VWO Wiskunde D 2015

2 Binomiale en normale verdelingen

Inhoudsopgave

Binomiale en normale verdelingen

Opgaven gemarkeerd met kunnen worden overgeslagen
Bij opgaven gemarkeerd met * hoort een werkblad

Experimentele uitgave 2015 voor wiskunde D vwo 4, 40 slu

Colofon

© 2015 Stichting De Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek†, Ton Geurtz, Maris van Haandel,
Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Daan van Smaalen

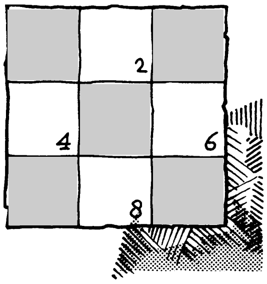
Illustraties Wilson Design, Uden

Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

ISBN

Homepage www.wageningse-methode.nl

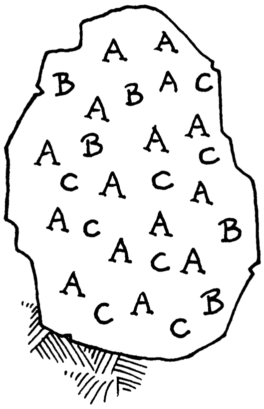
1 De kansdefinitie



1 Kikker
Een kikker is onrustig. Hij springt over de hiernaast getekende tegelvloer alsof zijn leven ervan afhangt. Hij springt steeds naar een naburige tegel: horizontaal of verticaal (dus niet diagonaal).
a. Leg uit dat de kans dat de kikker op een zeker ogenblik op een donkere tegel zit niet noodzakelijk $\frac{5}{9}$ is.
b. Welke tegel heeft de meeste kans en welke tegels hebben de minste kans ? Kun je ook zeggen waarom ?

Kansdefinitie
Als er bij een experiment n *even waarschijnlijke* uitkomsten zijn, waarvan er k zijn van een bepaald type, dan is de kans op een uitkomst van dat type gelijk aan $\frac{k}{n}$.

Bij zo'n experiment is een kans dus een getal tussen 0 en 1.



Voorbeeld
Je hebt een verzameling van 28 dingen. Er zijn drie soorten dingen. Van soort A zijn er 15, van soort B zijn er 5 en van soort C zijn er 8 dingen.
Iemand pakt willekeurig één ding uit die verzameling. Elk van de dingen heeft dezelfde kans om gepakt te worden.
Dan is de kans dat hij een ding van soort A pakt $\frac{15}{28}$.

2 Anneke werpt met twee zuivere muntstukken. (Bij een zuivere munt zijn de kansen op kop en op munt gelijk; dus beide $\frac{1}{2}$.) Er zijn drie mogelijke uitkomsten: "2 kop", "2 munt" en "1 kop en 1 munt". Anneke redeneert als volgt: *Bij twee van de drie mogelijke uitkomsten heb je een "dubbele" (de munten vallen op dezelfde kant). Dus is de kans op een dubbele* $\frac{2}{3}$.
a. Wat is de fout in Annekes redenering ?
b. Wat is de juiste kans op een dubbele ?

3 Voor een loket staan acht mensen in een rij. Je weet dat Anneke en Egon in de rij staan.
Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat Egon vóór Anneke in de rij staat.

4 Bij een verloting zijn er 100 verschillende loten, genummerd 1 t/m 100. De personen A, B, C en D krijgen ieder willekeurig een lot.
a. Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat het nummer dat A krijgt groter is dan de nummers die B, C en D krijgen.
b. Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat het nummer dat A krijgt groter is dan 50, maar kleiner is dan 70.

Pierre Simon Laplace
1749 - 1827

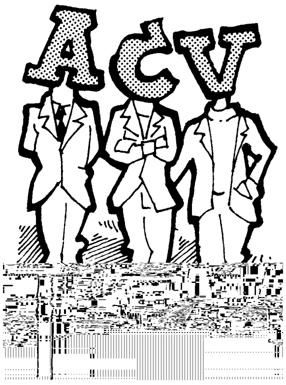
De kansdefinitie is voor het eerst zo geformuleerd door de grote Franse wiskundige Laplace. Hij deed behalve veel aan waarschijnlijkheidsrekening ook aan astronomische mechanica en differentiaalvergelijkingen. Laplace leefde tijdens de roerige tijden van de Franse revolutie. Uit zijn leven zijn de volgende gebeurtenissen bekend. De zestienjarige Napoleon heeft examen gedaan bij Laplace. In 1790 hielp Laplace mee met de standaardisatie van maten en gewichten op decimale basis. Tijdens het schrikbewind van Robespierre ontvluchtte hij Parijs. In 1799 wordt Laplace minister onder Napoleon en daarna kanselier van de senaat.

Als je de kansdefinitie wilt toepassen is het belangrijk te weten of de mogelijk uitkomsten wel *even waarschijnlijk* zijn. Uitkomsten zijn even waarschijnlijk als ze als *gelijkwaardig* mogen worden beschouwd: als er geen enkele reden is dat een van de uitkomsten vaker zal voorkomen dan een andere. Bijvoorbeeld in opgave **3** is (als je geen extra informatie hebt) er geen reden om aan te nemen dat Egon vaker voor Anneke staat in de rij dan omgekeerd: beide mogelijkheden hebben kans $\frac{1}{2}$. Maar stel eens dat je weet dat Anneke en Egon een hechte relatie hebben, meestal gezamenlijk naar het loket gaan en dat Egon dan altijd Anneke voor laat gaan. Dan zijn de twee mogelijkheden niet meer gelijkwaardig. De kans dat Anneke voor Egon staat in de rij is dan beslist groter dan $\frac{1}{2}$.

5 Noem een paar "experimenten" waarbij de uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

6 Je hebt drie brieven (a, b en c) geschreven aan vrienden en hun adressen op enveloppen (A, B en C) gezet. Je pakt envelop A en zonder ergens op te letten stop je een brief in die envelop. Daarna doe je hetzelfde met de andere twee enveloppen.
a. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de drie brieven aan de drie enveloppen worden gekoppeld ?

X is het aantal brieven dat in de juiste envelop zit.
b. Welke waarden kan X aannemen ? Pas op!
c. Wat is de kans op elk van deze waarden ?



7 De koningin gaat op staatsbezoek in China. In haar kielzog gaan er onder andere drie parlementariërs mee. In aanmerking voor de reis komen drie parlementariërs van de PvdA, vier van de VVD en twee van het CDA. Wie mee mag, wordt door het lot aangewezen.
Er zijn in totaal 84 drietallen mogelijk.
a. Bereken de kans dat ze alle drie van één partij komen.
b. Bereken de kans dat er van elke partij een parlementariër mee mag.

Het probleem van opgave **7b** kun je met de kansdefinitie als volgt aanpakken.
Er moet een keuze gedaan worden van drie uit in totaal negen personen. Er zijn 84 van zulke keuzes; die zijn allemaal even waarschijnlijk.
Je telt nu hoeveel keuzes er zijn, bestaande uit 1 PvdA-er, 1 VVD-er en 1 CDA-er: dat zijn er $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.
Het antwoord op vraag **7b** is dus $\frac{24}{84}$.

8 Je vriend heeft een telefoonnummer dat bestaat uit de cijfers 1, 2, 3, 5, 7 en 9. Dat weet je nog, maar de volgorde van de cijfers ben je vergeten.
a. Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 2, 3, 5, 7 en 9 ?

Op de gok toets je het nummer "325197" in.
b. Bereken de kans dat je het goede nummer hebt.
c. Dezelfde vraag als je je herinnert dat de 3 vooraan staat.

9 Een tennistoernooi telt 64 deelnemers, waarvan zes Nederlanders en acht Duitsers. Er wordt gespeeld volgens het knock-out systeem: wie verliest ligt eruit. Voor de finale houden we twee spelers over. Omdat voor elke ronde tussen de overgebleven spelers geloot wordt, kan in principe elke speler tegen elke andere speler in de finale komen.
a. Hoeveel finales zijn er mogelijk ?
b. Hoeveel finales zijn er mogelijk waarbij een Nederlander tegen een Duitser speelt ?

Veronderstel dat alle spelers even sterk zijn en dus even grote kans hebben de volgende ronde te bereiken.
c. Bereken de kans dat de finale wordt gespeeld tussen een Nederlander en een Duitser.

Vaak wordt de fout gemaakt dat ten onrechte wordt aangenomen dat de mogelijke uitkomsten even waarschijnlijk zijn. Hoe gevaarlijk dat is, zie je in de volgende opgave.

10 Egon heeft drie kaartjes: een met een blauwe en een rode kant, een met een witte en een rode kant en een met twee rode kanten.
Egon pakt een willekeurig kaartje en legt het op tafel. De kant die hij ziet blijkt rood te zijn.
a. Wat, denk je, is de kans dat de achterkant ook rood is ?

Als je een van de kaartjes op tafel legt, zijn er vijf mogelijke uitkomsten:
1) wit boven, rood onder
2) rood boven, wit onder
3) blauw boven, rood onder
4) rood boven, blauw onder
5) rood boven, rood onder
b. Zijn deze uitkomsten even waarschijnlijk ?
c. Denk nog eens over vraag **a** na. Blijf je bij je antwoord ?

Je wilt dus weten hoeveel mogelijke uitkomsten er zijn (die uitkomsten moeten even waarschijnlijk zijn!) en je wilt weten hoeveel speciale uitkomsten er zijn. Dan ken je de kans op zo'n speciale uitkomst. Hoeveel uitkomsten er zijn en hoeveel speciale uitkomsten, is vaak een kwestie van tellen. En dat hebben we in vwo 4 in het hoofdstuk ***Combinatoriek*** *geleerd. In paragraaf 2 herhalen we de belangrijkste zaken en gaan dan met combinatiegetallen kansen uitrekenen.*

In vraagstukken over kansrekening heb je vaak te maken met een grootheid die verschillende waarden kan aannemen. Je wilt dan weten wat de kans is op elk van die waarden. Bijvoorbeeld in opgave **6**. De grootheid is het aantal brieven X dat in de goede enveloppe komt. X kan de waarden 0, 1 en 3 aannemen. De kansen op deze waarden zijn achtereenvolgens $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{6}$.
We schrijven wel: $P(X=0)=\frac{1}{3}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$ en $P(X=3)=\frac{1}{6}$.
De grootheid X heet wel **toevalsgrootheid** of **stochast**.

11 Bekijk nog eens opgave **7**. Het aantal parlementariërs van de VVD die meegaan naar China noemen we X.
Welke waarden kan de stochast X aannemen ?

12 We werken met de context van opgave **9**. X is het aantal Nederlanders in de finale.
a. Bereken de waarden die X kan aannemen en de bijbehorende kansen. Schrijf je antwoorden overzichtelijk in een tabel:

k	0	
$P(X=k)$	0,82	

b. Controleer je antwoorden door de kansen op te tellen.

De som van de kansen op de verschillende waarden van een stochast is 1. Je zou kunnen zeggen dat de totale kans 1 *verdeeld* is over die waarden. We noemen het geheel van waarden en bijbehorende kansen de **kansverdeling** van de stochast. Je kunt die goed in de vorm van een tabel geven.

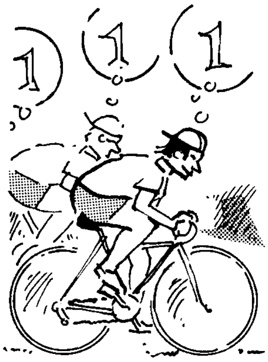
13 a. Je werpt met een zuivere dobbelsteen. X is het aantal ogen dat je werpt.
Maak een tabel van de kansverdeling van X.
b. Een gezin telt 3 kinderen. M is het aantal meisjes in het gezin.
Maak een tabel van de kansverdeling van M.
c. Als je bij mens-erger-je-niet met de dobbelsteen een 6 gooit, mag je een nieuwe pion op het speelbord plaatsen. Je werpt één keer met de dobbelsteen. X is het aantal pionnen dat je vervolgens op het speelbord mag plaatsen.
Maak een tabel van de kansverdeling van X.

Overzichtsvragen

1 Er staan vijf mensen in een rij voor een loket, waaronder Anne, Bea en Cleo.

a. Wat is de kans dat Anne voor Bea staat, maar

2 Combinatoriek en kans



1 In de finale van een wielerklassieker bestaat de kopgroep uit zeven renners. Het peloton is zo ver achter dat het zeker is dat de zeven koplopers de prijzen zullen verdelen. Drie van hen zullen op het podium komen, als nummer 1, 2 en 3.
Hoeveel verschillende bezettingen van het podium zijn er mogelijk ?

Stel je hebt zeven dingen en je gaat er drie uit pakken, lettend op de volgorde. Dat kan op $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}$ manieren.

Op de GR (in het menu MATH, PRB) en op een gewone wetenschappelijke rekenmachine vind je dat getal via de knop nPr.

2 In een serie van de 1500 meter (atletiek) bestaat de kopgroep uit zeven lopers. De anderen hebben een zo grote achterstand opgelopen dat het zeker is dat deze zeven lopers zullen strijden om de eerste plaatsen. De eerste drie gaan door naar de halve finale. Hierbij is het niet van belang wie er eerste, tweede of derde wordt.
Hoeveel verschillende drietallen zijn er voor de halve finale mogelijk ?

Stel je hebt zeven dingen en je wilt er drie dingen uit pakken, waarbij de volgorde niet van belang is. Dan kan dat op $\binom{7}{3}$ manieren.

Op de GR (in het menu MATH, PRB) en op een gewone wetenschappelijke rekenmachine vind je dat getal via de knop nCr.

3 **a.** Wat is het verband tussen 7P3 en 7C3 ?
Leg dat uit.
b. Wat is het verband tussen nPr en nCr ?
c. $\text{nPr} = \frac{n!}{(n-r)!}$. Welke formule geldt bijgevolg voor nCr ?

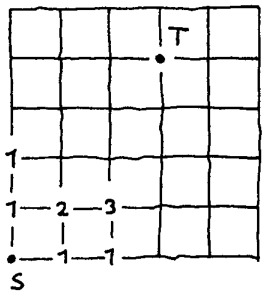
> $\text{n Cr k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ is een zogenaamd **combinatiegetal**; spreek uit: *n boven k.*

$\binom{n}{r}$ is het aantal 0-1-rijtjes van lengte n met r nullen,

$\binom{n}{r}$ is het aantal kortste routes van lengte n in een rooster met r stappen naar rechts,

$\binom{n}{r}$ is het aantal grepen van r dingen uit een verzameling van n dingen.

Met een "greep" bedoelen we een **ongeordende greep zonder herhalingen**: de volgorde waarin je de dingen pakt, is niet van belang; je kunt een ding maar één keer pakken.



4 Hiernaast is bij enkele roosterpunten aangegeven met hoeveel kortste routes je dat punt vanuit S kunt bereiken.

a. Bepaal in het rooster hoe groot $\binom{7}{3}$, dat is het aantal kortste routes van S naar T.

b. Geef in een rooster de plaats aan van $\binom{6}{4}$, $\binom{8}{0}$ en $\binom{8}{7}$.

c. Hoe groot zijn deze drie combinatiegetallen ?

5 **a.** Geef in een rooster de plaats aan van $\binom{7}{5}$, $\binom{7}{4}$ en $\binom{8}{5}$.

b. Als je weet dat $\binom{7}{5}$ = 21 en $\binom{7}{4}$ = 35, weet je dan ook hoe groot $\binom{8}{5}$ is ?

6 Een zaalkorfbalteam bestaat uit vier dames en vier heren. De coach wijst voor de wedstrijd uit de twaalf beschikbare spelers (zes dames en zes heren) een team aan.

a. Hoeveel verschillende teams kan hij samenstellen ?

Korfbal wordt gespeeld in twee vakken: een verdedigingsvak en een aanvalsvak. In ieder vak staan van een team twee dames en twee heren. (Waar in het vak de spelers staan, doet er niet toe.)

b. Op hoeveel manieren kan de coach uit de al aangewezen vier dames en vier heren een beginopstelling vormen ?

c. Op hoeveel manieren kan de coach de beginopstelling kiezen uit de beschikbare twaalf spelers ?

7 **a.** Laat zien dat $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

b. Geef zo ook een formule voor $\binom{n}{1}$.

c. En voor $\binom{n}{0}$.

De combinatiegetallen zijn mooi geordend in de zogenaamde **driehoek van Pascal**. $\binom{7}{3}$ staat in de 7^{de} rij op de 4^{de} plaats van links (we beginnen met 0 te tellen!).

De driehoek van Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

8 **a.** Hoe luidt de volgende regel in de driehoek van Pascal ?

b. Ga in de driehoek na dat $\binom{9}{6} = \binom{9}{3}$.

c. Hoe kun je dat uitleggen met behulp van routes ?

d. Hoe kun je dat uitleggen met behulp van 0-1-rijtjes ?

e. Hoe kun je dat uitleggen met behulp van grepen ?

Sommige combinatiegetallen zijn eenvoudig te berekenen (zie opgave **7**). Maar de meeste vind je niet zo gemakkelijk.

Je kunt bijvoorbeeld $\binom{11}{7}$ als volgt vinden.

- In een rooster kun je dat getal stap voor stap opbouwen.
- Uit de driehoek van Pascal kun je het getal aflezen.
- Op rekenmachines zit er een speciale knop voor: nCr (op de GR in het menu MATH-PRB).
- Met de formule $\frac{11!}{7! \cdot 4!}$.

Speelkolom

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45

9 Lotto

Als je meedoet in de lotto, mag je tegen betaling zes nummers kiezen uit de getallen 1 tot en met 45. Komen die zes nummers op zondagavond toevallig uit de lottomachine gerold, dan win je ongeveer vier ton.
Per lottoformulier kun je 10 keer je geluk beproeven. Daarvoor betaal je 10 gulden (in 2001).

a. Hoeveel complete formulieren moet je invullen om zeker te zijn van de hoofdprijs ?

b. Hoe groot is de kans op "alle zes goed", als je maar één formulier invult ?

10 In een doos zitten 30 ballen: 20 witte en 10 zwarte. Pak er acht ballen uit (zonder terugleggen). Noem het aantal getrokken witte ballen X.

a. Hoeveel grepen van acht ballen zijn er uit een doos met 30 ballen ? Geef je antwoord met een combinatiegetal.

b. Bij hoeveel grepen heb je vijf witte ballen en drie zwarte ballen gepakt ? Schrijf je antwoord als product van twee combinatiegetallen.

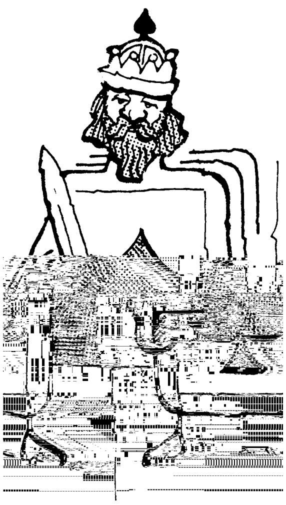
c. Wat is de kans dat je vijf witte en drie zwarte ballen pakt ? Schrijf de kans met behulp van combinatiegetallen en bereken hem ook in drie decimalen.

11 Als nieuw lid van de boekenclub mag je gratis drie boeken kiezen uit een lijst van tien. De eerste vier zijn dure boeken met prachtige platen in kleur, de andere zes zijn romans.
Je kiest willekeurig drie boeken uit de tien, dat wil zeggen dat alle drietallen boeken even waarschijnlijk zijn.

a. Bereken de kans dat je 1 platenboek kiest en 2 romans.

b. Bereken ook de kans op
- 3 platenboeken,
- 2 platenboeken en 1 roman,
- 3 romans.

c. Hoe kun je je antwoorden op **a** en **b** controleren ?



12 Uit een volledig kaartspel van 52 kaarten trekken we (zonder terugleggen) drie kaarten.

a. Hoeveel grepen zijn er van drie kaarten uit een volledig spel ?

b. Bij hoeveel grepen zijn de drie kaarten schoppens ?

c. Wat is dus de kans op drie schoppenkaarten ?

Je kunt de kans op drie schoppenkaarten ook berekenen door een geschikt boomdiagram te tekenen en daaruit drie breuken te vermenigvuldigen.
d. Doe dat.
e. Hoe groot is de kans op drie kaarten van dezelfde kleur (drie schoppen, drie harten, drie ruiten of drie klaveren) ?

13 Bij het (zonder terugleggen) trekken van drie kaarten uit een volledig spel is Y het aantal getrokken schoppenkaarten.
a. Welke waarden kan Y aannemen ?
b. Bereken op twee manieren $P(Y=1)$.
c. Geef in een tabel de kansverdeling van Y. Schrijf de kansen met behulp van combinatiegetallen. Bereken de kansen ook afgerond op drie cijfers na de komma.

14 a. Uit een klas van tien jongens en twaalf meisjes wordt een afvaardiging van zes leerlingen gekozen.
Hoe groot is de kans dat er evenveel meisjes als jongens gekozen worden ? Schrijf je antwoord met behulp van combinatiegetallen en benader de uitkomst in drie decimalen achter de komma.
b. Na de wedstrijd van Ajax tegen Feyenoord is het weer eens mis. Vijfentwintig supporters, tien van Ajax en vijftien van Feyenoord gaan met elkaar op de vuist. De politie grijpt in, zonder ergens op te letten. Elke supporter heeft daardoor dezelfde kans om opgepakt te worden. In totaal worden er acht supporters gearresteerd.
Hoe groot is de kans dat er drie aanhangers van Ajax en vijf van Feyenoord naar het bureau moeten ? Schrijf je antwoord eerst met behulp van combinatiegetallen en bereken dit daarna, in drie cijfers na de komma.

Veel opgaven in deze paragraaf komen hierop neer: je hebt een populatie waarbij de leden een eigenschap wel of niet hebben; hieruit worden er een aantal gepakt; X is het aantal dat gepakt wordt, dat de eigenschap wel heeft.
Dit is hetzelfde als trekken **zonder terugleggen** van uit een doos met witte en zwarte ballen.
Dat het zonder terugleggen is, herken je zo: de kans dat de tweede bal wit is, hangt af van de kleur van de eerste bal.

Een kansverdeling als deze wordt een **hypergeometrische verdeling** genoemd.

	○	●	tot.
doos	4	6	10
greep	2	3	5

Voorbeeld
In een doos zitten tien ballen, vier witte en zes zwarte. Iemand trekt zonder terugleggen vijf ballen uit die doos. X is het aantal witte ballen in die greep.

Dan geldt: $P(X=2)=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}$.

	wel	niet	tot.
klas			
greep			

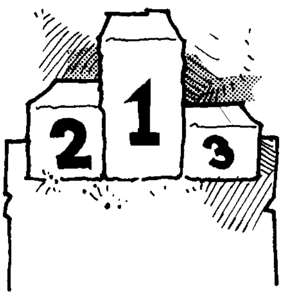
15 Huiswerkcontrole
Van vijfentwintig leerlingen van V5B hebben er vijf hun huiswerk niet gemaakt. De leraar neemt een aselecte steekproef van vier. Van deze vier leerlingen hebben er X hun huiswerk niet gemaakt.
a. Bereken $P(X=4)$ en $P(X=3)$ in drie cijfers achter de komma.
b. Van de vier leerlingen die aan de tand gevoeld werden, hadden er drie hun huiswerk niet gemaakt. Wat denk je, zou de steekproef wel aselect genomen zijn ?

16 Schoolfeest
Voor het schoolfeest heeft de leerlingenvereniging flink wat frisdrank ingekocht. In één van de kratten zitten zes flessen cola, vier flessen seven-up en twee flessen spa. In het donker, en daardoor aselect, pakt iemand drie flessen uit het krat.
a. Hoe groot is de kans dat hij twee flessen cola en één fles spa neemt ?
b. Hoe groot is de kans dat hij twee flessen cola pakt ?
c. Bereken op twee manieren de kans dat het drie flessen van dezelfde soort zijn.
d. Bereken ook op twee manieren de kans dat hij van elke soort één fles pakt.

17 In een vaas zitten vier witte en drie zwarte ballen. Zonder terugleggen wordt uit die vaas steeds een bal gepakt totdat er drie witte ballen gepakt zijn. De stochast X geeft het aantal trekkingen aan dat daarvoor nodig is.
a. Wat is het bereik van X, ofwel: welke waarden kan X aannemen ?
b. Het rijtje wwzw hoort bij de uitkomst X = 4.
Schrijf alle rijtjes op die horen bij de uitkomst X = 4.
c. Stel je hebt een rijtje bij X = 4.
Hoeveel witte zijn er bij de eerste drie ballen ?
Wat is de kleur van de vierde bal ?
d. Ga na: $P(X=4)=\frac{9}{35}$.

e. Wat zijn de twee kenmerkende eigenschappen voor elk rijtje dat hoort bij X = 5 ?
f. Ga na: $P(X=5)=\frac{12}{35}$.
g. Geef in een tabel de kansverdeling van X.

18 Konijntjes
Het konijn van Jasper is moeder geworden van drie kleine konijntjes. Jasper wil van elk van de konijntjes weten of het een mannetje of een vrouwtje is. Zij zijn echter zo klein dat Jasper dat niet kan zien.
We gaan er vanuit dat de kans op een mannetje even groot is als op een vrouwtje.
a. Bereken de kans dat het alle drie vrouwtjes zijn.
b. Bereken de kans dat het twee mannetjes en één vrouwtje zijn.
c. Bereken de kans dat er meer vrouwtjes zijn dan mannetjes.
d. Had je deze kans ook kunnen weten zonder rekenen ?



Overzichtsvragen

1 Er doen n atleten mee aan een wedstrijd. De drie die als eerste finishen komen op het podium.
a. Hoeveel verschillende podia zijn er mogelijk (uitgedrukt in n) ?

Er doen n atleten mee aan een wedstrijd. De drie drie als eerste finishen mogen naar de olympische spelen.
b. Hoeveel verschillende drietallen zijn er mogelijk om uitgezonden te worden, uitgedrukt in n ?

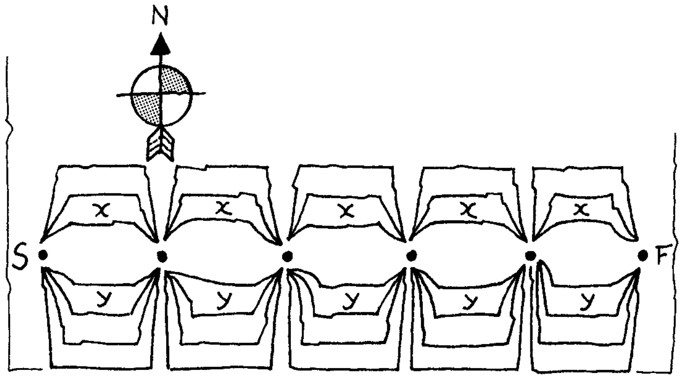
2 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52.

Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen A dat Anne krijgt.
a. Bereken $P(A=3)$.

Het kaartspel heeft 13 klaveren, 13 ruiten, 13 harten en 13 schoppen.
b. Bereken de kans dat Anne van elke soort ten minste 3 kaarten krijgt.

3 Het binomium van Newton

1 Elke route van S naar F bestaat uit vijf stappen. Bij elk van die stappen is zijn er x noordelijke wegen en y zuidelijke wegen.



In het plaatje is x = 3 en y = 4.

a. Het aantal routes van S naar F waarbij je 3 keer een noordelijke weg neemt en 2 keer een zuidelijke weg is $10 \cdot x^3 \cdot y^2$.
Leg dat uit.

b. Hoeveel routes zijn er van S naar F waarbij je

- 0 keer een noordelijke weg neemt en 5 keer een zuidelijke weg ?
- 1 keer een noordelijke weg neemt en 4 keer een zuidelijke weg ?
- 2 keer een noordelijke weg neemt en 3 keer een zuidelijke weg ?
- 4 keer een noordelijke weg neemt en 1 keer een zuidelijke weg ?
- 5 keer een noordelijke weg neemt en 0 keer een zuidelijke weg ?

c. Het totaal aantal routes van S naar F is $(x+y)^5$.
Welke formule voor $(x+y)^5$ vind je uit **a** en **b** ?

d. Controleer de formule voor $x=1$ en $y=1$.
Ook voor $x=1$ en $y=2$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

2 De coëfficiënten in de formule van opgave **1c** staan in regel 5 van de driehoek van Pascal. En dat is niet toevallig.

a. Je kunt de zesde regel van de driehoek van Pascal gebruiken om een formule voor $(x+y)^6$ te geven.
Doe dat.

b. Geef zo ook formules voor $(x+y)^1$, $(x+y)^2$ en $(x+y)^3$.
Controleer of de formules juist zijn door de haakjes uit te werken.

