Beslisk nde

Dictaat Wisk nde D
Versie: 2 j li 2013

Ont ikkeld door:

Hans van Ballegooij
Maaslandcollege, Oss
hans.van.ballegooij@gmail.com

Op basis an:

Beslissen Wiskunde D , door Jan Essers ism Kerngroep Wiskunde D Eindhoven,
Font s en de be erking hiervan door Ferd van der Werf op 16 juli 2008
Lineair programmeren, problemen met t ee onbekenden , door Etienne Goemaere, Katholieke Universiteit Leuven
Een inleiding in de besliskunde door Herbert Hamers, Elleke Janssen, Marieke Quant, Tilburg Universit

Inho dsopga e

1 Optimaliseren

1.1 BASISPROBLEEM

Over boer Boersma en andere optimaliseringsproblemen

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

Boer Boersma heeft 45 hectaren land.
Er ordt koren en tar e ge aaid.
Elke hectare beplant met koren levert 300 euro inst op.
Elke hectare beplant met tar e levert 200 euro inst op.
Er is 120 ton kunstmest beschikbaar en er ijn 100 arbeidskrachten.
Voor elke hectare koren ijn 2 arbeidskrachten nodig en 4 ton kunstmest.
Voor elke hectare tar e ijn 3 arbeidskrachten nodig en 2 ton kunstmest.

Boer Boersma streeft naar ma imalisatie van de inst. Hoe moet hij gaan aaien?

In dit probleem moet je dus gaan oeken naar een ma imum (van de inst) en er is sprake van allerlei voor aarden. We starten met een anal se van het probleem en kruipen in de huid van de boer.

1 Boer Boersma denkt er over om de helft van de oppervlakte met koren in te aaien en de andere helft met tar e.

a Hoe groot is dan de inst (opbrengst) voor Boer Boersma?

b Wordt bij de e keu e aan alle voor aarden voldaan?

c Kies elf een andere verdeling die mogelijk is en bereken bij de e verdeling de inst (opbrengst).

Je kunt nu het land eer op een andere manier gaan verdelen en opnieuw nagaan of het mogelijk is en at dan de inst is. Een aanpak die niet echt slim is ant je eet nooit of je de ma imale inst hebt bereikt. Het is verstandiger om het probleem iskundig aan te pakken. De onbekenden in dit probleem leg je niet vooraf vast (bv. 22,5 hectare koren) maar maak je variabel (dus x hectare koren).

Noem dus het aantal hectaren dat je in aait met koren x en het aantal hectaren dat je in aait met tar e y. We noemen de e variabelen de *beslissingsvariabelen*. Je kunt nu nagaan aaraan de e variabelen moeten voldoen.

1.2 HET TOEGESTANE GEBIED

In de eerste plaats moet er rekening gehouden orden met de hoeveelheid land. De totale oppervlakte is 45 hectare en dus mag de som van x en y niet groter ijn dan 45: $x+y\leq 45$. De e voor aarde heet een *beperkende voorwaarde* of *restrictie*. Uiteraard kunnen de variabelen x en y niet negatief ijn, dus t ee andere beperkende voor aarden ijn: $x\geq 0$ en $y\geq 0$.

Er ijn nog meer beperkende voor aarden omdat er slechts een beperkt aantal arbeidskrachten is en een beperkte hoeveelheid kunstmest, ie de navolgende tabel:

Beperkende voorwaarde		**Formule**
I	De totale oppervlakte is 45 hectare	$x+y\leq 45$
II	Er is een beperkt aantal arbeidskrachten	$2x+3y\leq 100$
III	Er is een beperkte hoeveelheid kunstmest	
IV	Het aantal hectaren koren kan niet negatief ijn	$x\geq 0$
V	Het aantal hectaren tar e kan niet negatief ijn	$y\geq 0$
Maximaliseer de winst		
Noem de inst z dan moet je ma imaliseren:		$z=$

2 **a** Toon aan dat voor de arbeidskrachten inderdaad geldt $2x+3y\leq 100$.

b Stel de beperkende voor aarde voor de hoeveelheid kunstmest op.

c Druk de inst uit in en .

Een probleem oals geformuleerd in de tabel noemen e een *Lineair Programmeren Maximalisatieprobleem*, kort eg *LP-maximalisatieprobleem.*
Algemeen is een LP-ma imalisatieprobleem een probleem van het volgende t pe:

LP-maximalisatieprobleem

Ma imaliseer

$$= \quad +$$

Onder de voor aarden

(1) $p_1x + q_1y \le r_1$
(2) $p_2x + q_2y \le r_2$
....
(n) $p_nx + q_ny \le r_n$
$x \ge 0, y \ge 0$

Er kunnen dus veel meer (n) voor aarden ijn dan de drie voor aarden oals bij boer Boersma.
De functie die in een LP-ma imalisatieprobleem gema imaliseerd dient te orden ordt de *doelfunctie* genoemd. Voor het gemak gebruiken e overal in dit hoofdstuk voor de doelfunctie de letter z.

Omdat er slechts t ee variabelen ijn, x en y, kun je de beperkende voor aarden gaan eergeven in een xy-assenstelsel.

3 Kijk naar de tabel. De voor aarden $x \ge 0$ en $y \ge 0$ geven aan dat x en y positief ijn en dus hoef je alleen in het eerste k adrant te tekenen. We gaan nu kijken naar de eerste restrictie.

a Vul bij de vergelijking $x + y = 45$ de volgende tabel in:

	0	10	20	30	40	
						0

b Teken de grafiek bij de vergelijking $x + y = 45$.

c Waarom had je van te voren kunnen eten dat dit een rechte lijn ordt? Wat is de richtingsco ffici nt van de e lijn?

d Arceer in je grafiek het gebied waar aan de drie restricties $x \ge 0$, $y \ge 0$ en $x + y \le 45$ wordt voldaan.

De oplossing van ons probleem (anneer is de inst ma imaal?) voldoet aan de drie restricties. De e oplossing moet dus ergens in het gearceerde gebied liggen. We noemen dit gebied het *toegestane gebied*. Om dit toegestane gebied verder te verkleinen gaan e ook de lijnen die horen bij restricties II en III in de grafiek tekenen.

4 **a** Teken ook de grafieken van de lijnen die horen bij restricties II en III.

b Bepaal het toegestane gebied.

5 **a** Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen $2x+3y=100$ en $2x+y=60$.

b Benoem alle hoekpunten van het toegestane gebied.

6 (Uit: Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) Gegeven ijn de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} x+2y \le 12 \\ x+2y \ge 3 \\ x \le 7 \\ x-2y \ge 5 \\ x \ge -4 \\ y \le 7 \end{cases}$$

a Teken het toegestane gebied.

b Bereken de co rdinaten van alle hoekpunten.

7 Top-fietsen produceert t ee t pen fietsframes, een ATB frame en een race frame. Voor de productie van een ATB frame is 4 kg aluminium en 6 kg staal nodig, voor de productie van een race frame is 5 kg aluminium en 2 kg staal nodig. Top-fietsen verkoopt een ATB frame voor 1980 euro en een race frame voor 1240 euro.

Het aanbod van aluminium is beperkt tot een ma imum van 70 kg per dag en het aanbod van staal tot een ma imum van 72 kg per dag. Top-fietsen il ijn dagelijkse opbrengst ma imaliseren. De tabel toont alle gegevens van het bovenstaand beschreven productieproces van fietsframes van Top-fietsen:

	ATB frame	race frame	dagelijks aanbod
aluminium	4	5	70
staal	6	2	72
prijs	1980	1240	

Noem x het aantal ATB frames geproduceerd op een dag en y het aantal race frames geproduceerd op een dag.

a Stel het bijbehorende LP-ma imalisatieprobleem op.

b Teken het toegestane gebied

c Bereken de co rdinaten van alle hoekpunten

8 Een bierproducent produceert blond bier (b) en donker bier (d). De voornaamste grondstoffen die nodig ijn voor de productie van bier ijn tar e en hop. Het productieschema iet er als volgt uit:

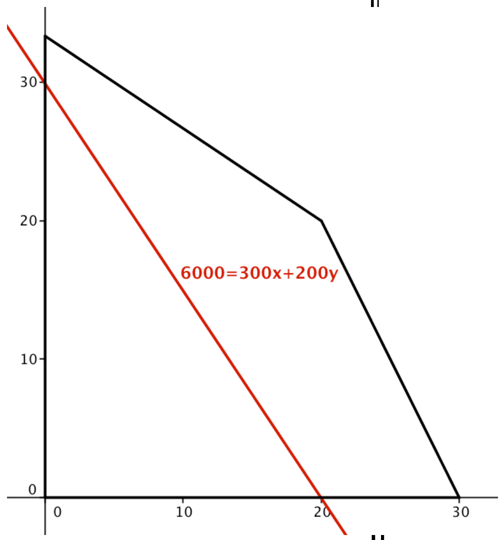
	blond bier	donker bier	dagelijks aanbod
tar e	1	2	5
hop	2	1	8
prijs	5	7	

a Stel het bijbehorende LP-maximalisatieprobleem op.

b Teken het toegestane gebied.

1.3 DE MAXIMALE WINST

We keren terug naar het probleem van boer Boersma. De doelfunctie $z=300x+200y$ moet gema imaliseerd orden. Als je een aarde voor en kiest dan is de inst vastgelegd. Als je bijvoorbeeld $x=10$ en $y=15$ kiest (een punt dat in het toegestane gebied ligt) dan is de inst $z=300\cdot 10+200\cdot 15=€\,6.000$. Er ijn meer punten in het toegestane gebied aar de inst € 6.000 is, bijvoorbeeld de punten $(x,y)=(20,0)$ en $(x,y)=(0,30)$. In de grafiek hiernaast ie je het toegestane gebied en daarin getekend de lijn $6000=300x+200y$. Overal op die lijn is de inst dus € 6.000. Een dergelijke lijn heet een hoogtelijn of isolijn bij de doelfunctie.



9

a Neem figuur 1.1 over en teken e tra hoogtelijnen bij $z=2000$, $z=4000$ en $z=8000$.

b Waar ver acht je dat in het toegestane gebied de ma imale inst ordt bereikt?

c Bereken de e ma imale inst.

d Hoe it het met het gebruik van kunstmest, arbeidskrachten en grond? Geef commentaar.

In opgave 9 heb je ontdekt dat de inst het grootst is in een hoekpunt van het toegestane gebied. Dit is altijd o. Door de aarde van de doelfunctie in de hoekpunten van het toegestane gebied uit te rekenen vind je de ma imale aarde. De e methode heet de *hoekpuntenmethode*.

10 (Uit: Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) Het toegestane gebied bij de doelfunctie $z = x + y + 10$ ordt gegeven door de volgende ongelijkheden:

$$\begin{cases} 5x + 8y \le 39 \\ 4y - 5x \le 15 \\ 7x + 5y \le 36 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

a Teken het toegestane gebied.

b Bepaal met de hoekpuntenmethode de co rdinaten van het punt uit het toegestane gebied aar de doelfunctie ma imaal is. Welke aarde heeft *z* in dat punt?

c In elk punt van het toegestane gebied is *z* minimaal? Welke aarde heeft *z* in dat punt?

11 **a** Bepaal m.b.v. de hoekpuntenmethode het ma imum bij het LP-ma imalisatieprobleem van opgave 7.

b Idem voor opgave 8.

Als er eer veel hoekpunten ijn, is de hoekpuntenmethode nogal omslachtig. In dat geval is het gemakkelijker om een paar hoogtelijnen te tekenen en met behulp daarvan te bepalen in elk hoekpunt het ma imum ordt bereikt. In opgave 9 heb je eigenlijk de e methode al gebruikt. De e methode noemen e de *schuifmethode*.

12 **a** Teken het toegestane gebied bij het onderstaande LP-ma imalisatieprobleem:

Maximaliseer $z = 2x + y$ onder de beperkende voorwaarden: $\begin{cases} 8x + 2y \ge 17 \\ 4x + 2y \le 13 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

b Los het probleem op m.b.v. de schuifmethode. Er in meer oplossingen, bepaal e allemaal.

13 (Uit: Wageningse Methode) Een kleine akenman il voor ten hoogste € 360 koffie en thee inkopen. Koffie kost € 3 per kg, thee € 4 per kg. De akenman eet dat hij niet meer dan 100 kg koffie al kunnen af etten en niet meer dan 75 kg thee. Noem het aantal kg koffie dat de akenman inkoopt x en het aantal kg thee y. Natuurlijk moet gelden $x \geq$ $y \geq$

a Aan elke drie andere ongelijkheden moeten x en y voldoen als je let op het te besteden bedrag en de mogelijke af et?

b Teken het toegestane gebied.

