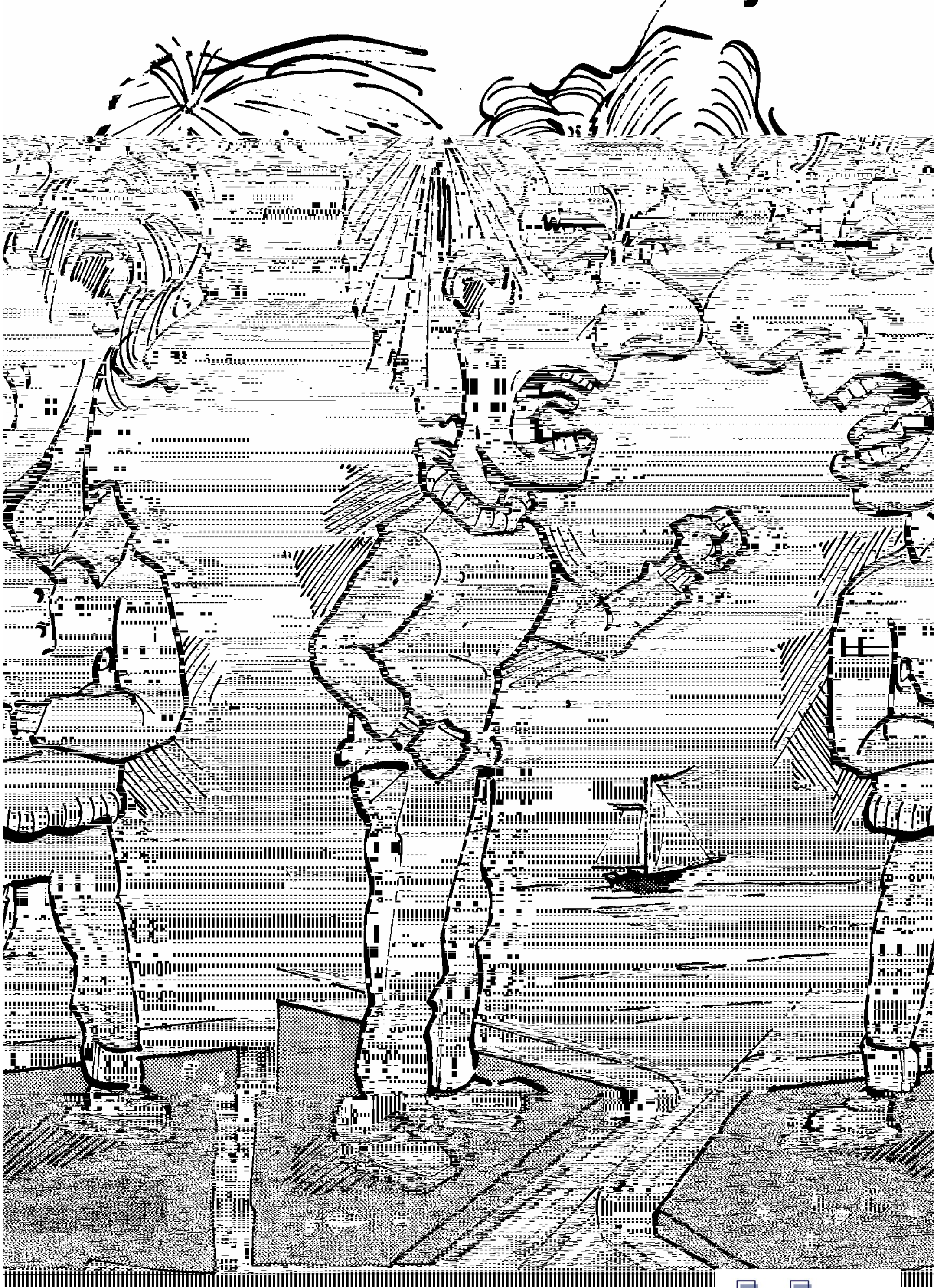
VWO Wiskunde D 2015

4b Conflictlijnen



Wageningse Methode

4b Conflictlijnen

Inhoudsopgave


Bij opgaven gemarkeerd met dit symbool hoort een werkblad


Opgaven gemarkeerd met dit symbool kunnen worden overgeslagen

Colofon

© 2016 Stichting De Wageningse Methode

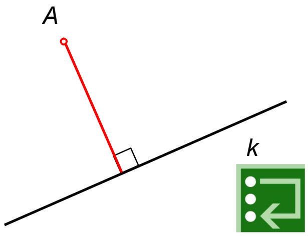
Auteurs: Leon van den Broek†, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen

Illustraties: Wilson Design, Uden

Homepage: www.wageningse-methode.nl

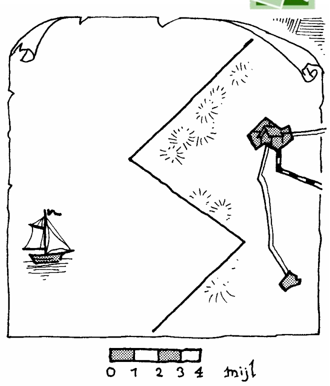
1 Gelijke afstand

In 1961 werd bekend dat er in de bodem van de Noordzee aardgas te vinden was. Toen werd het dus van belang uit te maken welk deel van de Noordzee bij welk land hoort. In 1970 kwam hierover een verdrag tot stand.



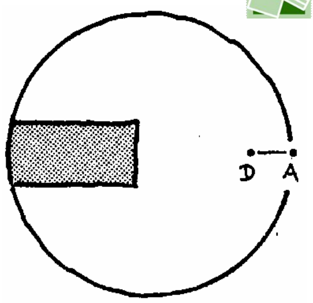
De kortste verbinding van een punt A met een lijn k is een loodlijnstuk vanuit A op k.