3 In opgave **1c** heb je gezien dat
$(x+y)^5 = 1 \cdot x^0 \cdot y^5 + 5 \cdot x^1 \cdot y^4 + 10 \cdot x^2 \cdot y^3 + 10 \cdot x^3 \cdot y^2 + 5 \cdot x^4 \cdot y^1 + 1 \cdot x^5 \cdot y^0$.
Voor de derde term kunnen we schrijven: $\binom{5}{2} \cdot x^2 \cdot y^{5-2}$.

Net zoiets kunnen we ook doen met de andere termen. Dat levert een formule op in de gedaante:

$$(x+y)^5 = \sum_{k=\_}^{\_} \binom{\cdot}{\cdot} \cdot x^{\_} \cdot y^{\_\_} .$$

a. Vul op de zes open plaatsen het passende in.
b. Schrijf op dezelfde manier de formules voor $(x+y)^1$, $(x+y)^2$ en $(x+y)^3$ op.

Het binomium van Newton

Voor alle getallen x en y en alle positieve gehele getallen n geldt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}.$$

Sir Isaac Newton
(1642-1727)
hoogleraar te Cambridge

De formule is genoemd naar Isaac Newton, ofschoon hij hem niet heeft uitgevonden. De formule was toen al minstens vijf eeuwen bekend (bij Arabische en Chinese wiskundigen). Newton heeft de formule gegeneraliseerd voor niet-gehele exponenten.
$x+y$ is een tweeterm, ofwel een binomium (latijn: bi = twee, nomus = term).
In de formule spelen de combinatiegetallen een belangrijke rol. Daarom worden die ook wel **binomiaalcoëfficiënten** genoemd.

4 Zoals gezegd, geldt de formule voor alle getallen x en y. Elke speciale keuze voor x en y levert een bijzonder geval van de algemene formule.
Welke formule krijg je als:
a. $y=1$?
b. $x=1$ en $y=1$?
c. $x=-1$ en $y=1$?

Voorbeeld
11^3 kun je met het binomium van Newton eenvoudig als volgt uitrekenen:
$11^3 = (10+1)^3 = 1 \cdot 10^0 \cdot 1^3 + 3 \cdot 10^1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1^1 + 1 \cdot 10^3 \cdot 1^0 =$
$1 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 1000 = 1331.$

5 **a.** Gebruik zo ook de driehoek van Pascal om 11^4 uit te rekenen.
b. Ook 101^2, 101^3 en 101^4.
c. Ook 9^3. Tip: $9^3 = (10-1)^3$.

Dat het binomium van Newton een juiste formule is, kun je ook inzien door gewoon haakjes uit te werken.

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy$

$(x+y)^3 = (x+y)(xx + xy + yx + yy) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$

$(x+y)^4 = (x+y)(xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy) =$
$xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx + xyyy +$
$yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy + yyyx + yyyy$

6 **a.** Als je op deze manier $(x+y)^5$ uitschrijft, hoeveel termen krijg je dan ?
b. Hoeveel van die termen zijn er gelijk aan x^5 ? Hoeveel zijn er gelijk aan x^4y, hoeveel aan x^3y^2, hoeveel aan x^2y^3, hoeveel aan xy^4 en hoeveel aan y^5 ?
c. Kloppen de resultaten met het binomium van Newton ?

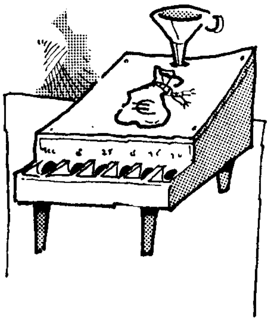
Overzichtsvragen

1 $(x+x^{-1})^6$ wordt zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk geschreven.
a. Hoeveel termen krijg je ?
b. Wat zijn de exponenten van x in elk van deze termen ?
c. Hoe groot is de constante term ?

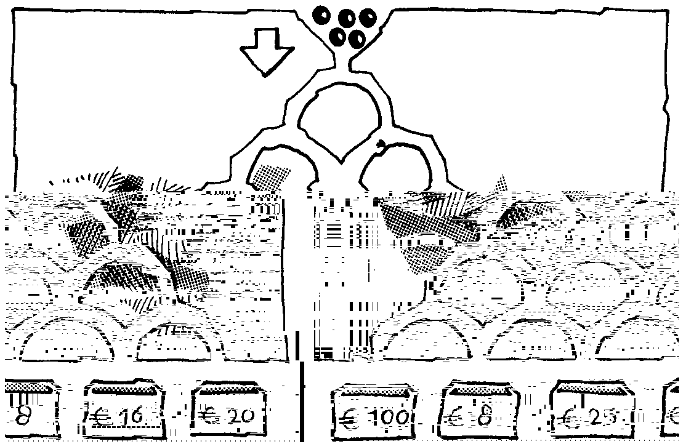
2 Bij een zekere schaatswedstrijd wordt er op vier afstanden gereden door x deelnemers. Voor elke afstand heeft Anne een persoonlijke favoriet. Na de wedstrijd wordt de lijst opgemaakt van de vier winnaars.
a. Hoeveel lijsten zijn er in totaal mogelijk ?
b. Hoeveel lijsten zijn er mogelijk met :
- 0 van Annes favorieten ?
- 1 van Annes favorieten ?
- 2 van Annes favorieten ?
- 3 van Annes favorieten ?
- 4 van Annes favorieten ?

c. Wat is het verband van **a** en **b** met het binomium van Newton ?

4 Verwachting

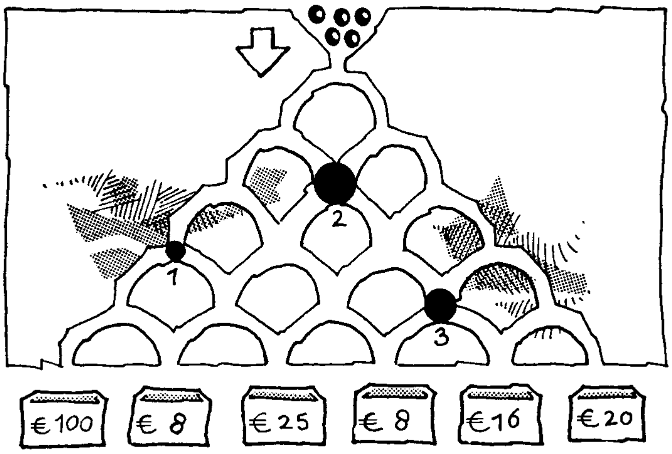


1 Hieronder staat schematisch het inwendige van een spelautomaat. Bovenaan wordt in de trechter een balletje losgelaten, dat vervolgens naar beneden rolt en in een van de bakjes terecht komt. De speler ontvangt het bedrag dat bij het bakje geschreven staat. We gaan ervan uit dat een balletje bij elke splitsing met gelijke kans naar links of naar rechts gaat.



Stel dit spel wordt per jaar 40.000 keer gespeeld.
a. Hoe vaak zou je het balletje in het bakje met honderd euro verwachten ?
En hoe vaak in elk van de andere bakjes ?
b. Hoeveel zou de eigenaar van de automaat naar verwachting per jaar moeten uitbetalen ?
c. Natuurlijk zal hij niet precies het bedrag uit onderdeel **b** moeten uitbetalen.
Wat is in theorie het maximale bedrag dat de eigenaar per jaar zou kunnen moeten uitbetalen ?
En het theoretisch minimale bedrag ?
d. Om dit spelletje te mogen spelen moet je € 15,- betalen.
Is dit een aantrekkelijke prijs voor een speler om te spelen?

2 Na enige tijd verandert de eigenaar het spel. Op enkele plaatsen zet hij een "stop". Rolt het balletje daarin dan stopt het spel en er wordt niets uitbetaald. Het nieuwe inwendige van de spelautomaat staat op de volgende bladzijde.



a. Hoeveel moet de eigenaar nu naar verwachting per jaar uitbetalen ?
b. Bij welke inzet is het net niet meer aantrekkelijk om het spel te spelen ?
De stoppen 1,2 en 3 zijn zo neergezet dat het onmogelijk is € 100 te winnen. Dat maakt het niet aantrekkelijk voor men-sen om het te spelen.
c. Ontwerp zelf een spel met drie stoppen waarmee het wel mogelijk is € 100 te winnen. De andere bedragen mag je zelf kiezen.
Bepaal ook hoeveel een speler moet betalen om te spelen: niet te hoog en ook niet te laag.
Bereken de winst die je mag verwachten als het spel 1000 keer gespeeld wordt.

3 Chuck-a-luck is een spelletje op Amerikaanse kermissen. Tegen een inzet van 1 dollar mag je met drie dobbel-stenen gooien. Valt geen van de dobbelstenen op 'zes' dan ben je je inzet kwijt. In de andere gevallen krijg je de inzet terug plus een dollar voor elke zes die je gooide.
De exploitant van dit spelletje op de kermis is natuurlijk geïnteresseerd hoeveel hij kan verdienen met dit spel. De inkomsten zijn duidelijk: $1 per spel. De uitgaven liggen minder vast. Die variëren: $0, $2, $3 of $4. Hij maakt een

[redacted]

tabel met de kansen op de verschillende uitgaven per spel:
a. Bereken de kansen.
b. Bereken hoeveel de exploitant naar verwachting gemiddeld per spelletje verdient.

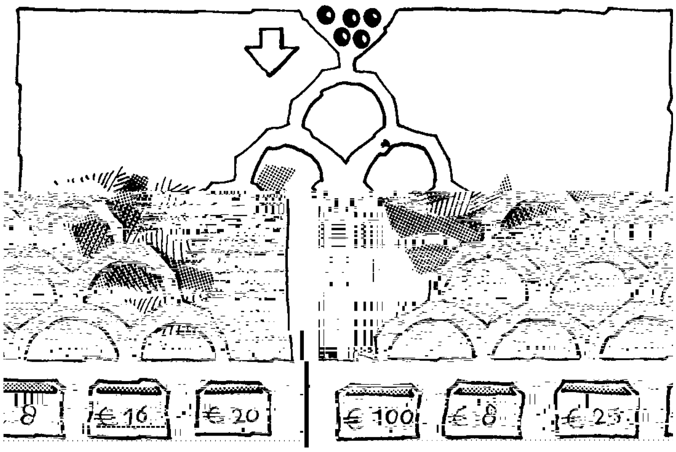
Niet alleen bij spelletjes wordt de gemiddelde winst die je naar verwachting boekt, berekend. We gaan hiervan enkele voorbeelden bekijken.

4 Een druiventeler kan kiezen tussen twee manieren van oogsten.
Manier 1. Direct oogsten als de druiven rijp zijn. De winst per kilo is dan € 1,50. Aan deze manier van oogsten is geen risico verbonden.
Manier 2. Als de druiven rijp zijn laat hij ze nog twee weken hangen. Hierdoor worden de druiven voller van smaak. De druiven zijn dan meer waard. De winst is dan € 2,00 per kilo. Aan deze manier is wel risico verbonden. Als het gaat regenen in deze laatste twee weken, worden de druiven aangetast en daardoor minder waard: nog slechts € 0,75 per kilo winst.
De kans dat het in de betreffende periode van twee weken regent is 0,30 (30%).
a. Laat zien dat de te verwachten winst per kilo bij manier 2 groter is dan € 1,50.

Als de winst van de aangetaste druiven veel lager wordt dan € 0,75, is het voordeliger voor de teler om voor manier 1 te kiezen.
b. Bereken vanaf welke winst per kilo voor de aangetaste druiven hij beter voor manier 1 kan kiezen.

5 Verzekeringsmaatschappijen werken veel met kansen.
Wintersportvakanties zijn niet zonder risico. Ongeveer 6% van alle wintersporters raakt in meer of mindere mate gewond. De behandelingskosten kunnen variëren van enkele tientjes tot duizenden euro's. Gemiddeld liggen de kosten per gewonde rond de 4000 euro.
Per jaar gaan 100.000 Nederlanders naar de wintersport. Laten we aannemen dat ze zich allemaal bij een verzekeringsmaatschappij verzekeren en dat deze maatschappij geen winst hoeft te maken.
a. Hoe hoog zal de verzekeringspremie per persoon moeten bedragen, opdat de verzekeringsmaatschappij de verwachte kosten kan betalen ?
b. Stel dat slechts de helft van de wintersporters zich verzekert. Bereken ook nu de hoogte van de premie.

6 We gaan terug naar het spel van opgave **1**.



In de tabel hieronder staan de kansen op de verschillende uitbetalingen.

uitbetaling	100	8	25	16	20
kans	1/32	15/32	10/32	5/32	1/32

a. Stel dat er n keer gespeeld wordt.
Hoe groot is dan de totale uitbetaling, naar je mag verwachten ?
b. De gemiddelde uitbetaling per keer is dan dus:
$100 \cdot \frac{1}{32} + \ldots$ (vul verder aan).

Bereken deze gemiddelde uitbetaling.

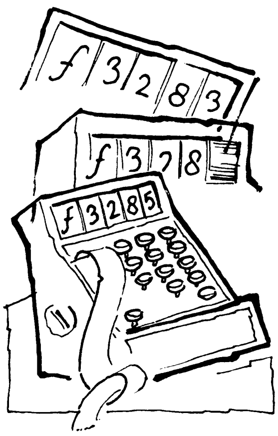
Als bij een experiment de stochast X de waarden x_1, x_2, ... , x_n aanneemt met bijbehorende kansen p_1, p_2, ..., p_n , dan is $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k$.

E(X) is de **verwachtingswaarde** van X.

De verwachtingswaarde vind je dus door elk van zijn uitkomsten te vermenigvuldigen met de kans op die uitkomst en de producten op te tellen.

E(X) is een soort theoretisch gemiddelde: je neemt het gemiddelde van de mogelijke waarden, rekening houdend met de frequentie waarmee ze voorkomen.

De letter E komt van *Expectatio*.



7 In warenhuizen is gedurende een doordeweekse dag bijgehouden hoe lang de mensen met hun boodschappen voor de kassa moesten wachten.

wachttijden (min)	0	0,5	1	1,5	2
% klanten in winkel A	20	10	20	25	25
winkel B	0	40	40	20	0

Je leest bijvoorbeeld af dat in winkel A 20% van de klanten 1 minuut moest wachten. De wachttijden zijn afgerond op halve en hele minuten. Met deze gegevens maken we een model: we nemen aan dat bovenstaande verdeling voor iedere doordeweekse dag geldt. Voor iedere klant geldt nu dat de kans dat hij/zij 1 minuut in winkel A moet wachten 0,20 is. Voor andere wachttijden en voor winkel B worden op dezelfde wijze de kansen gedefinieerd.

a. Bereken de verwachtingswaarde van de wachttijd voor winkel A en ook voor winkel B.

b. Een klant bezoekt beide winkels. Bereken de kans dat hij in de winkels even lang moet wachten.

De totale wachttijd W voor iemand die beide winkels bezoekt,varieert van 0,5 tot 3,5 minuut.

c. Maak een tabel van de kansverdeling van W.

d. Bereken de verwachtingswaarde van W.

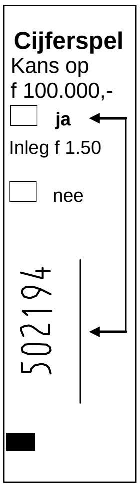
e. Vergelijk de antwoorden van **a** en **d**. Wat valt je op ?

8 Reisbureaus bieden vlak voor vertrek zogenaamde last-minutereizen aan. Ze proberen het vliegtuig en/of hotel als-nog vol te krijgen door de prijzen te verlagen. Reizen die normaal bijvoorbeeld € 800 kosten, kunnen dan geboekt worden voor € 550. Wie zou dat niet willen ? Maar dit kan alleen als er nog plaatsen over zijn. Dus als je gokt op zo'n last-minute-aanbieding, loop je het risico dat er geen plaats is.

Familie Jansen, met vier personen, wil van de zomer naar Turkije. Het boeken van zo'n reis kan in april voor € 800 per persoon. Vorig jaar zagen zij in de zomer een last minute aanbieding van deze reis voor € 550 per persoon.

Probleem is nu: hoe groot schatten zij de kans dat deze aanbieding dit jaar weer komt. Neem aan dat die kans 0,60 is. Als de aanbieding niet komt zullen ze, om toch naar Turkije te kunnen, een duurdere lijnvlucht moeten boeken. Deze kost € 900 per persoon.

Welk advies zou jij de familie Jansen geven (uitgaande van hun schatting van 0,60): in april boeken of wachten tot de zomer ? Ondersteun je advies met verwachtingswaarden.



9 Naast de lotto en toto kun je ook meedoen aan het zogenaamde cijferspel. Je krijgt als deelnemer een getal van 6 cijfers. Bij de trekking wordt het winnende getal van 6 cijfers bekend gemaakt.
Zijn de laatste 6 cijfers van het getal van de deelnemer goed (dus alle cijfers zijn goed), dan krijgt hij € 100.000.
Zijn de laatste 5 cijfers goed, dan € 10.000.
Zijn de laatste 4 cijfers goed, dan € 1.000.
Zijn de laatste 3 cijfers goed, dan € 100.
Zijn de laatste 2 cijfers goed, dan € 10.
Ieder formulier bevat één getal van 6 cijfers en deelname met zo'n formulier kost € 1,50.
Bereken de verwachtingswaarde van de winst voor de organisator van het cijferspel per formulier.

10 Leonie speelt darts. Zij mikt met een pijltje op het midden van de schijf. De schijf heeft vier gebieden, die (van binnen naar buiten) 10, 5, 3 en 1 punt opleveren. Leonie weet uit ervaring dat zij met kans 0,1 de roos treft, met kans 0,3 de kleine ring, met kans 0,4 de middelste ring en met kans 0,2 de buitenste ring.
a. Leonie werpt 5 keer. Bereken de kans dat zij geen enkele keer de buitenste ring treft.
b. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal punten dat Leonie in een worp haalt ?
c. Wat is de verwachtingswaarde van het totaal aantal punten dat Leonie in vijf worpen haalt ?

11 In een doos zitten zes ballen: twee witte en vier zwarte. Uit die doos nemen we aselect drie ballen. X is het aantal witte ballen als met terugleggen getrokken wordt, Y als er zonder terugleggen getrokken wordt.
a. Geef in een tabel de kansverdeling van X en bereken E(X).
b. Geef in een tabel de kansverdeling van Y en bereken E(Y).

12 Bij een worp met een dobbelsteen is X het aantal ogen dat boven komt en Y het aantal dat onder ligt.
a. Hoe groot is Y als X = 2 ?
b. Welke waarden kan X aannemen ? En Y ? En welke waarden kan X + Y aannemen ?
c. Bereken E(X), E(Y) en E(X + Y).
d. Geldt: E(X + Y) = E(X) + E(Y) ?

13 Iemand werpt met twee dobbelstenen. X_1 is het aantal ogen dat hij met de ene dobbelsteen werpt en X_2 het aantal ogen met de andere dobbelsteen.
$S = X_1 + X_2$ is de som van de aantallen ogen.
a. Hoe groot is $E(X_1)$? En hoe groot is $E(X_2)$?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van S en bereken E(S).
c. Geldt: $E(S) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$?

De verwachtingswaarde van de som van twee stochasten is gelijk aan de som van de verwachtingswaarden van de twee afzonderlijke stochasten. Dit geldt ook als een uitkomst van de eerste stochast van invloed is op de uitkomst van de tweede (zie opgave **12**) en geldt ook bij de som van meer dan twee stochasten.

Als $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$, dan $E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$.

Deze somregel, waarvan we geen bewijs geven, maakt berekeningen vaak veel eenvoudiger. Bijvoorbeeld bij opgave **13** wisten we dat $E(X_1) = E(X_2) = 3{,}5$; zonder de kansverdeling van $S = X_1 + X_2$ uit te rekenen, weten we: $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$.

14 Ard en Bart schieten regelmatig op ballonnen. Uit de praktijk blijkt dat Ard met kans $\frac{1}{4}$ een ballon kapot schiet en Bart met kans $\frac{1}{2}$.
Er wordt een ballon opgeblazen. Eerst schiet Ard op de ballon en dan (als de ballon nog niet kapot is) Bart.
A = het aantal ballonnen dat Ard kapot schiet, B = het aantal ballonnen dat Bart kapot schiet en T is het totaal aantal ballonnen dat kapot geschoten wordt.
a. Bereken E(A), E(B) en E(T).
b. Ga na dat de somregel voor stochasten geldt.

Overzichtsvragen

1 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen A dat Anne krijgt.
a. Maak een tabel van de kansverdeling van A.
b. Bereken EA met behulp van deze kansverdeling.

H = 1 als Anne hartenaas krijgt, anders is H = 0.
c. Bereken EH.
d. Hoe volgt EA uit **c** ?

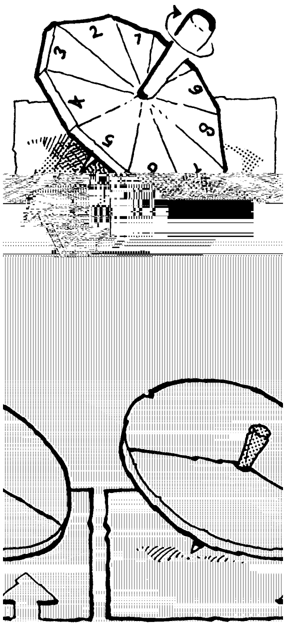
2 Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen. X is het aantal successen en Y is het aantal mislukkingen.
a. Stel dat je de verwachtingswaarde van X kent. Hoe vind je daaruit de verwachtingswaarde van Y ?
b. Stel dat je de verwachtingswaarde van X kent. Hoe vind je daaruit de succeskans ?

3 Een spel gaat over drie ronden. In elke ronde valt € 120 te verdienen. Dat lukt in de eerste ronde met kans $\frac{1}{2}$; dan kom je in de tweede ronde, anders ben je uitgeschakeld. In de tweede ronde lukt dat met kans $\frac{1}{3}$; dan kom je in de derde ronde, anders ben je uitgeschakeld. In de derde ronde verdien je de € 120 met kans $\frac{1}{4}$.

X is het totale bedrag dat je met het spel verdient.
a. Maak een kanstabel voor X en bereken EX.

X_1, X_2 en X_3 zijn de bedragen die je in de eerste, tweede en derde ronde verdient.
b. Bereken EX_1, EX_2 en EX_3.
Kloppen de antwoorden met **a** ?

5 De binomiale verdeling



1 Draaiwiel 1

Op een draaiwiel staan, elk in een sector van 36°, de cijfers 0, 1, ..., 9. Dit wiel wordt zes keer rondgedraaid. Hoe groot is de kans

a. op zes verschillende cijfers ?
b. op zes gelijke cijfers ?
c. dat er geen 8 bij is ?
d. dat er minstens één 8 bij is ?
e. dat alleen de eerste twee cijfers 8 zijn ?
f. dat er precies twee cijfers 8 bij zijn ?
g. dat er precies twee cijfers 8 bij zijn die naast elkaar staan ? Tip: Schrijf eens een aantal van die rijtjes op.

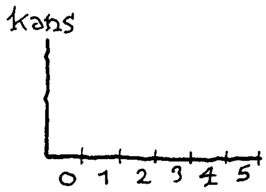
2 Draaiwiel 2

Bij een ander draaiwiel is de successector 144°.

a. Hoe groot is bij één keer draaien van dat wiel de kans op succes ?

Dat draaiwiel wordt vijf keer rondgedraaid. Hoe groot is de kans op:

b. vijf keer succes ?
c. de eerste vier keer succes en de vijfde keer pech ?
d. vier keer succes en één keer pech ?
e. de eerste drie keer succes en de laatste twee keer pech ?
f. drie keer succes en twee keer pech ?



3 Werpen met een munt

Bij vijf worpen met een munt is Y het aantal keren kop.

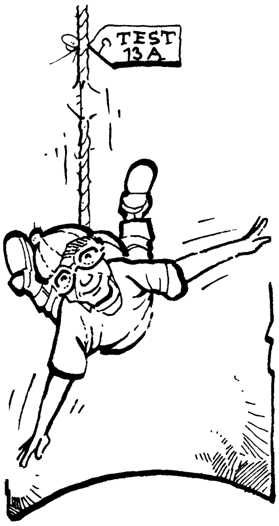
a. Geef in een tabel de kansverdeling van Y.
b. Teken het kanshistogram van Y.
c. Waarom is dit kanshistogram symmetrisch ?

k	P(X=k)	P(X=k)
0		0,017
1		0,087
2		0,195
3		0,260
7		0,016
8		0,003
9		0,000
10		0,000

4 Driekeuzevragen

Om bij de KLM te komen, moet je allerlei tests afleggen. Een van de tests bestaat uit tien meerkeuzevragen over aardrijkskunde. Bij elke vraag heb je de keuze uit drie antwoorden. Als je bij een vraag het antwoord absoluut niet weet, kun je gokken. De kans dat je dan het juiste antwoord aanstreept is $\frac{1}{3}$.

Bart vult de KLM-test op de gok in. X is het aantal goede antwoorden. In de tabel hiernaast is een deel van de kansverdeling van X al ingevuld. In de tweede kolom moeten de exacte antwoorden komen, in de derde kolom de antwoorden afgerond op drie cijfers na de komma.



a. Neem de tabel over in je schrift en vul hem verder in.
b. Ga na of de som van de kansen in de derde kolom (ongeveer) 1 is.

De KLM moet bepalen waar de grens ligt tussen slagen en zakken. Met andere woorden hoeveel vragen moeten goed zijn beantwoord opdat de kandidaat slaagt. De KLM kan moeilijk eisen dat alle vragen goed beantwoord worden, maar anderzijds mag een gokker zoals Bart niet te grote kans hebben om te slagen.
c. Waar zou jij de grens leggen ?

5 Bij een spel heb je kans $\frac{1}{3}$ om twee euro te winnen en kans $\frac{2}{3}$ om één euro te verliezen. Iemand besluit om dit spel drie keer te spelen. X is het bedrag dat hij na die drie spelletjes gewonnen heeft.
a. Welke waarden kan X aannemen ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van X.
c. Laat met een berekening zien dat dit spel eerlijk is.
d. Wat is trouwens een *eerlijk spel*, vind je ?

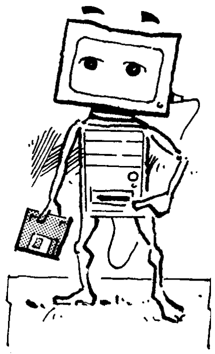
6 In een doos zitten zeven ballen, waarvan er vijf rood zijn. Uit die doos nemen we blindelings *met* terugleggen drie keer een bal. X is het aantal rode ballen in deze steekproef.
a. Hoe groot is de kans dat de tweede bal rood is ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van X.
Voeg aan die tabel een derde rij toe en vul daar de kansen in, afgerond op drie cijfers na de komma.
c. Ga na dat de som van deze kansen (ongeveer) 1 is.

Veel opgaven in deze paragraaf zijn wiskundig gezien hetzelfde.
Bij een experiment zijn er twee mogelijke uitkomsten: "succes" en "mislukking". Dit experiment wordt n keer (onafhankelijk van elkaar) herhaald, steeds met dezelfde kans op succes p. X is het totaal aantal successen.
Dan geldt: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

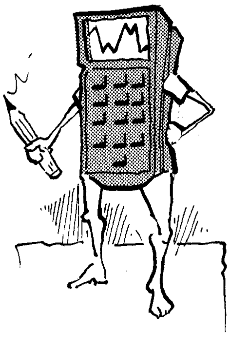
Zo'n stochast X heet **binomiaal verdeeld**.

Voorbeeld Bij 5 herhalingen, steeds met **succeskans** 0,4, is de kans op 2 successen: $\binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3$.

Het voorbeeld komt neer op het **met terugleggen** trekken van vijf ballen uit een doos met vier witte en zes zwarte ballen. X is het aantal witte ballen dat hij pakt.
Dat het met terugleggen is, herken je zo: de kans dat de tweede bal wit is, hangt niet af van de kleur de eerste bal.



Download *software_kans_en_simulatie* van de website van de Wageningse Methode. Daar vin je het programma dat kansen van een binomiaal verdeelde stochast uitrekent en het bijbehorende kanshistogram tekent.

