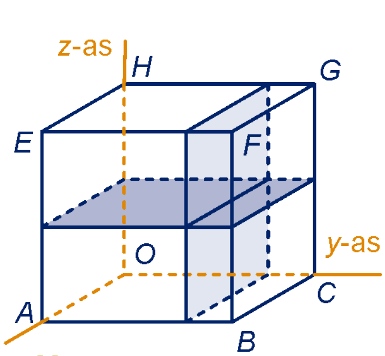
a De punten die in beide vlakken liggen, vormen een lijn evenwijdig aan OA. Zie de figuur hieronder.

b Dat zijn de punten met coördinaten $(x{,}3{,}2)$ met $0 \leq x \leq 4$.

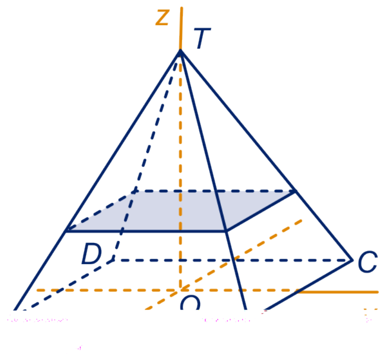
59

a Zie de figuur hieronder.

b Het bovenstuk is een piramide met hoogte 4 en grondvlak en vierkant met zijden 4. De inhoud daarvan is $\frac{1}{3} \cdot 4^3 = 21\frac{1}{3}$.
De hele piramide heeft inhoud $\frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72$.
Het onderstuk heeft inhoud $72 - 21\frac{1}{3} = 50\frac{2}{3}$.



figuur bij opgave 58



figuur bij opgave 59

60

a $(4{,}0{,}0)$, $(0{,}4{,}0)$ en $(0{,}0{,}4)$.

b Zie figuur (rood)

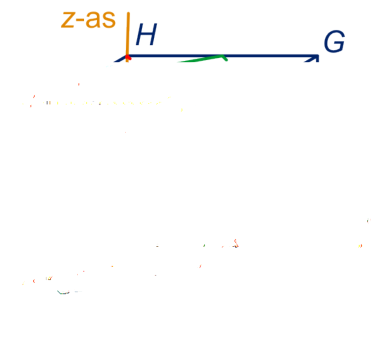
c Het stuk met hoekpunt O is een piramide met driehoekig grondvlak met zijden 4 en de hoogte van de piramide is 4, de inhoud is dus: $\frac{1}{3} \cdot 4^3 = 10\frac{2}{3}$. De rest heeft inhoud $64 - 10\frac{2}{3} = 53\frac{1}{3}$.

d Zie figuur bij onderdeel **b**(groen).
Die middens zijn: $(0{,}2{,}4)$, $(0{,}4{,}2)$ $(2{,}0{,}4)$, $(2{,}4{,}0)$ $(4{,}0{,}2)$ en $(4{,}2{,}0)$

e Het midden van de kubus is $(2{,}2{,}2)$ en daarvan is de som van de coördinaten 6.

f Dat vlak verdeelt de kubus in twee gelijke delen, dus beide hebben inhoud 32.

g $x + y + z = 8$



figuur bij opgave 60

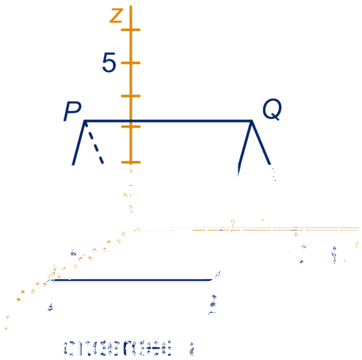
61

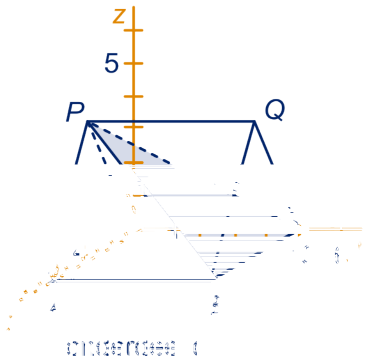
a Zie hieronder links.

b A en B verschillen alleen in de tweede coördinaat namelijk 5.
Zo ook O en C, en P en Q.

c $z = 0$, $y = 0$ en $y = 5$

d Zie hieronder rechts.