2 Bewijs bovenstaande met de driehoeksongelijkheid.
Tip. Spiegel A in k.



3 Een kustlijn maakt twee scherpe hoeken: een landinwaartse en een zee-inwaartse. Het plaatje staat ook vergroot op het werkblad.
De punten die op afstand 3 mijl uit de kust liggen, vormen de driemijlslijn.
a. Teken de driemijlslijn. Pas op: hij loopt bij de landinwaartse hoek heel anders dan bij de zee-inwaartse hoek.

De driemijlslijn bestaat uit drie rechte stukken en één cirkelboog.
b. Geef op het werkblad precies aan waar de cirkelboog aansluit op twee van de rechte stukken.



4 In een perfect rond meertje staat een aanlegsteiger. Anneke vist in het meertje op forel. Ze kan elke plek aan de rand van de vijver en op de steiger kiezen. In het plaatje zie je Anneke op een bepaalde plaats staan. Als ze haar hengel zo ver mogelijk over de vijver steekt, komt de dobber op plek D.
a. Kleur op het werkblad het gebied waar de forellen geen gevaar lopen door Anneke te worden verschalkt.

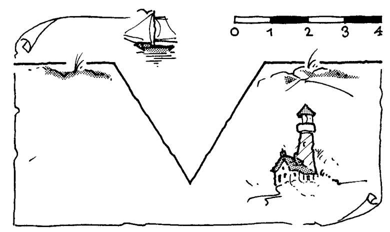
De diameter van het meertje is 18 meter. De steiger is 4 meter breed en is in het midden 8 meter lang.
b. Hoe lang moet Annekes hengel minstens zijn, opdat de vissen alleen nog maar onder de steiger veilig zijn?

Gegeven is een gebied.
De punten die buiten het gebied liggen, op afstand x van de rand van het gebied, vormen de zogenaamde **iso- -afstandslijn**.

5 **a.** Hoe lang is de iso-x-afstandslijn bij een cirkelvormig gebied met straal 2? Uitdrukken in x.
b. Hoe lang is de iso-x-afstandslijn bij een driehoek met zijden 3, 4 en 5?
c. Hoe lang is de iso-x-afstandslijn bij een rechthoek met zijden 2 en 5?
d. Een vierhoekig gebied heeft zijden van 2, 3, 4 en 5 en heeft geen inspringende hoeken.
Hoe lang is de iso-x-afstandslijn? Leg uit dat je daarvoor niet de vorm van het gebied hoeft te weten.

6 Dezelfde vragen als bij **5**, maar nu voor de oppervlakte van de zone tussen de iso-*x*-afstandslijn en het gebied.

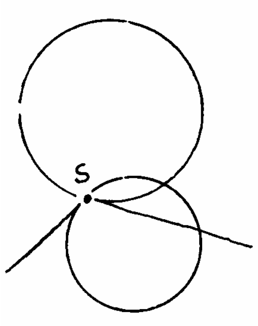
7 We bekijken een land met een V-vormige inham, het plaatje staat op de volgende bladzijde. De vier stukken kustlijn zijn allemaal recht. Bij het plaatje is een schaalstok getekend. De inham is een gelijkzijdige driehoek met zijde 4.



a. Teken op het werkblad in zee de iso-1-afstandslijn, de iso-2-afstandslijn en de iso-3-afstandslijn. Geef nauwkeurig aan waar de rechte stukken op de cirkelbogen aansluiten.

De iso-1-afstandslijn en de iso-2-afstandslijn bestaan uit twee cirkelbogen en vier rechte stuken.
De iso-3-afstandslijn bestaat uit twee cirkelbogen en twee rechte stukken.
b. Bereken exact de kleinste waarde van *x*, waarvoor de iso-*x*-afstandslijn uit twee cirkelbogen en twee rechte stukken bestaat.

In de vorige opgave maken de cirkelbogen van de iso-3-afstandslijn een stompe hoek met elkaar.



Laat *S* een gemeenschappelijk punt zijn van twee cirkels. Bekijk op beide cirkels een boog met eindpunt *S*. Onder de hoek die deze cirkelbogen met elkaar maken, verstaan we de hoek die de bijbehorende halve raaklijnen met elkaar maken. In *S* maken de cirkels dus vier hoeken, die twee aan twee gelijk zijn.

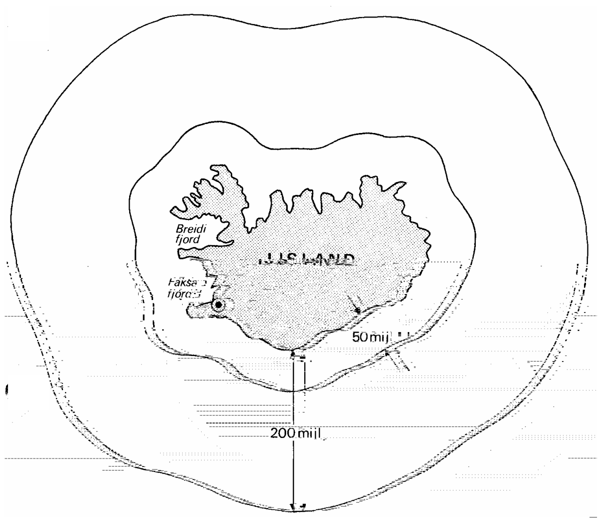
8 **a.** Twee even grote cirkels gaan door elkaars middelpunt.
Hoe groot zijn de hoeken die ze maken?
b. Hoe groot zijn de hoeken die twee rakende cirkels met elkaar maken?

Het zal duidelijk zijn wat we verstaan onder de hoeken die een lijn met een cirkel maakt.

9 **a.** Een lijn snijdt een cirkel met straal 1 onder hoeken van 45° (en van 135°).
Hoe lang is het stuk van de lijn dat binnen de cirkel ligt?
b. Een lijn gaat door het middelpunt van een cirkel.
Onder welke hoeken snijdt de lijn de cirkel?