Stel dat de akenman € 1 inst maakt per kg koffie en € 2 inst per kg thee.

c Stel de doelfunctie op.

d Teken enkele iso- instlijnen.

e Wat is het optimale inkoopplan, d. . . het plan dat de meeste inst oplevert?

Al met al levert de uit erking van het probleem van boer Boersma een algemene aanpak voor een LP-ma imalisatieprobleem (of minimalisatieprobleem):

Plan van aanpak

Stel de doelfunctie $z = ax + by$ en alle beperkende voor aarden op

Teken alle lijnen die bij de beperkende voor aarden horen

Bepaal het toegestane gebied

Via de hoekpuntenmethode:

Bepaal alle hoekpunten

Bereken in elk hoekpunt de finctie aarde z en bepaal de oplossing

of

Via de schuifmethode:

Teken een geschikte hoogtelijn $c = ax + by$

Schuif daarmee naar het beste hoekpunt

Bereken dat hoepunt en de aarde van z in dat hoekpunt

1.4 EXTRA OPGAVEN

14 Los m.b.v. de hoekpuntenmethode het volgende LP-minimalisatieprobleem op:

Minimaliseer $z = 70x + 72y$ onder de beperkende voorwaarden: $\begin{cases} 4x + 6y \le 1960 \\ 5x + 2y \ge 1240 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

15 Los het volgende LP-minimalisatieprobleem op:

Minimaliseer $z = x + y$ onder de beperkende voorwaarden: $\begin{cases} 4x + 5y \ge 10 \\ x + 2y \le 8 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

16 (Uit Wageningse Methode) Een timmerfabriekje maakt t ee soorten salontafels: modern eiken en klassiek eiken. Per dag kunnen er van elke soort hoogstens vijf gemaakt orden. In verband met de opslagcapaciteit mogen er per dag niet meer dan even tafels in totaal gemaakt orden.

Een moderne tafel kost n mandag erk, een klassieke tafel kost t ee mandagen. In de fabriek erken elf mensen aan de productie van salontafels.

Stel dat er per dag x moderne tafels en y klassieke tafels gemaakt worden.

a Welke omstandigheden beperken de dagelijkse productie?

b Aan elke 4 ongelijkheden (behalve $x, y \ge 0$) moeten x en y voldoen?

c Teken het toelaatbare gebied.

De inst op een moderne tafel is € 200 en op een klassieke tafel € 300. Het bedrijf il de inst maximaliseren.

d Wat is de doelfunctie?

e Teken enkele iso- instlijnen.

f Bij elk productieschema is de inst het grootst?

Door een grote vraag naar moderne tafels as het mogelijk de prijs te verhogen. De inst die op een moderne tafel ordt gemaakt is nu € 300.

g Wat is nu de doelfunctie?

h Teken enkele iso- instlijnen en bepaal bij elk productieschema de grootste inst ordt gemaakt.

17 (Uit Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) In een machinefabriek orden machines geproduceerd: t pe N en t pe S. Voor een machine van t pe N is de benodigde arbeidstijd per eek op afdeling A 15 uur en op afdeling B 20 uur. Voor een machine van t pe S ijn de e tijden achtereenvolgens 20 en 30 uur. Per eek is op afdeling A 900 uur arbeidstijd beschikbaar en op afdeling B 1200 uur. Voor een machine van t pe N moet het bedrijf vooraf € 500 aan materiaalkosten uitgeven en voor een machine van t pe S € 1000. Per eek il men niet meer dan € 34.500 aan materiaalkosten uitgeven. Op een machine van t pe N maakt men € 120 inst, op een machine van t pe S € 200. Men streeft naar ma imale inst.

a Neem de tabel hieronder over en vul de e verder in

	t pe N	t pe S	totaal beschikbaar
Afdeling A	15		900
Afdeling B	20		

b Vertaal de beperkende voor aarden in ongelijkheden en teken het toegestane gebied.

c Bereken de co rdinaten van de vier hoekpunten van het toegestane gebied.

d Hoe groot is de ma imale inst?

Door omstandigheden ordt er op een gegeven moment nog maar € 180 inst gemaakt op machines van t pe S. de inst op machines van t pe N blijft € 120.

e Onder oek of de ma imale inst verandert. Zo ja, met hoeveel?

f Leg uit aarom in dit geval de ma imale inst bij verschillende productieaantallen bereikt kan orden.

Ook de inst op t pe N dreigt te verminderen.

g Bij elke instver aching op t pe N is het verstandig de productie van N te staken en uitsluitend t pe S te maken? Licht je ant oord toe met een toelichting.

18 (Ontleend aan CE VWO A12 2002 t eede tijdvak) Een speelgoedfabriek maakt poppenhui en en houten treinen. Voor het vervaardigen van speelgoed is drie soorten arbeid te onderscheiden: agen, timmeren en verven. Het aantal minuten dat hiervoor nodig is staat in de tabel:

soort arbeid	tijd (in minuten) nodig per poppenhuis	tijd (in minuten) nodig per trein
agen	24	15
timmeren	60	40
verven	40	10

Er is n personeelslid belast met agen, t ee met het timmeren en n met het verven. Elk van de e personeelsleden kan ma imaal 40 uur per eek erken. Ga er van uit dat de kosten voor het maken van speelgoed bestaan uit materiaalkosten en arbeidskosten. Aan materiaal kost een poppenhuis € 17 en een trein ook € 17. Ieder personeelslid kost € 30 per ge erkt uur. Alleen voor ge erkte uren ordt het personeelslid betaald. Alle e emplaren die in een eek orden gemaakt, orden de elfde eek verkocht, de poppenhui en voor € 97 per stuk, de treinen voor € 58,50 per stuk.

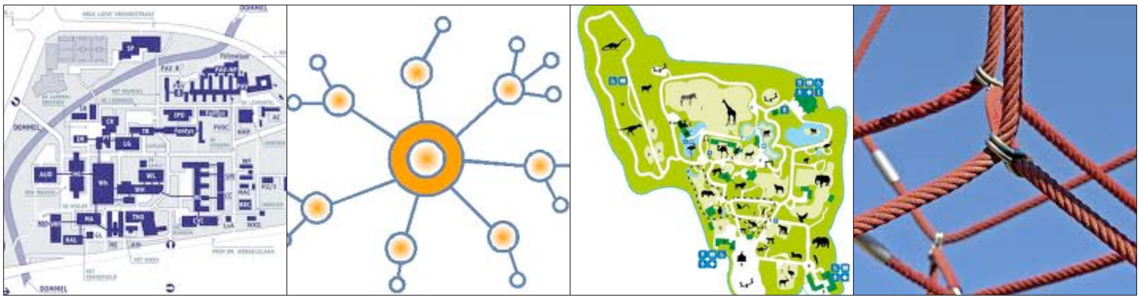
a Bereken de ma imale inst die ekelijks gemaakt kan orden.

Waarschijnlijk heb je gemerkt dat onder de gegeven omstandigheden er nooit oveel poppenhui en en treinen gemaakt orden dat er voor de ager 40 uur erk is. De ager kan ook heel aardig verven. Hij doet dat net o vlot als diegene die het normaal doet. Men besluit daarom dat de ager een aantal uren beschikbaar moet ijn om te verven. Gedurende die tijd is hij niet beschikbaar voor het agen.

b Is het mogelijk de ager o lang te laten verven dat het aantal timmerlieden de enige beperkende factor ordt? Licht je ant oord toe.

2 Beslissen in net   erken

2.1 BASISPROBLEEM

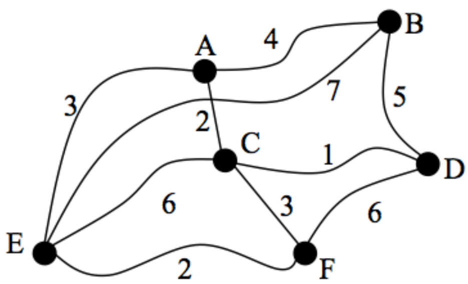


Over grafen (met een f!) en Koningsbergen

Hierboven ie je onder andere een plattegrond van de TU-Eindhoven. Een be oeker kan met de e plattegrond   aarschijnlijk snel ien hoe hij o snel mogelijk bij een bepaald gebou   komt. Maar ook kun je met dit plaatje uit oeken of er voor een be oeker een   andeling bestaat   aarbij je paden precies een keer doorloopt.

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

Op een fabrieksterrein il men tussen es depots een bui ennet erk aanleggen voor het transport van goederen. Hierbij moet elk van de es depots bereikbaar ijn vanuit elk van de andere depots - eventueel via tussenliggende depots - en ijn om egen niet erg omdat het vervoer door de bui en vrij snel gaat. De situatie ie je hiernaast in een schema.



De depots ijn aangegeven door punten en de mogelijke verbindingen door lijnen. Niet elke verbinding is mogelijk van ege tussenliggende gebou en. In de tekening ijn de kosten van de mogelijke verbindingen eergegeven door getallen (in miljoenen euro s) langs de betreffende verbindingen.

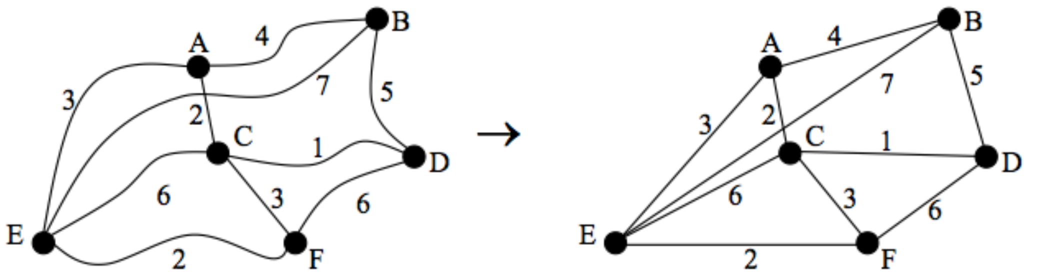
Uiteraard il men de kosten van het aan te leggen bui ennet erk o laag mogelijk houden. Hoe moet men het bui ennet erk aanleggen?

2.2 GRAFENTHEORIE

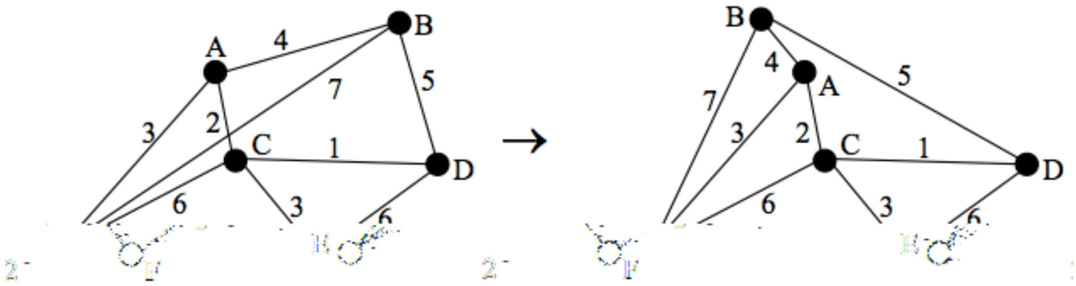
In dit probleem moet je dus gaan oeken naar de kortste eg langs alle depots. Voordat e beginnen met een anal se gaan e eerst kijken naar het soort van figuur dat bij dit probleem hoort.

Een dergelijke figuur noemen e in de iskunde een *graaf*. Het is een plaatje dat bestaat uit een ver ameling punten die men ook el *knopen* noemt en verbindingen die men kanten of *lijnen* noemt. De getallen die bij de verbindingen horen heten de *gewichten* van de lijnen. De tak van de iskunde aarin grafen orden bestudeerd heet grafentheorie.

Bij de meeste problemen is de vorm van de verbinding niet van belang en in de grafentheorie tekent men daarom verbindingen tussen knopen meestal als rechte lijnstukken. De graaf hierboven kun je dus ook otekenen:



Het snijpunt van de lijnen BE en AC heeft in de e graaf geen betekenis. Dat snijpunt is dus geen punt van de graaf. Omdat dat snijpunt ver arrend kan erken kun je de lijn BE beter verplaatsen.

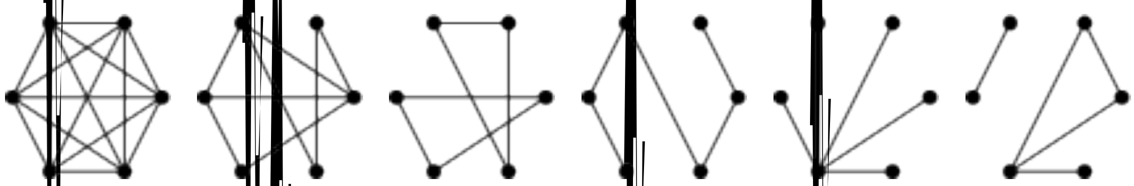


In het figuur hierboven ie je een derde eergave van het bui en net erk. De knopen A en B ijn daarin ook at verplaatst om alle lijnen als rechte lijnstukken te tekenen.