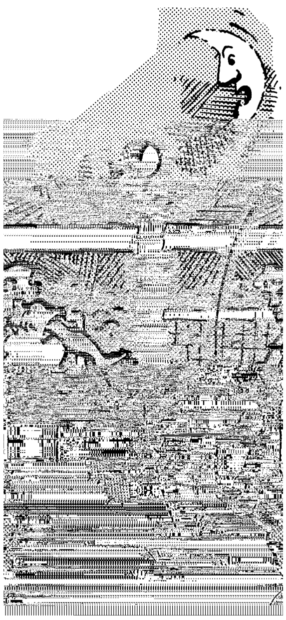


Op de GR kun je ook binomiale kansen uitrekenen. De kans in het bovenstaande voorbeeld $\binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3$ vind je als volgt.
DISTR DISTR 0:binompdf(5,0.4,2)

Algemeen: binompdf(n,p,x), waarbij n het aantal herhalingen is, p de succeskans en x het aantal successen.

7 Bereken met de GR de kansen uit opgave **5** en **6**.

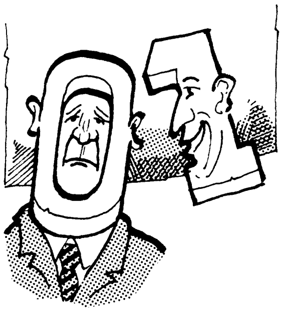
8 Een poes heeft zes jongen gekregen.
Hoe groot is de kans dat er drie katertjes bij zijn ?



9 Van de penalty's bij voetballen in de hoogste afdeling wordt 70% benut, wordt 20% door de keeper gestopt en wordt 10% over of naast geschoten.
a. Wat is de kans dat van de eerstvolgende 10 penalty's er precies 3 gemist (= niet benut) worden ?
b. Je hebt gehoord dat er afgelopen weekend liefst 7 penalty's werden gemist.
Bereken de kans dat er daarvan precies 4 door de keeper werden gestopt.
c. Er zijn op een avond maar 2 wedstrijden gespeeld. Je hebt gehoord dat er die avond liefst 7 penalty's zijn gegeven. Neem aan dat elke club met dezelfde kans een penalty krijgt.
Bereken de kans dat precies 4 van de penalty's aan eenzelfde club werden gegeven.

10 Bij een worp met tien dobbelstenen is X_1 het aantal ogen van de eerste steen, X_2 dat van de tweede steen, enzovoort. $X = X_1 + ... + X_{10}$ is het totaal aantal ogen.
a. Hoe groot is $E(X_1)$?
b. Bereken E(X).

11 Bij een worp met tien dobbelstenen is Y het totaal aantal zessen dat gegooid is.
Y_1 is het aantal zessen dat met de eerste dobbelsteen gegooid is. Y_2 is het aantal zessen dat met de tweede dobbelsteen is gegooid, enzovoort.
a. Ga na dat Y_1 maar twee waarden kan aannemen. Welke waarden zijn dat ?
b. Geef in een tabel de kansverdeling van Y_1 en bereken $E(Y_1)$.



Als met de derde en met de zevende dobbelsteen een zes gegooid wordt en met de andere niet, dan is het totaal aantal zessen gelijk aan 2.
Anders opgeschreven: $Y = 0+0+1+0+0+0+1+0+0+0 = 2$.
Algemeen geldt: $Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_9 + Y_{10}$.

c. Overtuig je zorgvuldig van de juistheid hiervan. Bereken daarna E(Y).

12 Marieke en Debbie zijn aan het kaarten. Zoals je weet zijn er vier "kleuren" in het kaartspel: schoppen, harten, ruiten en klaveren.
Op een gegeven moment pakt Marieke negen kaarten: twee harten, drie schoppen en vier ruiten. Dat waren er echter drie teveel. Daarom trekt Debbie (aselect) drie kaarten uit de negen die Marieke in haar hand heeft.
a. Hoe groot is de kans dat deze drie kaarten alle verschillend van kleur zijn ?
b. Hoe groot is de kans dat ze alle drie van dezelfde kleur zijn ?
c. Hoe groot is de kans dat de eerste kaart die Debbie trekt een harten is ?
d. Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een harten is ?

X is het aantal harten dat Debbie trekt.
e. Geef de kansverdeling van X. Schrijf de kansen met behulp van combinatiegetallen en daarna ook als gewone breuk. Controleer de som van de kansen.
f. Bereken op twee manieren E(X).

13 Noortje, Coen, Peter en Anke spelen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten. Noortje heeft X_1 azen in haar hand, Coen X_2, Peter X_3 en Anke X_4.

a. Welke waarden kan X_1 aannemen ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van X_1.
c. Bereken met behulp van deze kansen $E(X_1)$.

Maar $E(X_1)$ kan ook op een andere, veel handigere manier berekend worden!
$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ is het totaal aantal azen van de vier spelers.
d. Welke waarden kan X aannemen ?
Hoe groot is dus $E(X)$?

Op grond van symmetrie geldt: $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4)$.
e. Bereken hiermee opnieuw $E(X_1)$. 21]TJET EMC /P <</MCID37271.11 0 0VB

14 In een doos zitten zes ballen: twee witte en vier zwarte. Uit die doos nemen we aselect drie ballen. X is het aantal witte ballen als met terugleggen getrokken wordt, Y als er zonder terugleggen getrokken wordt.
X_1 stellen we gelijk aan 1 als de eerste bal wit is en aan 0 als de eerste bal zwart is. Op dezelfde manier worden Y_1, X_2, Y_2, X_3 en Y_3 vastgelegd.
a. Bereken $P(X_3 = 1)$, de kans dat de derde bal wit is als er met terugleggen getrokken wordt. Bereken ook $E(X_3)$.
b. Bereken ook $P(Y_3 = 1)$ en $E(Y_3)$.
c. Ga na dat $X = X_1 + X_2 + X_3$ en bereken $E(X)$.
d. Ga na dat $Y = Y$

9JETBT/F1 9.96 Tf99.09Tf1 0 0 1/1 0 0 1 3/Fi TJETBT/F1 3.96 Tf1 0 0 1 315.43 395.33 Tm0063>]TJETBT/F1 9.96 Tf1 0 0 1 335.95 40

16 Een kolom van het totoformulier vul je in door bij elk van de twaalf wedstrijden één van de hokjes 1, 2 of 3 aan te kruisen. (1 betekent "de thuisspelende club wint", 2 betekent "de uitspelende club wint" en 3 betekent "gelijkspel".) Neem aan dat elke wedstrijd met kans $\frac{1}{3}$ goed voorspeld wordt.
Wat is de verwachtingswaarde van het aantal juist voorspelde wedstrijden ?

17 ESP, Extra Sensory Perception
Soms lijkt het er op dat bepaalde mensen weten wat iemand anders denkt of doet zonder dat ze die ander kunnen horen of zien. Men spreekt van buitenzintuiglijke waarneming. (In het Engels: Extra Sensory Perception, afgekort ESP.)
Sommige geleerden geloven er in, anderen beweren dat het onzin is. Er zijn op dit gebied allerlei onderzoekingen gedaan.
Zo'n proef kunnen we ook zelf doen. Twee personen, Vincent en Jeroen, bevinden zich in verschillende kamers. Op een afgesproken tijdstip trekt Vincent een kaart uit een gewoon kaartspel en noteert de soort: harten, ruiten, schoppen of klaveren. Jeroen, die zich op Vincent "concentreert", noteert op hetzelfde moment de soort die Vincent volgens hem getrokken heeft. Datzelfde gebeurt nog vijf keer; dus zes keer in totaal. Daarna wordt gekeken hoe vaak Jeroen de juiste soort heeft opgeschreven. Laat X dit aantal zijn.
a. Bij welke waarden van X zou er volgens jou bij Jeroen van ESP sprake kunnen zijn ?

Vincent gelooft er niet in; hij denkt dat Jeroen zuiver raadt. Neem bij de volgende onderdelen aan dat Vincent gelijk heeft.
b. Maak een tabel van de kansverdeling van X. Geef de kansen in drie decimalen.
c. Hoe groot is de kans op drie of minder goed als Vincent gelijk heeft ?

18 Jeroen beweert dat hij bij elke kaart met een kans van 75% de juiste soort noteert. Neem bij de volgende onderdelen aan dat Jeroen gelijk heeft.
a. Maak opnieuw een tabel van de kansverdeling van X. Geef de kansen weer in drie decimalen.
b. Hoe groot is nu de kans op meer dan drie goed ?
c. Hoe groot is dus de kans op drie of minder goed als Jeroen gelijk heeft ?

19 a. Hoeveel goede antwoorden verwacht je als Vincent gelijk heeft ?
b. En hoeveel goede antwoorden verwacht je als Jeroen gelijk heeft ?

Zij spreken af dat Vincent gelijk krijgt als er drie of minder kaarten juist zijn genoteerd. (Dat wil overigens nog niet zeggen dat hij ook gelijk heeft!) Als er meer dan drie goed zijn, krijgt Jeroen gelijk.
c. Als Vincent gelijk krijgt, wat weet je dan van X ?
d. Als Jeroen gelijk heeft, wat weet je dan van p ?
e. Stel dat Jeroen gelijk *heeft.*
Bereken $P(X \leq 3)$, dat is de kans dat Vincent gelijk *krijgt.*
f. Stel dat Vincent gelijk *heeft.*
Bereken $P(X \geq 4)$, dat is de kans dat Jeroen gelijk *krijgt.*
g. Vind je het eerlijk dat de grens op deze manier bij drie of minder getrokken is ?

20 Ga er weer van uit dat Vincent gelijk heeft.
a. Hoe groot is de kans op alle zes goed ?
b. En hoe groot is dan de kans op niet alle zes goed ?

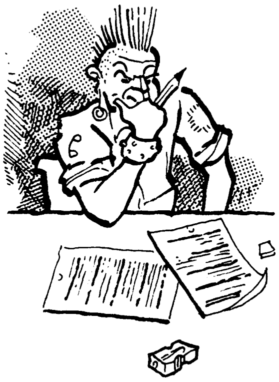
Het experiment met zes kaarten wordt vijftien keer herhaald.
c. En hoe groot is de kans dat minstens één keer alle zes goed voorkomt ?

Overzichtsvragen

1 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Het kaartspel heeft vier azen.
Anne redeneert als volgt: "De kans dat ik harten-aas krijg is $\frac{1}{4}$; die kans geldt ook voor de andere drie azen. Dus is de kans dat ik 3 azen krijg $\binom{4}{3}\cdot(\frac{1}{4})^3\cdot(\frac{3}{4})^1$".
Geef commentaar.

2 Iemand werpt 20 keer met een dobbelsteen. X is het aantal zessen dat hij werpt.
a. Vul in: $P(X \leq 5) = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} \binom{\ldots}{\ldots}\cdot(\ldots)^{\ldots}\cdot(\ldots)^{\ldots}$.
b. Op welke gebeurtenis is $\sum_{k=0}^{10} \binom{20}{2k}\cdot(\frac{1}{6})^{2k}\cdot(\frac{5}{6})^{20-2k}$ de kans ?

6 Cumulatieve binomiale kansen



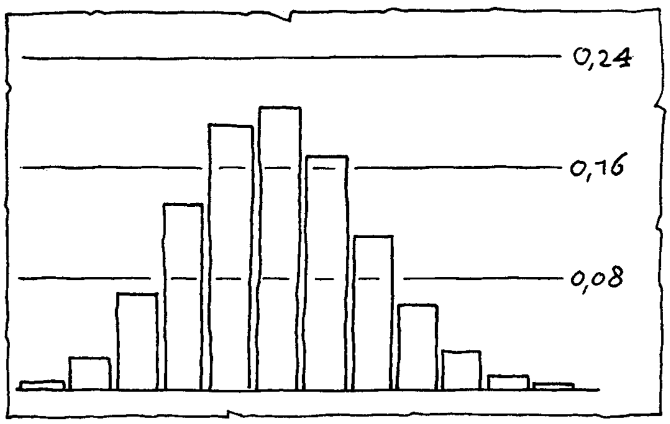
1 Een multiple-choicetest bestaat uit 20 vierkeuze-vragen. Iemand beantwoordt de vragen volkomen op de gok. We zijn geïnteresseerd in het aantal goede antwoorden. Dat kan zijn: 0, 1, 2,...., 20. Het is een binomiaal kansexperiment met 20 herhalingen en met succeskans 0,25.
Hoe de kansen over deze 21 mogelijkheden zijn verdeeld, vind je in de linkertabel hieronder.

aantal goede =	kans
0	0,0032
1	0,0211
2	0,0670
3	0,1339
4	0,1896
5	0,2024
6	0,1686
7	0,1124
8	0,0609
9	0,0270
10	0,0100
11	0,0030
12	0,0007
13	0,0002
14	0,0000
15	0,0000
16	0,0000
17	0,0000
18	0,0000
19	0,0000
20	0,0000

aantal goede ≤	kans
0	0,0032
1	0,0243
2	0,0913
3	0,2252
4	0,4148
5	0,6172
6	0,7858
7	0,8982
8	0,9591
9	0,9861
10	0,9961
11	0,9991
12	0,9998
13	1,0000
14	1,0000
15	1,0000
16	1,0000
17	1,0000
18	1,0000
19	1,0000
20	1,0000

a. Bepaal uit de linkertabel de kans op 4 of minder goede antwoorden.
b. De kans op 4 of minder goede kun je ook direct uit de rechter tabel aflezen. Doe dat.
c. Hoe kun je de rechter tabel uit de linker maken ? Controleer de eerste drie kansen in de rechter tabel.

Hieronder staat een kanshistogram voor het aantal goede antwoorden.



d. In de rechter tabel vind je dat de kans op 5 of minder goede gelijk is aan 0,6172.
Uit welke balken bestaat de bijbehorende oppervlakte in het histogram ?
e. In de rechter tabel vind je ook dat de kans op 6 of minder goede gelijk is aan 0,7858.
Uit welke balken bestaat de bijbehorende oppervlakte in het histogram ?
f. Hoe vind je met de kansen in **d** en **e** de kans op precies 6 goede ?
Hoe kun je de linker tabel uit de rechter tabel maken ?

2 Nog even verder met de multiple-choicetest van opgave **1**. We willen weten wat de kans is op meer dan 4, maar minder dan 10 goede antwoorden; dus 5, 6, 7, 8 of 9 goede.
a. Bepaal die kans uit de linker tabel.
b. Bepaal die kans uit de rechter tabel.
c. Welk van de twee manieren heeft jouw voorkeur ?

Soms kost het meer rekenwerk om met de linker tabel een kans te vinden dan met de rechter tabel. Het omgekeerde komt zelden voor. Daarom werkt men vaak met kansen zoals de rechter tabel. Dat zijn dus niet de kansen op de aantallen successen zelf, maar de kansen op alle mogelijkheden van 0 tot en met een aantal successen opgeteld. We noemen dat een **cumulatieve kanstabel** (cumulatief = stapelend).

3 Een voorbeeld van hoe je met cumulatieve kansen werkt. Hieronder staat de cumulatieve tabel bij een binomiaal kansexperiment met 6 herhalingen en succeskans 0,4. S is het aantal successen.

aantal successen ($=k$)	$P(S \leq k)$	aantal successen ($=k$)	$P(S \leq k)$
0	0,0467	4	0,9590
1	0,2333	5	0,9959
2	0,5443	6	1,000
3	0,8208		

Bepaal uit de tabel
a. $P(S = 4)$,
b. $P(S > 3)$,
c. $P(2 \leq S \leq 5)$.

Cumulatieve kansen bij een binomiaal kansexperiment kun je ook met de GR vinden. Als voorbeeld berekenen we de kans $P(S \leq 3)$ van de vorige opgave:
2nd DISTR DISTR A:binomcdf(6,0.4,3) ENTER.
Ga na dat het antwoord 0,8208 is.
"cdf" staat voor "cumulative distribution function".

4 Een binomiaal kansexperiment bestaat uit 14 herhalingen. S is het aantal successen. p is de succeskans.
Bepaal de volgende kansen met de GR
a. $P(S < 7)$ als p = 0,15,
b. $P(1 < S < 4)$ als p = 0,25,
c. $P(S < 8)$ als p = 0,15,
d. $P(3 < S < 8)$ als p = 0,30.

5 Een binomiaal kansexperiment heeft 14 herhalingen en succeskans 0,3. X is het aantal successen.
Bepaal de volgende kansen:
a. $P(X \geq 7)$,
b. $P(X \geq 8)$,
c. $P(X = 7)$,
d. $P(3 \leq X < 10)$.

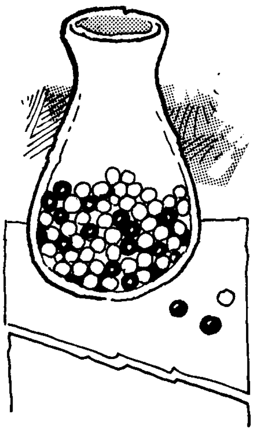
6 We werpen tien keer met een dobbelsteen en letten op het aantal zessen in die tien worpen.
Hoe groot is de kans dat er minstens drie zessen bij zijn ?

7 Zo'n 10% van de auto's die over de Nederlandse wegen razen, vertoont technische gebreken. Regelmatig worden door de politie uitgebreide technische keuringen uitgevoerd langs de kant van de autoweg.

a. Er worden 100 auto's gecontroleerd.
Hoe groot is de kans dat er bij meer dan dertien auto's gebreken worden geconstateerd ?

Gemiddeld 1 op de 100 auto's is zo gammel dat hij van de weg wordt gehaald en naar de sloper gaat.
b. Hoe groot is de kans dat bij 100 controles er minstens één auto rijp is voor de sloop ?

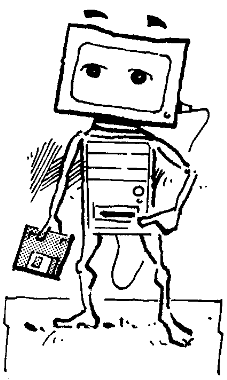
Het Nederlandse wagenpark telt zo'n 7 miljoen automobielen. De verkeerspolitie kiest 100 *verschillende* auto's uit, dat wil zeggen ze werkt eigenlijk *zonder terugleggen*. Omdat de populatie waaruit getrokken wordt zo groot is, maakt het nauwelijks uit of de trekking met of zonder terugleggen gebeurt. In de volgende opgave bekijken we wat het verschil is.



8 Uit een vaas met 100 witte en 200 rode ballen worden 3 ballen getrokken. We willen weten wat de kans is op twee witte ballen.
a. Bereken die kans als de trekking met terugleggen gebeurt in zes decimalen.
b. Bereken die kans als de trekking zonder terugleggen gebeurt in zes decimalen.

Hypergeometrisch ≈ binomiaal

Als het aantal trekkingen klein is ten opzichte van de totale populatie, dan kun je de kansen zonder terugleggen (hypergeometrisch) praktisch berekenen alsof de trekking met terugleggen gebeurt (binomiaal).



Zie ook het programma Kans&Simulatie van de Wageningse Methode.

9 Uit een vaas met 30 witte en 20 rode ballen wordt een aantal keren met teruglegging een bal getrokken.
a. Hoe groot is de kans dat bij 15 trekkingen de meerderheid van de getrokken ballen rood is ?
b. Bereken bij 12 trekkingen de kans op vijf, zes of zeven witte ballen.

10 Bij een eerlijke munt zijn de kansen op "kop" en "munt" gelijk. Je mag dus verwachten dat in ongeveer 50% van de worpen "kop" zal worden gegooid. De kans is groot dat het aantal keer kop ten minste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.
a. We doen 10 worpen.
Bereken de kans dat het aantal keer "kop" ten minste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.

b. Dezelfde vraag voor 20 worpen, voor 50 worpen en voor 100 worpen.
c. Hoe groter het aantal worpen, des te groter de kans dat het aantal keer "kop" tussen de 40% en 60% ligt.
Kun je dat verklaren ?

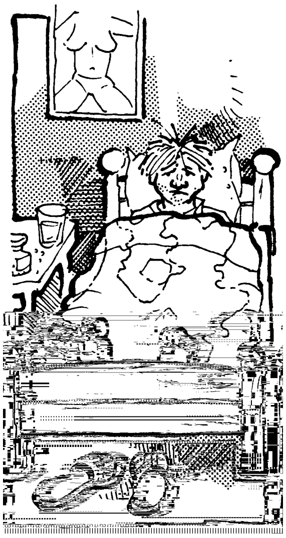
11 Bij een landelijk onderzoek is gebleken dat 15% van alle middelbare scholieren regelmatig spijbelt.
a. Hoe groot is de kans dat in een havo5-klas van twintig leerlingen er meer dan 4 zijn die regelmatig spijbelen ?
b. Bij vraag **a** heb je de binomiale kanstabel gebruikt.
Maar hebben we hier wel te doen met een binomiaal kansexperiment ? Waarom is dat twijfelachtig ?

12 In een bedrijf worden schroeven gefabriceerd. Volgens de bedrijfsleider is 5% van de productie niet bruikbaar. De slechte exemplaren worden niet verwijderd, omdat de controle daarop te veel geld kost. De schroeven worden in doosjes van 50 stuks verkocht aan de winkeliers.
a. Hoe groot is de kans dat een doosje meer dan vier onbruikbare schroeven bevat ?
b. Een winkelier heeft een partij van 500 doosjes schroeven besteld bij de fabriek.
Hoeveel doosjes met 50 bruikbare schroeven kan hij daarbij verwachten ?

13 Een docent geeft een multiple-choicetest die bestaat uit twintig vierkeuzevragen.
a. Stel dat hij voor elke goed beantwoorde vraag een half punt toekent.
Hoe groot is de kans dat iemand die alle antwoorden gokt als cijfer een 4 of hoger krijgt ?
b. De docent vindt dat een gokker ten hoogste 1% kans mag hebben om een cijfer 4 of hoger te halen.
Bij welk aantal goede antwoorden moet hij dan het cijfer 4 toekennen ?

14 Griepepidemie
Bij een griepepidemie wordt 20% van de bevolking ziek. Neem aan dat iedereen dezelfde kans heeft om ziek te worden.
a. Waarom is deze aanname aanvechtbaar ?

Op een school werken 25 leraren. X is het aantal leraren dat griep krijgt.
b. Hoe groot is E(X) ?

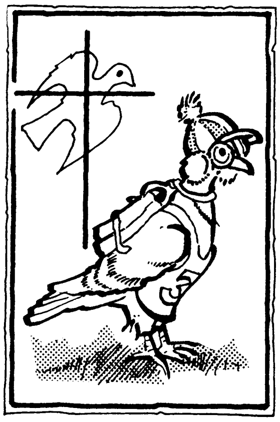


c. Hoe groot is de kans dat minstens vijf leraren griep krijgen ?
d. Hoe groot is de kans dat minstens vijf leraren geen griep krijgen ?
e. En hoe groot is de kans dat precies vijf leraren griep krijgen ?

Neem aan dat er op een dag vijf leraren door de griep geveld zijn.
f. Hoe groot is de kans dat van de elf leraren die Sofie heeft er die dag drie met griep thuis zijn gebleven ?

15 Mag het iets meer zijn ?

De kruidenier snijdt een stuk kaas van het grote stuk af. Hoewel hij dat heel aardig kan uitmikken, is het toch altijd iets te veel of iets te weinig. Neem aan dat die twee mogelijkheden dezelfde kans hebben.
In de afgelopen tijd heb je acht keer een pond kaas gekocht. Van die acht keer was het afgesneden stuk zes keer iets meer en twee keer iets minder dan een pond.
a. Hoe groot is de kans op zes of meer keer te veel ?
b. Toont dit resultaat voor jou aan dat de kruidenier liever iets te veel dan te weinig afsnijdt of kan dit best toeval zijn ?
c. Zou je hier anders over denken als er zeven keer te veel was afgesneden ?



16 Postduiven

Volgende week is er weer de beruchte postduivenvlucht op St. Vincent. Bij die vlucht heeft een duif 60% kans dat hij niet meer in zijn til terugkomt. Eduard Marée, in zijn dorp een bekende duivenmelker, doet met negen duiven mee.
a. Hoe groot is de kans dat meer dan de helft van zijn duiven terugkomt ?

Die zondag is er ook een vlucht voor jonge duiven op Vijlen (Zuid-Limburg). Hiervoor schrijft Eduard met zeven duiven in. Uit ervaring weet hij dat zo'n jonge duif in negen van de tien gevallen terugkomt.
b. Hoe groot is de kans dat precies vijf van de zeven duiven weer thuis komen ?

Eduard heeft elf jonge duiven: zes doffers en vijf duivinnen. Aselect kiest hij zeven duiven uit voor de vlucht op Vijlen.
c. Hoe groot is de kans dat er meer duivinnen dan doffers uitgekozen worden ?

Overzichtsvragen

1 X is een zekere binomiaal verdeelde stochast.

a. Vul in: $P(X \leq 10) = 1 - P(X \geq ...)$

b. Vul in: $P(X = 15 \text{ of } X = 16 \text{ of } X = 17) =$

$P(... < X < ...) =$

$P(... \leq X \leq ...) =$

$P(X \leq ...) - P(X \leq ...)$

2 Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen. X is het aantal successen en Y is het aantal mislukkingen.

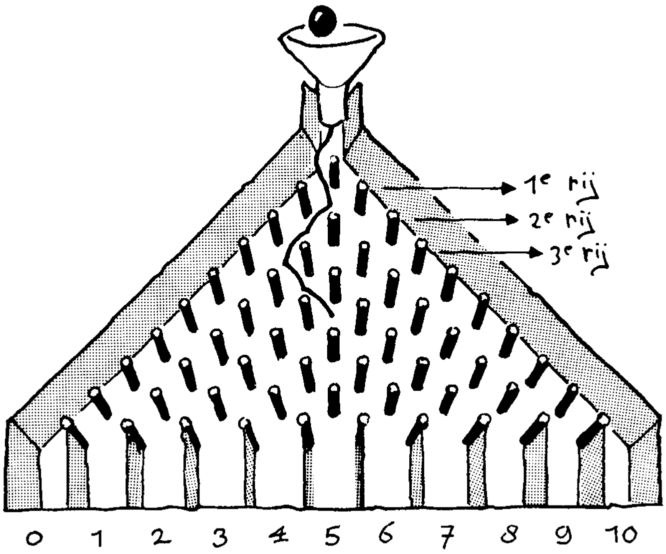
a. Stel dat je de cumulatieve kanstabel van X kent. Hoe vind je daaruit de cumulatieve kanstabel van Y ?

b. Stel dat je de cumulatieve kanstabel van X kent. Hoe vind je daaruit de gewone kanstabel van X ?

c. Stel dat je de kleinste kans in de cumulatieve kanstabel van X kent. Hoe vind je daaruit de succeskans ?

7 De standaardafwijking

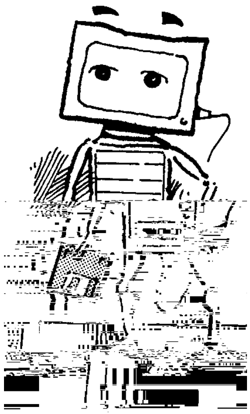
1 Hieronder staat schematisch het bord van Galton. Een balletje wordt boven in de trechter losgelaten en valt over de pinnen naar beneden. De pinnen zijn zo geplaatst dat, als het balletje op zo'n pin komt, het met even grote kans naar links als naar rechts valt. Na 10 keer een pin geraakt te hebben, komt het balletje in een van de elf bakjes onderaan het bord. De bakjes zijn genummerd van 0 tot en met 10.



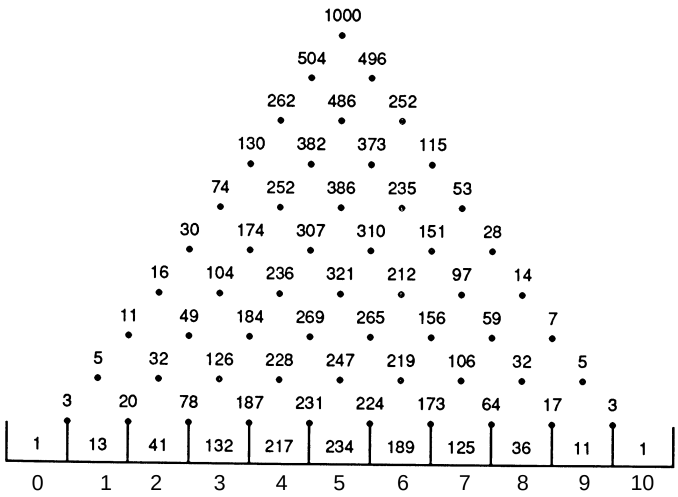
a. Hoeveel routes leiden er naar bakje 3 ?
b. Een balletje raakt op zijn weg naar beneden de derde pin van links op de zevende rij.
In welke bakjes kan het balletje dan nog terecht komen ?