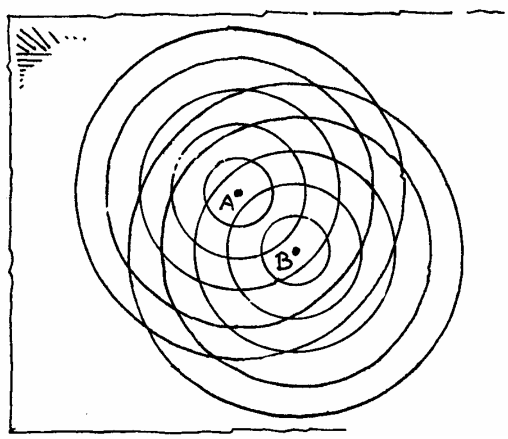
10 Bekijk opnieuw de cirkelbogen van de iso-3-afstandlijn van opgave **7**.

a. Bereken de hoek die de cirkelbogen met elkaar maken in graden nauwkeurig.
b. Toon aan dat de twee cirkelbogen van de iso-4-afstandslijn elkaar onder een hoek van 120° ontmoeten.
c. Bereken voor welke *x* de twee cirkelbogen van de iso-*x*-afstandslijn elkaar ontmoeten onder een hoek van 170°. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
d. Is er een waarde van *x*, zo dat de iso-*x*-afstandslijn geen knik meer heeft?
Je ziet dat, hoe verder de iso-afstandslijn van de kust ligt, hoe kleiner de invloed van de inham op de vorm van de iso-afstandslijn wordt. Maar de invloed zal nooit helemaal verdwijnen. Dit wordt ook fraai geïllustreerd door de iso-afstandslijnen om IJsland.



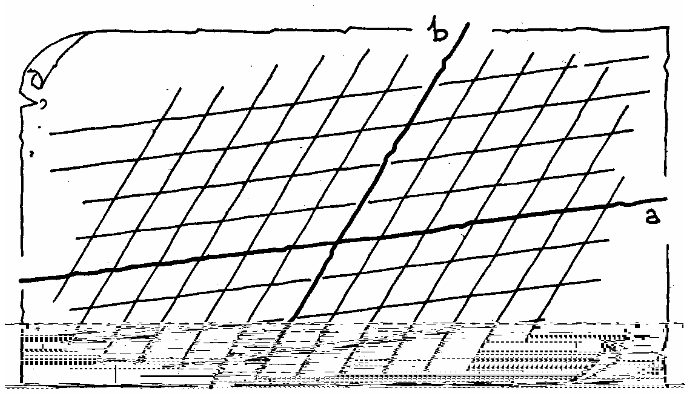
In de jaren '70 waren Engeland en IJsland in een visserijconflict verwikkeld. Internationaal is vastgelegd dat een zone van 50 mijl voor de kust tot het territorium van het land behoort. IJsland had eigenmachtig die zone vergroot tot 200 mijl om zich te verzekeren van ruimere visgronden. Dit ging ten koste van Britse vissers; vandaar het conflict.
Uit: *Pythagoras nr5, april 1976*

11 Gegeven zijn twee punten: *A* en *B*. De isoafstandslijnen van *A* zijn cirkels; zo ook van *B*. Die zijn hieronder getekend.



a. Hoe vind je in dit plaatje punten die even ver van *A* als van *B* af liggen?
b. Teken op het werkblad *alle* punten die even ver van *A* als van *B* af liggen.
Weet je aan naam voor de verzameling van deze punten?

12 Gegeven zijn twee snijdende lijnen: *a* en *b*. De iso-afstandslijnen van *a* zijn paren lijnen; zo ook van *b*. Die zijn hieronder getekend.
a. Hoe vind je in dit plaatje punten die even ver van *a* als van *b* af liggen?
b. Teken op het werkblad *alle* punten die even ver van *A* als van *B* af liggen?
Weet je een naam voor de verzameling van deze punten?

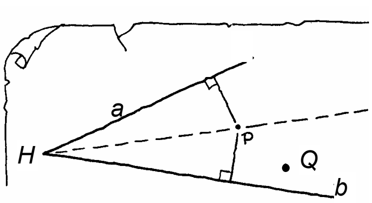


De verzameling punten die even ver van twee punten *A* en *B* liggen, is de **middelloodlijn** van lijnstuk *AB*.

De verzameling punten die even ver van twee snijdende lijnen *a* en *b* afliggen, is het tweetal **bissectrices** of **deellijnen** van de hoeken die *a* en *b* met elkaar maken.

De eerste bewering hebben we onder andere in hoofdstuk *4a Hoeken en Bogen* gezien. De tweede bewering kun je in de volgende opgave bewijzen.

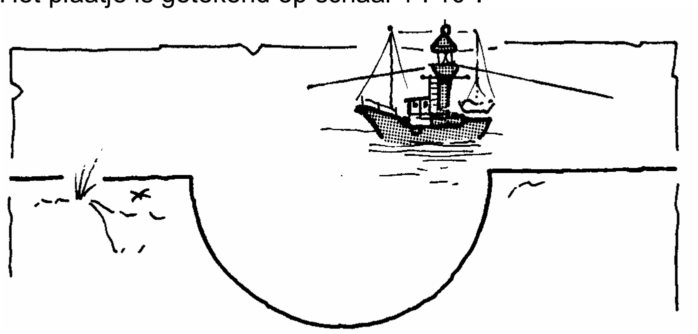
13 De benen van een hoek zijn twee halve lijnen *a* en *b* met een gemeenschappelijk eindpunt *H*. We tekenen de bissectrice van de hoek, dat is de lijn die hem in twee even grote hoeken verdeelt. We kiezen een punt *P* op die bissectrice en laten uit *P* de loodlijnen neer op de benen. Hoe volgt dat deze even lang zijn?



Nu zijn we nog niet klaar. We moeten ook nog laten zien dat een punt, zeg *Q* dat niet op de bissectrice ligt, niet even ver van *a* en *b* ligt. Dit laten we hier achterwege.