Nog wat definities:

Een graaf heet *volledig* als je van ieder knooppunt rechtstreeks naar ieder ander knooppunt kunt komen.
T ee knopen heten *verbonden* als er een pad, bestaande uit lijnen uit de graaf bestaat, die die t ee knopen verbindt. Die verbinding mag eventueel via een andere knoop lopen.
Een graaf heet *samenhangend* als er een pad is tussen elk t eetal knopen.
Een c kel is een speciaal pad: het is een rond andeling over verschillende lijnen van knoop naar knoop aarbij je terugkomt in de beginknoop.
Een samenhangende graaf die geen c kel be it noemt men een *(opspannende) boom*.

19 Je hebt de volgende es grafen:



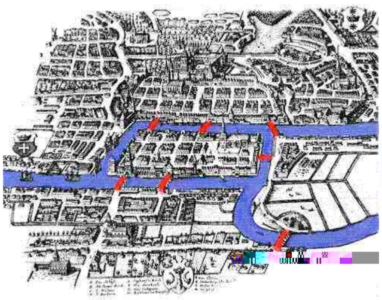
G1 G2 G3 G4 G5 G6

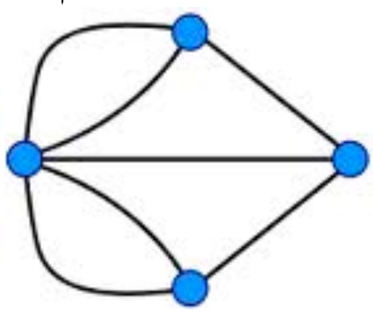
a Welke van de e grafen is samenhangend?

b Welke van de e grafen is volledig?

c Welke van de e grafen is een boom?

d Is het mogelijk dat een graaf samenhangend, volledig en een boom is? Waarom (niet)?





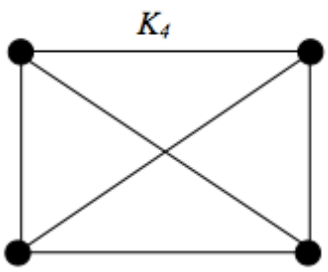
20 De even bruggen van Koningsbergen is een beroemd probleem. De stad Koningsbergen (heden ten dage Kaliningrad) lag in het oosten van Pruisen aan de rivier de Pregel, aarin t ee eilanden lagen die door even bruggen met elkaar en met de vaste al verbonden aren. Hierboven is de situatie schematisch afgebeeld. Tevens is een graaf getekend die de situatie abstract eergeeft. Is het mogelijk om o te andelen dat je precies eenmaal over elke brug loopt? Zo ja, geef de route. Zo nee, leg uit aarom niet.

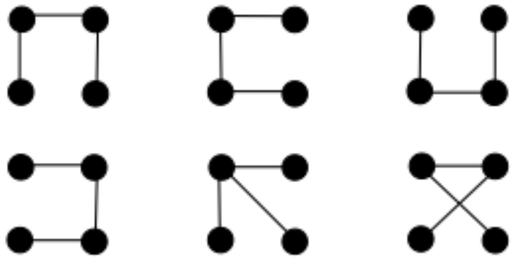
21 **a** Hoeveel lijnen heeft een volledige graaf met 2, 3, 4, 5, 6 knopen?

b Leg uit dat een volledige graaf met n knopen $\frac{1}{2}n(n-1)$ lijnen heeft.

c Bepaal het aantal opspannende bomen van een volledige graaf met t ee knopen.

d Bepaal het aantal opspannende bomen van een volledige graaf met drie knopen.

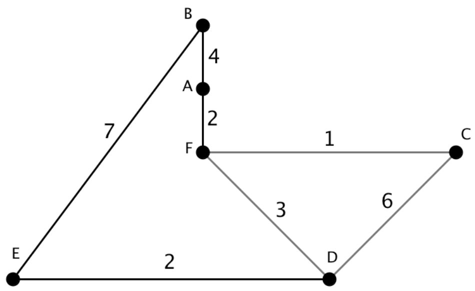




e De volledige graaf K_4 hierboven be it meer dan 10 opspannende bomen. Hierboven rechts ie je er es getekend. Hoeveel opspannende bomen be it K_4 e act?

f Wat is fout in de volgende redenering? Een opspannende boom van K_4 heeft 3 lijnen. Je kunt op $\binom{6}{3} = 20$ manieren 3 lijnen uit es lijnen kie en, dus K_4 heeft 20 opspannende bomen.

22 In de tekening hiernaast ijn de es depots van ons basisprobleem schematisch eergegeven. Ook is een mogelijk bui ennet erk eergegeven. Neem de e tekening over en beant oord vervolgens de vragen.



a De e graaf heeft drie c kels, benoem de e.

b Is de e graaf samenhangend?

c Waarom kan dit bui ennet erk nooit de oplossing ijn voor ons basisprobleem?

d Teken uitgaande van de elfde es depots, een bui ennet erk (graaf) met precies een c kel. Teken ook t ee verschillende opspannende bomen. Zet steeds langs iedere lijn het ge icht van de e lijn.

e Waarom kan een samenhangende graaf met een c kel nooit de oplossing ijn voor ons probleem?

f Bereken de som van de ge ichten van de t ee verschillende opspannende bomen die je getekend hebt.

g Kun je een opspannende boom tekenen met een lager totaalge icht?

h Iedere opspannende boom heeft precies 5 lijnen, leg uit aarom.

We gaan verder met ons basisprobleem. In de opgaven hebben e ontdekt dat het bui enprobleem er op neer komt dat je een boom oekt aarvan de som van de ge ichten van de lijnen minimaal is. Zo n boom heet een minimaal opspannende boom.
Een manier om de minimale opspannende boom te bepalen is het bepalen van alle bomen en dan steeds de som van de ge ichten te bepalen. Dat is in de e situatie best nog mogelijk maar bij meer lijnen en knopen al snel een tijdsintensieve en vrij onmogelijke klus. Zelfs een relatief kleine graaf die bestaat uit 6 knopen en 15 lijnen be it ongeveer 1300 opspannende bomen.

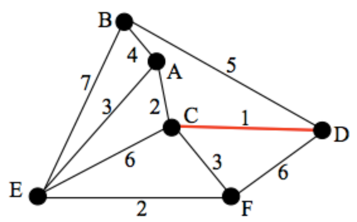
Er bestaan gelukkig slimmere strategie n. Een algoritme dat een minimale opspannende boom maakt is:

Het algoritme van Kruskal

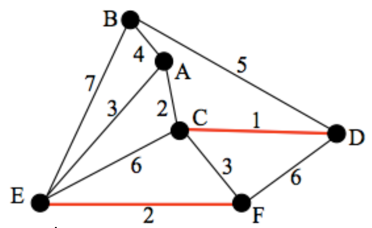
Kies een van de lijnen met het kleinste ge icht
Kies van de overgebleven lijnen de lijn met het kleinste ge icht en org daarbij dat die lijn samen met de eerder geko en lijnen geen circuit vormt.
Ga o door totdat je alle knopen hebt gehad.

In de volgende serie plaatjes ie je hoe je dit algoritme op het bui enprobleem toepast:

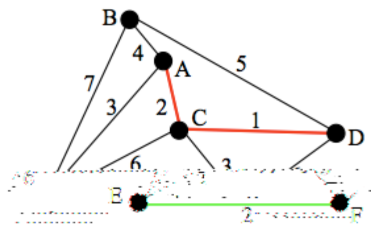
Kies lijn **CD**, de e heeft het kleinste ge icht, namelijk 1

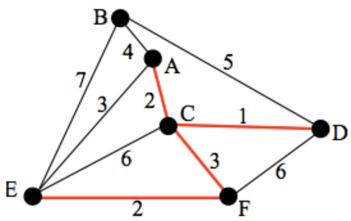


Kies lijn AC of EF, de e hebben beide ge icht 2.
Keu e voor **EF**.
Som ge ichten: 1+2 = 3.

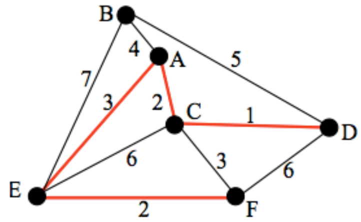


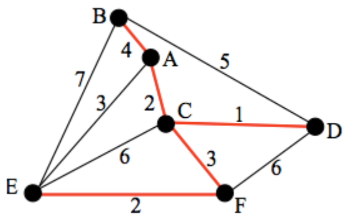
Dit keer is lijn **AC** de lijn met het kleinste ge icht en moet dus geko en orden.
Som ge ichten: 1+2+2 = 5.



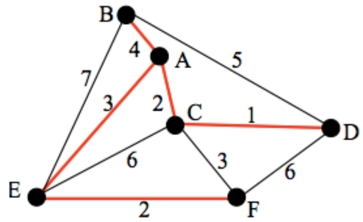


Ge icht 3 komt t ee keer voor. Bij beide keu es ontstaat geen circuit.
Links keu e **CF**
Rechts keu e **AE**
Som ge ichten: 1+2+2+3 = 8.





In beide situaties moet **BA** geko en orden (bij keu e ge icht 3 ontstaat circuit).
Som ge ichten:
1+2+2+3+4 = 12.



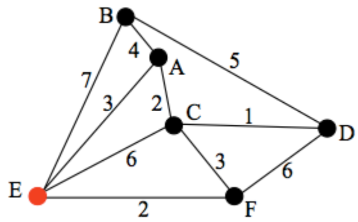
Het probleem is nu opgelost. Er ijn t ee minimale opspannende bomen en de som van de ge ichten is 12. Voor het bui enprobleem betekent dat dat de minimale kosten 12 miljoen Euro ijn. De bedrijfsleiding kan kie en uit t ee net erken.

Het algoritme van Kruskal beperkt het oek- en reken erk aan ienlijk. De stap die in grote net erken het meeste tijd kost is het controleren of er geen circuit ontstaat. Een methode aarbij die controle niet hoeft plaats te vinden is het algoritme van Prim. In dat algoritme voeg je geen lijnen toe maar knopen.

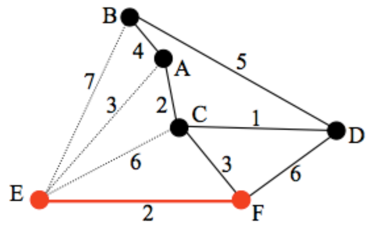
Het algoritme van Prim

Kies een illekeurige knoop.
Kies uit alle lijnen van die knoop een lijn met minimaal ge icht.
Kies van alle lijnen die bij de eerder geko en knopen horen,
steeds de lijn met het kleinste ge icht en
voeg de bijbehorende nieu e knoop toe.
Herhaal de e stap totdat je alle knopen hebt.

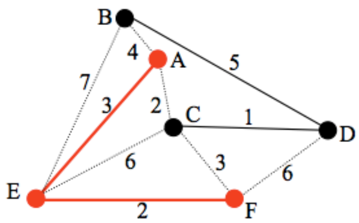
Ook dit algoritme gaan e stapsge ijs volgen bij het bui enprobleem.



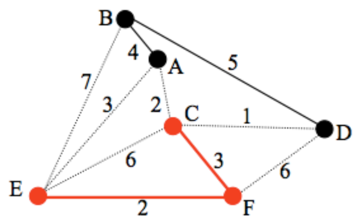
Links: Kies (vrij illekeurig) knoop **E**. In knoop E komen vier lijnen samen.
Rechts: Kies de lijn met het kleinste ge icht EF. Knoop **F** ordt toegevoegd.
Som ge ichten: 2

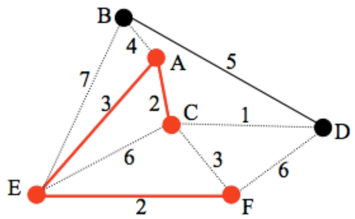


Bij de knopen E en F komen samen 5 lijnen aan. De lijnen met minimaal ge icht ijn AE en CF. Beide kunnen geko en orden.

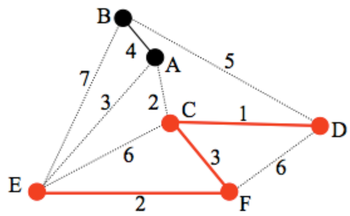


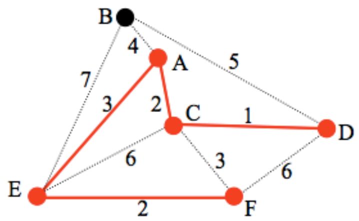
Links: Voeg AE toe met ge icht 3, Knoop **A**.
Rechts: Voeg CF toe met ge icht 3, Knoop **C**.
Som ge ichten: 2+3 = 5.