2 Op de volgende bladzijde zie je het resultaat van een simulatie op een Galtonbord met 10 rijen. Men liet 1000 balletjes naar beneden vallen.
a. Hoe groot schat jij op grond van deze simulatie de kans dat een balletje in bakje 3 terecht komt ?

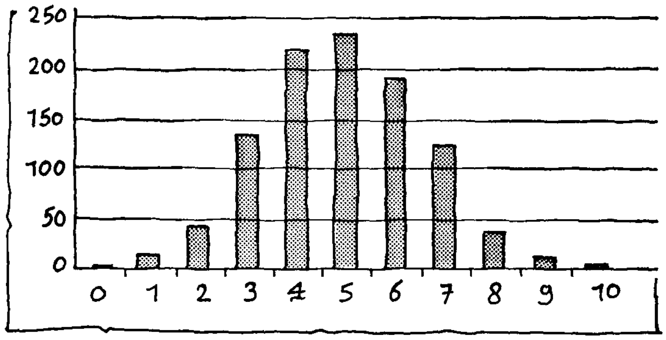
Bij een enkel balletje valt absoluut niet te voorspellen welke route het zal volgen. Alle routes zijn namelijk even (on)waarschijnlijk.
b. Bereken de kans dat een balletje in bakje 3 terecht komt.



Met het programmaonderdeel *Het Galtonbord* van Kans&Simulatie van de Wageningse Methode kun je zelf simulaties uitvoeren.

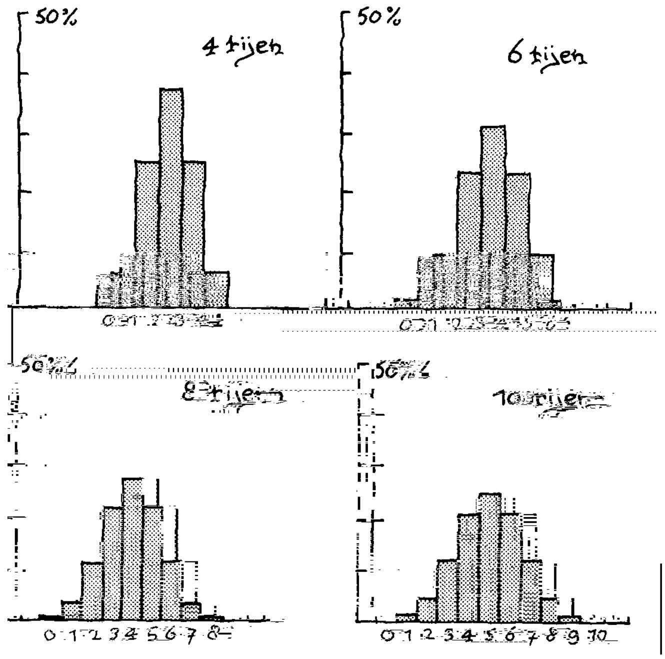


Bij de simulatie met 1000 balletjes kan een histogram gemaakt worden:



3 Het nummer van het bakje waarin het balletje terecht komt, noemen we X. X is binomiaal verdeeld.
a. Maak een tabel van de kansverdeling.
b. Teken het bijbehorende kanshistogram. Vergelijk het met het histogram van de simulatie hierboven.

We kijken naar Galtonborden met verschillende aantallen rijen pinnen. Dan krijg je de volgende histogrammen.



Het is lastig om uit deze histogrammen precieze kansen af te lezen. Voor precieze kansen moet je rekenen.

4 Hoe hoog is, in het histogram bij 8 rijen, de balk van bakje 2 precies ?

5 Het laten vallen van een balletje in een Galtonbord met n rijen pinnen, is een binomiaal kansexperiment.
a. Wat is de succeskans ?
Wat is het aantal herhalingen ?
Wat is de stochast X: het aantal successen ?
Hoe groot is E(X) ?
b. Als het aantal rijen n toeneemt, verandert het kanshistogram van vorm; het blijft niet gelijkvormig!
Wat verandert er aan de vorm van het kanshistogram ?
c. Bij elk aantal rijen n is het kanshistogram symmetrisch.
Waar ligt de symmetrie-as ?
d. Het verschil tussen de kanshistogrammen dat bedoeld werd in **b** heeft te maken met de "spreiding". Dat is de mate waarin de waarden van X uit elkaar liggen.
Als n groter wordt, wordt dan de spreiding groter of kleiner ?

6 De spreiding bekijk je ten opzichte van de verwachtingswaarde. Dat wil zeggen, bij een waarde k bekijk je de afwijking $|k - E(X)|$.

a. Vind je de absolute-waardestrepen terecht ?

Bekijk even de kanstabel bij het Galtonbord met n = 6.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

b. Welke waarden nemen de afwijkingen $|k - E(X)|$ aan? Wat is de kans op deze waarden ?

c. Wat is de verwachtingswaarde van deze afwijkingen ?

We gaan preciezer zeggen wat we met spreiding bedoelen. Dat doen we niet alleen voor de binomiale verdeling, maar algemeen.

Zoals gezegd nemen we daarvoor de afwijking ten opzichte van de verwachtingswaarde. Als de kans op een afwijking groot is, zal hij vaker voorkomen dan wanneer de kans op een afwijking klein is. Kansrijke afwijkingen moeten dus een groter "gewicht" hebben dan kansarme afwijkingen. De grootte van het gewicht is de kans op die afwijking. Daarom lijkt de volgende formule wel redelijk.

$\text{Vaa}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \cdot |x_k - E(X)|$, waarbij x_k de verschillende waarden zijn die X kan aannemen en p_k de bijbehorende kansen (voor $k = 0, 1, \ldots, n$).

Vaa staat voor *verwachte absolute afwijking.*

Toegepast op het voorbeeld in opgave **6** is deze formule helemaal uitgeschreven:

$$\text{Vaa}(X) = \tfrac{1}{64} \cdot |0-3| + \tfrac{6}{64} \cdot |1-3| + \tfrac{15}{64} \cdot |2-3| + \tfrac{20}{64} \cdot |3-3| + \tfrac{15}{64} \cdot |4-3| + \tfrac{6}{64} \cdot |5-3| + \tfrac{1}{64} \cdot |6-3|.$$

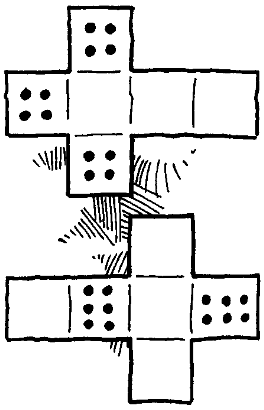
d. Bereken Vaa(X).

7 Welke uitkomst krijg je als je in de formule de absolute-waardestrepen weglaat en dus werkt met de formule

$\text{Vaa}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))$?

Als je de verwachtingswaarde en de verwachte absolute afwijking kent, ligt de stochast nog niet vast. Maar deze twee gegevens samen zeggen toch wel aardig wat over de stochast. Dit blijkt uit de volgende opgave.

8 In een bak zitten zes kaartjes, elk met een geheel getal erop geschreven. We pakken aselect een kaartje uit de bak. De stochast X is het getal dat op dat kaartje staat. Gegeven is dat $E(X)=10$ en $Vaa(X)=1$.
Welke getallen staan er op de zes kaartjes ? Een van de mogelijkheden is: 8, 9, 10, 10, 11, 12.
Geef de andere vier mogelijkheden.



9 We bekijken twee "dobbelstenen". De ene heeft drie grensvlakken met 0 ogen en drie grensvlakken met 4 ogen. De andere heeft twee grensvlakken met 6 ogen en vier grensvlakken met 0 ogen. Iemand werpt met beide stenen.
Het aantal ogen waarop de eerste steen valt, noemen we X, dat van de andere steen Y.
a. Bereken Vaa(X) en Vaa(Y).

De stochast $X+Y$ neemt dus de waarden 0, 4, 6 en 10 aan.
b. Maak een kanstabel voor $X+Y$ en bereken Vaa(X+Y).
c. Ga na dat $Vaa(X) + Vaa(Y) \neq Vaa(X+Y)$.

Vaa lijkt een goede maat te zijn voor de spreiding. Er is echter een probleem: $Vaa(X) + Vaa(Y) \neq Vaa(X+Y)$. Een spreidingsmaat waarvoor zo'n eigenschap wel zou gelden, heeft grote voordelen. Dat zal verderop blijken. We kiezen daarom de volgende spreidingsmaat.

Laat X een stochast zijn die de waarden x_0 t/m x_n kan aannemen met kansen achtereenvolgens p_0 t/m p_n.
Dan is $Var(X)=\sum_{k=0}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2$.
Var(X) is de zogenaamde **variantie** van X.

Zijn er nu geen absolute-waardestrepen nodig ?

10 a. Bereken voor de stochasten X en Y uit opgave **9** zowel Var(X) als Var(Y).
b. Bereken ook Var(X+Y).
c. Ga na dat nu wel geldt: $Var(X+Y)=Var(X) + Var(Y)$.

Als je de verwachtingswaarde en de variantie kent, ligt de stochast nog niet vast. Maar deze twee gegevens samen zeggen toch wel aardig wat over de stochast. Dit blijkt uit de volgende opgave.

11 In een bak zitten 16 kaartjes, elk met een geheel getal erop geschreven. We pakken aselect een kaartje uit de bak. De stochast X is het getal dat op dat kaartje staat. Gegeven is dat $E(X) = 10$ en $Var(X) = 1$.
Wat zit er in de bak ? Een mogelijkheid is: 6 kaartjes met 9, 6 kaartjes met 10 , 2 kaartjes met 11 en 2 kaartjes met 12.
Geef de andere acht mogelijkheden.

12 Iemand werpt met een aantal munten. Het aantal munten noemen we n. X is het aantal kop. E(X) en Vaa(X) staan in de tabel hieronder voor $n = 1$, 2, 3 en 4.

n	1	2	3	4
E(X)	½	1	1½	2
Vaa(X)	½	½	¾	¾
Var(X)				

a. E(X) vertoont een regelmaat. Druk E(X) uit in n.
b. Ga na dat Vaa(X) wel een regelmaat lijkt te hebben, maar dat die niet doorgaat voor n = 5.
c. Bereken Var(X) voor elk van de vier gevallen.
d. Var(X) laat wel een regelmaat zien. Druk Var(X) uit in n. (In opgave **21b** zullen we zien dat die formule juist is.)

Als je met de definitie de variantie wilt uitrekenen, kan dat vervelend rekenwerk zijn. Maar de somregel, zoals die in opgave **10c** staat, helpt ons als je de stochast kunt opsplitsen als som van eenvoudigere stochasten. Dan reken je namelijk de variantie uit voor de eenvoudigere stochasten en telt die varianties gewoon op. Iets dergelijks heb je al eerder gedaan bij de verwachtingswaarde (zie de opgaven **12** tot en met **17** van paragraaf 5).

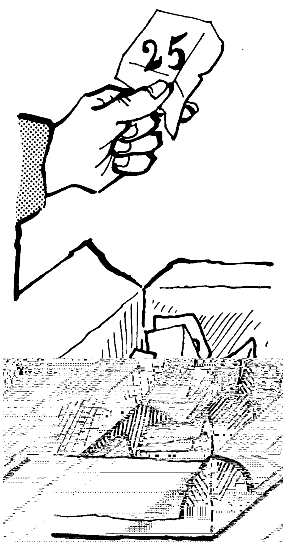
Somregel voor de verwachtingswaarde
Voor elk tweetal stochasten X en Y geldt:
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
In woorden: de verwachtingswaarde van de som is de som van de verwachtingswaarden.

Somregel voor de variantie
Voor elk tweetal *onafhankelijke* stochasten X en Y geldt: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.
In woorden: de variantie van de som is de som van de varianties, mits de stochasten onafhankelijk zijn.

De somregels gelden natuurlijk ook voor drie of meer stochasten.

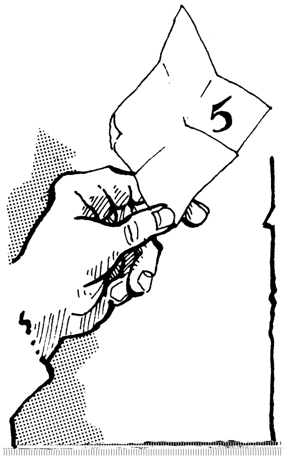
13 Iemand werpt met een aantal dobbelstenen. Het aantal dobbelstenen noemen we n. Y is het totaal aantal ogen van een worp.
a. Neem n = 1.
Ga na dat $Var(Y) = \frac{35}{12}$.
b. Neem n = 2. Hoe groot is dan Var(Y) ?
Neem n = 6. Hoe groot is dan Var(Y) ?

14 Iemand werpt met een dobbelsteen. X is het aantal ogen aan de bovenkant en Y is het aantal ogen aan de onderkant.
a. Hoe groot zijn E(X), E(Y) en $E(X+Y)$?
b. Hoe groot zijn Var(X), Var(Y) en $Var(X+Y)$?
c. Is de somregel voor de verwachtingswaarde van toepassing ?
En de somregel voor de variantie ?



15 In een doos zitten zes briefjes. Op drie briefjes staat het getal 5, op twee briefjes staat 10 en op één briefje staat 25. Iemand trekt aselect en met terugleggen twee keer een briefje uit de doos. S is de som van de getrokken getallen.
a. Welke waarden kan de stochast S aannemen ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van S.
c. Bereken E(S) en Var(S).

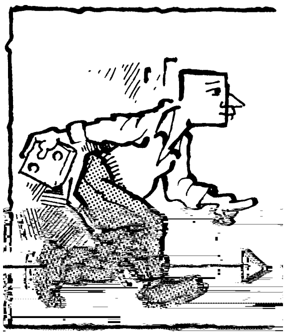
16 We gaan verder met opgave **15**. X is het getal op het eerste briefje, Y is het getal op het tweede briefje dat getrokken wordt. Dus $X+Y=S$.
a. Maak een tabel van de kansverdeling van Y



b. Bereken E(Y) en Var(Y).
c. Hoe groot zijn E(X) en Var(X) ?
d. Ga na dat $E(S) = E(X) + E(Y)$.
e. Is aan de voorwaarde "mits..." in de somregel voor de variantie voldaan ?
Ga na dat $Var(S) = Var(X) + Var(Y)$.

17 Dezelfde doos als in opgave **15**. Nu wordt er zonder terugleggen twee briefjes getrokken. T is de som van de getrokken getallen.
a. Welke waarden kan de stochast T aannemen ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van T.
c. Bereken E(T) en Var(T).

18 We gaan verder met opgave **17**. X is het getal op het eerste briefje en Y is het getal op het tweede briefje dat getrokken wordt. Dus $X + Y = T$.
a. Maak een tabel van de kansverdeling van Y.
b. Bereken E(Y) en Var(Y).
c. Hoe groot zijn E(X) en Var(X) ?
d. Ga na dat $E(T) = E(X) + E(Y)$.
e. Is aan de voorwaarde "mits ..." in de somregel voor de variantie voldaan ?
Ga na dat $Var(T) \neq Var(X) + Var(Y)$.
f. De variantie van de som is bij mèt terugleggen groter dan bij zonder terugleggen.
Waarom mocht je dat wel verwachten ?



19 X is het aantal ogen bij een worp met een dobbelsteen. Er geldt: $E(X) = 3\frac{1}{2}$ en $Var(X) = 2\frac{11}{12}$; zie opgave **14**.
We bekijken twee spellen.
Spel 1. Werp met een dobbelsteen; je krijgt twee keer zoveel euro's uitbetaald als het aantal ogen van de worp. Deze uitbetaling noemen we D. Dus $D = 2X$.
Spel 2. Werp met twee dobbelstenen; je krijgt zoveel euro's uitbetaald als het totaal aantal ogen van de worp. Deze uitbetaling noemen we S.
a. Welke stochast heeft de grootste variantie denk je, D of S ?
b. Teken een kanshistogram van D en ook van S.
c. Waarom geldt: $Var(S) = 2 \cdot Var(X)$?
d. Ga na dat geldt: $Var(D) = 4 \cdot Var(X)$.

20 De variantie is nog niet helemaal de spreidingsmaat die we zoeken.
a. Stel dat we een toevalsgrootheid X hebben die wordt uitgedrukt in cm. Waarin wordt dan E(X) uitgedrukt ?
En X – E(X) ? En Var(X) ? En $\sqrt{\text{Var}(X)}$?

Stel dat we van cm overstappen op mm. De nieuwe toevalsgrootheid noemen we Y. Dus $Y = 10 \cdot X$.
b. Wat is het verband tussen E(Y) en E(X) ?
Wat is het verband tussen Var(Y) en Var(X) ?
Wat is het verband tussen $\sqrt{\text{Var}(Y)}$ en $\sqrt{\text{Var}(X)}$?

Er zijn veel spreidingsmaten mogelijk. Wij kiezen de volgende.

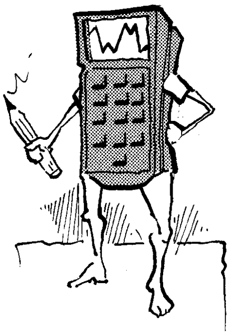
> Als X een stochast is die de waarden x_0 t/m x_n kan aannemen met kansen achtereenvolgens p_0 t/m p_n.
> Dan is $\text{Sd}(X) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2} = \sqrt{\text{Var}(X)}$.
> Sd(X) is de zogenaamde **standaardafwijking** van X.

21 X is een binomiaal verdeelde stochast, met n onafhankelijke herhalingen, elk met succeskans p. Dus $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Hierbij is $X_i = 1$ als er de i^{de} keer succes is en 0 anders.
a. Bepaal $E(X_1)$, $\text{Var}(X_1)$ en $\text{Sd}(X_1)$.
b. Bepaal E(X), Var(X) en Sd(X).

> Als X een binomiale stochast is met n herhalingen en succeskans p, dan
> $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ en $\text{Sd}(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

22 **a.** T is het totaal aantal ogen bij 100 worpen met een dobbelsteen. Bereken E(T), Var(T) en Sd(T).
b. K is het totaal aantal keer kop bij 100 worpen met een munt. Bereken E(K), Var(K) en Sd(K).
c. Een Galtonbord heeft 100 rijen pinnen. Op elke pin is de kans dat het balletje naar rechts springt 0,3. De bakjes onderaan het Galtonbord zijn van links naar rechts genummerd 0 t/m 100. N is het nummer van het bakje waarin het balletje terecht komt.
Bereken E(N), Var(N) en Sd(N).

Je kunt ook met wetenschappelijke rekenmachines en met computerprogramma's de Sd uitrekenen. Zie bijvoorbeeld schijf 2 Statistiek van de Wageningse Methode.



Op de TI83 gaat dat als volgt.
STAT
EDIT Vul in lijst L_1 de waarden $x_1, ..., x_n$ in.
Vul in lijst L_2 de frequenties in.
STAT
CALC
1-Var Stats L_1 , L_2 ENTER
Bij σx lees je dan de Sd af.

Overzichtsvragen

1 Van de stochast X zijn de kansen gegeven:
$P(X=0) = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$, $P(X=3) = \frac{1}{6}$.
a. Bereken Sd(X).

Van de stochast Y zijn de kansen gegeven:
$P(Y=0) = \frac{1}{3}$, $P(Y=10) = \frac{1}{2}$, $P(Y=30) = \frac{1}{6}$.
b. Hoe volgt Sd(Y) uit Sd(X) ?

Van de stochast Z zijn de kansen gegeven:
$P(Z=10) = \frac{1}{3}$, $P(Z=11) = \frac{1}{2}$, $P(Z=13) = \frac{1}{6}$.
c. Hoe volgt Sd(Z) uit Sd(X) ?

2 Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen. X is het aantal successen, Y het aantal mislukkingen. Stel je kent Sd(X).
a. Hoe vind je daaruit Sd(Y) ?
b. Hoe vind je daaruit de succeskans ?

3 **Bridge**
a. Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Er zijn vier azen. Het aantal azen dat Anneke krijgt noemen we A. De kansverdeling van A is:

x	0	1	2	3	4
P(A = x)	0,3038	0,4388	0,2135	0,0412	0,0026

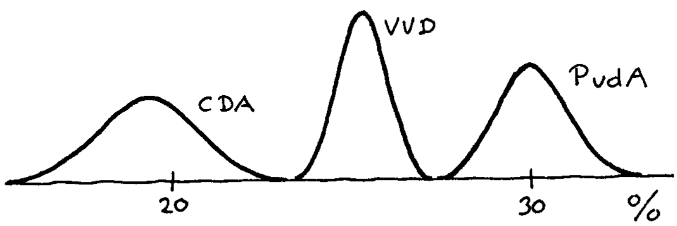
Bereken hiermee de Var(A).

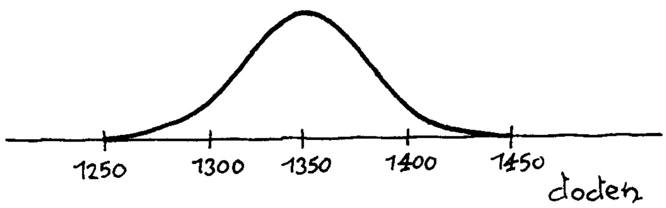
H = 1 als Anneke hartenaas krijgt, anders H = 0.
b. Bereken de Var(H).
c. Waarom geldt niet: Var(A) = 4 · Var(H) ?
d. Hoe kun je met behulp van de tabel EA en Sd(A) berekenen op de GR ?

8 De klokvorm

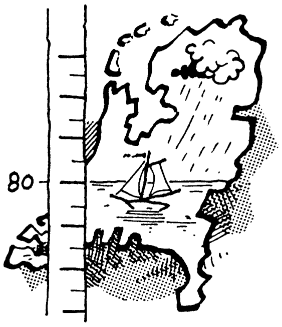
1 Peiling

Op 6 mei 1998 vonden er verkiezingen voor de Tweede Kamer plaats. De laatste dagen voor de verkiezingen werd de uitslag voorspeld. Er zijn twee grote bureaus die zich daarmee bezighouden: Inter/View en Nipo. Zij houden peilingen onder de Nederlandse bevolking. Op grond van die peilingen voorspellen de bureaus voor elke politieke partij een percentage van de stemmen. Maar dat voorspelde percentage klopt natuurlijk zelden precies: er is een onzekerheid. Welke percentages voorspeld wer-

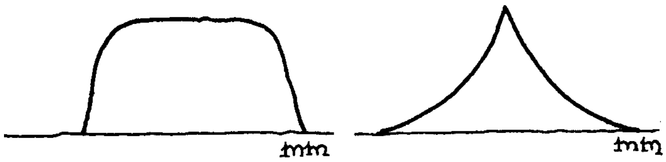




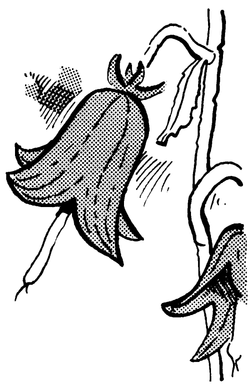
a. Schat hoe groot de kans is dat het aantal verkeersdoden boven de 1410 ligt.
b. Schat hoe groot de kans is dat het aantal verkeersdoden ligt tussen 1370 en 1400.



3 Het weer
Vanaf 1848 worden systematisch allerlei gegevens over het weer bijgehouden. Gemiddeld valt er jaarlijks 780 mm neerslag in de Bilt. Grotere afwijkingen dan 380 mm van dit gemiddelde zijn nooit voorgekomen. Op grond van die jarenlange ervaring maakt men een plaatje van de voorspelling voor het komend jaar.
a. Hoe ziet dat plaatje eruit, denk je ? Vermeld de relevante gegevens.
b. Stel dat er in een jaar 500 mm neerslag viel.
Vind je dat extreem weinig of valt het wel mee ?
Waarom ?
Hieronder staan twee mogelijke antwoorden op vraag **a**.

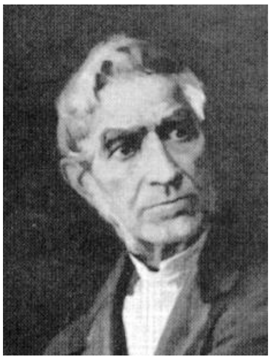


c. Wat is je bezwaar tegen elk van deze antwoorden ?

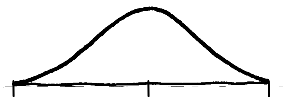


Over een klokvormige grafiek
In de opgaven **1**, **2** en **3** kwam je hetzelfde soort plaatje tegen: de zogenaamde **klokvorm**. Kenmerkend voor de klokvorm zijn:

- Symmetrie om het gemiddelde: afwijkingen naar boven zijn even waarschijnlijk als even grote afwijkingen naar beneden.
- Hoe groter de afwijking, des te kleiner is de kans dat die optreedt.
- Erg grote afwijkingen komen praktisch niet voor.


Adolphe Quetelet
1796 - 1874

In veel voorbeelden in de natuur en bij het menselijk handelen komt de klokvorm voor (vaak bij benadering). Dat deze verdeling vaak voorkomt, is ontdekt in de negentiende eeuw. De belangrijkste onderzoeker was de Belg Quetelet. In 1835 publiceerde hij een boek met statistisch materiaal over allerlei grootheden betreffende een mens (bijvoorbeeld de lengte van 18-jarige jongens). Hij merkte op dat de grootheden klokvormig verdeeld waren rond een gemiddelde. Een individuele afwijking van dat gemiddelde kwam door toevallige oorzaken. Hij voerde het idee van de “volmaakte” mens in: dat is de mens die alle grootheden gemiddeld heeft. Heel iets anders dan wat als ideaal gezien wordt!



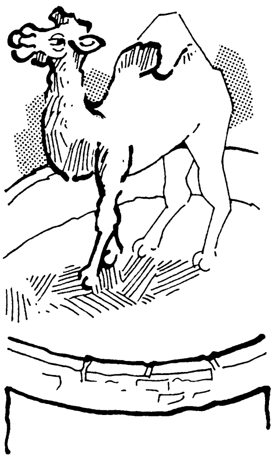
4 Voorbeelden van situaties met de klokvorm

Teken voor elk van de volgende voorbeelden een plaatje zoals hiernaast. Op de horizontale as wordt de genoemde grootheid uitgezet.
Schrijf bij de horizontale as de eenheid waarin je meet. (Bij het eerste voorbeeld is dat de grootheid *lengte* en is de eenheid *cm*.) Schrijf bij de drie streepjes op de horizontale as redelijke getallen.

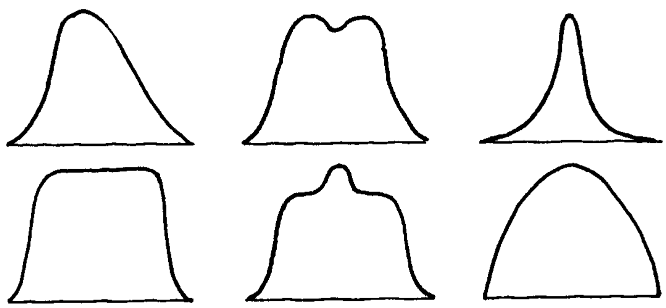
- Lengte van Nederlandse jongens van 18 jaar.
- Leeftijd van de vrouw als ze moeder wordt (haar eerste kind krijgt).
- Tijdsduur van een autorit Arnhem-Nijmegen (18 km) in de ochtendspits.
- Het precieze gewicht in een zogenaamd kilopak suiker.
- Het aantal keer kop bij 100 worpen met een muntstuk.

Zoals gezegd, zijn veel verdelingen klokvormig, of ze lijken daar sterk op. We spreken wel van een **normale verdeling**. De term normale verdeling is ingevoerd door de Engelse statisticus Karl Pearson (1857-1936).
Maar niet alle verdelingen zijn normaal.

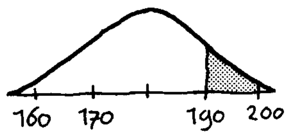
5 **a.** Geef zelf nog een paar praktijkvoorbeelden van (ongeveer) normale verdelingen.
b. Geef zelf ook een paar voorbeelden waarbij de verdeling duidelijk niet normaal is.



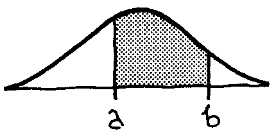
6 Geen van de volgende verdelingen is klokvormig.
Zeg van elke verdeling, waarom hij niet klokvormig is.



Zoals je gezien hebt, kun je uit een verdelingskromme kansen of percentages aflezen. Daarvoor is de *oppervlakte* onder de grafiek bepalend.