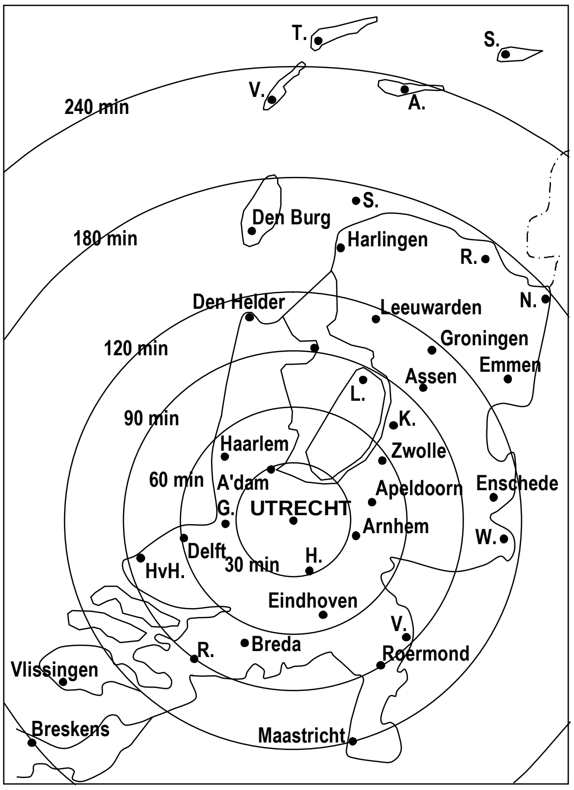
14 a. Gegeven zijn twee *evenwijdige* lijnen.
Omschrijf de verzameling punten die op gelijke afstand van de lijnen liggen.
b. Gegeven zijn twee cirkels met dezelfde straal die elkaar niet snijden.
Omschrijf de verzameling punten die op gelijke afstand van de cirkels liggen.

15 De kustlijn hieronder bestaat uit twee halve lijnen en een halve cirkel. De halve cirkel heeft straal 20 km.
Het plaatje is getekend op schaal 1 : 10^6.



a. Neem het plaatje over en teken in zee de iso-afstandslijn op 20 km uit de kust.

We bekijken bij een zeker gebied een zekere iso-afstandslijn. Anneke beweert: *"als de rand van het gebied geen knik heeft, heeft de isoafstandslijn ook geen knik".*
b. Is dat waar? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een voorbeeld waaruit blijkt waarom niet.

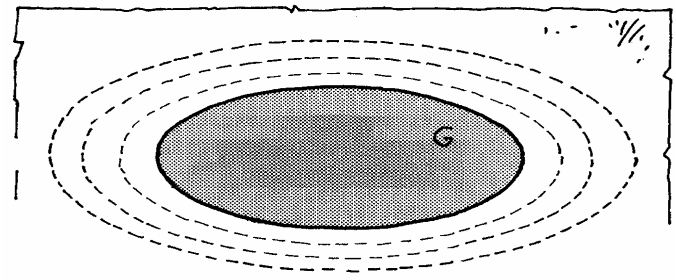


De reistijdenkaart van Nederland, vanuit Utrecht met het openbaar vervoer
Harlingen en Vlissingen liggen even ver van Utrecht. Merk op dat de kaart van Nederland afhangt van de plaats van vertrek.
Uit: *De Nieuwe Geografenkrant* , okt. 1988

2 Parabolen

16 Om een ellipsvormig gebied

We bekijken een ellipsvormig gebied *G*: grijs in het plaatje hieronder. Anneke tekent drie isoafstandslijnen van *G* door de rand van *G* (zowel horizontaal als verticaal) vanuit het middelpunt te vermenigvuldigen met de factoren 1,2 , 1,4 en 1,6.
Geef commentaar.

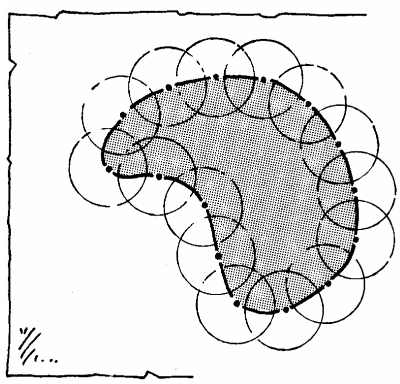


17 Om een willekeurig gebied

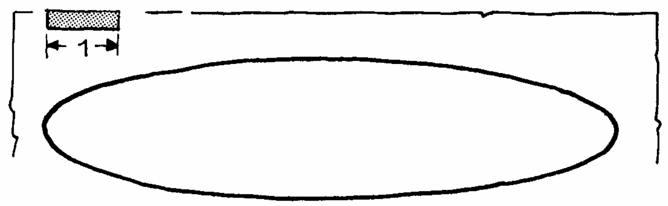
Hoe maak je wel isoafstandslijnen van een gebied? Bijvoorbeeld de 1-isoafstandslijn. Teken cirkels met straal 1 en middelpunt op de rand van het gebied. Als je genoeg cirkels tekent, wordt de 1-isoafstandlijn goed zichtbaar: het is de omhullende van de cirkels. De cirkels vormen tezamen een zone van breedte 2 om de rand.

a. Teken die zone zo goed mogelijk op het werkblad.

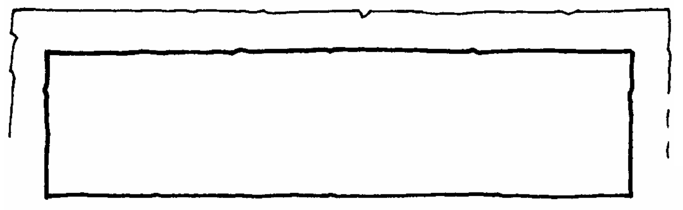
b. Zijn de buiten- en binnenrand van de zone gelijkvormig?



18 **a.** Teken op het werkblad de "buiten-" en de "binnen-"isoafstandslijn op afstand $\frac{1}{2}$ van onderstaande ellips.
b. Zijn ze gelijkvormig?



c. Dezelfde vragen voor onderstaande rechthoek.