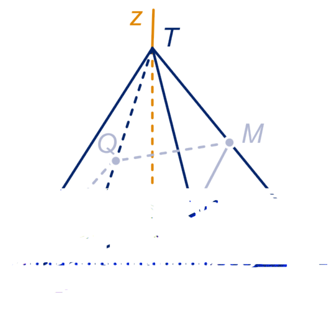
e De inhoud van piramide $OABC.P$ is $\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 40$. Het prisma heeft inhoud 60, dus het andere stuk heeft inhoud 20.

62

a Zie figuur.

b $P(2{,}2{,}2)$, $Q\,(\text{-}2{,}\text{-}2{,}2)$ en $M\left(\text{-}1\frac{1}{2}{,}1\frac{1}{2}{,}3\right)$

c $A: 3 - \text{-}3 + 3 \cdot 0 = 6$,
$P: 2 - 2 + 3 \cdot 2 = 6$,
$Q: \text{-}2 - \text{-}2 + 3 \cdot 2 = 6$,
$M: \text{-}1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} + 3 \cdot 3 = 6$



63

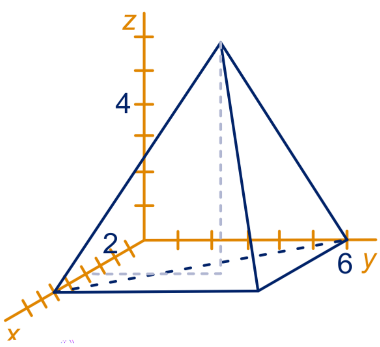
$Q\,(4{,}a{,}c)$, $R\,(a{,}0{,}c)$, $S\,(4 - a{,}0{,}4 - c)$

64

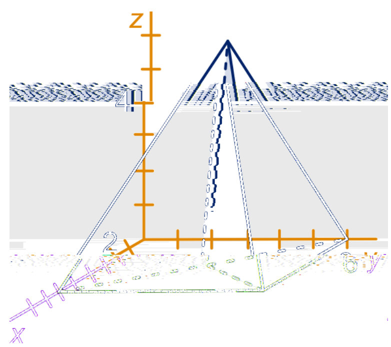
a Zie hieronder links.

b $x = y$

c Zie hieronder rechts.



figuur bij opgave 64a



figuur bij opgave 64c

d De oppervlakte van het grondvlak is: $\frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ en de hoogte is 7, dus de inhoud is $\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 7 = 42$.

65

a $O\,(0{,}0{,}0)$, $B\,(6{,}5{,}0)$, $F\,(4{,}2{,}4)$, $G\,(4{,}7{,}4)$, $H\,(-2{,}7{,}4)$

b $\left(2{,}3\frac{1}{2}{,}2\right)$

c We nemen als grondvlak $OABC$, dat heeft oppervlakte $6 \cdot 5 = 30$.
De hoogte is dan 4

c De straal van de binnenste cirkel is h, de straal van de buitenste cirkel is 1, dus de oppervlakte van de ring is: $\pi - \pi h^2$.

d $2\pi - \frac{2}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$

e $r^3 \cdot 1\frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi r^3$

7

a De rand van het lichaam bestaat uit 4 halve cirkels met straal 1, heeft dus lengte $4 \cdot \pi \cdot 2 = 8\pi$

b De oppervlakte bestaat uit 2 halve cilindermantels met straal 2 en hoogte 4 en 4 halve cirkels met straal 2. De oppervlakte van de mantels is in totaal: $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \pi = 16\pi$ en die van de cirkels: $4 \cdot 2 \cdot \pi = 8\pi$.
De oppervlakte van de figuur is: 24π.

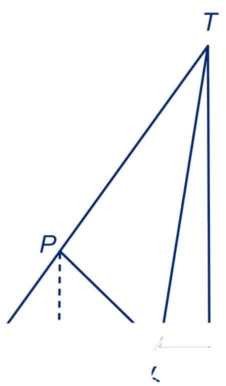
c De inhoud is de inhoud van een hele cilinder met hoogte 4 en straal van de grondcirkel 2, dus $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$.