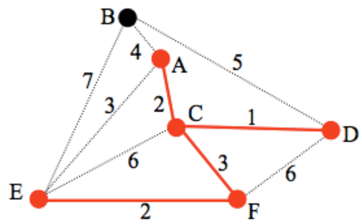


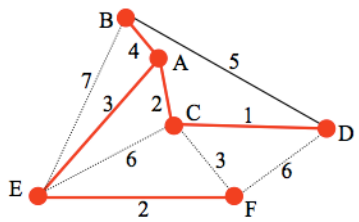
Links: Voeg AC toe met ge icht 2, Knoop **C**.
Rechts: Voeg CD toe met ge icht 1, Knoop **D**.



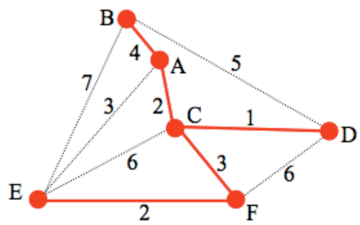


Links: Voeg CD toe met ge icht 1, Knoop **D**.
Rechts: Voeg AC toe met ge icht 2, Knoop **A**.



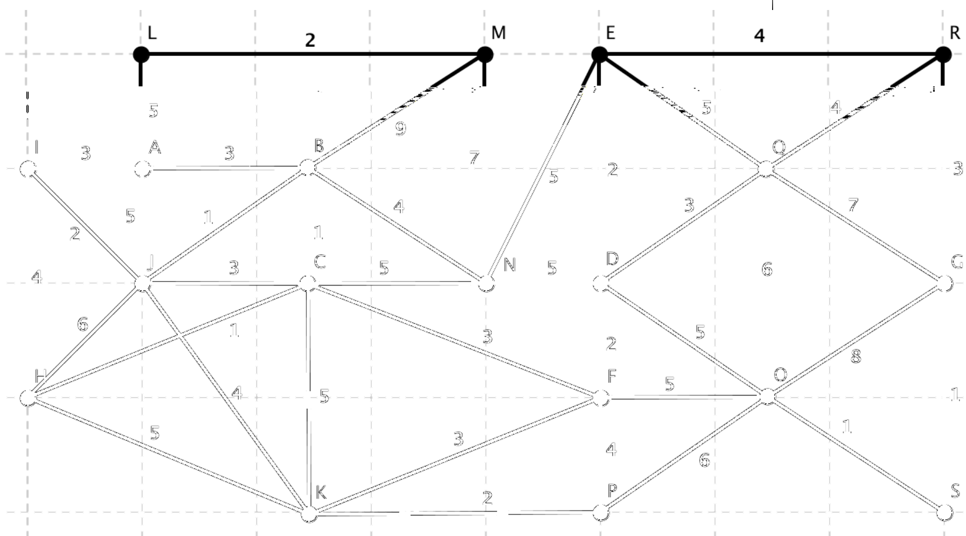


Links: Voeg AB toe met ge icht 4, Knoop **B**.
Rechts: Voeg AB toe met ge icht 4, Knoop **B**.



Uiteraard levert het algoritme van Prim de elfde oplossingen (anders ou het geen correct algoritme ijn) als het algoritme van Kruskal. Het be ijs dat de beide algoritmes altijd de minimale opspannende boom leveren is niet heel eenvoudig en laten e hier achter ege.

23 Bepaal de minimale opspannende boom bij het onderstaande net erk.



Kies het algoritme dat je het handigst lijkt.

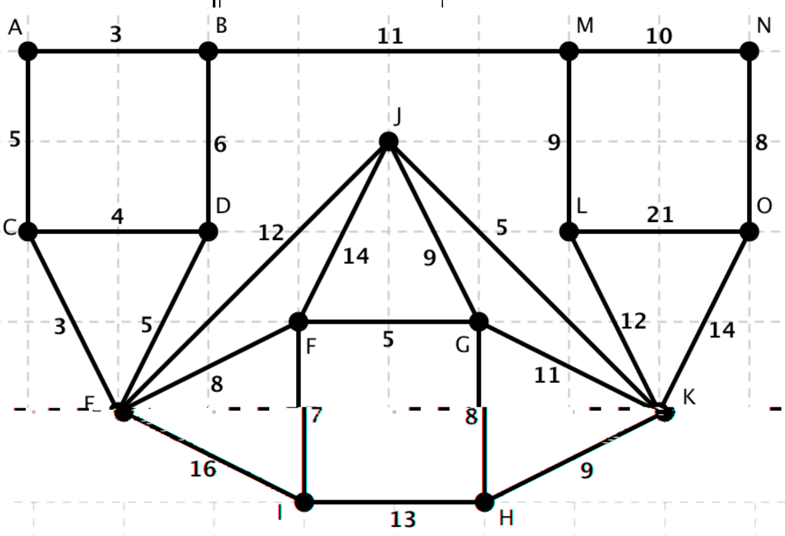
24 Er liggen acht kleine eilandjes in een meer, en de regering il 7 bruggen bou en om e te verbinden, odat ieder eiland bereikt kan orden vanuit ieder eiland via een of meer bruggen. De afstanden tussen ieder t eetal e anden is gegeven in de tabel.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		24	21	34	28	20	35	12
2			27	18	22	18	19	16
3				26	12	35	44	20
4					16	33	30	23
5						36	40	17
6							18	21
7								31
8								

Welke bruggen moeten gebou d orden om de kosten, die evenredig ijn met de lengte van de bruggen, te minimaliseren?

In de tekst is steeds sprake van een minimaal opspannende boom. Je kunt met kleine ij igingen de algoritmes van Prim en Kruskal aanpassen odat e een *maximaal opspannende boom* leveren. Dat is een boom aarvan de som van de ge ichten ma imaal is.

25 Bepaal met behulp van de ge ij igde algoritmes van Prim en Kruskal een ma imaal opspannende boom voor het onderstaande net erk:



26 Beschou de onderstaande kostentabel voor het aanleggen van een net erk tussen de knopen A, B, C, D, E en F.

	A	B	C	D	E	F
A	0	7	3	1	5	9
B	7	0	3	9	5	2
C	3	3	0	3	4	4
D	1	9	3	0	11	5
E	5	5	4	11	0	9
F	9	2	4	5	9	0

a Vindt de minimaal opspannende boom als je begint vanuit E met behulp van het algoritme van Prim.

b Vindt de minimaal opspannende boom als je begint vanuit A met behulp van het algoritme van Prim.

c Gebruik nu het algoritme van Kruskal om de minimale opspannende boom te vinden.

2.3 GRAFEN EN COALITIES

In de buurt van een rivier ordt een nieu e gascentrale gebou d die ook gas kan leveren aan drie verderop gelegen autonome regio s. Helaas ijn er nog geen leidingen naar de regio s. Die kunnen aangelegd orden maar daar hangt een behoorlijk prijskaartje aan: 600 miljoen Euro voor een gasleiding naar regio A, 400 miljoen naar B en 800 miljoen naar C. Het is ook mogelijk om van regio naar regio leidingen aan te leggen. De kosten daarvan (keer 100 miljoen) staan aangegeven in de onderstaande situatieschets. Alle aanlegkosten moeten door de regio s orden opgebracht.

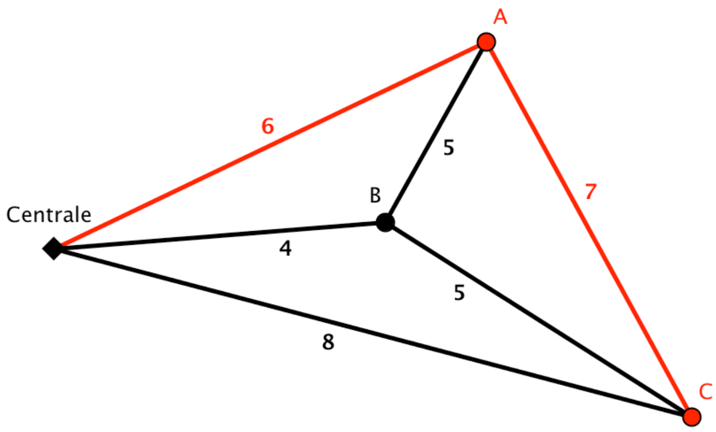
27 Leg uit dat de totale minimale kosten 14 eenheden (1400 miljoen euro) bedragen. Wat is de minimale opspannende boom?

Als onafhankelijk adviseur ou je dus adviseren dat iedereen moet samen erken en

Het voorgaande leidt tot de volgende vraag: Hoe kunnen de regio s samen erken om kosten te besparen? En hoeveel ou een regio dan redelijker ijs aan de kosten van een ge amenlijk net erk moeten bijdragen?
Met de e (en soortgelijke) vragen ullen e ons in de rest van de e paragraaf be ig houden.

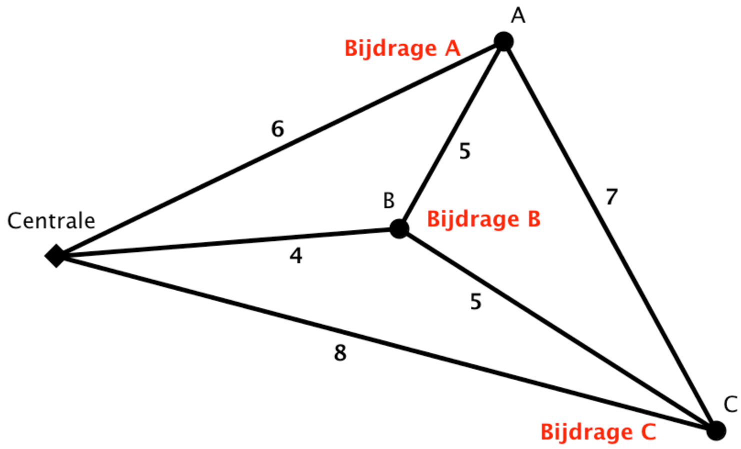
Allereerst een t eetal definities: regio s die samen erken noemen e in de iskunde *coalities*. Vaak spreken e in de iskunde over *spelers* in plaats van regio s.

De spelers A en C kunnen bijvoorbeeld een coalitie vormen en voor $6 + 7 = 13$ eenheden (=1300 miljoen euro) orden aangesloten. Als A dan bijvoorbeeld 5,5 eenheden bijdraagt en C dus 13 5,5 = 7,5 eenheden dan hebben beide regio s een voordeel van 0,5 eenheid en dat is 50 miljoen Euro. Niet mis!



29 Breng alle mogelijke coalities op een soortgelijke manier in kaart en vermeld per coalitie at de kosten voor de coalitie ijn en de kosten voor de overgebleven speler(s).

Omdat de belastingbetaler uiteindelijk de rekening betaalt ordt besloten dat de drie spelers toch samen een coalitie moeten vormen. De totale kosten ijn dus 14, maar e blijven itten met de vraag of er een goede verdeling van de e kosten bestaat. Als dat o is dan moet de bijdrage van B tussen de 0 en de 4 liggen (aarom?).



Om het probleem verder te anal seren voeren e drie variabelen in:

- a is het aantal eenheden dat regio A bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC
- b is het aantal eenheden dat regio B bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC
- c is het aantal eenheden dat regio C bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC

Er geldt natuurlijk dat $a+b+c=14$ ant de drie spelers moeten samen het net erk bekostigen.
Verder al geen enkele regio meer dan de directe aansluitkosten illen betalen. Dat levert de volgende voor aarden op: $0 \leq a \leq 6, \quad 0 \leq b \leq 4, \quad 0 \leq c \leq 8$

Ook al elke speler niet meer illen bijdragen dan dat er in een coalitie van 2 partijen moet orden betaald. Voor de coalitie AC houdt dat, oals eerder besproken, in dat $a+c \leq 13$. Voor de coalitie AB betekent dit: $a+b \leq 9$ En voor de coalitie BC: $\; + \; \leq 9$.