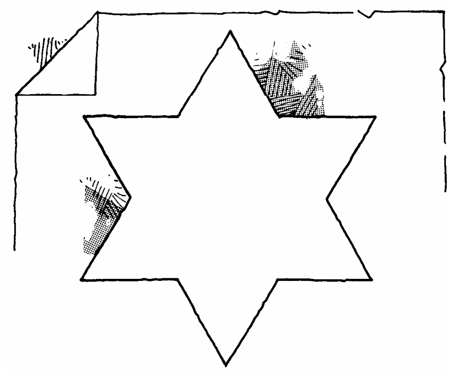


Anneke zegt dat de conflictlijn tussen binnen- en buiten-isoafstandlijn de rechthoek zelf is.

d. Laat zien dat Anneke deze keer ongelijk heeft.

19 Davidsster

De zijden van de Davidsster hebben allemaal lengte 2.



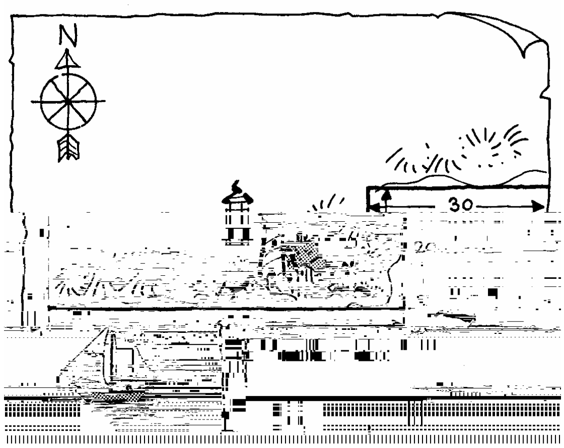
a. Teken op het werkblad de isoafstandslijn buiten de ster op afstand 1.

b. Bereken de exacte lengte van deze isoafstandslijn.

c. Bereken exact de oppervlakte van de afstand-1-zone buiten de Davidsster.

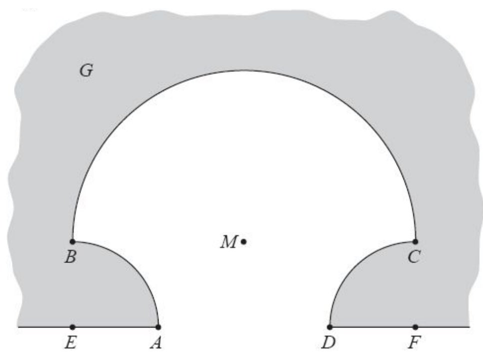
20 Twee knikken

Een kustlijn maakt twee rechte knikken. De twee oost-west-kustlijnen zijn 60 en 30 km lang, de noord-zuid-kustlijn is 20 km lang; zie de tekening.



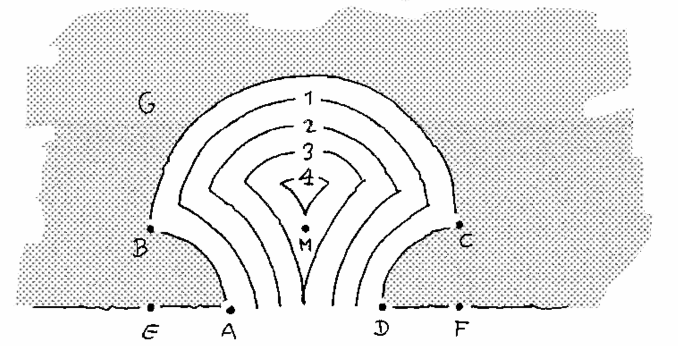
a. Teken op het werkblad de drie isoafstandslijnen 10, en 20 km uit de kust.
b. Bereken de exacte lengte van elk van de iso-afstandslijnen.
c. Bereken de exacte oppervlakte van de 10-km-zone en van de 20-km-zone (tussen kust en isoafstandslijn).

21 Cirkelinham



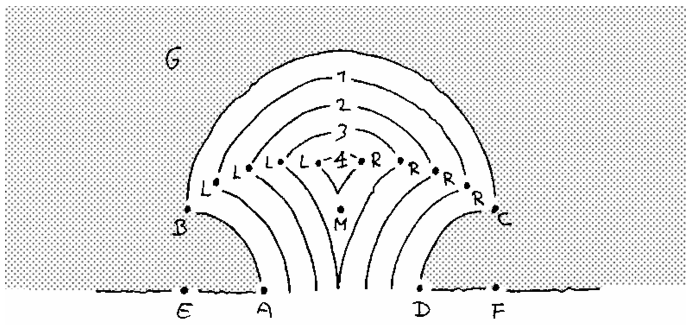
Een gebied *G* heeft aan een van zijn rechte zijden, *EF*, een inham, waarvan de rand bestaat uit drie cirkelbogen:
- boog *AB* is een kwartcirkel met straal 3 en middelpunt *E*,
- boog *CD* is een kwartcirkel met straal 3 en middelpunt *F*,
- boog *BC* is een halve cirkel met straal 6 en middelpunt *M*.

E, *A*, *D* en *F* liggen op een rechte lijn.
In het plaatje hieronder zijn in de inham de iso-afstandslijnen getekend op de afstanden 1, 2, 3 en 4 van het land.



a. Teken op het werkblad de isoafstandslijn waarop het punt *M* ligt. Licht je werkwijze toe.

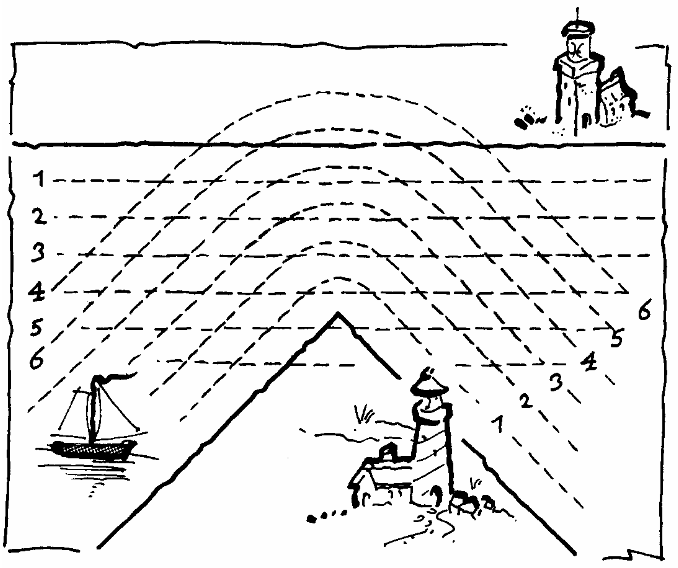
Elke iso-afstandslijn bestaat uit drie cirkelbogen. Deze drie bogen sluiten op elkaar aan in de punten *L* (links) en *R* (rechts). Zie het plaatje hieronder.