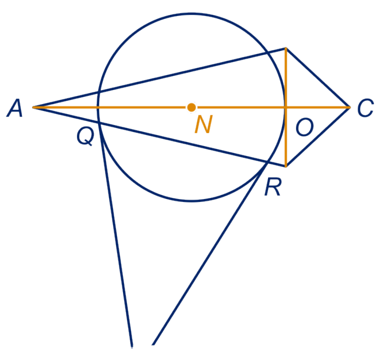
8

a De oppervlakte van het grondvlak is $\frac{1}{2} \cdot (7+2)\left(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\right) = 13\frac{1}{2}$ en de hooogte is 12, dus de inhoud is: $\frac{1}{3} \cdot 13\frac{1}{2} \cdot 12 = 54$.

b De inhoud van de kleine piramide is $\frac{16}{54} = \frac{8}{27}$ van de inhoud van de hele piramide, dus de kleine piramide krijg je door de hele piramide met $\frac{2}{3}$ te vermenigvuldigen, dus de hoogte van de kleine piramide is $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$, de gevraagde afstand is dus 4.

c Zie figuur hieronder links. De projectie van P op het grondvlak noemen we Q en $PQ = x$.
Dan $OQ = x$ en $AQ = 7 - x$.
Er geldt: $\frac{PQ}{AQ} = \frac{TC}{AC} = \frac{12}{9}$, hieruit volgt: $x = 4$, dus $AP = 5$.





d Zie figuur hierboven rechts. Teken vierhoek $ABCD$ en de cirkel met middelpunt $N\left(2\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ (dat is het middelpunt van de grondcirkel).
Teken vervolgens de grondcirkel (middelpunt N en straal $2\frac{1}{2}$).
Die cirkel snijdt lijnstuk AB in Q en R.
Vervolgens berekenen we $MO = 6\frac{1}{2}$ en tekenen een driehoek met basis QR

en $QX = RX = 6\frac{1}{2}$.
Driehoek MQR is congruent met driehoek XQR.

9

a
- Voor cilinder en parallellepipedum geldt: $G = M = B$, dus volgens de superformule krijg je voor de inhoud $G \cdot h$ en dat klopt.
- Voor een driezijdig prisma geldt $M = \frac{1}{2}G$ en $B = 0$, dus levert de formule $I = \frac{1}{6} \cdot (G + 4M + B) \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \left(G + 4 \cdot \frac{1}{2}G + 0\right) M = \frac{1}{2}G \cdot h$ en dat klopt.
- Voor een piramide en kegel geldt: $B = 0$ en $M = \frac{1}{4}G$, de superformule geeft voor de inhoud: $\frac{1}{6}h \cdot \left(G + 4 \cdot \frac{1}{4}G + 0\right) = \frac{1}{3}h \cdot G$ en ook dat is juist.

b Een diagonaalvlak van de kubus heeft oppervlakte $r^2\sqrt{2}$ en de hoogte is $r\sqrt{2}$, dus $M = r^2\sqrt{2}$ en $G = B = 0$, dus de superformule geeft als inhoud: $\frac{1}{6} \cdot r\sqrt{2} \cdot 4r^2\sqrt{2} = 1\frac{1}{3}r^3$ en dat klopt niet.

c Er geldt: $G = B = 0$.
Verder: $M = \frac{1}{2}ab$.
De superformule geeft dus als inhoud $\frac{1}{6}c \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}ab = \frac{1}{3}abc$ en dat klopt niet.

d Er geldt: $G = B = 0$. Verder $M = \pi r^2$.
De superformule geeft dus voor de inhoud: $\frac{1}{6} \cdot 2r \cdot 4\pi r^2 = 1\frac{1}{3}\pi r^3$ en dat klopt.

1 Inhouden

1 De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2.
2 Gebruik gelijkvormigheid om de hoogte van de hele piramide uit te rekenen.
3 Het huis bestaat uit een blok waaruit vier piramides zij weggehaald.

Index