Al met al geldt nu voor de drie bijdragen het volgende stelsel van voor aarden:

$$
\begin{cases}
a+b+c=14 \\
a \leq 6, \quad b \leq 4, \quad c \leq 8 \\
a+b \leq 9, \quad a+c \leq 13, \quad b+c \leq 9 \\
a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0
\end{cases}
$$

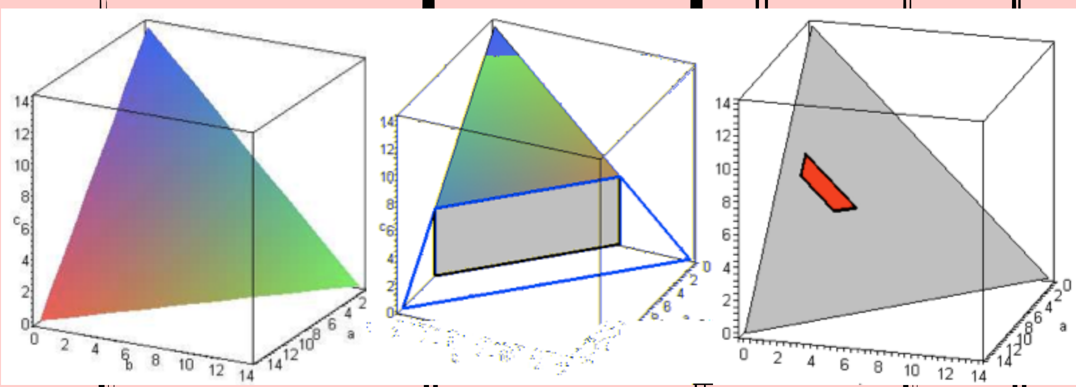
De voor aarden ijn allemaal lineair: een lineaire gelijkheid en negen lineaire ongelijkheden. Daardoor lijkt dit probleem op de optimaliseringsproblemen uit hoofdstuk 1. Verschil is echter dat er nu geen doelfunctie is. Het minimaliseringsprobleem is al opgelost door het bepalen van de minimaal opspannende boom aaruit volgde dat $a+b+c=14$. Maar net o goed als bij de optimaliseringsproblemen is er nu sprake van een beperkend gebied dat het aantal oplossingen beperkt.

Informatief:

Omdat er 3 variabelen ijn kun je het gebied dat bij de voor aarden hoort schetsen met 3d-plaatjes. In het onderstaande linker plaatje ie je het vlak $a+b+c=14$ in het eerste octant (dus $a,b,c\geq 0$).

De toegestane oplossingen liggen dus in een driehoek. De drie hoekpunten van die driehoek ijn (14,0,0), (0,14,0) en (0,0,14).

In het middelste plaatje is de voor aarde $a+b\leq 9$ ver erkt. Het vlak $a+b=9$ is een verticaal vlak dat het grondvlak snijdt in de lijn door (9,0,0) en (0,9,0). Dat vlak snijdt een gedeelte van de driehoek af. De driehoek die overblijft heeft als hoekpunten (9,0,5), (0,9,5) en (0,0,14).
Als je o doorgaat orgt elke voor aarde er voor dat een stuk van de driehoek ordt afgesneden. In het rechter plaatje ie je het gebied dat overblijft na ver erking van alle voor aarden. Het is een vierhoek op het vlak $a+b+c=14$.



Met een *truc* kun je het gebied ook t eedimensionaal in beeld brengen, in een *xy*-assenstelsel. Uit $a+b+c=14$ volgt dat $c=14-a-b$.

In de ongelijkheid $b+c\leq 9$ kunnen e nu voor c: $14-a-b$ *substitueren* (vervangen)

en e krijgen dan: $\begin{cases} \;+\;\leq 9 \Leftrightarrow \\ \;+(14-\;-\;)\leq 9 \Leftrightarrow \\ 14-\;\leq 9 \Leftrightarrow \\ -\;\leq -5 \Leftrightarrow \\ \;\geq 5 \end{cases}$

We eggen dat e *c* uit de ongelijkheid $b+c\leq 9$ hebben *geëlimineerd* (ver ijderd). De ongelijkheid $b+c\leq 9$ is daarbij overgegaan in de ongelijkheid $a\geq 5$.

30 **a** Laat ien dat door substitutie van $c = 14 - a - b$ in alle voor aarden van het stelsel op pagina 23, dit stelsel overgaat in:

$$\begin{cases} a+b \geq 6, \quad a+b \leq 14, \quad a+b \leq 9 \\ a \geq 5, \quad a \geq 0, \quad a \leq 6 \\ b \geq 0, \quad b \geq 1, \quad b \leq 4 \end{cases}$$

b Teken het toegestane gebied.

c Laat ien dat voor n van de hoekpunten P van het toegestane gebied geldt dat P=(5, 1) en dat hier a=5, b=1 en dat c=8.

d Vul de onderstaande tabel voor de andere hoekpunten Q, R en S in.

e Laat ien dat M=(a; b; c)=(5,50; 2,75; 5,75) een punt is van het toegestane gebied en vul ook voor M de onderstaande tabel in.

	Bijdrage speler	**Absoluut voordeel (100 miljoen)**	**Relatief voordeel**
Punt P	Regio A, a=5	1	16,7%
	Regio B, b=1	3	75%
	Regio C, c=1	0	0%
Punt Q	Regio A, a=	___	___
	Regio B, b=	___	___
	Regio C, c=	___	___
Punt R	Regio A, a=	___	___
	Regio B, b=	___	___
	Regio C, c=	___	___
Punt S	Regio A, a=	___	___
	Regio B, b=	___	___
	Regio C, c=	___	___
Punt M	Regio A, a=	___	___
	Regio B, b=	___	___
	Regio C, c=	___	___

Samenvattend (en controleer de e be eringen):

Regio A al redelijker ijs minimaal 5 en ma imaal 6 eenheden moeten bijdragen, Regio B minimaal 1 en ma imaal 4 en regio C minimaal 5 en ma imaal 8.
In de hoekpunten P, Q, R en S is er steeds een regio die geen voordeel uit de coalitie boekt. De regio in k estie kan dus net o goed niet meedoen.

Als neutrale buitenstaander ou je nu allerlei voorstellen kunnen doen. Zo levert het punt M aan ienlijke besparingen voor elke regio op. Uiteraard kun je ook allerlei andere verdelingen bedenken binnen het gebied PQRS. De iskunde heeft in ieder geval de redelijke gren en voor elke regio vastgesteld en ijn taak volbracht.

In dit voorbeeld heb je ge ien hoe grafentheorie en onderdelen van optimaliseren bij elkaar komen. Bij meer dan drie spelers is het bepalen van minimale opspannende bomen nog altijd geen probleem. Met de algoritmes van Prim of Kruskal gaat dat snel. Het aantal voor aarden stijgt echter behoorlijk omdat er steeds meer coalities mogelijk ijn. Bovendien kun je dan je dan niet meer met een plaatje snel het toegelaten gebied in beeld brengen.

2.4 EXTRA OPGAVEN

31 **a** Bepaal hoeveel coalities er mogelijk ijn met 4, 5 en 6 spelers.

b Hoeveel coalities ijn er mogelijk met *n* spelers?

32 (Vervolg op opgave 30)

a Is het mogelijk om aarden van *a*, *b* en *c* te bepalen odanig dat elke speler het elfde absolute voordeel heeft (met andere oorden: voldoet die oplossingen aan alle voor aarden)?

De aansluitkosten van A naar C bedragen 7 eenheden. Als de aansluitkosten voor de leiding van A naar C groter orden dan blijft de minimale opspannende boom gelijk. Het toegelaten gebied verandert echter.

b Teken het nieu e toegelaten gebied als de kosten 7,5 ijn.

c Hoe verandert het toegelaten gebied bij toenemende kosten?

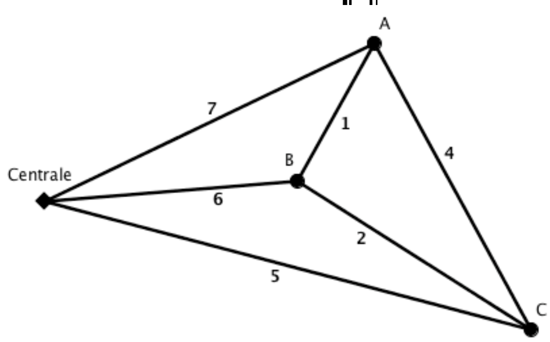
Als de aansluitkosten van A naar C kleiner orden dan is het mogelijk dat een andere minimale opspannende boom voor de coalitie van drie spelers ontstaat. AC vervangt dan AB of BC in de boom.

d Bij elke ge icht van lijn AC ontstaat er een andere minimale opspannende boom?

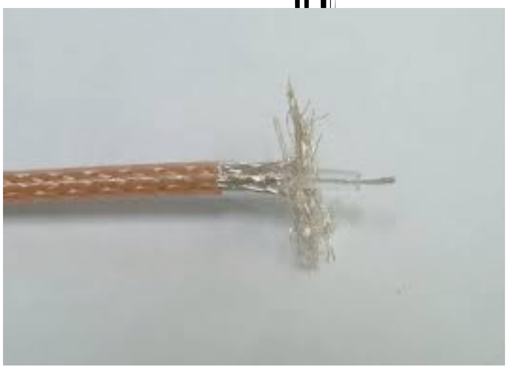
e Bepaal alle voor aarden en teken het toegestane gebied als lijn AC ge icht 4 heeft.

f Bereken de absolute en de relatieve inst in de hoekpunten van het nieu e toegelaten gebied.

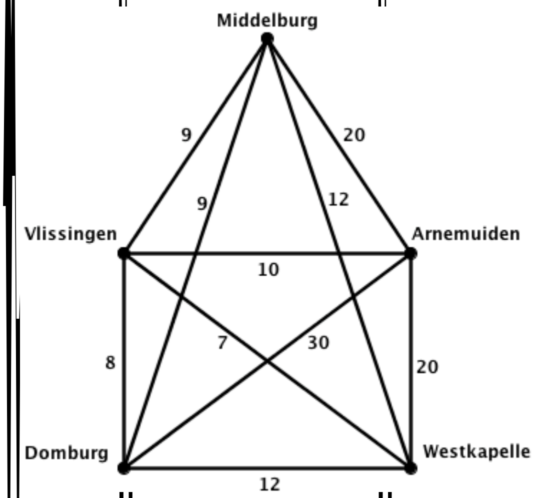
33 Hiernaast ie je, net als bij ons basisprobleem, een graaf met aanlegkosten van de leidingen. Stel bij de e graaf alle voor aarden op, teken het toegelaten gebied en anal seer absolute en relatieve inst (tov directe kosten) in de hoekpunten van het toegelaten gebied.



34 Aan het eind van de jaren tachtig is de ij e aarop Nederland televisie ontvangt drastisch veranderd. De klassieke antenne is vervangen door de kabel. Overal in het land verschenen kabelcentrales. Vanuit o n kabelcentrale orden de ontvangen signalen (per kabel) naar de omliggende steden geleid.



In de e opgave kijken e naar de kabelcentrale Middelburg en vier omliggende steden, te eten Arnemuiden, Domburg, Vlissingen en Westkapelle. De onderstaande figuur geeft schematisch de plaatsen eer en voor ieder t eetal plaatsen de kosten (in miljoenen euro s) voor het aanleggen van een kabelverbinding tussen de e plaatsen.



a Beredeneer dat de coalitie bestaande uit de spelers Vlissingen, Domburg en Westkapelle een net erk kan laten aanleggen voor 24 miljoen euro.

b Bepaal voor elke coalitie (van meer dan een speler) de minimale kosten van het net erk dat e ge amenlijk kunnen aanleggen.

c Als alle spelers samen erken ijn de aanlegkosten minimaal. Om elke kosten gaat het dan?

Noem v de bijdrage van Vlissingen, a de bijdrage van Arnemuiden, en .
Er geldt: $0 \le v \le 9$, $0 \le a \le 20$, $0 \le d \le 9$, $0 \le w \le 12$

d Stel alle andere voor aarden op.

e Geef een oplossing die aan alle voor aarden voldoet en bereken de inst t.o.v. de directe aansluitkosten van elke speler.

f Kun je een oplossing vinden aarbij elke partij voordeel heeft?

3 Koppelen

3.1 BASISPROBLEEM

Over de Hongaarse methode

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

Een groot bou bedrijf heeft vier hijskranen, verspreid over vier machineparken. Toevallig ijn er ook vier nieu e bou locaties aar men een hijskraan nodig heeft. Het transport van een hijskraan is een kostbare aak. In de tabel ie je de afstand in kilometers tussen de vier bou locaties en de machineparken.

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Hijskraan 1	55	50	17	48
Hijskraan 2	34	31	31	34
Hijskraan 3	57	55	21	45
Hijskraan 4	55	48	20	42

De vraag is nu elke hijskraan je naar elke bou locatie moet vervoeren als je de totale transportafstand ilt minimaliseren.

35 **a** Op hoeveel manieren kun je in bovenstaand voorbeeld de 4 hijskranen aan de 4 bou locaties toe ij en?

b Op hoeveel manieren kun je 6 hijskranen aan 6 bou locaties toe ij en?

c Op hoeveel manieren kun je *n* hijskranen aan *n* bou locaties toe ij en?