Voor alle punten *L* geldt: $LM + LE = 9$.
b. Toon dit aan.
CSE VWO wiskunde b12 2007 I

Naastebuurprincipe
Twee landen betwisten elkaar de hun omringende wateren. Ze worden het erover eens dat een plek op zee tot dát land behoort, waar hij het dichtste bij ligt. We noemen deze verdeelregel **het naastebuurprincipe**, zie ook paragraaf 1.
De bijbehorende grenslijn heet de **conflictlijn** tussen de twee gebieden.

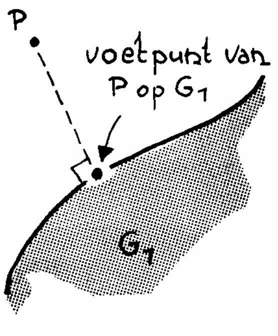
22



Noorderland en Zuiderland verdelen de zee volgens het naastebuurprincipe. Hieronder zijn de isoafstandslijnen van beide landen getekend op de afstanden 1, 2, 3, 4, 5 en 6 uit de kust.
De snijpunten van de overeenkomstige isoafstandslijnen liggen op de conflictlijn.
a. Teken de conflictlijn op het werkblad.

De conflictlijn bestaat uit twee rechte stukken en één gebogen stuk.
b. Leg uit dat de rechte stukken allebei een deel zijn van de bissectrice van een hoek. Van welke hoeken?
c. Geef nauwkeurig aan in welke punten de rechte stukken overgaan in het gebogen stuk.

Als je de twee rechte stukken van de conflictlijn door trekt, gaan ze een stompe hoek maken.
d. Hoe groot is die hoek, als de kustlijn van Zuiderland een haakse hoek maakt?
e. En als die hoek $\alpha°$ is?

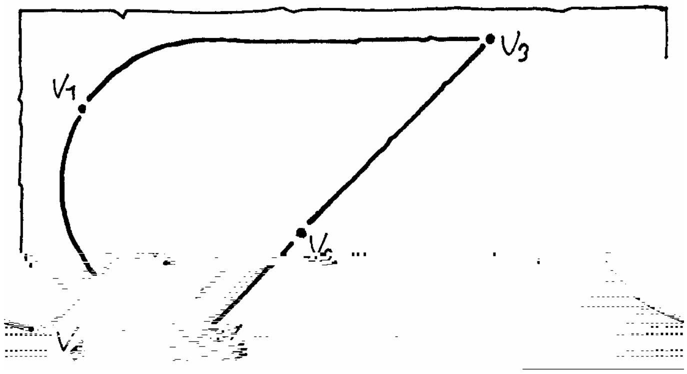


De **conflictlijn** van twee gebieden wordt gevormd door alle punten die gelijke afstand hebben tot beide gebieden.

Noemen we die gebieden G_1 en G_2, dan geldt dus:
punt P ligt op de conflictlijn van G_1 en G_2
$\Leftrightarrow$ $d(P,G_1) = d(P,G_2)$.

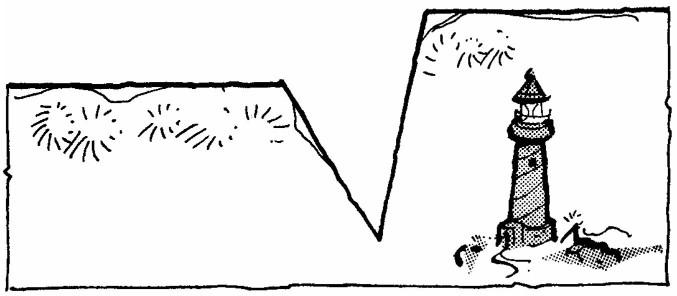
Een punt van G_1 dat het dichtst bij P ligt, noemen we een **voetpunt** van P op G_1.

23 Hieronder is een gebied getekend. De rand bestaat uit een halve cirkel en twee lijnstukken. Op de rand zijn vier punten aangegeven: V_1, V_2, V_3 en V_4.

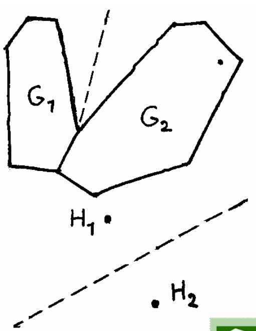


Geef op het werkblad met kleur alle punten aan waarvan V_1 het voetpunt is.
b. Ook waarvan V_2 het voetpunt is. En waarvan V_3 het voetpunt is. En waarvan V_4 het voetpunt is.

24 Meer dan één voetpunt
a. Het gebied hieronder heeft een V-vormige inham.



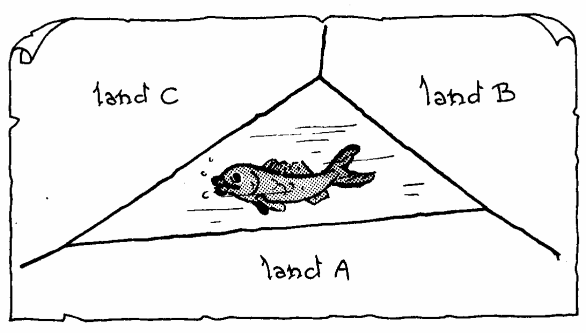
Waar binnen de inham liggen de punten die twee voetpunten hebben?
b. Geef een voorbeeld van een gebied en een punt dat drie voetpunten heeft op dat gebied.
c. Geef een voorbeeld van een gebied en een punt dat oneindig veel voetpunten heeft op dat gebied.