7 De lengte van 18-jarige jongens in Nederland is klokvormig verdeeld.
a. Het percentage van de jongens dat langer is dan 190 cm wordt gegeven door de grijze oppervlakte.
Hoe groot schat jij dat dat percentage ongeveer is ?
b. Schat hoeveel procent van de jongens een lengte heeft tussen 170 en 180 cm.

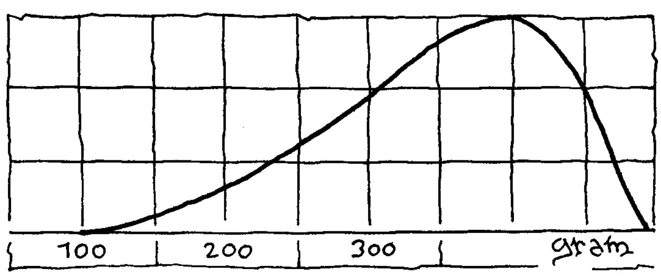


Een grootheid X is verdeeld volgens de grafiek hiernaast. Op de horizontale as zijn twee mogelijke waarden van X aangegeven: a en b.
De kans (of het percentage) dat de waarde van X ligt tussen a en b wordt gegeven door de oppervlakte onder de grafiek tussen a en b.
Preciezer:
Zeg dat de gearceerde oppervlakte p% is van de totale oppervlakte onder de grafiek. Dan geldt:

- in p% van de gevallen zal X een waarde tussen a en b aannemen,
- de kans dat $a \leq X \leq b$ is $\frac{p}{100}$.

De totale oppervlakte onder een verdelingskromme is 100%.

8 Het gewicht van sinaasappelen in de oogst in Spanje van 1994 is verdeeld volgens onderstaande grafiek. Voor het gemak is de grafiek getekend op roosterpapier.



a. Hoe zie je aan de grafiek dat het gewicht van de sinaasappels niet zuiver normaal verdeeld is ?
b. Bepaal zo nauwkeurig mogelijk hoeveel procent van de sinaasappels een gewicht heeft tussen 200 en 350 gram.
c. De zwaarste 30% van de sinaasappels worden verkocht aan luxe restaurants.
Hoe zwaar zijn die ?

Bij een verdeling hoort een gemiddelde en een standaardafwijking.

9 **a.** Hoe groot schat jij dat het gemiddelde gewicht is van de sinaasappels uit de vorige opgave ?

Het gemiddelde gewicht vind je als volgt:

- bepaal van elke sinaasappel zijn gewicht,
- tel al die gewichten op,
- deel door het totaal aantal sinaasappels.

De uitkomst is het gemiddelde gewicht.

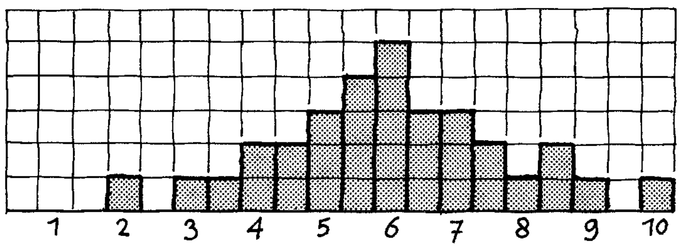
Stel dat je voor elke sinaasappel bepaalt hoeveel zijn gewicht afwijkt van het gemiddelde gewicht (lichte sinaasappels hebben een negatieve afwijking, zware sinaasappels een positieve), en je telt al die afwijkingen op.
b. Welke uitkomst krijg je dan ?

Voor de standaardafwijking Sd heb je een methode geleerd in paragraaf 7. Die gaat als volgt:

- je bepaalt voor elke sinaasappel het kwadraat van zijn afwijking van het gemiddelde,
- je telt al die kwadraten op,
- je deelt door het totaal aantal sinaasappels,
- je trekt de wortel.

De uitkomst is de standaardafwijking.

10 Hieronder staat een histogram van de cijfers van een wiskunde B-toets.



a. Bereken het gemiddelde cijfer.
b. Bereken de standaardafwijking van de cijfers.

Op de GR kun je het gemiddelde en de standaardafwijking als volgt uitrekenen.

- Voer in lijst L_1 de cijfers in en in lijst L_2 de frequenties.
- STAT CALC 1-Var Stats L_1,L_2 ENTER

De GR geeft dan onder andere $\bar{x}$ (het gemiddelde) en σx (dat is de Sd).

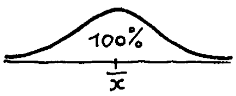
c. Voor de berekening op de GR uit.

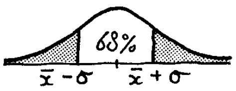
Het gemiddelde en de standaardafwijking worden berekend met de volgende formules.

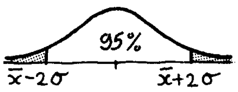
11 Hieronder staan een frequentietabel en een frequentiehistogram van de letogram

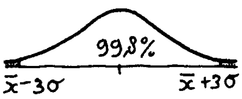
Voer op de GR de leeftijden in in bijvoorbeeld lijst L_1 en de frequenties in L_2. De leeftijden kun je een voor een invoeren, maar ook sneller als volgt:
LIST, OPS, 5:seq(K,K,15,49), ENTER, STO, L_1.
Voor de frequenties zit er niets anders op dan ze een voor een in te voeren.
a. Teken het histogram via STAT PLOT op de GR.
b. Bereken op de GR via STAT CALC het gemiddelde en de standaardafwijking van de leeftijd van de moeders.

Als je als leeftijden 15, 16, ... invoert, krijg je als gemiddelde ongeveer 29 jaar. In werkelijkheid is het gemiddelde echter 29,5 jaar.
c. Kun je dat halve jaar verschil verklaren ?
d. Ga na dat in het frequentiehistogram $\bar{x}$, $\bar{x}+\sigma$ en $\bar{x}-\sigma$ goed zijn aangegeven.
e. Schat hoeveel procent van de moeders ouder is dan $\bar{x}$, hoeveel procent ouder is dan $\bar{x}+\sigma$ en hoeveel procent ouder is dan $\bar{x}+2\cdot\sigma$.









Klokvormige verdelingen
Veel bestanden zijn zo ongeveer "klokvormig" verdeeld zoals hiernaast schetsmatig is aangegeven. Er is één top en de verdeling is symmetrisch en loopt geleidelijk af tot 0. Zie opgave **11**, maar je kunt ook denken aan juli-temperaturen, lengte van rekruten, de eindexamencijfers voor het vak wiskunde A of het aantal jongens bij 1000 geboortes in een zekere gemeente. Bij zo'n verdeling zijn grote afwijkingen van het gemiddelde zeldzaam.

Vuistregel
Bij klokvormige verdelingen gelden de volgende vuistregels voor de afwijkingen van het gemiddelde:

- afwijkingen van meer dan σ zijn heel gewoon: in 32% van de gevallen,
- afwijkingen van meer dan $2\cdot\sigma$ zijn tamelijk zeldzaam: in 5% van de gevallen,
- afwijkingen van meer dan $3\cdot\sigma$ zijn uiterst zeldzaam: in 0,2% van de gevallen.

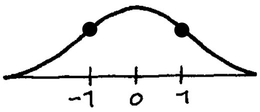
9 Normale verdelingen

In de vorige paragrafen hebben we beschreven wat we onder een normale verdeling verstaan.
Nog even de belangrijke kenmerken op een rijtje:

- de grafiek is symmetrisch,
- de totale oppervlakte onder zijn grafiek is 1,
- de grafiek heeft twee buigpunten.

Zoals elke verdeling, heeft ook een normale verdeling een gemiddelde en een standaardafwijking.

Er zijn allerlei normale verdelingen. In alle gevallen blijft de grafiek symmetrisch en blijft de totale oppervlakte onder de grafiek gelijk aan 1. We kunnen wel variëren met het gemiddelde en de standaardafwijking. Als *standaard* kiezen we de normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1. Alle andere normale verdelingen ontstaan uit deze door horizontale verschuiving en oprekken in horizontale en verticale richting.



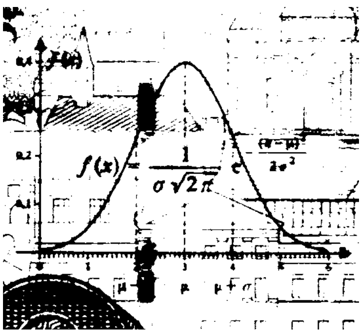
De **standaard normale verdeling** is de normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1.

Opmerking

De formule is: $y = 0{,}4 \cdot 0{,}6^{x^2}$ beschrijft de normale verdeling. Hierin zijn de getallen 0,4 en 0,6 benaderingen. De grafiek heeft de gewenste klokvorm en de oppervlakte onder de grafiek is gelijk is aan 1.

Deze formule is voor het eerst beschreven door de Frans/Engelse wiskundige Abraham de Moivre (1667-1754). Ook door andere wiskundigen is er veel onderzoek gedaan op het gebied van de klokkromme. Een van de onderzoekers was Carl Friedrich Gauss. De kromme wordt daarom ook wel **Gausskromme** genoemd.

Op het Duitse 10-markbiljet staat de beeltenis van C.F. Gauss met de grafiek van de normale verdeling. Deze grafiek is hieronder uitvergroot.



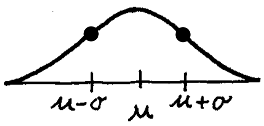
1 Als we de standaardnormale verdeling 2 keer zo smal maken, moet hij ook twee keer zo hoog worden.
a. Leg uit waarom.
b. Hoe verandert dan het gemiddelde ?
c. Hoe verandert dan de Sd ?

We verschuiven de standaardnormale verdeling 2 eenheden naar rechts.
d. Hoe verandert dan het gemiddelde ?
e. Hoe verandert dan de Sd ?

Bij een normale verdeling onderscheiden we twee parameters:

- gemiddelde μ ,
- standaardafwijking σ .

De bijbehorende verdelingskromme krijg je door de standaardnormale verdeling μ naar rechts te schuiven en σ keer zo breed te maken.



Het gemiddelde en de standaardafwijking worden in de statistiek met Griekse letters aangegeven:

- μ (spreek uit *mu*) voor het gemiddelde,
- σ (spreek uit *sigma*) voor de standaardafwijking.

2 We nemen aan dat de lengte van 18-jarige jongens normaal verdeeld is met gemiddelde 182 cm en Sd 10 cm.
Bijna alle lengtes liggen tussen $\mu-3\sigma$ en $\mu+3\sigma$.
a. Welke zijn deze twee grenzen ?

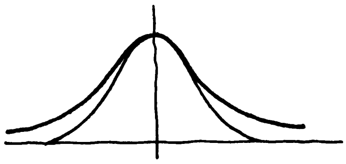
Er is een snelle manier om op de GR een plaatje van de verdeling te tekenen. Als volgt.
b. Type in: Y = normalpdf(X,182,10). Normalpdf vind je in het menu DISTR. Kies het window: $152 \leq x \leq 212$ en $0 \leq y \leq 0.05$

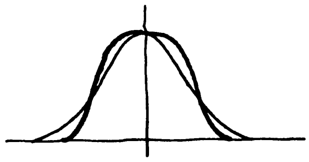
3 Neem aan dat de lengte van meisjes normaal verdeeld is met gemiddelde 174 cm en SD 8 cm.
Teken ook deze verdeling op de GR. Kies zelf een geschikt window.

4 Een normale verdeling ligt pas vast als je het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ kent.
a. Neem $\sigma = 3$. Neem verschillende waarden voor μ tussen 5 en 15. Teken de grafieken van de normale verde-

lingen op de GR in één plaatje. Neem het x-domein van 0 tot 20.
Wat verandert aan de grafiek als je μ verandert en σ vast houdt ?
b. Neem $\mu = 8$. Neem verschillende waarden voor σ tussen 0,1 en 3. Teken de grafieken van de normale verdeling op de GR in één plaatje. Kies het x-domein van 0 tot 20 en het y-domein van 0 tot 1.
Wat verandert aan de grafiek als je σ verandert en μ vast houdt ?

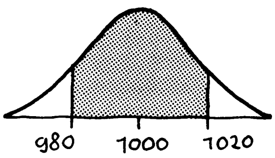
Zoals gezegd, zal een praktijkvoorbeeld nooit precies voldoen aan de formule van de normale verdeling, maar wel ongeveer. We spreken dan van **bij benadering normaal verdeeld**.
Vaak is het niet zo gemakkelijk om te beslissen of een verdeling wel bij benadering normaal is of niet. In beide plaatjes hieronder is behalve een normale verdeling nog een andere kromme getekend. Die lijkt misschien wel normaal, maar is het niet.





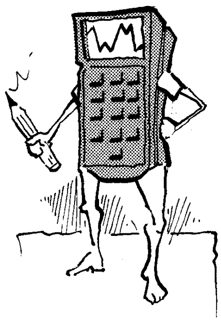
5 Als je een kilopak suiker koopt, mag je verwachten dat er 1000 gram suiker in zit. Dat staat per slot van rekening op de verpakking. Deze pakken worden in de fabriek machinaal gevuld. De vulmachine kan wel keurig op 1000 gram zijn ingesteld, maar in de praktijk zal er in het ene pak wat meer en in het andere pak wat minder suiker te-

Stel dat de machine inderdaad op 1000 gram is ingesteld. De hoeveelheid suiker in een pak is normaal verdeeld met gemiddelde 1000 gram en Sd 10 gram.
a. Teken de bijbehorende normale kromme op de GR.



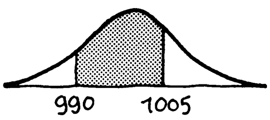
Je kunt op de GR berekenen hoeveel procent een gewicht heeft tussen 980 en 1020 gram. Als volgt:
- WINDOW: $970 \le x \le 1030$, $0 \le y \le 0.1$
- DISTR , DRAW , Shadenorm(980,1020,1000,10)

Op het scherm komt de normale kromme met gemiddelde 1000 en Sd 10 en daarbij geschaduwd de oppervlakte tussen 980 en 1020. Bovendien krijg je de oppervlakte van het gebied. En dat is het gevraagde percentage.
b. Hoe groot is dat percentage ?

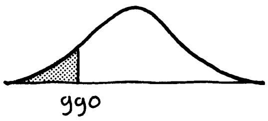


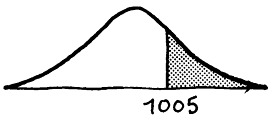
Als je alleen de oppervlakte wilt hebben en niet de tekening, dan kun je die berekenen met:
DISTR , normalcdf(980,1020,1000,10)

linker-grens rechter-grens gemid-delde μ Sd



c. Bereken met de GR hoeveel procent van de pakken suiker een gewicht heeft:
- tussen 990 en 1005 gram,
- minder dan 990 gram (Er moet bij Shadenorm altijd een linker- en rechtergrens opgegeven worden. Kies een zodanig klein of groot getal dat de oppervlakte daarbuiten praktisch 0 is),
- meer dan 1005 gram.

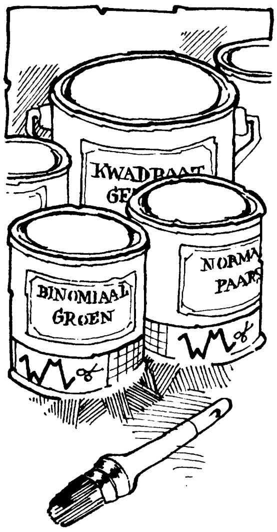




6 De **vuistregels** zeggen het volgende:
- 68% wijkt niet meer dan de Sd af van het gemiddelde,
- 95,5% wijkt niet meer dan 2·Sd af van het gemiddelde.

Controleer de vuistregels op de GR voor de pakken suiker van opgave **5**.

7 In een fabriek worden blikken gevuld met (gemiddeld) 1 liter verf. De standaardafwijking van de vulmachine is 15 milliliter. De inhoud van de blikken is normaal verdeeld.
We willen weten hoeveel procent van de blikken meer dan 30 ml verf te weinig bevat.



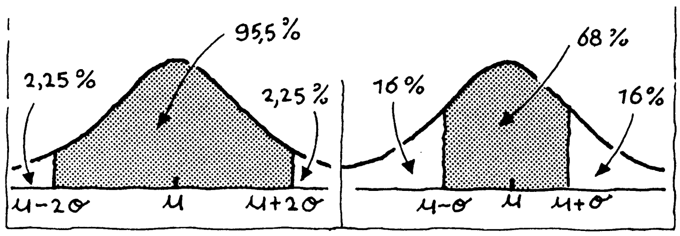
a. Schets ook een normale kromme en kleur de oppervlakte die hoort bij deze vraag.
b. Bereken hoeveel procent van de blikken meer dan 30 ml verf te weinig bevat.

Een liter verf weegt 2 kg.
c. Bereken hoeveel procent van de blikken minder dan 1980 gram verf bevat.

Vuistregels

Voor de **normale verdeling** met gemiddelde μ en standaardafwijking σ gelden de vuistregels:

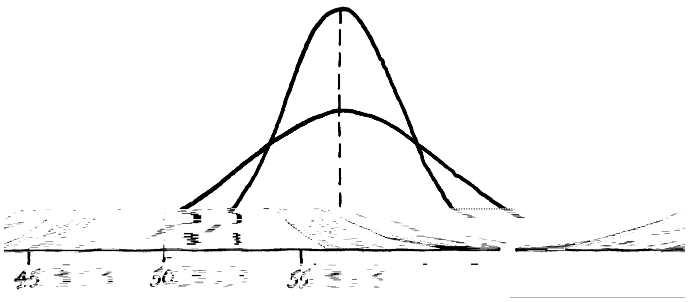
- 68 % ligt tussen $\mu-\sigma$ en $\mu+\sigma$,
- 95,5% ligt tussen $\mu-2\sigma$ en $\mu+2\sigma$.



8 Hoeveel procent ligt tussen $\mu-3\sigma$ en $\mu+3\sigma$?

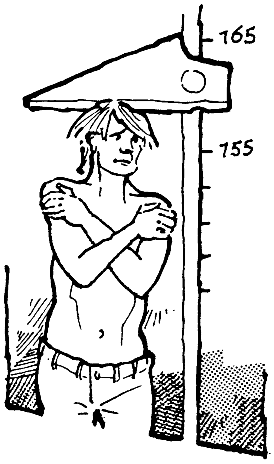
Met 2nd DISTR DRAW Shadenorm(kun je de oppervlakte onder een normale kromme berekenen:
Shadenorm(*linkergrens* , *rechtergrens* , μ , σ).

9 De twee normale krommen hieronder hebben beide gemiddelde $\mu = 50$. De standaardafwijkingen zijn verschillend.



Bepaal voor beide hoe groot de standaardafwijking ongeveer is.

10 Het gewicht van varkens in een bepaalde groep is normaal verdeeld met $\mu = 40$ kg en $\sigma = 8$ kg.
a. Bereken hoeveel procent van de varkens een gewicht heeft onder 30 kg.
b. Bereken hoeveel procent van de varkens een gewicht heeft boven 42 kg.
c. Bereken hoeveel procent van de varkens een gewicht heeft tussen 30 en 50 kg.

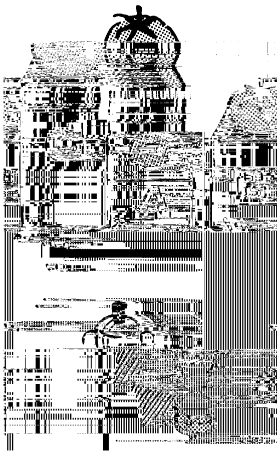


11 In 1986 werd van 103.370 dienstplichtige 18-jarigen de lengte opgemeten. Hun gemiddelde lengte bleek 181,8 cm te zijn en de standaardafwijking 7 cm.
We willen weten hoeveel jongens 190 cm of langer zijn.
a. Schets een normale kromme en geef daarbij de gegevens en het gevraagde aan.
b. Bereken met de normale verdeling hoeveel van de jongens naar verwachting 190 cm of langer waren.

Jongens die langer waren dan 200 cm of korter dan 160 cm werden op grond van hun lengte afgekeurd.
c. Teken weer een bijpassend plaatje.
Bereken met de normale verdeling hoeveel jongens er in 1986 op grond van hun lengte werden afgekeurd.

12 Een tomatenkweker heeft geoogst. De vruchten variëren in grootte en gewicht. Het gewicht is normaal verdeeld met $\mu = 90$ gram en $\sigma = 15$ gram. In totaal zijn 60.000 tomaten geoogst. De oogst wordt op gewicht gesorteerd.
De drie gewichtsklassen zijn:
- klasse A: tot 70 gram,
- klasse B: van 70 tot 100 gram,
- klasse C: meer dan 100 gram.

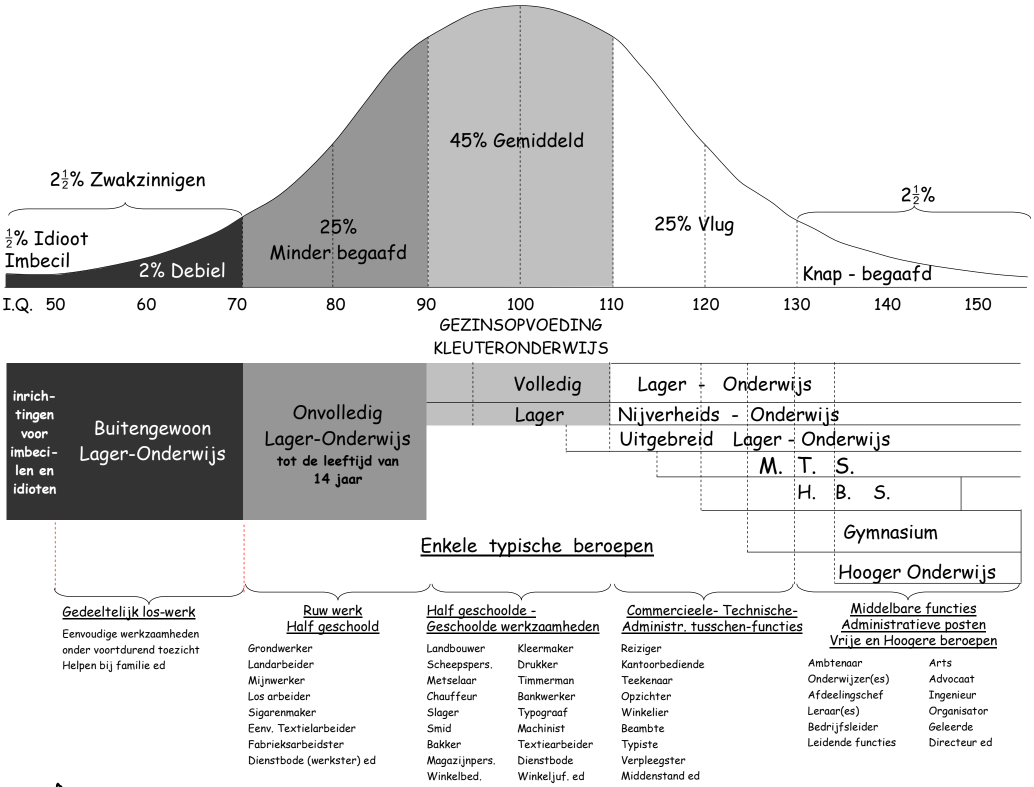
a. Hoeveel procent van de oogst komt in elk van de klassen terecht ?



De opbrengst van een tomaat hangt af van zijn gewichtsklasse:
- klasse A: 20 cent,
- klasse B: 25 cent,
- klasse C: 30 cent.

b. Welke opbrengst mag de kweker voor zijn hele oogst verwachten ?

13 Intelligentie is een van de factoren die een rol spelen bij het met succes volgen van een schoolopleiding. In 1938 gebruikte een onderwijskundige onderstaande grafiek, waarin de mate van intelligentie (uitgedrukt in IQ) werd gekoppeld aan soorten opleidingen en mogelijke beroepen.



[redacted]

Het IQ van leerlingen is normaal verdeeld met $\mu = 100$.

a. Bepaal uit het plaatje hoe groot σ ongeveer is.

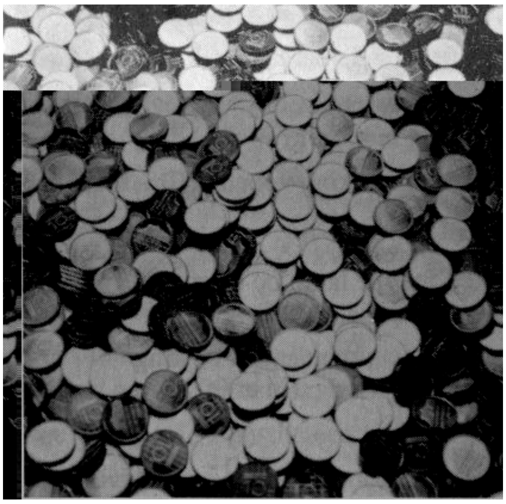
b. Bereken hoeveel procent van de bevolking in 1938 in staat werd geacht om ten minste de MTS als opleiding te volgen.

c. Bereken hoeveel procent in aanmerking kwam voor de HBS, maar niet voor het Gymnasium.

14 Twee fabrikanten brengen voor dezelfde prijs eenzelfde type lamp op de markt. Het aantal branduren is voor beide merken normaal verdeeld. Merk A heeft een gemiddelde van 1250 uur en een standaardafwijking van 300 uur. Merk B heeft een gemiddelde van 1200 uur en een standaardafwijking van 250 uur.
Je wilt een lamp kopen die minstens 1000 uur moet branden.
Welk merk heeft jouw voorkeur ?

15 Alle Nederlandse munten werden in Utrecht geslagen bij 's Rijks Munt. De afmetingen en gewichten waren aan zeer strikte regels gebonden.

Muntsoort	metaal	middellijn in mm	gewicht in gr	tolerantie in duizensten
vijftigguldenmunt	zilver	38,0	25,0	5
tienguldenmunt	zilver	38,0	25,0	3
vijfguldenmunt	verbronsd nikkel	23,5	9,25	27
rijksdaalder	nikkel	29,0	10,0	15
gulden	nikkel	25,0	6,0	15
kwartje	nikkel	19,0	3,0	15
dubbeltje	nikkel	15,0	1,5	15
stuiver	brons	21,0	3,5	15



Container met 400.000 nieuw geslagen dubbeltjes (foto 's Rijks Munt)

Het gewicht van een nieuw geslagen gulden is normaal verdeeld met $\mu = 6000$ mg en $\sigma = 6$ mg. Munten die meer dan 15 mg afwijken van het vereiste gewicht mogen niet in omloop worden gebracht.

a. Waarom gelden zulke strikte eisen voor het toegestane gewicht ?

b. Bereken welk percentage van de nieuw geslagen guldens niet in omloop zal worden gebracht.

c. Per jaar zijn er 25 miljoen nieuwe guldens nodig. Hoeveel moeten er geslagen worden om aan die vraag te kunnen voldoen ?

16 We gaan terug naar de vulmachine die pakken vult met (ongeveer) 1 kilogram suiker. Als de machine ingesteld staat op 1000 gram, zal het werkelijke gewicht van een pak normaal verdeeld zijn met gemiddelde 1000 gram en standaardafwijking 10 gram.
a. Toon aan dat bijna 7% van de pakken een gewicht heeft van 985 gram of minder.

Volgens EU-

10 De standaard normale tabel

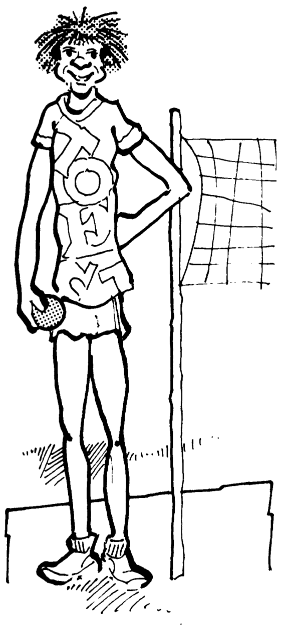
1 **a.** Gemiddeld bedraagt de temperatuur in De Bilt in de maand juli 16,6 °C. In 1983 was de gemiddelde juli-temperatuur in De Bilt 20,1 °C.
Is dat uitzonderlijk hoog ? Wat denk jij ?
b. Anneke simuleert op de computer het gooien met een dobbelsteen. De computer “gooit” 1000 keer met een dobbelsteen. Ze verwacht ongeveer 167 keer zes ogen te krijgen, met een standaardafwijking van 12. Bij de simulatie krijgt ze maar 150 keer zes ogen.
Is dit uitzonderlijk weinig ? Wat vind jij ?
c. De consumentenbond controleert een kilopak suiker. Gemiddeld behoren de pakken 1000 gram te bevatten. Het gecontroleerde pak bleek 982 gram te bevatten. Vind jij dit uitzonderlijk ?