3.2 EEN ANALYSE VAN HET PROBLEEM

Het probleem houdt in dat je precies vier koppelingen moet leggen tussen de vier hijskranen en de vier bou locaties. De som van de *gewichten* moet daarbij minimaal ijn. Je oekt dus een minimale koppeling tussen de hijskranen en de bou locaties en daarom noemt men dit t pe probleem ook el een koppelingsprobleem.

In de tabel hiernaast ijn vrij illekeurig vier koppelingen geko en. Het totaal aantal transportkilometers is bij de e keu e

+ + + = kilometer.

	L1	L2	L3	L4
H1	**55**	50	17	48
H2	34	31	**31**	34
H3	57	55	21	**45**
H4	55	**48**	20	42

Je iet dat in elke rij en in elke kolom precies n getal is geselecteerd. Dat gegeven is kenmerkend voor een koppeling.

De vraag is nu of het nog goedkoper kan? In principe is dat geen moeilijk probleem. In opgave 1 heb je ge ien dat er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschillende koppelingen mogelijk ijn. Je kunt dus in principe de 24 verschillende koppelingen allemaal opschrijven en steeds het totaal aantal kilometers bepalen.

Hiernaast ie je een viertal andere koppelingen:

	L1	L2	L3	L4
H1	**55**	50	17	48
H2	34	**31**	31	34
H3	57	55	**21**	45
H4	55	48	20	**42**

	L1	L2	L3	L4
H1	**55**	50	17	48
H2	34	31	**31**	34
H3	57	**55**	21	45
H4	55	48	20	**42**

	L1	L2	L3	L4
H1	55	**50**	17	48
H2	**34**	31	31	34
H3	57	55	**21**	45
H4	55	48	20	**42**

	L1	L2	L3	L4
H1	55	**50**	17	48
H2	34	31	31	**34**
H3	57	55	**21**	45
H4	**55**	48	20	42

In de koppeling linksonder is 147 kilometer transport nodig, een behoorlijke verbetering t.o.v. de eerste koppeling. Toch hoeft die koppeling niet de *optimale toewijzing* te ijn. Er ijn immers nog 19 andere koppelingen mogelijk en de e moeten ook berekend orden. De e eenvoudige manier is daarom ook een vrij tijdsintensieve manier.

Daarnaast hebben e in opgave 35 ge ien dat het aantal koppelingen met het toenemen van het aantal hijskranen snel erg groot ordt. De e methode is dus niet handig. Er is een effici ntere methode, de ogenaamde *Hongaarse methode*, die e gaan bespreken.

3.3 DE HONGAARSE METHODE

36 **a** Bepaal de som van de ge ichten van de vijf koppelingen uit paragraaf 3.2.

b Wat gebeurt er met de e som als hijskraan 1 in een machinepark ou staan dat 9 kilometer dichterbij alle bou locaties gelegen is?

c En at gebeurt er met de e som als bou locatie 2 op een plaats 7 kilometer verder van alle machineparken af ligt?

d Verandert de optimale toe ij ing als e in tabel I in kolom 2 overal 7 optellen? En als e in rij 1 overal 9 aftrekken? Licht je ant oord toe.

In opgave 36 hebben e ontdekt dat het probleem niet verandert als alle elementen van een kolom (of van een rij) met het elfde getal orden verminderd (of verhoogd). We kunnen dit principe gebruiken om een eenvoudigere (*gereduceerde*) tabel te maken. Na het verhogen en verminderen van sommige rijen en kolommen, krijgen e de tabel hiernaast (hoe e de e tabel hebben verkregen, ordt later uitgelegd).

	L1	L2	L3	L4
H1	5	3	0	7
H2	0	0	30	9
H3	3	4	0	0
H4	4	0	2	0

37 Uit de e gereduceerde tabel volgt dat er maar n optimale toe ij ing is, namelijk (H1, L3), (H2, L1), (H3, L4) en (H4, L2).

a Leg uit aarom dit de enige optimale toe ij ing is.

b Bereken m.b.v. de originele tabel hoeveel kilometers dan in totaal ordt afgelegd.

De gereduceerde tabel is verkregen door gebruik te maken van de Hongaarse methode. Het stappenplan van de e methode is als volgt:

De Hongaarse methode

Stap 0. We starten met een tabel met *n* rijen en *n* kolommen.
Vind in elke rij van de tabel het minimale element en verminder de hele rij met dit getal. Vind vervolgens (in de nieu e tabel) voor elke kolom het minimale element en verminder de hele kolom met dit getal. Ga naar stap 1.

Stap 1. Bekijk of het mogelijk is in de nieu e tabel een toe ij ing te vinden met 0 kosten. Als dit mogelijk is hebben e een optimale toe ij ing gevonden en kunnen e stoppen. Als dit niet mogelijk is dan kunnen e alle nullen in de nieu e tabel bedekken met minder dan *n* lijnen (hori ontaal en verticaal). Trek de e lijnen en ga naar stap 2.

Stap 2. Bepaal het kleinste getal dat nog niet bedekt is door een lijn en trek dat getal af van elk getal dat nog niet bedekt is door een hor ontale of verticale lijn en tel het op bij elk getal dat bedekt is door t ee lijnen. Ga terug naar stap 1.

Als e dit uit erken aan de hand van ons basisprobleem dan iet het er als volgt uit:

Stap 0: Eerst alle rijen en vervolgens alle kolommen met het minimum verminderd:

	L1	L2	L3	L4
H1	38	33	0	31
H2	3	0	0	3
H3	36	34	0	24
H4	35	28	0	22

	L1	L2	L3	L4
H1	35	33	0	28
H2	0	0	0	0
H3	33	34	0	21
H4	32	28	0	19

Stap 1: het is niet mogelijk om in de nieu e tabel een toe ij ing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met t ee lijnen:

	L1	L2	L3	L4
H1	35	33	0	28
H2	0	0	0	0
H3	33	34	0	21
H4	32	28	0	19

	L1	L2	L3	L4
H1	16	14	0	9
H2	0	0	19	0
H3	14	15	0	2
H4	13	9	0	0

Stap 2a:

We verminderen alle onbedekte elementen met 19 en verhogen het t eemaal bedekte element met 19.

	L1	L2	L3	L4
H1	16	14	0	9
H2	0	0	19	0
H3	14	15	0	2
H4	13	9	0	0

Stap 1:

Het is niet mogelijk om in de nieu e tabel een toe ij ing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met drie lijnen.

	L1	L2	L3	L4
H1	7	5	0	9
H2	0	0	28	9
H3	5	6	0	2
H4	4	0	0	0

Stap 2b:

We verminderen alle onbedekte elementen met 9 en verhogen de t eemaal bedekte elementen met 9.

	L1	L2	L3	L4
H1	7	5	0	9
H2	0	0	28	9
H3	5	6	0	2
H4	4	0	0	0

Stap 1:

Het is nog steeds niet mogelijk om in de nieu e tabel een toe ij ing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met drie lijnen.

	L1	L2	L3	L4
H1	5	3	**0**	7
H2	**0**	0	30	9
H3	3	4	0	**0**
H4	4	**0**	2	0

Stap 2c:

We verminderen alle onbedekte elementen met 2 en verhogen de t eemaal bedekte elementen met 2.

We hebben nu een toe ij ing met 0 kosten (oals e eerder hebben ge ien). De optimale toe ij ing is in de bovenstaande tabel aangegeven en hebben e hiervoor al besproken.

38 Kijk naar stap 2a hierboven. Ligt toe aarom de e stap geen invloed heeft op de optimale toe ij ing.

39 Een machinebedrijf heeft 4 machines beschikbaar voor vier opdrachten. Elke machine kan hoogstens n opdracht uitvoeren. De kosten van een opdracht, uitgevoerd door een bepaalde machine, ijn te vinden in onderstaande tabel:

	Opdracht 1	Opdracht 2	Opdracht 3	Opdracht 4
Machine 1	90	75	75	90
Machine 2	35	85	55	65
Machine 3	135	95	90	105
Machine 4	45	110	95	115

Wat is de goedkoopste manier om de opdrachten toe te ij en aan de machines?

40 **a** Gebruik de Hongaarse methode om een optimale toe ij ing voor de volgende kostenmatri te vinden:

	A	B	C
X	1	2	3
Y	4	5	6
Z	7	8	9

b Wat valt je op?

3.4 VARIANTEN VAN DE HONGAARSE METHODE

Maximalisatie

In de onderstaande tabel staan de gemiddelde dagverkoopcijfers van vijf erknemers erk aam in een groot arenhuis voor vijf verschillende producten. Het probleem van de erkgever ligt voor de hand: hoe koppel je de erknemers aan de producten odanig dat de totale dagopbrengst ma imaal is?

	Product 1	Product 2	Product 3	Product 4	Product 5
Werknemer 1	30	70	50	60	50
Werknemer 2	45	80	65	60	70
Werknemer 3	40	65	70	65	80
Werknemer 4	60	70	75	55	75
Werknemer 5	55	65	60	70	80

Bij dit koppelingsprobleem moet je vijf erknemers koppelen aan vijf producten en dat kan op 5!=120 manieren. Teveel mogelijkheden om een voor een na te lopen. De Hongaarse methode moet dus uitkomst bieden. Die methode erkt echter alleen voor het bepalen van een minimum. Met een truc kun je echter ervoor orgen dat het oeken naar een ma imum neerkomt op het oeken van een minimum.

Daarvoor vermenigvuldigen e alle getallen in de tabel met -1. De vijf getallen uit de oorspronkelijke tabel die samen de ma imale som geven hebben dan de elfde positie als de vijf negatieve getallen die de minimale som geven in de aangepaste tabel. De e aangepaste tabel iet er als volgt uit:

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	-30	-70	-50	-60	-50
W2	-45	-80	-65	-60	-70
W3	-40	-65	-70	-65	-80
W4	-60	-70	-75	-55	-75
W5	-55	-65	-60	-70	-80

Op de e manier staan er nu alleen negatieve getallen in de tabel. Het kleinste getal in de tabel is -80. Als je nu 80 bij elk getal optelt heb je eer te maken met niet-negatieve getallen. Die tabel iet er als volgt uit:

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	50	10	30	20	30
W2	35	0	15	20	10
W3	40	15	10	15	0
W4	20	10	5	25	5
W5	25	15	20	10	0

41 **a** Pas op de e tabel de Hongaarse methode toe en bepaal at de ma imale dagopbrengst is. Bedenk daarbij dat je, om de ma imale dagopbrengst te bepalen, de aarden uit de oorspronkelijke tabel moet afle en.

b Hoeveel optimale toe ij ingen ijn mogeli k?

Dummy-rij

Stel dat in het basisprobleem aarmee e dit hoofdstuk begonnen hijskraan 4 defect is. We krijgen dan de tabel hiernaast.
Het aantal rijen is nu kleiner dan het aantal kolommen en daarom erkt de Hongaarse methode niet.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45

Daarom voegen e een dumm -rij toe en e krijgen dan de volgende, aangepaste tabel.
Hd staat daarbij voor dumm hijskraan. Dit betekent dat de e hijskraan niet gebruikt al orden.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
Hd	0	0	0	0

42 **a** Pas op de e tabel de Hongaarse methode toe en bepaal de optimale toe ij ing. Wat is het totaal aantal kilometers dat ordt afgelegd?

b Welke locatie ordt niet voor een van een hijskraan?

Verboden karweitjes

43 In een bedrijfshal kunnen vijf kar eitjes op vijf verschillende machines orden uitgevoerd. In de tabel hieronder staan de kosten van het uitvoeren van een kar ei op een bepaalde machine. Het oneindigheidsteken ∞ in het schema geeft aan dat dat kar eitje niet op die machine kan orden uitgevoerd. Dat teken is geko en omdat het uitvoeren van dat kar ei op die machine bij ij e van spreken oneindig veel tijd kost.

	Kar ei 1	Kar ei 2	Kar ei 3	Kar ei 4	Kar ei 5
Machine 1	∞	8	6	12	1
Machine 2	15	12	7	∞	10
Machine 3	10	∞	5	14	∞
Machine 4	12	∞	12	16	15
Machine 5	18	17	14	∞	13

Hoe moet je de kar eitjes aan de machines koppelen als de totale kosten minimaal moeten ijn? (Tip: gebruik ge oon de Hongaarse methode en bedenk daarbij dat oneindig min een vast getal ge oon oneindig blijft). Wat ijn de totale kosten?