De gebieden G_1 en G_2 hebben rechte randen die elkaar onder een hoek α ontmoeten. Dan is de conflictlijn van G_1 en G_2 de bissectrice van hoek α.

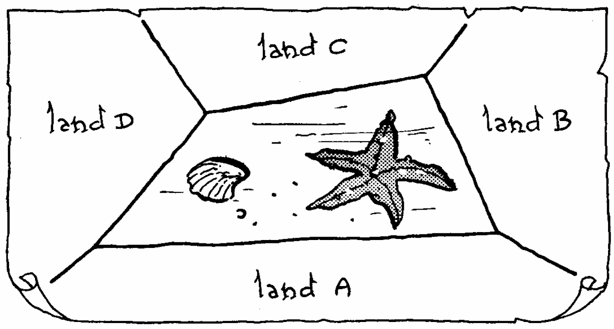
De gebieden H_1 en H_2 zijn puntvormig. Dan is de conflictlijn van H_1 en H_2 de middelloodlijn van H_1H_2.

25 Drie landen grenzen aan een binnenzee. De kustlijnen zijn recht. Welk deel van de zee behoort tot welk land? De landen gaan een verdrag sluiten waarin dat wordt geregeld. Ze verdelen de binnenzee volgens het naastebuurprincipe.



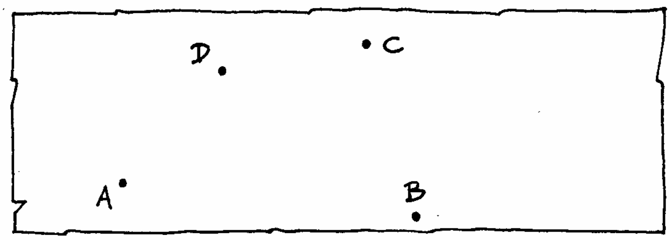
a. Verdeel de binnenzee op het werkblad.
b. Wat is de wiskundige naam voor de conflictlijnen?
Waarom is het zeker dat er een 'drielandenpunt' is?
c. Wat weet je van de drie afstanden van het drielandenpunt tot de drie kustlijnen?

26 Vier landen grenzen aan een binnenzee. Ze verdelen de binnenzee volgens het naastebuurprincipe.

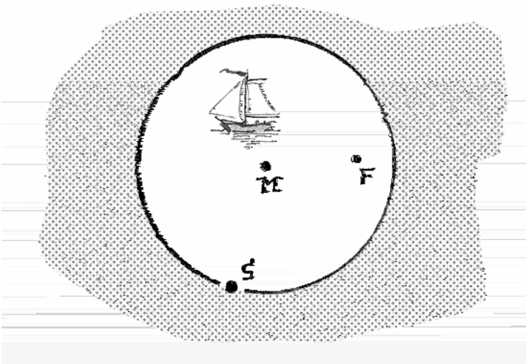


Er zijn twee drielandenpunten: van *A*, *D* en *C* en van *A*, *B* en *C*. Het verbindingslijnstuk van deze drielandenpunten is grenslijn tussen *A*'s deel en *C*'s deel van de binnenzee. Het is een stuk van de bissectrice van de hoek die de kusten van land *A* en land *C* met elkaar maken.
b. Waarom is dat zo?

27 Vier centra verdelen het land volgens het naastebuurprincipe.
Bepaal op het werkblad de delen van elk land. Gebruik kleur.



28 In een cirkelvormig meer liggen twee eilandjes, *M* en *F*. We beschouwen de eilandjes als punten. *M* ligt precies in het midden van het meer. Zie het plaatje hieronder.



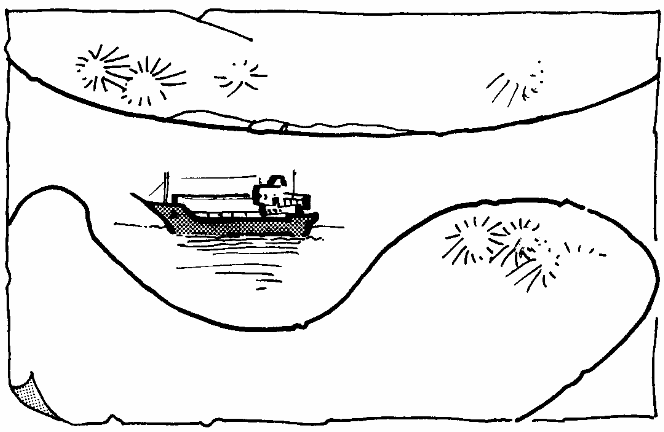
S is een punt aan de rand van het meer. Een bootje start in *S* en vaart in een rechte lijn naar *M*.

a. Teken op het werkblad het punt *P* op de route van het bootje waar het bootje even ver van punt *S* verwijderd is als van *F*. Licht je werkwijze toe.

b. Een ander bootje start in een punt aan de rand van het meer en vaart ook in een rechte lijn naar *M*. Halverwege is de afstand van het bootje tot het land even groot als de afstand van het bootje tot beide eilandjes.
Teken op het werkblad de punten aan de rand van het meer van waaruit het bootje vertrokken kan zijn. Licht je werkwijze toe.

CSE VWO wiskunde B12, 2001 I

29

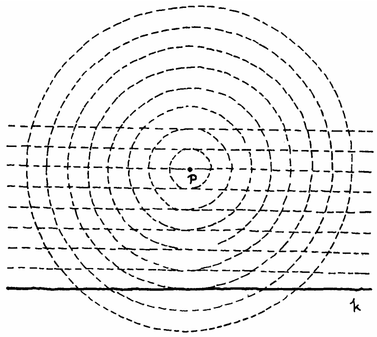


We bekijken twee gebieden met grillige randen. De conflictlijn tussen deze twee landen is niet zo eenvoudig te tekenen. De cirkels met middelpunt op de kustlijnen en stralen 1, 2 en 3 helpen hierbij.
Schets op het werkblad de conflictlijn.