Vaak is het lastig om, zo op het oog, te beoordelen of een waarneming uitzonderlijk is. Daarom gebruiken we een methode. De volgende:
Bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking. Kijk hoeveel keer de SD de waarneming afwijkt van het gemiddelde. Hoe hoger dit aantal keer, des te uitzonderlijker is de waarneming.

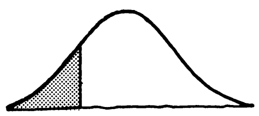
2 **a.** De juli-temperatuur (in °C) in De Bilt is normaal verdeeld met gemiddelde 16,6 en standaardafwijking 1,4. In 1983 was de gemiddelde juli-temperatuur in De Bilt 20,1 °C.
Hoeveel keer de SD wijkt deze waarneming af van het gemiddelde ?
Is de juli-temperatuur van 1983 uitzonderlijk, vind jij ?
b. De consumentenbond controleert een kilopak suiker. Het gewicht van een pak is gemiddeld 1000 gram, met een standaardafwijking van 10 gram. Het gecontroleerde pak bleek 982 gram te bevatten.
Hoeveel keer de SD wijkt deze waarneming af van het gemiddelde ?
Is een pak met 982 gram uitzonderlijk, vind jij ?

Het aantal keer de standaardafwijking dat een waarneming afwijkt van het gemiddelde, heet de z-waarde.

$$\textbf{z-waarde} = \frac{\text{waarneming} - \text{gemiddelde}}{\text{SD}}$$

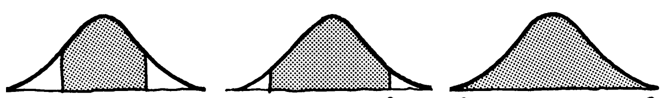


3 We bekijken de lengten in twee groepen: 16-jarige jongens en 16-jarige meisjes. Bij de jongens is de gemiddelde lengte 176 cm en de standaardafwijking 12 cm. Bij de meisjes is de gemiddelde lengte 164 cm en de standaardafwijking 10 cm.
Een jongen en een meisje uit deze groepen krijgen verkering. Ze zijn beiden erg lang: de jongen 196 en het meisje 186.
a. Bereken de z-waarde van de lengte van de jongen en van de lengte van het meisje om te bepalen wie van de twee de grootste uitschieter is qua lengte binnen zijn/haar groep.
b. Hoe lang is een meisje dat een z-waarde heeft van 0 ?
c. Hoe lang is een meisje dat een z-waarde heeft van -1,6 ?



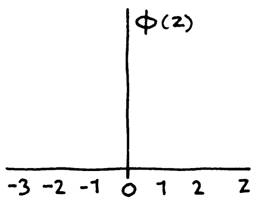
We kijken nu naar de oppervlakte onder de standaardnormale kromme die links van een aangegeven punt z ligt. De grijze oppervlakte noemen we $\Phi(z)$, spreek uit: *fie-zet.*

4 **De standaard normale tabel**
In het volgende plaatje zie je nog eens de vuistregels:



a. Maak hiermee een tabel voor $\Phi(z)$:

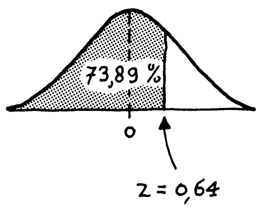
z-waarde	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\Phi(z)$	0						



b. Maak een grafiek van Φ op grond van de tabel.

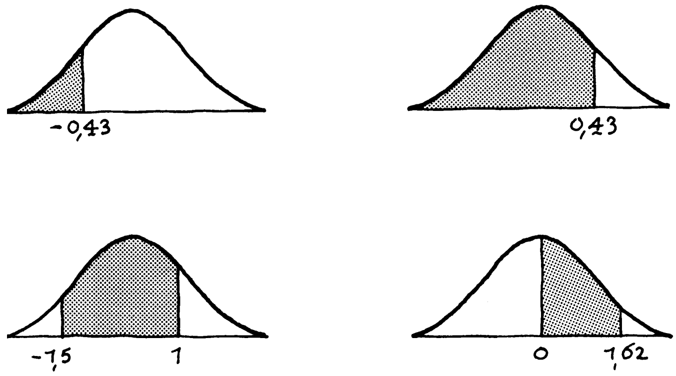
Een fijnere tabel staat op bladzijde 153 en 154. Een stukje daarvan is hieronder afgebeeld:

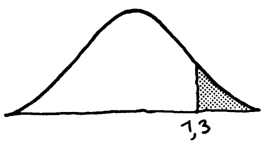
z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0,0..	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1..	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2..	0,5793	0,5382	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3..	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4..	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5..	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6..	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	**0,7389**	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7..	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8..	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9..	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389



In de eerste kolom staan de z-waarden tot in één decimaal nauwkeurig. Achter $z = 0{,}6$ staan 10 getallen. Dat zijn de oppervlaktegetallen $\Phi(z)$ die horen bij achtereenvolgens $z = 0{,}60$, $z = 0{,}61$, $z = 0{,}62$, ... , $z = 0{,}69$.
Voorbeeld: $\Phi(0{,}64) = 0{,}7389$, zie het kader in de tabel.
De oppervlaktegetallen zijn niet in procenten, maar als getallen van 0,0000 tot 1,0000. Het getal 0,7389 kan dus ook gelezen worden als 73,89%.
De betekenis van $\Phi(0{,}64) = 0{,}7389$ wordt in het plaatje hiernaast nog eens gegeven .

5 Bepaal met de tabel op bladzijde 153 en 154 de oppervlakte van de grijze stukken.



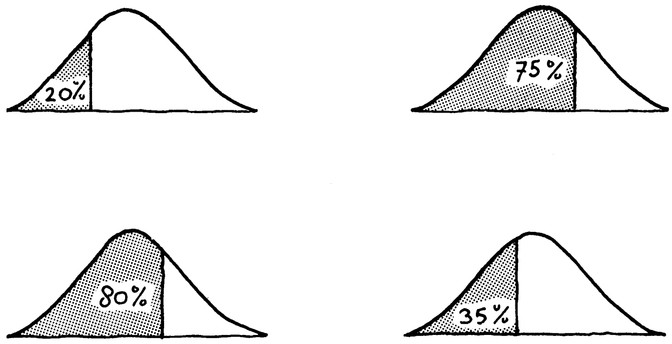


6 Onder de standaardnormale kromme is hiernaast een oppervlakte aangegeven. Deze oppervlakte kan op twee manieren bepaald worden .
Op welke manieren ?

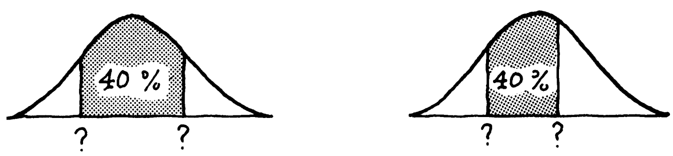
De tabel kan dus gebruikt worden om bij gegeven z-waarde de oppervlakte $\Phi(z)$ op te zoeken. Omgekeerd kan bij een gegeven oppervlakte de bijbehorende z-waarde gevonden worden.
Voorbeeld: voor de gevraagde z hiernaast moet gelden : $\Phi(z) = 0{,}60$. De z-waarde die daar het dichtst in de buurt komt, is $z = 0{,}25$.

7 Controleer dit in de tabel.

8 Welke z-waarden passen het best bij de volgende oppervlakten ?

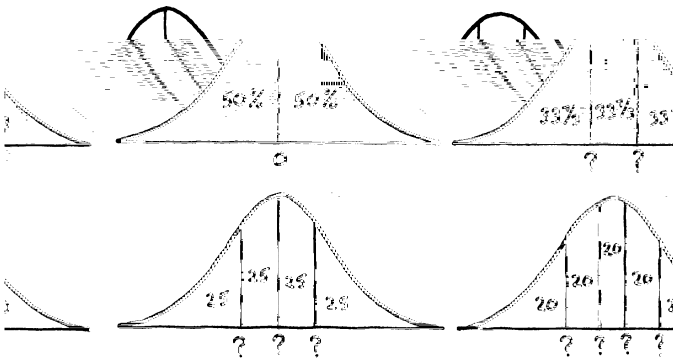


9 Bij oppervlakten tussen twee z-waarden lukt het terugzoeken meestal niet.
Twee situaties:



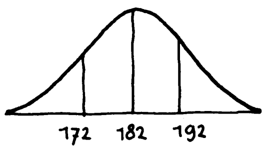
In het linkerplaatje liggen de linker- en rechtergrens even ver van het midden. Bij het rechter plaatje is dat niet zo.
a. Bepaal de z-waarden in het linker plaatje.
b. Kun je de z-waarden ook in het rechter plaatje bepalen ?

10 De lijn bij $z = 0$ deelt het gebied onder de normale kromme in twee symmetrische helften, elk met oppervlakte 50%.



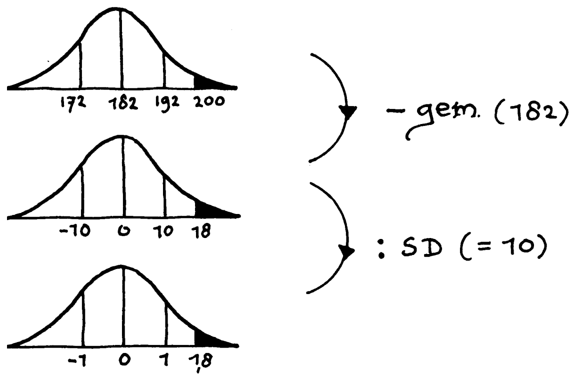
Bepaal de z-waarden die de oppervlakte verdelen in drie gelijke stukken.
Ook de z-waarden die de oppervlakte verdelen in vier gelijke stukken en in vijf gelijke stukken.

We hebben een tabel voor de normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1. Als de verdeling niet standaardnormaal is, kunnen we deze herleiden tot de standaardnormale verdeling. Dit noemen we ***standaardiseren****. Dat doen we door de z-waarden te berekenen en daarna de tabel te gebruiken.*



11 De lengte van 18-jarige jongens is normaal verdeeld met gemiddelde 182 cm en standaardafwijking 10 cm. We willen weten hoeveel procent langer is dan 192 cm.
a. Wat is de z-waarde van een lengte van 192 cm ?
b. Leg uit dat het deel dat langer is dan 192 cm gelijk is aan $1 - \Phi(1)$.
Hoe groot is dat percentage dat langer is dan 192 cm ?

Je hebt een vraag over de normale verdeling met gemiddelde 182 en standaardafwijking 10 teruggebracht naar een vraag over de standaard normale verdeling. Dat standaardiseren brengen we in beeld:



Je ziet drie keer hetzelfde plaatje, alleen met verschillende schaalverdeling op de horizontale as.

- Het eerste plaatje betreft de echte lengtes (in cm).
- Het tweede plaatje geeft de afwijkingen van het gemiddelde.
- Het derde plaatje geeft de z-waarden.

De bijbehorende twee rekenstappen zijn naast de plaatjes geschreven. Wat verandert er bij die rekenstappen aan het gemiddelde en de standaardafwijking ?

	gemiddelde	SD	
lengte (cm)	182	10	
			← *min 182*
afwijkingen van gem.	0	10	
			← *deel door 10*
z-waarde	0	1	

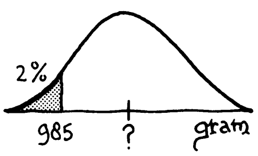
Als je 182 van de lengtes aftrekt, wordt het nieuwe gemiddelde 0; de standaardafwijking blijft onveranderd 10. Als je dan door 10 deelt, blijft het gemiddelde 0, maar wordt de standaardafwijking 10 keer zo klein, dus 1.

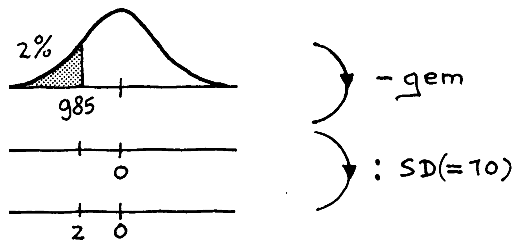
Bij andere voorbeelden gaat dat natuurlijk precies hetzelfde.

> De z-waarden van een normaal verdeelde stochast zijn standaard normaal verdeeld.

12 De lengte van de meisjes in een zekere groep is normaal verdeeld met $\mu = 170$ cm en $\sigma = 8$ cm.
Hoeveel procent van de groep heeft een lengte tussen 160 en 180 cm ? Gebruik eerst alleen maar de tabel en controleer je antwoord daarna met de GR.

13 De vulmachine
Aan het einde van paragraaf 2 hebben we een probleem laten liggen:
Op welk gemiddelde gewicht moet de machine worden afgesteld opdat aan de EU-richtlijn wordt voldaan dat slechts 2% van de pakken een gewicht heeft onder de 985 gram ($\sigma = 10$ gram) ?
Zie plaatje.
Los dit probleem op door te standaardiseren.





14 Uit een onderzoek bleek dat de scores van leerlingen bij het CSE wiskunde A havo bij benadering normaal verdeeld zijn. In 1991 was het gemiddelde 62 punten en 28% van de leerlingen hadden een onvoldoende (54 punten of minder).
a. Bereken de standaardafwijking.
b. Bereken hoeveel punten je moet hebben om bij de 20% besten te horen.

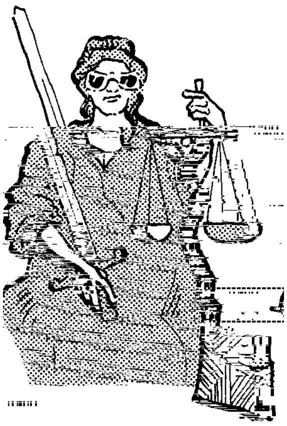
15 Veronderstel dat de puntenaantallen bij het CSE van een bepaald vak bij benadering normaal verdeeld zijn en dat we weten dat de standaardafwijking 12 is. Het percentage onvoldoende (54 punten of minder) is 10%.
Bereken het gemiddelde puntenaantal.

16 Bij vraagstukken rond de normale verdeling draait alles om drie grootheden: het gemiddelde μ, de standaardafwijking σ en een percentage (oppervlakte onder de normale kromme). De drie grootheden zijn gekoppeld: als er twee bekend zijn, kun je de derde uitrekenen. In principe zijn er dus drie verschillende soorten vragen mogelijk. Van elk soort volgt nu een voorbeeld.

a. μ en σ zijn bekend
Auto's worden op de lopende band in elkaar gezet. Een robot heeft voor het monteren van een wiel gemiddeld 96 seconden nodig met een standaardafwijking van 5 seconden.
Er treedt vertraging op in de totale montagelijn als de robot meer dan 110 seconden nodig heeft.
Bereken in hoeveel procent van de gevallen er vertraging zal optreden.

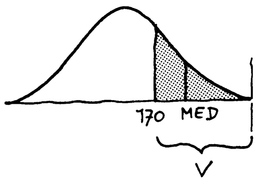
b. μ en percentage zijn bekend
Een robot heeft gemiddeld 80 seconden nodig voor het bevestigen van een bumper. In zo'n 20% van de gevallen is hij al na 77 seconden klaar.
Bereken hoe groot de standaardafwijking is.

c. σ en percentage zijn bekend
De robot die de deuren inzet, heeft daarvoor in 8 op de 1000 gevallen meer dan 105 seconden nodig. De standaardafwijking voor de bewerking bedraagt 4 seconden.
Bereken hoeveel seconden de robot gemiddeld doet over zijn karwei.



17 In de rechtzaal
In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen nieuwe personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm, De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen, omdat ze niet aan deze eis voldeden.
De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van de aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van Volksgezondheid.
Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = 160{,}4$ cm en standaardafwijking σ.
a. Toon aan dat $\sigma = 7{,}2$ cm.

De groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 noemen we V. De mediaan van de lengte van de vrouwen in V noemen we even MED.
b. Hoeveel procent van de vrouwen in V is langer dan MED ?



c. Toon aan dat MED = 172,6 cm (uitgaande van $\sigma = 7{,}2$ cm en $\mu = 160{,}4$ cm).

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91 sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselecte steekproef van 1000 vrouwen tussen 18 en 65 jaar werd bij 117 vrouwen een lengte gemeten van meer dan 172,6 cm.
Neem aan dat de standaardafwijking ongewijzigd is, dus $\sigma = 7{,}2$ cm.
d. Wat is de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek ?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen.

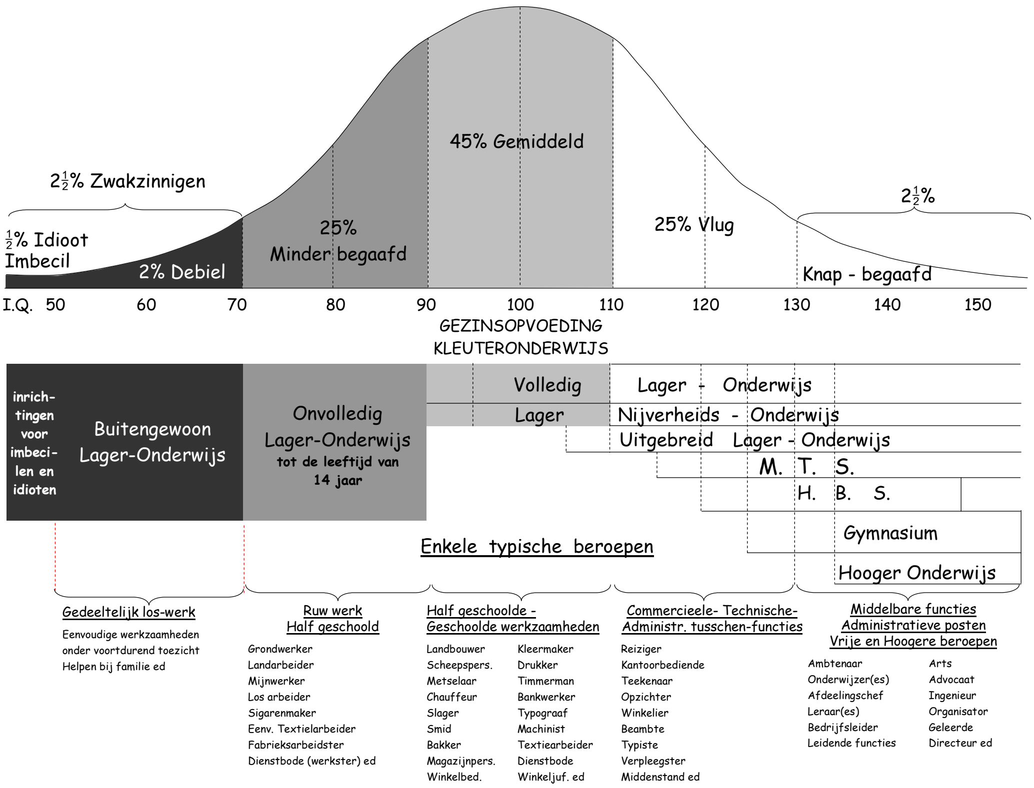
Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164{,}0$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

e. Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

Naar: Examen vwo wiskunde A 1990

18 Nogmaals IQ

Onderstaande gegevens hebben we al eerder ontmoet. Toen heb je de SD van de normale verdeling uit de grafiek afgelezen. Nu zijn we ook in staat deze te berekenen.



Het gemiddelde IQ is 100.

a. $27\frac{1}{2}$ % heeft een IQ kleiner dan 90.
Bereken uit dit gegeven de standaardafwijking.

b. $97\frac{1}{2}$ % heeft een IQ kleiner dan 130.
Bereken de standaardafwijking ook uit dit gegeven.

c. De antwoorden in **a** en **b** zijn niet hetzelfde.
Hoe kan dat nou ?

19 De EU-voorschriften betreffende vulgewichten zijn in Nederland vastgelegd in het zogenaamde Hoeveelheidsaanduidingenbesluit (de Warenwet). De bedoeling van deze normen is dat de consument niet onaangenaam verrast wordt door een artikel waar veel minder in zit dan er op de verpakking staat. De fabrikanten die zich aan deze normen houden, tonen dat door op de verpakking aan de inhoudsopgave de letter “e” toe te voegen.

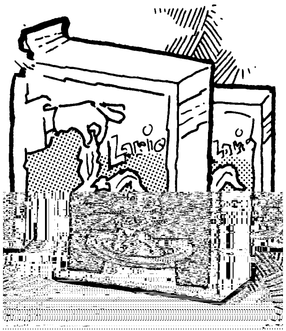
In deze voorschriften worden de volgende begrippen gebruikt:

- nominale hoeveelheid: de hoeveelheid die op het pak vermeld staat (dus bijvoorbeeld 1 kg suiker),
- fout in minus: de hoeveelheid die de werkelijke inhoud kleiner is dan de nominale hoeveelheid.

Artikel 3 van de voorschriften zegt nu ongeveer het volgende:

- de werkelijke hoeveelheid mag gemiddeld niet kleiner zijn dan de nominale hoeveelheid,
- bij een statistische controle (steekproef) mag hoogstens 2% van de pakken een hoeveelheid bevatten die een grotere fout heeft dan de toegelaten fout in minus (zie tabel).

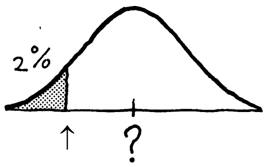
Nominale hoeveelheid Q_n van een e-verpakking in gram of in milliliter	toegelaten fout in minus in % van Q_n	in gr. of ml.
van 5 tot 50	9	--
van 50 tot 100	--	4.5
van 100 tot 200	4.5	--
van 200 tot 300	--	9
van 300 tot 500	3	-
van 500 tot 1000	--	15
van 1000 tot 10000	1.5	--



a. Lees af hoe groot de toegelaten fout in minus is van een $1\frac{1}{2}$-literfles cola.
En van een blikje cola van 33 cl.

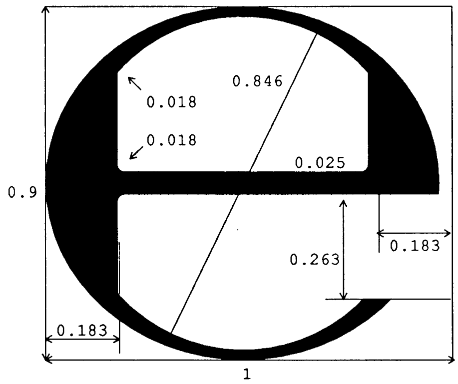
Pakken koffie worden machinaal gevuld door een machine die bij iedere ingestelde hoeveelheid een standaardafwijking heeft van 5 gram. We nemen aan dat de gemiddelde hoeveelheid koffie in de pakken gelijk is aan de ingestelde hoeveelheid. We bekijken de pondspakken (500 gram).

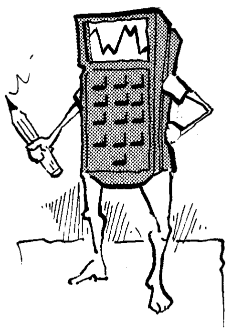
b. Bereken op welke hoeveelheid de machine moet worden ingesteld als aan beide eisen van artikel 3 voldaan moet worden.



Naast pondspakken zijn er ook nog halfpondspakken in de handel. Ook deze pakken moeten aan de EU-normen voldoen.

c. Onderzoek of de fabrikant bij halfpondspakken meer, minder of evenveel koffie verbruikt per nominaal gewicht van 1 kg vergeleken met pondspakken.





Op de GR

Het terugzoeken van de z-waarde bij een normale verdeling als het percentage gegeven is, kan ook zonder tabel: DISTR , 3:invNorm(.
Als bij een normale verdeling μ of σ gevraagd wordt, kan dat met behulp van MATH , 0:Solver.

Voorbeeld

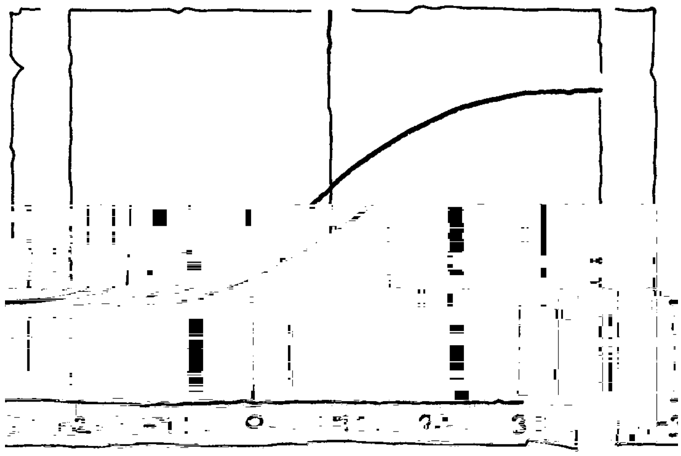
Opgave **14b**: $\mu = 62$, $\sigma = 13.79$, gevraagd de grens waarboven de beste 20% zit.
invNorm(0.8,62,13.79) geeft 73.6059... punten.

Voorbeeld

Opgave **16b**: $\mu = 89$, 20% is kleiner dan 77 , gevraagd σ.
MATH , 0:Solver , eqn: 0 = normalcdf(0,77,89,X) – 0.2 geeft X = 14,258... (dat is σ).

11 Wel of niet normaal ?

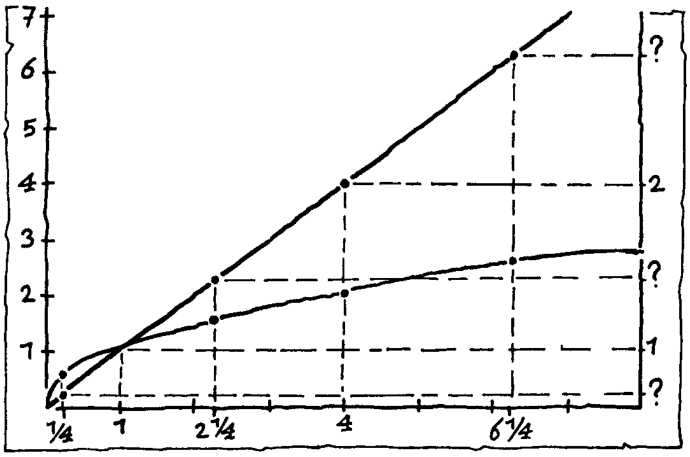
1 Zoals gezegd is Φ(z) de oppervlakte onder de standaard-normale kromme, links van z. Hieronder staat de grafiek van Φ.



a. De grafiek heeft twee horizontale asymptoten. Welke lijnen zijn dat ?
b. Het punt waarin de grafiek de y-as snijdt, kun je exact geven. Welk punt is dat ? Waarom ?

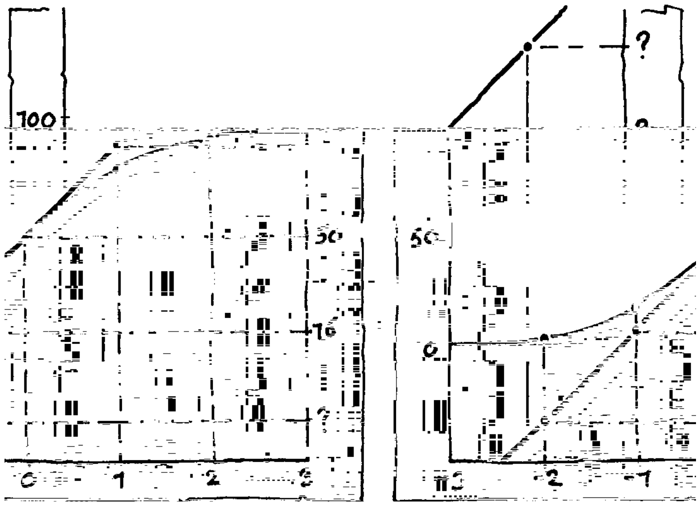
We gaan de schaal op de y-as zo aanpassen, dat de grafiek van Φ een rechte lijn wordt. Om goed te begrijpen hoe dat in zijn werk gaat, doen we iets dergelijks eerst bij een bekendere functie: $y = \sqrt{x}$.

2 We gaan de grafiek van de functie $y = \sqrt{x}$ "recht maken".

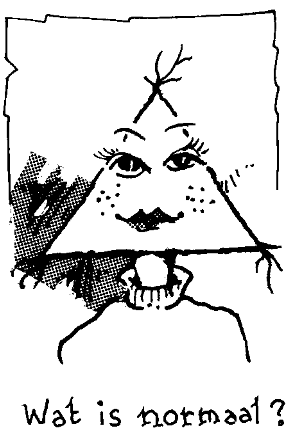


Hoe verder je naar rechts gaat, des te sterker moet de grafiek worden opgerekt. Daartoe passen we de schaal op de verticale as aan. Op de linker verticale as staat de gewone schaal, op de rechter verticale as staat de aangepaste schaal.
Wat zijn de drie getallen op de verticale as met het vraagteken ?