3.5 EXTRA OPGAVEN

44 Ook combinaties van varianten ijn mogelijk: Vijf personen moeten vier opdrachten uitvoeren De tijd die een persoon nodig heeft om een bepaalde opdracht uit te voeren is te vinden in de tabel hiernaast. Een geeft aan dat de persoon die opdracht niet kan uitvoeren.

	O1	O2	O3	O4
P1	22	18	30	18
P2	18	-	27	22
P3	26	20	28	28
P4	16	22	-	14
P5	21	-	25	28

a Bepaal de toe ij ing van opdrachten aan personen odat de totale tijd voor het uitvoeren van de vier opdrachten minimaal is.

b Welke persoon heeft geluk?

45 Hiernaast ie je een tabel aarin de afstanden tussen drie hijskranen en drie bou locaties staan. Net o als in het basisprobleem moet precies n hijskraan naar n locatie orden getransporteerd.

a Hoeveel verschillende koppelingen ijn er mogelijk?

b Bepaal bij iedere koppeling het totaal aantal kilometers dat de drie hijskranen moeten afleggen.

c Welke koppelingen ijn het gunstigst at betreft de afgelegde kilometers?

d Bepaal de optimale koppeling ook met de Hongaarse methode.

46 Bij de estafette 4 keer 50 meter isselslag emmen ijn er vier onderdelen die door vier verschillende emmers moeten orden ge ommen. Hieronder ie je de persoonlijke records van elke emmer op elk onderdeel -0.2 (ke).2 (r) 0 ec-0.2 (ke)nd-0.2 (ke).. -0.2 (rs

47 De coach van een baseballteam il een optimale opstelling bedenken voor ijn team dat bestaat uit 9 spelers. Op grond van de eerder geleverde prestaties op de training heeft hij aan iedere speler een rangnummer tussen 0 en 26 toegekend voor elk van de negen posities. Hoe hoger het rangnummer, hoe beter die speler op die positie uit de voeten kan. In de tabel hieronder ie je ijn beoordelingen:

	Jan	Andr	Ab	Hans	Bert	Camiel	Ma	Piet	Ernst
Pitcher	20	15	10	10	17	23	25	5	15
Catcher	10	10	12	15	9	7	8	7	8
First baseman	12	9	9	10	10	5	7	13	9
Second baseman	13	14	10	15	15	5	8	20	10
Third baseman	12	13	10	15	14	5	9	20	10
Shortstop	15	14	15	16	15	5	10	20	10
Outfielder 1	7	9	12	12	7	6	7	15	12
Outfielder 2	5	6	8	8	5	4	5	10	7
Outfielder 3	5	6	8	8	5	4	5	10	7

a Hoe moet de coach ijn team samenstellen? Pas op, de beant oording van de e vragen vraagt veel stappen, dus erk secuur. Als alternatief kun je opgave 47b maken.

b Zoek op internet naar een programma aarmee je de optimale toe ij ing automatisch kunt laten uitrekenen. Welke toe ij ing geeft dit programma?

48 Een bedrijf heeft vijf machines en produceert vijf producten. De kosten voor het produceren van een product op een bepaalde machine ijn eergegeven in de tabel hiernaast:

	P1	P2	P3	P4	P5
M1		9	8	2	7
M2	3	9	2	8	5
M3	5	3	5	7	7
M4	8	4	5	4	5
M5	5	9	9	4	3

a Neem $x = 6$. Wat is een optimale toe ij ing van de producten aan de machines die de totale kosten minimaliseert? Wat ijn dan de kosten?

b Stel machine M1 moet product P1 produceren.
Wat is een optimale toe ij ing van de andere producten?
Wat ijn daarbij de totale kosten, als functie van x ?

c Wat is de ma imale aarde van odat in een optimale toe ij ing (onder restricties) machine M1 product P1 produceert?

4 Macht

4.1 BASISPROBLEEM

Maar nu eens Niet over exponenten en grondtallen

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

De mede eggenschapsraad van een school bestaat uit tien personen: de directeur van de school, vier docenten, drie leerlingen en t ee ouders. In de raad is afgesproken dat een voorstel ordt aangenomen als meer dan vijf personen ervoor ijn.
Wie heeft nu eigenlijk de meeste macht? Als de verschillende groepen allemaal het elfde stemmen, hebben de docenten dan t ee keer oveel macht als de ouders? En at is eigenlijk de macht van de directeur?

Aan de hand van dit basisprobleem gaan e de theorie uitleggen. Daarnaast ga je onder oek doen naar de machtsverhoudingen in de Nederlandse politiek.

4.2 DEFINITIES

Laten e allereerst aan de hand van het basisprobleem enkele definities geven:
Bij veel k esties stemmen groepen (docenten, ouders, en .) het elfde. Ze stemmen allemaal voor of allemaal tegen. We noemen o n groep een blok. In de speltheorie noem je o n blok een *speler*. Een speler kan dus uit meerdere personen bestaan. En omdat een speler uit meerdere personen kan bestaan hebben spelers niet allemaal het elfde aantal stemmen.

49 **a** Hoeveel spelers ijn er in de mede eggenschapsraad? En hoeveel stemmen heeft iedere speler?

b Gebruik internet om uit te oeken hoeveel spelers (politieke partijen, fracties) er in de T eede Kamer itten en hoeveel stemmen ieder van die spelers heeft.

c En hoe is dat in de Eerste Kamer?

In de mede eggenschapsraad is afgesproken dat een voorstel ordt aangenomen bij meerderheid van stemmen. Zes stemmen v r ijn dus genoeg om een voorstel aan te nemen. Dat getal heet het *quotum*. Het quotum is het minimaal aantal stemmen dat nodig is om een voorstel aangenomen te krijgen. Het aantal stemmen kun je ien als het *gewicht* van de speler.

Het kiess steem van de mede eggenschapsraad ordt dus door vijf getallen vastgelegd. Het quotum en de vier ge ichten van de spelers. In de besliskunde ordt daarvoor dan de verkorte notatie [6; 4, 3, 2, 1] gebruikt. De getallen staan tussen rechte haken en orden gescheiden door een puntkomma en daarachter door komma s. Voor de puntkomma staat het quotum en achter de puntkomma staan de ge ichten van de spelers.

50 **a** Geef op de elfde manier de gegevens van de T eede Kamer eer.

b Doe dat ook voor de Eerste Kamer.

Hoe it het nu met de macht in de mede eggenschapsraad? Welke speler kan het meest bepalen at er besloten ordt? In de situatie van de mede eggenschapsraad geldt [6; 4, 3, 2, 1].
Geen enkele speler heeft 6 of meer stemmen en haalt op eigen kracht het quotum. Dat il eggen dat geen enkele speler *dictator* is. Als dat het geval is dan heeft o n speler de absolute macht. In de besliskunde ken je aan een dictator aan het getal 1 toe en aan alle andere spelers het getal 0. Die spelers kunnen namelijk nooit een voorstel aangenomen krijgen onder dat die dictator instemt. Een getal dat je toekent aan de macht van een speler heet een *machtsindex*. Het is een getal groter dan of gelijk aan nul en kleiner dan of gelijk aan 1.

51 In het Huis van Afgevaardigden in Amerika itten 435 stemgerechtigde leden. Op enig moment aren dat 242 Republikeinen en 193 Democraten.

a Beschrijf de e situatie (in termen van [......]) en geef ge ichten voor iedere speler.

b Geef t ee redenen aarom in Amerika toch niet n speler alle macht heeft.

Als het gaat om macht dan egt de verhouding van de ge ichten niet oveel. De machtsindices in een democratie met t ee partijen   aarbij de verkie ingen geleid hebben tot [150; 76, 74] ijn 1 en 0 (aarom?).
De partij met 76 etels heeft absolute macht gekregen.
Je mag dus ook niet onder meer eggen dat in de mede eggenschapsraad de docenten vier keer oveel macht hebben als de directeur omdat het ge icht vier o groot is. Wel is duidelijk dat de directeur de minste macht moet hebben. Met   n stem kan hij niet veel invloed uitoefenen. Sterker nog, ook samen met een andere speler haalt hij geen meerderheid. De ouders (speler 3) hebben meer macht dan de directeur, ij kunnen namelijk op meer manieren een voorstel aangenomen krijgen. Dat lukt

In de volgende tabel staan nogmaals de innende coalities maar dit keer ijn de niet-kritieke spelers grijs gemaakt.

Winnende coalities	Aantal stemmen
1, 2	7
1, 3	6
1, 2, 3	9
1, 2, 4	8
1, 3, 4	7
2, 3, 4	6
1, 2, 3, 4	10

In het schema is 12 keer een speler niet grijs gemaakt.
De directeur is in dit schema nog maar 1 van de 12 keer te ien.
De ouders en de leerlingen ijn 3 van de 12 keer te ien en de docenten ijn 5 van de 12 keer te ien.

4.3 DE MACHTSINDEX VAN BANZHAF

Definitie (machtsindex van Banzhaf)

De machtsinde van een speler is de verhouding tussen het aantal keren dat een speler kritiek is en het totaal aantal keren dat alle spelers samen kritiek ijn.

Op die manier is de som van de indices gelijk aan 1, een mooie eigenschap die snel de onderlinge machtsverhoudingen laat ien. De resultaten ijn:

Speler	Machtsindex van Banzhaf
1) Docenten	$\frac{5}{12} \approx 0{,}417$
2) Leerlingen	$\frac{3}{12} \approx 0{,}25$
3) Ouders	$\frac{3}{12} \approx 0{,}25$
4) Directeur	$\frac{1}{12} \approx 0{,}083$

52 Bij een kleine verandering van de getallen of bij een geheime coalitie kunnen de machtindices behoorlijk veranderen. Stel dat de directeur altijd het elfde stemt als de ouders.
In feite ijn er dan nog maar drie spelers.

a Beschrijf de situatie ([....]).

b Bepaal de machtsinde van Ban haf voor iedere speler.

53 Een bedrijf heeft 4 aandeelhouders, A, B, C en D. A, B en C hebben ieder 26% van de aandelen en D heeft de resterende 22%.

a Bepaal de innende coalities.

b Bepaal de machtsinde van Ban haf voor iedere speler.

54 In de T eede Kamer is op enig moment sprake van 10 spelers. Als e er van uit gaan dat iedere speler v r of tegen kan stemmen, hoeveel verschillende mogelijkheden ijn er dan?

Je begrijpt uit het bovenstaande dat het niet omaar even mogelijk is om voor de spelers uit de T eede Kamer de machtsindices te bepalen. Gelukkig is voor het bepalen van al die coalities en voor het berekenen van de inde van Ban haf geschikte soft are ont ikkeld aarin je alleen de ge ichten en het quotum hoeft in te voeren. Een geschikte site is bijvoorbeeld: http:// .math.temple.edu/ co /bpi.html

55 **a** Bepaal voor de spelers uit de T eede Kamer de machtsinde van Ban haf.

b Doe dat elfde voor de spelers uit de Eerste Kamer.

56 In Nederland bestaat een regering (bijna altijd uit een combinatie van partijen. De combinatie ordt gevormd dat de e in de T eede Kamer het dictatorschap heeft. Feitelijk kun je eggen dat de combinatie in o el de Eerste Kamer als de T eede Kamer n speler vormt.

a Bepaal voor de e situatie opnieu de machtsindices van Ban haf voor de spelers in de Eerste en T ee Kamer.

b Is de e combinatie ook in de Eerste Kamer op te vatten als een dictator?

Informatief:

De machtsinde van Ban haf is door John F. Ban haf in 1965 bedacht toen hij het stemgedrag anal seerde in onder andere het Amerikaanse verkie ingss steem.

4.4 DE MACHTSINDEX VAN SHAPLEY-SHUBIK

Later ijn er meer machtsindices bedacht en een van de bekendste en meest gebruikte naast de inde van Ban haf is de machtsinde van Llo d Shaple en Martin Shubik.

Lloyd Shapley

Martin Shubik

Shaple en Shubik gaan uit van alle mogelijke volgordes van stemmen aarin alle spelers om de beurt v r stemmen. Zo n volgorde ordt een sequential coalition genoemd.

In het voorbeeld van de mede eggenschapsraad - [6; 4, 3, 2, 1] - ijn er 24 mogelijke volgordes, je kunt immers vier spelers op $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot = 24$ manieren in een rij etten.

In de tabel hiernaast ie je in de eerste kolom de e 24 rijtjes.

In de kolom ernaast ie je de groei van het aantal stemmen in de coalitie als een speler in de coalitie deelneemt.

Bij elke rij ordt ergens het quotum van 6 overschreden. Dat getal is rood gemaakt. De speler aarbij dat gebeurt heet de spil speler of as speler.