3 Na gaan we de grafiek **v**an opgave **1** recht maken.
a. Welke stukken van de grafiek moeten het sterkst worden opgerekt ?

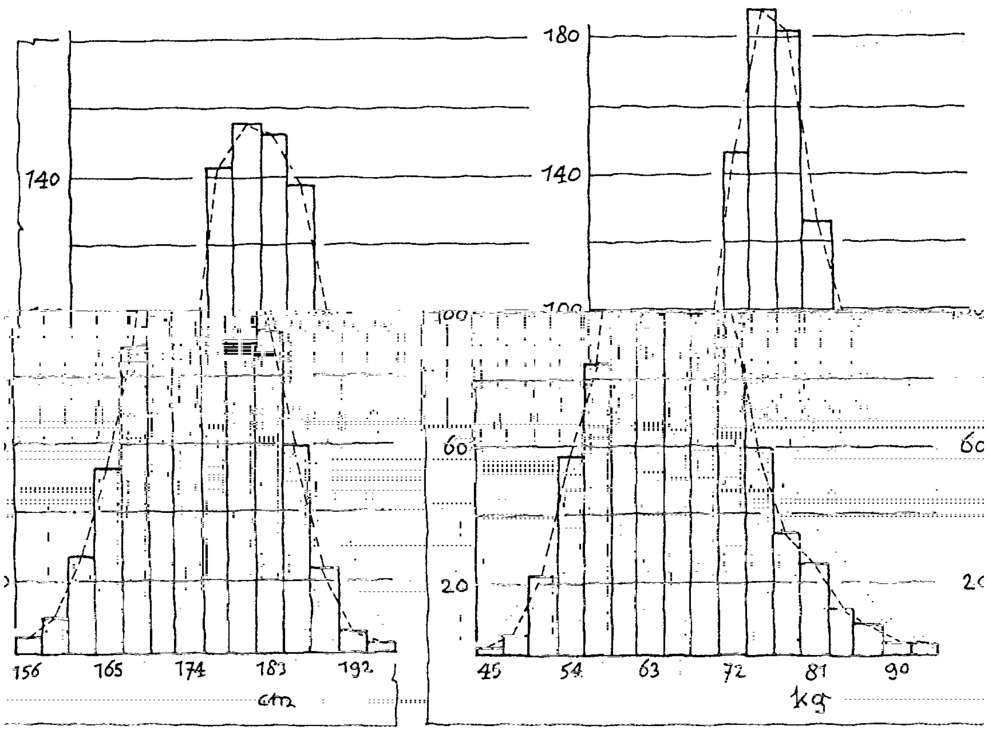


Op de linker verticale as staat de gewone schaal (procenten), rechts de aangepaste schaal.
b. Wat zijn de getallen bij de vraagtekens ? Denk aan de vuistregels.

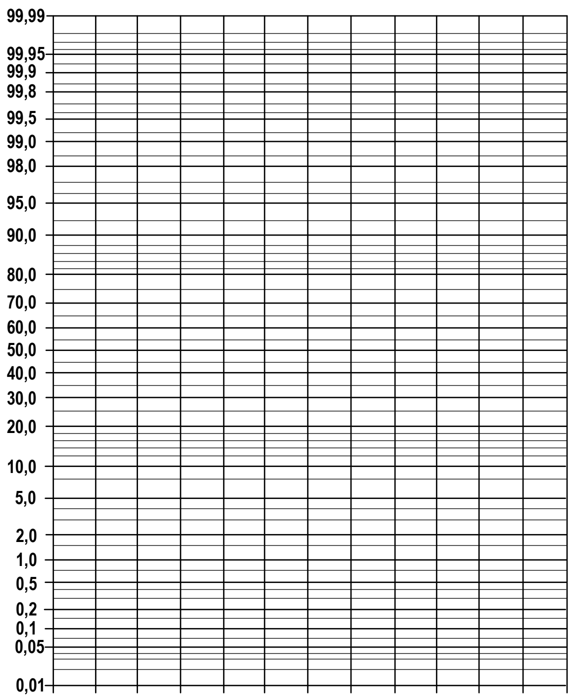


Op de volgende bladzijde staan de histogrammen van de lengte en het gewicht van duizend mannelijke studenten van de Harvard Universiteit. De verdelingen lijken in eerste instantie beide wel normaal. Maar de verdeling van het gewicht is wat minder symmetrisch. Dus is er (zeker bij het gewicht, maar misschien ook wel bij de lengte) reden om te twijfelen of de verdeling wel normaal is.

Op bladzijde 58 hebben we al gezien dat het moeilijk kan zijn om te beslissen of een verdeling normaal is. Er bestaat een hulpmiddel waarmee eenvoudig kan worden nagegaan of dat het geval is: **normaal waarschijnlijkheidspapier**. In opgave **3** heb je dat (in principe) zelf gemaakt.



Hieronder staat een vel normaal waarschijnlijkheidspapier. De getallen bij de verticale as zijn procenten.



Je werkt er als volgt mee:

- kies een geschikte schaal op de horizontale as (de z-as),
- als p% van de waarnemingen kleiner dan of gelijk aan z zijn, geef je dat aan met de stip (z,p); dus boven plaats z op de horizontale as zet je een stip op hoogte p%.

De schaalverdeling op de verticale as is zodanig dat bij een normale verdeling de stippen precies op een rechte lijn komen te liggen. Liggen de stippen (ongeveer) op een rechte lijn, dan is de verdeling (bij benadering) normaal; anders niet.

lengte ≤	cum. freq	
157,5	4	plus 10
160,5	14	plus 26
163,5	40	
166,5	91	
169,5	180	
172,5	326	
175,5	514	
178,5	695	
181,5	820	
184,5	912	
187,5	972	
190,5	994	
193,5	998	
196,5	999	
199,5	1000	

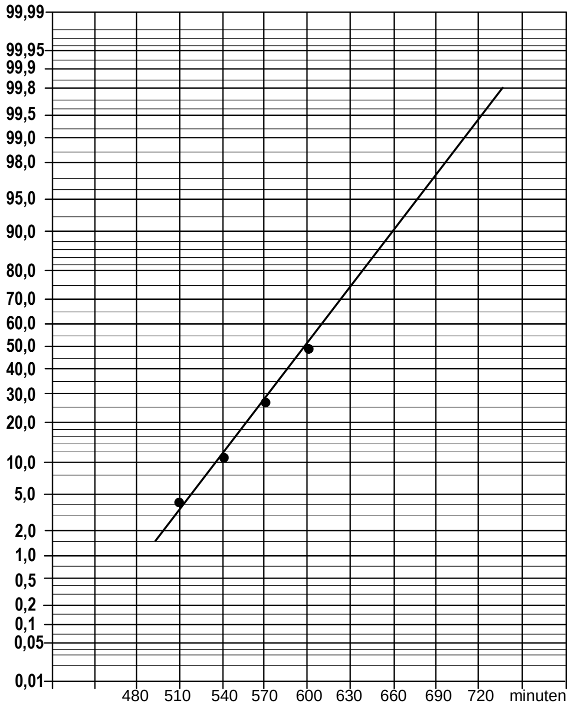
*** 4** Bekijk het histogram van de lengte van de duizend Harvard studenten. De getallen onder de staven geven de klassemiddens aan. De klassegrenzen zijn dus: 154,5 , 157,5 , 160,5 , ...
Hiernaast staat een tabel van de cumulatieve frequenties.
a. Controleer de eerste drie cumulatieve frequenties met het histogram.
b. Teken op het werkblad de bijbehorende stippen op normaal waarschijnlijkheidspapier; kies eerst een geschikte schaal op de horizontale as.
c. Liggen de stippen ongeveer op een rechte lijn ? Trek die rechte lijn zo goed mogelijk.
Is de verdeling dus (bij benadering) normaal ?
d. Geef aan hoe je de gemiddelde lengte (= mediaan) met behulp van de grafiek kunt vinden. Zet μ bij deze gemiddelde lengte op de horizontale as.
e. Geef op de horizontale as ook de lengtes $\mu+2\sigma$ en $\mu-2\sigma$ aan. Gebruik de vuistregels.
f. Welke waarde voor σ vind je met behulp van **e** ?

gewicht ≤	cum. freq
46,5	1
49,5	6
52,5	28
55,5	86
58,5	170
61,5	312
64,5	466
67,5	618
70,5	756
73,5	856
76,5	916
79,5	950
82,5	975
85,5	987
88,5	994
91,5	996
97,5	998
100,5	998
103,5	998
106,5	1000

*** 5** Bekijk het histogram van het gewicht van de duizend Harvard studenten. De getallen onder de staven geven de klassemiddens aan. De klassegrenzen zijn dus: 46,5 , 49,5 , ...
Hiernaast staat een tabel van de cumulatieve frequenties.
a. Teken op het werkblad de bijbehorende stippen op normaal waarschijnlijkheidspapier.
b. Liggen de stippen ongeveer op een rechte lijn ?
Is de verdeling dus (bij benadering) normaal ?

6 Batterijen

De research afdeling van een fabriek heeft een nieuw type batterij ontwikkeld, dat bijzonder geschikt is voor het aandrijven van speelgoedmotortjes. In de fabriek wordt de eerste dagen de productie nauwgezet gecontroleerd. Daarbij let men vooral op de levensduur van de batterijen bij aanhoudende belasting. Uit de totale productie van de eerste dag heeft men aselect 250 batterijen genomen en aan een duurproef onderworpen. Het aantal lege batterijen is geregistreerd na perioden van steeds 30 minuten. De ervaring leert dat de levensduur van de batterijen uit een dagproductie vrijwel normaal verdeeld is. Daarom zijn de resultaten van de duurproef op normaal waarschijnlijkheidspapier weergegeven.



a. Geef met behulp hiervan een schatting van het percentage batterijen van de gehele dagproductie waarvoor de levensduur tussen $8\frac{3}{4}$ uur en 11 uur lag. Licht je antwoord toe.

b. Geef met behulp van de grafiek een schatting van μ en van σ.

Neem aan dat op elke productiedag de levensduur van de die dag geproduceerde batterijen normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 50 minuten. Het gemiddelde μ in minuten is afhankelijk van een aantal factoren in het fabricageproces.

Omdat de fabrikant in reclameboodschappen beweert dat zijn batterijen erg lang meegaan, wil hij er voor zorgen dat hoogstens 7% van de batterijen uit een dagproductie een levensduur heeft van minder dan $8\frac{1}{2}$ uur.
c. Bereken in minuten nauwkeurig de kleinste waarde van μ waarvoor dit nog het geval is.

De controleur merkt dat bij het wisselen van een serie batterijen per ongeluk twee nieuwe batterijen bij een groepje van tien lege terecht zijn gekomen. Omdat aan de buitenkant niet zichtbaar is welke de nieuwe zijn, zit er niets anders op dan de batterijen een voor een door te meten totdat de twee nieuwe zijn teruggevonden.
d. Bereken de kans dat hij in totaal vier van de twaalf batterijen moet doormeten.

Examen wiskunde A, 1994 eerste tijdvak gedeeltelijk

*** 7 Zwangerschap**
Medische gegevens wijzen uit dat de duur van een zwangerschap bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 266 dagen en een standaardafwijking van 16 dagen.
a. Onderzoek of meer dan 1% van de zwangerschappen een duur heeft van 310 of meer dagen.

Aan de hand van de aantekeningen van een Amerikaanse verloskundige is het volgende overzicht opgesteld voor de duur van de zwangerschap in weken van 1415 pasgeborenen.

duur	≤30	31/32	33/34	35/36	37/38	39/40	≥41
aantal	13	18	54	245	668	362	55

b. Onderzoek met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier of de duur van de zwangerschappen van de 1415 pasgeborenen bij benadering normaal verdeeld genoemd mag worden. Licht je antwoord toe.
c. Wat is de mediaan van de duur van de zwangerschappen, in tienden van weken nauwkeurig ?

Naar het examen vwo wiskunde A 1993 eerste tijdvak

Opmerking
Tot de klasse "≤30" behoren alle zwangerschappen die hoogstens 30,5 weken duurden. Tot de klasse "31/32" behoren alle zwangerschappen die tussen 30,5 en 32,5 weken duurden. Er zijn dus 13 zwangerschappen die 30,5 weken of minder duurden; dat is 0,91%. Dat geeft een stip op hoogte 0,91 bij 30,5. Evenzo komen de volgende stippen bij 32,5 , 34,5 , 36,5 , 38,5 en 40,5.

12 De centrale limietstelling

In de paragrafen 4 en 7 heb je gezien:

Als de stochast X de waarden $x_1, x_2, ..., x_n$ kan aannemen met de kansen $p_1, p_2, ..., p_n$, dan is:

- de verwachtingswaarde van X = E(X) = $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k$,
- de variantie van X = Var(X) = $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - EX)^2$,
- de standaardafwijking van X = Sd(X) = $\sqrt{Var(X)}$.

Voor verwachtingswaarde en variantie gelden de volgende rekenregels (zonder bewijs):

Somregel voor de verwachtingswaarde
Voor elk tweetal stochasten X en Y geldt:
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

In woorden: de verwachtingswaarde van de som is de som van de verwachtingswaarden.

Somregel voor de variantie
Voor elk tweetal *onafhankelijke* stochasten X en Y geldt: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

In woorden: de variantie van de som is de som van de varianties, mits de stochasten onafhankelijk zijn.

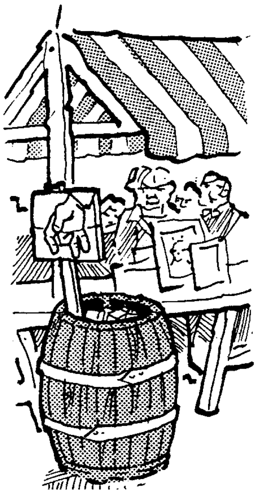
De somregels gelden ook voor drie of meer stochas-

*** 1** X is het aantal keren kop bij negen worpen met een munt.
$X_i = 1$ als de i^e worp kop is,
$X_i = 0$ als de i^e worp munt is.
Merk op: $X = X_1 + X_2 + ... + X_9$.
a. Bereken $E(X_i)$, $Var(X_i)$ en $Sd(X_i)$.
b. Bereken ook E(X), Var(X) en Sd(X).
c. Bereken de cumulatieve kansen $P(X \leq i)$, dus $P(X \leq 0)$, $P(X \leq 1)$, $P(X \leq 2)$, ... en zet deze uit op normaal waarschijnlijkheidspapier.
Is X bij benadering normaal verdeeld ?

*** 2** Y is het aantal keren zes bij negen worpen met een dobbelsteen.
$Y_i = 1$ als de i^e worp zes is,
$Y_i = 0$ als de i^e worp geen zes is.

Merk op: $Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_9$.
a. Bereken $E(Y_i)$, $Var(Y_i)$ en $Sd(Y_i)$.
b.

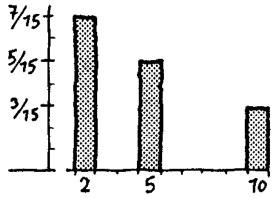
Dit resultaat staat bekend als **de centrale limietstelling**. Het bewijs ervan is moeilijk; wij zullen deze stelling dan ook alleen maar met een voorbeeld toelichten. Gelukkig is de toepassing van deze stelling eenvoudig.



5 Grabbelton

"Altijd prijs in de supergrabbelton" staat er bij een kraampje op de braderie. Tussen het zaagsel in de ton zijn tien plankjes verborgen: op zeven plankjes staat "2", op twee plankjes staat "5" en op één plankje staat "10". Na een inzet mag je twee plankjes grabbelen. Het hoogste getal dat op deze plankjes staat, is de uitbetaling X in euro's.

a. Ga na: $P(X=5)=\frac{1}{3}$.
b. Geef in een tabel de kansverdeling van X.
c. Bereken E(X) en Var(X).



Hiernaast is het histogram getekend van de uitbetaling bij één keer spelen in de grabbelton met de tien plankjes. Je ziet dat het histogram er niet normaal verdeeld uitziet, integendeel! Maar volgens de centrale limietstelling moet het histogram dat hoort bij vijftig keer spelen goed benaderd kunnen worden met een normale kromme.

d. Tussen welke twee bedragen ligt de totale uitbetaling bij vijftig keer spelen ?
e. Hoe groot is de kans op de laagst mogelijke en hoe groot is de kans op de hoogst mogelijke uitbetaling ?

* **6** In de tabel hieronder zie je het resultaat van 400 computersimulaties van vijftig keer spelen in de grabbelton. De uitbetalingen bij deze 400 simulaties zijn verdeeld in klassen met klassebreedte 10.
Achter elke klasse staat de daarbij behorende frequentie. In de tabel zijn de klassen met frequentie 0 niet opgenomen.

klasse	aantal	cumulatief	klasse	aantal	cumulatief
171 -180	2	2	231 -240	72	277
181 -190	7	9	241 -250	58	335
191 -200	25	34	251 -260	33	368
201 -210	43	77	261 -270	20	388
211 -220	63	134	271 -280	10	398
221 -230	71	205	281 -290	1	400

a. Wat zijn de klassengrenzen ?
b. Geef deze cumulatieve verdeling weer op normaal waarschijnlijkheidspapier en ga na dat de punten ongeveer op een rechte lijn liggen.
c. Geef in de grafiek aan hoe groot de mediaan en hoe groot de standaardafwijking is.

d. Geef in de grafiek ook aan hoe je de kans kunt aflezen op een uitbetaling tussen 224 en 255 (grenzen inbegrepen) en benader die kans met behulp van de grafiek.

7 T is de totale uitbetaling bij vijftig keer spelen in de grabbelton: $T = T_1 + T_2 + ... + T_{50}$, waarbij T_i de uitbetaling is bij de i^e keer spelen.
a. Bereken E(T) en Var(T) (gebruik opgave **5c**).
Ga na of de waarden die je met behulp van de grafiek vond in opgave **6** hiermee in overeenstemming zijn.
b. Benader met de GR: $P(224 \le T \le 255)$.
Klopt het antwoord ongeveer met het antwoord op **6d** ?

8 Drie echtparen Arno en Anneke, Bob en Bea en Cor en Crissy hebben een dansclubje. Elke dinsdagavond gaan ze dansen. Wie met wie danst, wordt elke dinsdag opnieuw door het lot bepaald.
X is het aantal mannen dat zijn eigen vrouw treft.
a. Ga na dat per dinsdag de volgende kansen gelden: $P(X=0) = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$ en $P(X=3) = \frac{1}{6}$.
b. Bereken E(X) en Sd(X).

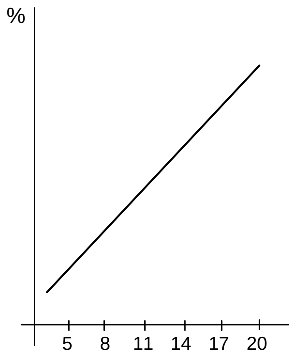
Vandaag viert het dansclubje haar eerste lustrum: de afgelopen vijf jaar hebben ze geen dinsdagavond overgeslagen. S is het aantal keer dat in de vijf jaar een man zijn eigen vrouw trof. S is bij benadering normaal verdeeld.
c. Bereken E(S) en Sd(S).
d. Bereken met deze normale benadering de kans dat niet meer dan 250 keer een man zijn eigen vrouw trof.

De $\sqrt{n}$ **-wet**

Laat X_1, ..., X_n n onafhankelijke stochasten zijn, alle met dezelfde standaardafwijking σ.
Dan is de standaardafwijking van de som $X_1 + ... + X_n$ gelijk aan $\sqrt{n} \cdot \sigma$.

De standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast is hier een bijzonder geval van.

Deze wet berust op de somregel voor de variantie; zie bladzijde 82.



Overzichtsvragen

1 X is normaal verdeeld met gemiddelde 11 en standaardafwijking 3. Hiernaast staat de grafiek van de cumulatieve verdeling van X op normaal waarschijnlijkheidspapier.
Geef op de verticale as de volgende percentages aan: 50% , 16% , 84% , 2,3% en 97,7%.

2 44% van de volwassen mannen heeft schoenmaat van 42 of kleiner, 23% heeft schoenmaat 43 en 15% heeft schoenmaat 44. Deze gegevens geven bepalen drie stippen op normaal waarschijnlijkheidspapier.
Zeg waar die stippen precies komen te staan.

3 X en Y zijn twee onafhankelijke stochasten, met standaardafwijking 3, respectievelijk 4.
a. Wat is de standaardafwijking van $X+Y$?

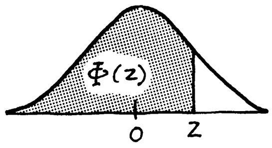
X_1 , ... , X_{64} zijn vierenzestig onafhankelijke stochasten, elk met standaardafwijking 3.
b. Wat is de standaardafwijking van de som $X_1 + ... + X_{64}$?

4 De uitkomst X van een experiment kan twee waarden aannemen: waarde 5 met kans $\frac{1}{3}$ en waarde 8 met kans $\frac{2}{3}$. Het experiment wordt 100 keer herhaald; de herhalingen zijn onafhankelijk van elkaar. S is de som van de honderd uitkomsten.
Omdat het aantal herhalingen groot is, is S bij benadering normaal verdeeld.
a. Met welk gemiddelde en welke standaardafwijking ?
b. Bereken de kans dat $S > 697$.

De standaardnormale tabel

$\Phi(z)$ voor negatieve waarden van z

z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
-0,0..	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1..	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2..	0,4207	0,4618	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3..	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4..	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5..	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6.-	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7..	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8..	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9..	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0..	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1432	0,1401	0,1379
-1,1..	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2..	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3..	0,0968	0,9951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4..	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5..	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6..	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7..	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8..	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0303	0,0301	0,0294
-1,9..	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0..	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1..	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2..	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3..	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4..	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5..	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6..	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7..	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8..	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9..	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0..	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-3,1..	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,2..	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3..	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4..	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5..	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6..	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7..	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8..	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9..	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000



Φ(z) voor positieve waarden van z

z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0,0..	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1..	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2..	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3..	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4..	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5..	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6..	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7..	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8..	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9..	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0..	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8568	0,8599	0,8621
1,1..	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2..	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3..	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4..	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5..	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6..	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7..	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8..	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9697	0,9699	0,9706
1,9..	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0..	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1..	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2..	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3..	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4..	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5..	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6..	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7..	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8..	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9..	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0..	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1..	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2..	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,3..	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4..	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5..	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6..	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7..	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8..	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9..	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Antwoorden

Paragraaf 1 De kansdefinitie

1 **a.** Die kans is $\frac{1}{2}$. De kikker zit namelijk om en om op een witte en een donkere tegel.
b. De middelste tegel heeft de meeste kans, de hoektegels de minste.

2 **a.** De drie uitkomstens "2 kop", "2 munt" en "een dubbele" zijn niet even waarschijnlijk.
b. $\frac{1}{2}$

3 $\frac{1}{2}$ (Er zijn twee even waarschijnlijke mogelijkheden.)

4 **a.** $\frac{1}{4}$
b. 0,19

5
- werpen met een dobbelsteen
- het eerste nummer bij de lotto

6 **a.** 6
b. 0, 1 en 3
c. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$

7 **a.** $\frac{5}{84}$
b. $\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

8 **a.** 720
b. $\frac{1}{720}$
c. $\frac{1}{120}$

9 **a.** 20132.37 324.05 Tm[ )]TJC /GS7 gsq0.25 0 0 0.25 255.16 362.68 8 EMC /P

13 a.

k	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b.

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c.

k	0	1
P(X = k)	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Paragraaf 2 Combinatoriek en kans

1 $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

2 $210 : 6 = 35$

3 **a.** 7C3 = 7P3 : 6
b. nCr = nPr : r!
c. nCr = $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

4 **a.** 35
c. 15 , 1 , 8

5 **b.** Ja, dat is $21 + 35 = 56$

6 **a.** $\binom{6}{4} \cdot \binom{6}{4} = 225$
b. $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36$
c. $225 \cdot 36 = 8100$

7 **a.** $\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{1}{2}n(n-1)$
b. n
c. 1

8 **a.** 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
b. Die zijn beide 84.
c. Er zijn evenveel routes van (0,0) naar (6,3) als naar (3,6).
d. Er zijn evenveel rijtjes met 3 nullen en 6 enen als rijtjes met 3 enen en 6 nullen.
e. Er zijn evenveel grepen met 3 uit 9 als van 6 uit 9 (want in beide gevallen scheid je de 9 in een deel van 3 en een deel van 6).

9 a. $\binom{45}{6}/10 = 814506$

b. $\frac{1}{814506}$

10 a. $\binom{30}{8}$

b. $\binom{20}{5} \cdot \binom{10}{3}$

c. $\dfrac{\binom{20}{5} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{30}{8}} \approx 0{,}31787...$

11 a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{30}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{6}$

c. De som moet 1 zijn; en dat klopt.

12 a. 22100

b. 286

c. $\frac{286}{22100}$ 0,01294...

d. $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = 0{,}01294...$

e. 0,05176...

13 a. 0, 1, 2, 3

b. 0,436

c.

k	0	1	2	3
P(Y = k)	$\dfrac{\binom{13}{0}\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}$	$\dfrac{\binom{13}{1}\binom{39}{2}}{\binom{52}{3}}$	$\dfrac{\binom{13}{2}\binom{39}{1}}{\binom{52}{3}}$	$\dfrac{\binom{13}{3}\binom{39}{0}}{\binom{52}{3}}$

k	0	1	2	3
P(Y = k)	0,413	0,436	0,138	0,013

14 a. $\dfrac{\binom{10}{3}\binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} \approx 0{,}354$

b. $\dfrac{\binom{10}{3}\binom{15}{5}}{\binom{25}{8}} \approx 0{,}333$

15 a. $P(X = 4) = \dfrac{\binom{5}{4}\binom{20}{0}}{\binom{25}{4}} \approx 0{,}000$, $P(X = 3) = \dfrac{\binom{5}{3}\binom{20}{1}}{\binom{25}{4}} \approx 0{,}016$

b. Waarschijnlijk niet. Als de keuze echt aselect was, gebeurde er iets met een erg kleine kans (1,6%), en dat is wel erg toevallig.

16 a. $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$

b. $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{6}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{90}{220}$

c. $\dfrac{\binom{6}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{6}{55}$, $\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10} = \frac{6}{55}$

d. $\dfrac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{55}$, $3!\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{2}{10} = \frac{12}{55}$

17 a. 3, 4, 5, 6

b. wwzw , wzww , zwww

c. Bij elk rijtje van 4 letters is de laatste letter een w en van de eerste 3 zijn er 2 een w en 1 een z.

d. $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}\cdot\frac{2}{4} = \frac{9}{35}$

e. Bij elk rijtje van 5 letters is de laatste letter een w en van de eerste 4 zijn er 2 een w en dus ook 2 een z.

f. $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{12}{35}$

g.

k	3	4	5	6
P(Y = k)	$\frac{4}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{10}{35}$

18 a. $\frac{1}{8}$

b. $\frac{3}{8}$

c. $\frac{1}{2}$

d. Ja, dat er meer vrouwtjes zijn is even waarschijnlijk als dat er meer mannetjes zijn. Dus beide mogelijkheden hebben kans $\frac{1}{2}$.

Paragraaf 3 Het binomium van Newton

1 **a.** Je moet 3 van de 5 stappen kiezen waarbij je noordelijk gaat; dat kan op $\binom{5}{2}$ = 10 manieren. Bij elk van die manieren moet je nog 3 keer kiezen uit x (noordelijke wegen) en 2 keer uit y (zuidelijke wegen). Dat geeft $10 \cdot x^3 \cdot y^2$ routes.

b. y^5 , $5xy^4$, $10x^2y^3$, $5x^4y$, x^5

c. $(x+y)^5 = y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 5x^4y + x^5$

d. $32 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$

$243 = 32 + 80 + 80 + 40 + 10 + 1$

2 **a.** $(x+y)^6 = y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6$

b. $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^3 + 3x^{2y} + 3xy^2 + y^3$

3 **a.** $(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot x^k \cdot y^{5-k}$

b. $(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot x^k \cdot y^{1-k}$

$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \cdot x^k \cdot y^{2-k}$

$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot x^k \cdot y^{3-k}$

4 **a.** $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$

b. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

c. $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$

5 **a.** $11^4 = 1 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 10^4 = 14641$

b. $101^2 = 1 + 2 \cdot 100 + 100^2 = 10201$

$101^3 = 1 + 3 \cdot 100 + 3 \cdot 100^2 + 100^3 = 1030301$

$101^4 = 1 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100^3 + 100^4 = 104060401$

c. $(10-1)^3 = -1 + 3 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 + 10^3 = 729$

6 **a.** 32

b. 1 , 5 , 10 , 10 , 5 , 1

c. Je krijgt inderdaad:

$(x+y)^5 = 1 \cdot x^0 \cdot y^5 + 5 \cdot x^1 \cdot y^4 + 10 \cdot x^2 \cdot y^3 + 10 \cdot x^3 \cdot y^2 + 5 \cdot x^4 \cdot y^1 + 1 \cdot x^0 \cdot y^5$.

Paragraaf 4 Verwachting

1 **a.** 1250 keer ; 6250 , 12500 , 12500 , 6250 , 1250 keer
b. € 712500
c. Maximaal € 4.000.000 , minimaal € 320.000
d. Ja, want de gemiddelde uitbetaling is € 17,8125.

2 **a.** € 168750
b. € 4,22

3 **a.** $\frac{125}{216}$, $\frac{75}{216}$, $\frac{15}{216}$, $\frac{1}{216}$
b. $ 0,079

4 **a.** Bij elke 100 keer: 30 keer € 0,75 en 70 keer € 2 → totaal € 162,50.
Gemiddeld per keer € 1,625 en dat is meer dan € 1,50.
b. Van elke 100 keer: 30 keer x euro en 70 keer € 2 → totaal $30x+140$. Dit moet minder dan 150 zijn. → $x \le 0{,}33$.

5 **a.** Stel de premie is x euro. $100000 \cdot x = 6000 \cdot 4000$ → $x = 240$.
b. Ook € 240

6 **a.** $\frac{1}{32} \cdot n \cdot 100 + \frac{15}{32} \cdot n \cdot 8 + \frac{10}{32} \cdot n \cdot 25 + \frac{5}{32} \cdot n \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot n \cdot 20 = 17{,}8125 \cdot n$
b. $\frac{1}{32} \cdot 100 + \frac{15}{32} \cdot 8 + \frac{10}{32} \cdot 25 + \frac{5}{32} \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot 20 = 17{,}8125$

7 **a.** $0{,}20 \cdot 0 + 0{,}10 \cdot 0{,}5 + 0{,}20 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 1{,}5 + 0{,}25 \cdot 2 = 1{,}125$ minuut.
$0 \cdot 0 + 0{,}40 \cdot 0{,}5 + 0{,}40 \cdot 1 + 0{,}20 \cdot 1{,}5 + 0 \cdot 2 = 0{,}9$ minuut.
b. $0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}17$
c.

k	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
P(W=k)	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,15	0,05

d. $0{,}08 \cdot 0{,}5 + 0{,}12 \cdot 1 + 0{,}16 \cdot 1{,}5 + 0{,}20 \cdot 2 + 0{,}24 \cdot 2{,}5 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 3{,}5 = 2{,}025$ minuut.
e. De gemiddelde wachttijd bij A *plus* de gemiddelde wachttijd bij B is 2,025 minuut en dat is precies de gemiddelde totale wachttijd.

8 Als ze gokken op een last minute vlucht hebben ze kans 0,6 op een voordeel van € 1000 en kans 0,4 op een verlies van € 400 (ten opzichte van een gewone vlucht van € 800 per persoon). Gemiddeld is dat een voordeel van 600–160 = 440 euro. Dus advies: wachten tot de zomer.

9 $10^{-6} \cdot 100000 + 9{\cdot}10^{-6} \cdot 10000 + 9{\cdot}10^{-5} \cdot 1000 + 9{\cdot}10^{-4} \cdot 100 + 9{\cdot}10^{-3} \cdot 10 \approx 0{,}46$.
Dus verwachte winst is $1{,}50 - 0{,}46 = 1{,}04$.

10 a. 0,32768
b. 3,9
c. 19,5

11 a.

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$E(X) = 1$

b.

k	0	1	2
P(Y = k)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(Y) = 1$

12 a. 5
b. 1,2,3,4,5,6 ; 1,2,3,4,5,6 ; 7
c. $3\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$; 7
d. Ja

13 a. $3\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$
b.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(S = k)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(S) = 7$
c. Ja

14 a. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$

Paragraaf 5 De binomiale verdeling

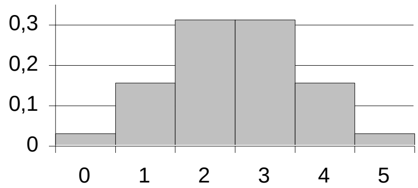
1 **a.** 0,1512
b. 0,00001
c. 0,531441
d. 0,468559
e. 0,006561
f. 0,098415
g. 0,032805

2 **a.** 0,4
b. 0,01024
c. 0,01536
d. 0,0768
e. 0,02304
f. 0,2304

3 **a.**

k	0	1	2	3	4	5
P(Y = k)	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

b.



c. De kans op k keer kop = de kans op k keer munt = de kans op 5 − k keer kop, want de succeskans = $\frac{1}{2}$.

4 **a.**

0 $\binom{10}{0}\cdot(\frac{1}{3})^0\cdot(\frac{2}{3})^{10}\approx 0{,}017$

1 $\binom{10}{1}\cdot(\frac{1}{3})^1\cdot(\frac{2}{3})^{9}\approx 0{,}087$

2 $\binom{10}{2}\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot(\frac{2}{3})^{8}\approx 0{,}195$

3 $\binom{10}{3}\cdot(\frac{1}{3})^3\cdot(\frac{2}{3})^{7}\approx 0{,}260$

4 $\binom{10}{4}\cdot(\frac{1}{3})^4\cdot(\frac{2}{3})^{6}\approx 0{,}228$

5 $\binom{10}{5}\cdot(\frac{1}{3})^5\cdot(\frac{2}{3})^{5}\approx 0{,}137$

6 $\binom{10}{6}\cdot(\frac{1}{3})^6\cdot(\frac{2}{3})^{4}\approx 0{,}057$

7 $\binom{10}{7}\cdot(\frac{1}{3})^7\cdot(\frac{2}{3})^{3}\approx 0{,}016$

8 $\binom{10}{8}\cdot(\frac{1}{3})^8\cdot(\frac{2}{3})^{2}\approx 0{,}003$

9 $\binom{10}{9}\cdot(\frac{1}{3})^9\cdot(\frac{2}{3})^{1}\approx 0{,}000$

10 $\binom{10}{10}\cdot(\frac{1}{3})^{10}\cdot(\frac{2}{3})^{0}\approx 0{,}000$

b. Klopt.
c. Tenminste 6 goede antwoorden (?)

5 **a.** -3 , 0 , 3 , 6
b.

k	-3	0	3	6
P(X = k)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

c. $\frac{8}{27}\cdot -3+\frac{12}{27}\cdot 0+\frac{6}{27}\cdot 3+\frac{1}{27}\cdot 6=0$

d. Als de verwachtingswaarde 0 is (dan is geen van de spelers al bij voorbaat in het voordeel).

6 **a.** $\frac{5}{7}$
b.

k	0	1	2	3
P(X = k)	0,023	0,175	0,437	0,364

c. Som is 0,999

8 0,3125

9 **a.** 0,267

b. 0,256
c. 0,231

10 a. $3\frac{1}{2}$
b. 35

11 a. 0 en 1
b.

k	0	1
$P(Y_1 = k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(Y_1) = \frac{1}{6}$
c. $E(Y) = 1\frac{2}{3}$

12 a. $\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{2}{7}$
b. $\frac{5}{84}$
c. $\frac{2}{9}$
d. $\frac{2}{9}$
e.

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

f. $E(X) = \frac{5}{12} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{2}{3}$
$E(X) = 3 \cdot E(X_1) = 3 \cdot (\frac{7}{9} \cdot 0 + \frac{2}{9} \cdot 1) = \frac{2}{3}$

13 a. 0, 1, 2, 3, 4
b.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0,3038	0,4388	0,2135	0,0412	0,0026

c. $E(X_1) = 0{,}9998$
d. 4; $E(X) = 4$
e. $E(X_1) = \frac{1}{4} \cdot E(X) = 1$

14 a. $\frac{1}{3}$; $E(X_3) = \frac{1}{3}$
b. $\frac{1}{3}$; $E(X_3) = \frac{1}{3}$
c. 1
d. 1

15 a. p
b. n·p

16 $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$

17 a. 3 of meer (?)

b.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,000

c. 0,96

18 a.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	0,000	0,004	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

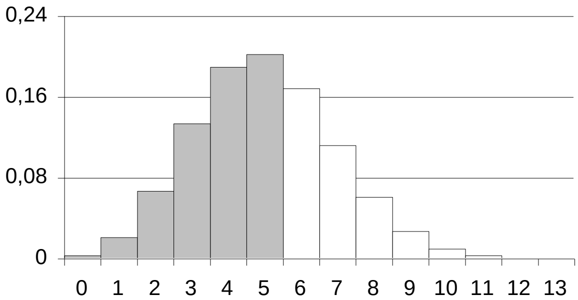
b. 0,83
c. 0,17

19 a. $1\frac{1}{2}$
b. $4\frac{1}{2}$
c. $X \leq 3$
d. $p = 0,75$
e. 0,169
f. 0,037

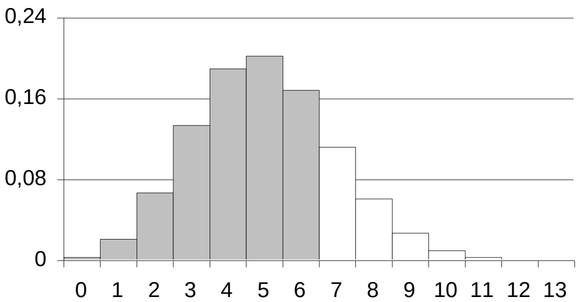
20 a. $(\frac{1}{4})^{6} = 0,000244\ldots$
b. $1 - (\frac{1}{4})^{6} = 0,999755\ldots$
c. $1 - 0,999755\ldots^{15} \approx 0,0036$

Paragraaf 6 Cumulatieve binomiale kansen

1 a. $0,0032 + 0,0211 + 0,0670 + 0,1339 + 0,1896 = 0,4148$
c. De kans op x of minder goede antwoorden is de som van de kans op x en alle voorgaande kansen.
d. De linker zes balken.



e. De linker zeven balken.



f. Aftrekken (0,7858 − 0,6172), dan vind je 0,1686.
De linker tabel maak je door steeds van een waarde uit de rechtertabel zijn voorgaande waarde af te trekken.

2 **a.** $0{,}2024+0{,}1686+0{,}1124+0{,}0609+0{,}0270=0{,}5713$
b. $0{,}9861-0{,}4148=0{,}5713$

3 **a.** $0{,}9590-0{,}8208=0{,}1382$
b. $1-0{,}8208=0{,}1792$
c. $0{,}9959-0{,}2333=0{,}7626$

4 **a.** 0,9978
b. 0,4204
c. 0,9997
d. 0,6134

5 **a.** 0,0933
b. 0,0315
c. 0,0618
d. 0,8375

6 $P(S\geq 3)=1-P(S\leq 2)=1-0{,}7752=0{,}2248$

7 **a.** $P(S>13)=1-P(S\leq 13)=1-0{,}8761=0{,}1239$
b. $P(S\geq 1)=1-P(S=0)=1-0{,}3660=0{,}6340$

8 **a.** 0,222222
b. 0,222217

9 **a.** $1-P(R\leq 7)=1-0{,}7869=0{,}2131$
b. $P(5\leq W\leq 7)=0{,}5045$

10 **a.** $P(S\leq 6)-P(S\leq 3)=0{,}8281-0{,}1719=0{,}6562$
b. $P(S\leq 12)-P(S\leq 7)=0{,}8686-0{,}1316=0{,}7368$
$P(S\leq 30)-P(S\leq 19)=0{,}9405-0{,}0595=0{,}8810$
$P(S\leq 60)-P(S\leq 39)=0{,}9824-0{,}0176=0{,}9648$
c. Als je vaker gooit, wordt het experiment nauwkeuriger. Hierdoor zal het aantal keer "kop" gemiddeld dichter bij 50% liggen, waardoor de kans dat het aantal keer "kop" tussen de 40% en de 60% ligt groter wordt.

11 **a.** $P(S>4)=1-P(S\leq 4)=1-0{,}8298=0{,}1702$
b. Het gaat hier om één klas. Het spijbelen van een leerling beïnvloedt de andere leerlingen. Het spijbelen van de leerlingen is dus niet onafhankelijk.

12 **a.** $P(S>4)=1-P(S\leq 4)=1-0{,}8964=0{,}1036$
b. $0{,}95^{50}\cdot 500\approx 38$

13 a. $P(S \geq 8) = 1 - P(S \leq 7) = 1 - 0{,}8982 = 0{,}1018$
b. Bij 11 goede antwoorden.

14 a. Bijvoorbeeld verschillen in gezondheid en leefgewoonten.
b. 5
c. 0,5793
d. 1,0000
e. 0,1960
f. 0,2826

15 a. 0,1445
b. Het kan best toeval zijn, maar ...
c. De kans op "toevallig" zeven keer te veel is 0,0352. Nu is er nog meer aanleiding voor ernstige twijfels.

16 a. 0,2666
b. 0,1240
c. 0,3485

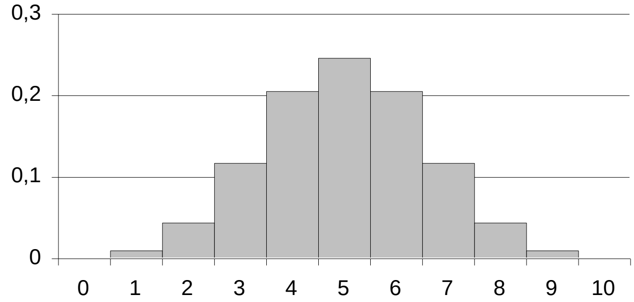
Paragraaf 7 De standaardafwijking

1 a. 120
b. 2, 3, 4, 5, 6.

2 a. 0,132
b. $\frac{120}{1024} \approx 0{,}117$

3 a.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

b.


4 $\frac{28}{256} = \frac{7}{64}$

5 a. $\frac{1}{2}$; n; X = het nummer van het bakje = het aantal keer dat het balletje naar rechts valt; $\frac{1}{2}$n.
b. Het wordt breder en lager.
c. Bij $\frac{1}{2}$n.
d. Groter.

6 **a.** De spreiding is een positief getal.

b.

t	0	1	2	3
$P(A = t)$	$\frac{20}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{2}{64}$

c. $0 \cdot \frac{20}{64} + 1 \cdot \frac{30}{64} + 2 \cdot \frac{12}{64} + 3 \cdot \frac{2}{64} = \frac{15}{16}$

d. $\frac{60}{64} = 0{,}9375$

7 0

8 7 , 10 , 10 , 10 , 10 , 13 ; 7 , 10 , 10 , 10 , 11 , 12
8 , 9 , 10 , 10 , 10 , 13 ; 9 , 9 , 9 , 11 , 11 , 11

9 **a.** 2 , $2\frac{2}{3}$

b.

k	0	4	6	10
$P(X+Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$VAA(X+Y) = 2\frac{2}{3}$.

c. Klopt.

10 **a.** 4 , 8
b. 12
c. Klopt

11 1 keer 7, 2 keer 9, 8 keer 10, 5 keer 11
1 keer 8, 4 keer 9, 6 keer 10, 4 keer 11, 1 keer 12
1 keer 8, 3 keer 9 , 9 keer 10 , 1 keer 11 , 2 keer 12
2 keer 8, 1 keer 9, 9 keer 10, 3 keer 11, 1 keer 12
2 keer 8, 2 keer 9, 6 keer 10, 6 keer 11
2 keer 8, 12 keer 10 , 2 keer 12
5 keer 9, 8 keer 10, 2 keer 11, 1 keer 13
8 keer 9, 8 keer 11

12 **a.** $E(X) = \frac{1}{2}n$
b. Als $n = 5$, dan $Vaa(X) = \frac{15}{16}$
c. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1
d. $Var(X) = \frac{1}{4}n$

13 **a.** $\frac{1}{6}\cdot(2\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(1\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(1\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(2\frac{1}{2})^2 = \frac{35}{12}$
b. $\frac{35}{6}$, $\frac{35}{2}$

14 **a.** $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 7
b. $\frac{35}{12}$, $\frac{35}{12}$, 0
c. Ja ; nee, want X en Y zijn niet onafhankelijk.

15 **a.** 10, 15, 20, 30, 35, 50

b.

k	10	15	20	30	35	50
P(S = k)	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

c. 20 ; 100

16 a.

k	5	10	25
P(Y = k)	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

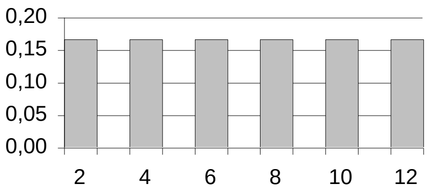
b. 10; 50
c. 10; 50
d. Klopt
e. Ja; klopt.

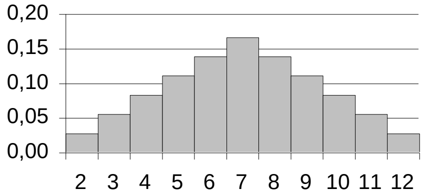
17 a. 10, 15, 20, 30, 35
b.

k	10	15	20	30	35
P(T = k)	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

c. 20 ; 80
18 a. Zie **16a**
b. Zie **16b**
c. 10; 50
d. Klopt.
e. Nee; $80 \neq 50 + 50$.
f. Bij met terugleggen komt de (sterk afwijkende) uitkomst 50 ook voor.

19 a. D
b.





c. Als X het aantal ogen is met de eerste steen en Y het aantal ogen met de tweede steen, dan $S = X + Y$ en $\text{Var}(S) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2 \cdot \text{Var}(X)$.
d. Klopt.

20 a. cm; cm; cm^2; cm

b. $E(Y) = 10 \cdot E(X)$; $Var(Y) = 100 \cdot Var(X)$;
$\sqrt{Var(Y)} = 10 \cdot \sqrt{Var(X)}$

21 a. p; p(1 – p); $\sqrt{p(1-p)}$
b. np; np(1 – p); $\sqrt{np(1-p)}$

22 a. 350; $291\frac{2}{3}$; ≈17
b. 50; 25; 5
c. 30; 21; √21

Paragraaf 8 De klokvorm

1 a. 30%
b. Tussen 27% en 33%.
c. Bij CDA; bij VVD; de grafiek is bij CDA het breedst en bij VVD het smalst.
d. Het gebied onder elk van de grafieken vertegenwoordigt 100% van de stemmen op de partij.
e. 30%

2 a. 5%
b. 10%

3 a. Dezelfde vorm als bij opgave 2, met de top bij 780 en alle oppervlakte tussen 400 en 1160.
b. Dat is wel weinig, maar niet extreem weinig; er zit nog redelijk wat oppervlakte links van 500.
c. De waarden in een breed gebied zijn volgens het linker plaatje even waarschijnlijk en praktisch meteen daarbuiten zijn de waarden onmogelijk; dat is verkeerd.
Volgens het rechter plaatje is de waarde 780 veel waarschijnlijker dan waarden in de buurt daarvan; dat is verkeerd.

4
- 160 , 185 , 210 cm
- 14 , 33 , 50 cm
- 10 , 25 , 60 minuten
- 980 , 1000 , 1020 gram
- 0 , 50 , 100 keer

6 a. Niet symmetrisch; tweetoppig; top is te smal;
top te plat; topje te uitstekend; begin en eind te steil.

7 a. 20%
b. 30%

8 a. De grafiek is niet symmetrisch.

b. 40%. Door de oppervlakte te bepalen tussen 200 en 350 en deze te vergelijken met de totale oppervlakte onder de grafiek (hokjes tellen).
c. 400 gram

9 **a.** 350 gram
b. 0

10 **a.** 6
b. 1,75

11 **b.** $\bar{x} = 29$, $\sigma = 4{,}5$
c. De mensen van bijvoorbeeld 18 jaar leven gemiddeld al 18,5 jaar. Zo ook bij de andere leeftijden. Gemiddeld is men dus een half jaar ouder dan zijn leeftijd aangeeft.
d. $\bar{x} - \sigma = 25$, $\bar{x} + \sigma = 34$; klopt
e. 50% , ca 15% , ca 3%

Paragraaf 9 Normale verdelingen

1 **a.** De oppervlakte onder de grafiek moet 1 blijven.
b. Het gemiddelde blijft dan hetzelfde.
c. De standaardafwijking wordt 2 keer zo klein.
d. Het gemiddelde wordt 2 groter.
e. De standaardafwijking verandert niet.

2 **a.** 152 en 212 cm

4 **a.** Dan verschuift de grafiek in horizontale richting.
b. Dan wordt de grafiek smaller en hoger of breder en lager.

5 **a.** Y = normalpdf(X,1000,10)
b. 95,45%
c. 53,28% , 15,87% , 30,85%

6 normalcdf(990,1010,1000,10) = 0,6827
normalcdf(980,1020,1000,10) = 0,9545

7 **b.** 2,28%
c. 25,25%

8 99,73%

9 2,5 en 4,7

10 **a.** 10,56%
b. 40,13%
c. 78,87%

11 b. GR: 12,07% , tabel: 12,10%
c. GR: 577, tabel: 620.

12 a. A: 9,12%; B: 65,63%; C: 25,25%.
b. € 15.483,84

13 a. Ongeveer 15.
b. Ongeveer 16%.
c. Ongeveer 4,3%.

14 A, want de kans op meer dan 1000 branduren is bij merk A 79,77% en bij merk B 78,81%.

15 a. Die munten worden bijvoorbeeld in scherp afgestelde muntautomaten gebruikt.
b. 1,24%
c. 25.314.389 munten.

16 a. 6,6807228...%
b. 1006 gram.

Paragraaf 10 De standaard normale tabel

1 a. Het lijkt mij uitzonderlijk hoog, maar ik weet niet welke afwijkingen van het gemiddelde normaal zijn.
b. Lijkt mij niet erg uitzonderlijk; 17 is niet zo heel veel te weinig.
c. In de vorige paragraaf heb ik gezien dat niet zo heel veel pakken 18 gram te weinig bevatten.

2 a. 2,5 keer de Sd ; dus uitzonderlijk.
b. 1,8 keer de Sd ; dus vrij uitzonderlijk.

3 a. jongen: 1,67 ; meisje: 2,20.
b. 164 cm
c. 148 cm

4 a. 0 ; 0,0225 ; 0,16 ; 0,5 ; 0,84 ; 0,9775 ; 1

5 0,3336 ; 0,6664 ; 0,7745 ; 0,4474

6 1 – opp. links van 1,3 = 1 – $\Phi(1,3)$ = 1 – 0,9032 = 0,0968
In tabel aflezen bij z = -1,3 : $\Phi(-1,3)$ = 0,0968.

8 -0,84 , 0,67 , 0,84 , -0,39

9 a. -0,52 ; 0,52
b. Nee

10 drie: -0,43 ; 0,43
vier: -0,67 ; 0 ; 0,67
vijf: -0,84 ; -0,25 ; 0,25 ; 0,84

11 a. 1
b. $\Phi(1)$ is de oppervlakte links van 1, dus de fractie die kleiner is dan 192.

12 Tabel: tussen $z = -1{,}25$ en $z = 1{,}25$ ligt $\Phi(1{,}25) - \Phi(1{,}25) = 0{,}8944 - 0{,}1056 = 0{,}7888$, dus 79%.
GR: normalcdf(160,180,170,8) = 0,7887.
13 z-waarde bij deze 2% = -2,05;
$(985 - g) / 10 = -2{,}05$ geeft $g = 1005{,}5$.

14 a. 13,79 punten.
b. z-waarde bij 0,8 is 0,84.
$(g - 62) / 13{,}79 = 0{,}84$ geeft 73,58, dus 74 punten

15 a. 69,4 punten.
b. Minstens 79,5 punten.

16 a. 0,26%
b. $\sigma = 3{,}57$ sec.
c. $\mu = 95{,}36$ sec.

17 a. $\sigma = 7{,}1641...$
b. 50%
c. MED = 172,64.
d. $\mu = 164{,}03$ cm.
e. tabel: 79,67% ; GR: 79,7671...%.

18 a. Sd = 16,67
b. Sd = 15,31
c. De verdeling is kennelijk niet zuiver normaal.

19 a. 22,5 ml; 9,9 ml.
b. 500 gram
c. $4 \cdot 251{,}25$ is meer dan $2 \cdot 495{,}25$. Dus meer.

Paragraaf 11 Wel of niet normaal ?

1 b. $y = 0$ en $y = 1$.
c. $(0,\frac{1}{2})$. Links van 0 zit exact de helft van de totale oppervlakte.

2 $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$

3 a. Hoe verder van 0 des te sterker moet er worden opgerekt.

b. 2,3 , 84 , 97,7

4 **a.** In de eerste klasse zitten 4 studenten.
In de eerste en tweede klasse samen (dus kleiner dan 160,5 cm) zitten 4 + 10 = 14 studenten.
In de eerste drie klassen samen (dus kleiner dan 163,5 cm) zitten 4 + 10 + 26 = 40 studenten.
c. Ja , ja
d. μ vind je via 50%.
e. $\mu-2\sigma$ vind je via 2,3% ; $\mu+2\sigma$ vind je via 97,7%.
f. $\mu \approx 175$ en $\mu+2\sigma \approx 188$ geeft $\sigma \approx 6{,}5$.
5 **b.** Nee , nee

6 **a.** Aflezen bij $8\frac{3}{4}$ u = 525 min. $\rightarrow$ 7,5%
Aflezen bij 11 u = 660 min. $\rightarrow$ 91%
Antwoord: 91% – 7,5% = 83,5%
b. Aflezen bij 50% $\rightarrow \mu \approx 597$ min.
Aflezen bij 16% $\rightarrow \mu - \sigma \approx 550$; dus $\sigma \approx 47$ min.
c. De kans dat de levensduur kleiner dan 510 min. is mag hoogstens 0,07 zijn.
De z-waarde van 0,07 is -1,48.
$\frac{510-\mu}{50} = -1{,}48 \rightarrow \mu = 584$ min.
d. Kort af: L = leeg, N = nieuw
Gevraagd wordt de kans op LNNL, NLNL of NNLL.
De kans is $\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{22}$

7 **a.** normcdf(0,309.5,266,16) = 0,9967, dus minder dan 1% duurt 310 dagen of meer.
b. De punten liggen niet op een rechte lijn dus geen normale verdeling.
c. 38,7

Paragraaf 12 De centrale limietstelling

1 **a.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
b. $4\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$
c. Ja

2 **a.** $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{36}$ $\frac{1}{6}\sqrt{5}$
b. $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}\sqrt{5}$
c. Niet helemaal goed.

3 **b.** $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $P(X_i = 0) = 1-p$ en $P(X_i = 1) = p$.
Dus $E(X_i) = p$ en $Var(X_i) = p(1-p)$.
Met de somregels vind je: $E(X) = np$ en $Var(X) = np(1-p)$.

4 **a.** $E(L) = 12$
b. $Var(L) = Var(X) + Var(-Y) = 36 + 36 = 72$
c. $P(X > 10) \approx 0{,}5948$
d. $P(L < 0) \approx 0{,}0793$
e. $1 - (1-0{,}0793)^{10} \approx 0{,}5623$

5 **a.** Er zijn in totaal 90 tweetallen en bij 30 ervan is 5 het hoogste. Dus: $P(X = 5) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.
b. $P(X = 2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$, $P(X = 5) = \frac{5}{15}$, $P(X = 10) = \frac{2}{10}$
c. $E(X) = 4{,}6$, $Var(X) = 9{,}04$
d. Tussen 100 en 500 euro.
e. $(\frac{7}{15})^{50} \approx 0$, $(\frac{2}{10})^{50} \approx 0$

6 **a.** 170,5 , 180,5 , ... , 290,5
c. $\mu \approx 229$, $\sigma \approx 19$
d. 88% – 39% = 49%

7 **a.** $E(T) = 50 \cdot 4{,}6 = 230$, $Var(T) = 50 \cdot 9{,}04 = 452$
$228 \approx 230$, $21^2 = 441 \approx 452$
b. normcdf (223.5,255.5,230,21.26) = 0,5049
Klopt niet helemaal.

8 **b.** 1 , 1
c. 262 dinsdagen, $\sqrt{262} = 16{,}2$
d. Normcdf(0,250,262,16,2) = 0,229