Sequential coalition	Toename aantal stemmen
1, 2, 3, 4	4 → 7 → 9 → 10
1, 2, 4, 3	4 → 7 → 8 → 10
1, 3, 2, 4	4 → 6 → 9 → 10
1, 3, 4, 2	4 → 6 → 7 → 10
1, 4, 2, 3	4 → 5 → 8 → 10
1, 4, 3, 2	4 → 5 → 7 → 10
2, 1, 3, 4	3 → 7 → 9 → 10
2, 1, 4, 3	3 → 7 → 8 → 10
2, 3, 1, 4	3 → 5 → 9 → 10
2, 3, 4, 1	3 → 5 → 6 → 10
2, 4, 1, 3	3 → 4 → 8 → 10
2, 4, 3, 1	3 → 4 → 6 → 10
3, 1, 2, 4	2 → 6 → 9 → 10
3, 1, 4, 2	2 → 6 → 7 → 10
3, 2, 1, 4	2 → 5 → 9 → 10
3, 2, 4, 1	2 → 5 → 6 → 10
3, 4, 1, 2	2 → 3 → 7 → 10
3, 4, 2, 1	2 → 3 → 6 → 10
4, 1, 2, 3	1 → 5 → 8 → 10
4, 1, 3, 2	1 → 5 → 7 → 10
4, 2, 1, 3	1 → 4 → 8 → 10
4, 2, 3, 1	1 → 4 → 6 → 10
4, 3, 1, 2	1 → 3 → 7 → 10
4, 3, 2, 1	1 → 3 → 6 → 10

Definitie (machtsindex van Shapley-Shubik)

De machtsinde van een speler is de verhouding tussen het aantal keren dat de e spilspeler is en het totaal aantal sequential coalitions.

De e definitie leidt tot de volgende resultaten:

Speler	Machtsindex van Shapley-Shubik
1) Docenten	$^{10}/_{24} = {^5}/_{12} \approx 0{,}417$
2) Leerlingen	$^{6}/_{24} = {^1}/_{4} = 0{,}25$
3) Ouders	$^{6}/_{24} = {^1}/_{4} = 0{,}25$
4) Directeur	$^{2}/_{24} = {^1}/_{12} \approx 0{,}083$

De indices ijn in dit voorbeeld precies het elfde als de indices van Ban haf.

57 De uitgangssituatie is [8; 7, 5, 2].

a Bereken de machtsindices van Ban haf.

b Bereken de machtsindices van Shaple -Shubik.

58 Bereken de machtsindices van Shaple -Shubik voor de situatie van opgave 53.

Net als bij de machtsinde van Ban haf is het berekenen van de inde van Shaple -Shubik met de hand niet mogelijk als het aantal spelers groot is. Gelukkig is ook voor het berekenen van de inde van Shaple -Shubik geschikte soft are ont ikkeld aarin je alleen de ge ichten en het quotum hoeft in te voeren. Geschikte sites ijn bijvoorbeeld: http:// . ar ick.ac.uk/ ecaae/ssdirect.html en http://homepages. ar ick.ac.uk/ ecaae/ssgenf.html

59 **a** Hoeveel verschillende sequential coalitons bestaan er voor de spelers uit de T eede Kamer? Vat de regering daarbij op als n speler.

b Bepaal voor de spelers uit de T eede Kamer de machtsinde van Shaple -Shubik.

c Doe dat elfde voor de spelers uit de Eerste Kamer.

Je iet dat de inde van Shaple -Shubik bij elke partij slechts een beetje af ijkt van de inde van Ban haf. Ook is de volgorde van afnemende indices gelijk.

4.5 EXTRA OPGAVEN

60 Oneerlijk? Ban haf heeft ijn inde uitgedacht toen hij het Nassau Count kiess steem bestudeerde. Nassau Count is een district in de staat Ne York van de USA met meer dan 1 miljoen in oners. Het kiess steem as volgens hem oneerlijk en om dat aan te tonen heeft hij ijn inde bedacht.
In dat kiess steem van Nassau aren er toen es steden en gebieden met stemrecht:

A. Hempstead #1
B. Hempstead #2
C. North-Hempstead
D. O ster Ba
E. Glen Cove
F. Long Beach

In de laatste drie steden oonde toen in totaal 16% van het totaal aantal in oners van Nassau. Het quotum en de ge ichten in het stems steem aren [16; 9, 9, 7, 3, 1, 1].

a Bepaal alle (maar liefst 32) innende coalities

b Bepaal in elke innende coalitie de kritieke spelers.

c Bereken de machtsindices van Ban haf van alle spelers.

d Wat vond Ban haf oneerlijk aan het s steem van Nassau?

61 Ban haf versus Shaple -Shubik.

Hieronder staan drie kiesstelsels. Steeds ijn er vier spelers (A, B, C en D).

[8; 8, 5, 1, 1]

[11; 8, 6, 4, 2]

[11; 7, 7, 5, 1]

a Bereken in elk stelsel van elke speler de machtsinde van Ban haf.

b Bereken in elk stelsel van elke speler de machtsinde van Shaple -Shubik.

c Vergelijk de resultaten bij elk s steem. Is de volgorde van toenemende macht steeds gelijk?

62 Tegenspraak?

a Bereken de machtindices van Ban haf in de situatie [100; 99, 99, 1].

b Stel dat speler 3 in plaats van 1 nu 98 stemmen heeft: [quotum; 99, 99, 98]. Bereken voor de e situatie het nieu e minimale quotum. Verandert hierdoor de machtsverdeling tussen de drie spelers? Zo ja, hoe?

c Het quotum hoeft niet de helft plus 1 te ijn. Stel dat een voorstel ordt aangenomen bij 198 stemmen. Hoe is nu de verdeling van de macht bij de situatie [198; 99, 99, 98]?

d Vergelijk de situatie van onderdeel a) met onderdeel c). Geef commentaar.

63 Een speler met veel macht

In een spel hebben alle spelers n stem, op een persoon na.

Die speler speler 1 - heeft 2 stemmen.

a Bereken de machtsindices van Shaple -Shubik als er drie spelers (A, B en C) ijn. Dus voor [3; 2, 1, 1].

b Bereken de machtsindices van Shaple -Shubik als er vier spelers ijn.

De berekeningen in a) en b) ijn snel gemaakt. Als het aantal spelers groter ordt dan moet je slim tellen.

c Bereken het quotum *q* als er *n* spelers ijn, dus 1 speler met 2 stemmen en $n-1$ spelers met 1 stem. (Tip: onderscheid de situaties dat *n* even en *n* oneven is)

d Bereken de machtsindices van Shaple -Shubik voor de situatie $\left[q; 2, \underbrace{1, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, 1}_{n-1}\right]$.

64 Het Europese parlement
De EU bestond in juni 2006 uit 27 landen.
Het aantal etels in het parlement ordt bepaald door de omvang van de bevolking van het land. In de tabel ie je de landen van de EU en het aantal etels.

a Bepaal de machtsverdeling volgens Ban haf in de EU als je ervan uit gaat dat landen ich als blokken gedragen die het elfde stemmen. Op elke plaats staat Nederland?

b Idem maar nu volgens het s steem van Shaple -Shubik.

Zetelverdeling tussen de landen (na de Europese verkiezingen van 2004)					
Duitsland	99	Griekenland	24	Slo akije	14
Frankrijk	78	Portugal	24	Ierland	13
Itali	78	Tsjechi	24	Litou en	13
UK	78	Hongarije	24	Letland	9
Spanje	54	Z eden	19	Sloveni	7
Polen	54	Oostenrijk	18	Estland	6
Roemeni	35	Bulgarije	18	Lu emburg	6
Nederland	27	Denemarken	14	C prus	6
Belgi	24	Finland	14	Malta	5

Bij toename van het aantal landen ordt de macht van de kleine landen erg klein. Nederland ou meer macht krijgen als het in een blok samen erkt met een paar lotgenoten. Bijvoorbeeld met Belgi en Lu emburg (de nog altijd bestaande BeNeLu).

c Bereken het effect van die samen erking

65 Een andere machtsinde (uit v o-e amen iskunde A 22 juni 2005)

Sinds 1 mei 2004 bestaat de Europese Unie uit 25 landen. In de Raad van Ministers heeft elk land een etel. In de e raad orden veel beslissingen genomen. Daarbij heeft niet elk land evenveel stemmen. Zo heeft Frankrijk 29 stemmen, Nederland 13 stemmen en Denemarken 7 stemmen.

Op de e ij e beschikken de 25 landen samen over 321 stemmen. Een land stemt of voor of tegen en kan ich dus niet van stemming onthouden of met een deel van ijn stemmen voor en een ander deel tegen stemmen.

Vaak orden beslissingen genomen bij meerderheid van stemmen. Dat betekent dat een voorstel alleen ordt aangenomen als meer dan de helft van de stemmen voor dat voorstel is. Dan kan het gebeuren dat de stemmen van Nederland de doorslag geven bij het e of niet aannemen van een voorstel. Dat is bijvoorbeeld het geval anneer van de overige landen 152 stemmen voor ijn en 156 stemmen tegen.

a Bereken bij elke aantallen voorstemmen van de overige landen de stemmen van Nederland de doorslag geven om een meerderheid voor een voorstel te krijgen.

Bij een stemming kan dus n van de partijen soms de doorslag geven. Hoeveel invloed een partij bij de stemming heeft, geven e aan met de *machtsindex* (*mi*). Aan de hand van een voorbeeld laten e ien hoe je die kunt uitrekenen. We gaan uit van drie partijen A, B en C. Partij A heeft 6 stemmen, partij B heeft 4 stemmen en partij C heeft 3 stemmen. Zij beslissen over een voorstel bij meerderheid van stemmen. Een van de mogelijkheden is de volgende: A stemt voor, B stemt voor en C stemt tegen. De e mogelijkheid noteren e met (V,V,T).

We gaan nu de machtsinde van een van de e partijen, partij B, berekenen. Daarvoor kijken e alleen naar de mogelijkheden aarbij de e partij voor stemt. Dat levert de volgende mogelijkheden op:

mogelijkheid I (V,V,V)
mogelijkheid II (V,V,T)
mogelijkheid III (T,V,V)
mogelijkheid IV (T,V,T)

Omdat de partijen samen 13 stemmen hebben, ijn er minstens 7 stemmen nodig voor een meerderheid. Bij de mogelijkheden I, II en III is er een meerderheid voor het voorstel. Bij de mogelijkheden II en III ijn de 4 voorstemmen van B onmisbaar om een meerderheid te realiseren. Bij mogelijkheid I ou die meerderheid ook behaald ijn als B niet voor ou stemmen. Bij mogelijkheid IV is er geen meerderheid. Omdat de stemmen van B bij 2 van de 4 mogelijkheden doorslaggevend ijn, eggen e: de machtsinde van B is $mi_B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

We gebruiken dus de volgende definitie van de machtsinde (mi) van een partij:

$$mi = \frac{\text{aan al mogelijkheden aarbij de oor emmen an die par ij door lagge end ijn oor de meerderheid}}{\text{o aal aan al mogelijkheden aarbij die par ij oor em}}$$

Wanneer er sprake is van vier partijen, ijn er meer mogelijkheden. We nemen de volgende situatie: partij A heeft 7 stemmen, partij B heeft 4 stemmen, partij C heeft 4 stemmen en partij D heeft 2 stemmen. Ook nu beslissen de partijen bij meerderheid van stemmen.

b Bereken de machtsinde van A in de e nieu e situatie.

De verdeling van de stemmen kan tot vreemde situaties leiden anneer er een partij is met einig stemmen. Er ijn 3 partijen. Partij A heeft 6 stemmen, partij B 4 stemmen en partij C slechts 1 stem. De partijen B en C stellen nu een nieu e verdeling voor aarbij A en B elk 5 stemmen hebben en C nog steeds 1 stem. Het aantal stemmen van C is dan elis aar niet groter ge orden, maar de machtsverhoudingen ijn el veranderd.

c Toon dit aan door in beide situaties de machtsinde van elk van de drie partijen te berekenen.

E tra opgaven (dus geen onderdeel van de e amenopgave)
Bereken ook de Shaple -Shubik machtsindices van A, B en C voor de t ee situaties aarbij:

d Partij A 6 stemmen heeft, partij B 4 stemmen en partij C 1 stem.

e Partij A 5 stemmen heeft, partij B 5 stemmen en partij C 1 stem.

f Vergelijk de indices net als in onderdeel c. Is ook nu die verschuiving van macht aan e ig?

We nemen nu een situatie met vijf partijen A, B, C, D en E. Partij A heeft 3 stemmen en de overige partijen hebben elk 1 stem. We gebruiken de definitie van machtsinde oals hierboven gegeven.

g Onder oek of de machtsinde van A meer dan drie maal o groot is als de machtsinde van B.