We kennen de conflictlijn tussen twee lijnen en tussen twee punten. We gaan nu onderzoeken hoe de conflictlijn tussen een punt en een lijn eruit ziet. En ook de conflictlijn tussen een punt en een cirkel.

30 Tussen punt en lijn

Hieronder en op het werkblad staat een lijn *k* en een punt *P*. Gevraagd wordt de conflictlijn tussen *k* en *P*: de verzameling punten op gelijke afstand van *k* en *P*. Daartoe tekenen we isoafstandslijnen van *P* en *k*.

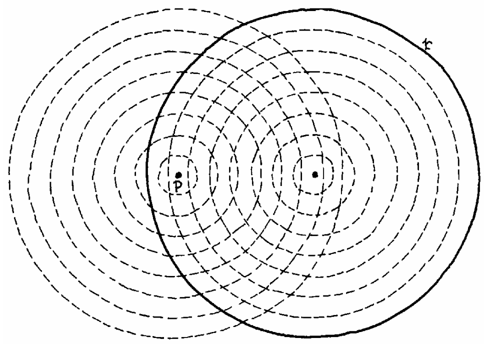


Teken op het werkblad de conflictlijn zo goed mogelijk.

31 Tussen punt en cirkel 1

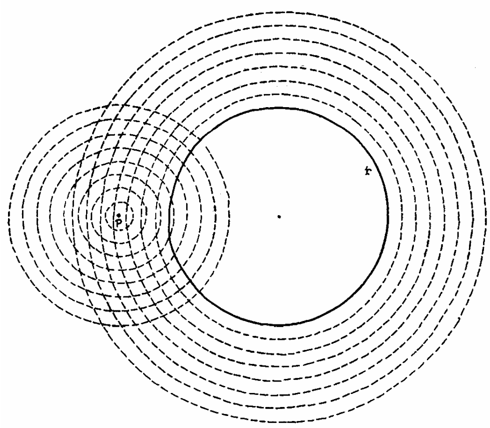
Hieronder en op het werkblad staat een cirkel *r* en een punt *P* daarbinnen. Gevraagd wordt de conflictlijn tussen *r* en *P*: de verzameling punten op gelijke afstand van *r* en *P*. Daartoe tekenen we isoafstandslijnen van *P* en *r.*

Teken op het werkblad de conflictlijn zo goed mogelijk.



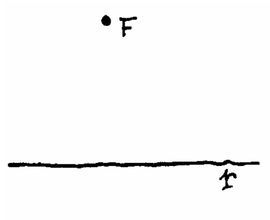
32 Tussen punt en cirkel 2

Hieronder en op het werkblad staat een cirkel *r* en een punt *P* daarbuiten.



Gevraagd wordt de conflictlijn tussen *r* en *P*: de verzameling punten op gelijke afstand van *r* en *P*. Daartoe tekenen we isoafstandslijnen van *P* en *r*.

Teken op het werkblad de conflictlijn zo goed mogelijk.



Definitie

Gegeven zijn een punt *F* en een lijn *r*; *F* ligt niet op *r*.
De conflictlijn tussen *F* en *r* heet een **parabool**.
Het punt *F* heet het **brandpunt** van de parabool en de lijn *r* heet de **richtlijn** van de parabool.

Een punt *P* ligt op de parabool met brandpunt *F* en richt lijn *r* als d(*P*,*F*) = d(*P*,*r*). Als je een punt *P* op de paraboo hebt, kun je zijn voetpunt *V* op *r* bepalen. Omdat |*PF*| = |*PV*|, ligt *P* op de middelloodlijn van *FV*.
Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt *V* op *r* he bijbehorende punt *P* op de parabool bepalen. Als volgt.

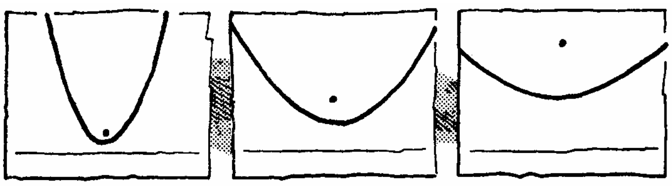
- Richt de loodlijn in *V* op *r* op.
- Teken de middelloodlijn van *FV*.
- Het snijpunt van deze twee lijnen is *P*.

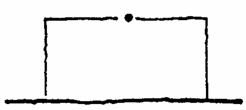
33 De constructie van de parabool vanuit voetpunten

a. Teken een lijn *r* en een punt *F* op afstand 1 cm van *r*. Kies vijf voetpunten op *r* en voer bovenstaande constructie met elk van deze voetpunten uit. Schets daarna de parabool met *F* als brandpunt en *r* als richtlijn.
b. Dezelfde opdracht, maar nu met *F* op afstand 3 cm van *r*.

Het is duidelijk dat de parabool een **symmetrieas** heeft en een **top** (dat is het punt dat het dichtst bij de richtlijn ligt). Elke parabool wordt op dezelfde manier geconstrueerd. Het enige verschil is de afstand tussen brandpunt en richtlijn. Maar dat is een kwestie van schaal. Dus alle parabolen zijn gelijkvormig.

34 Hieronder staan drie parabolen met hun brandpunten en richtlijnen. De plaatjes zijn zeker niet gelijkvormig.

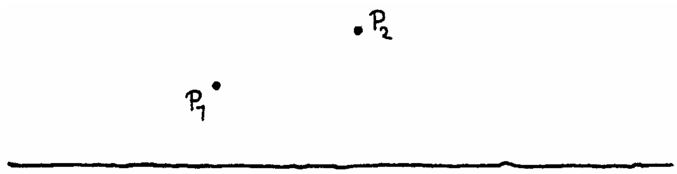




a. Teken op het werkblad in elk van de drie plaatjes een rechthoek zoals hiernaast: de onderkant ligt op de richtlijn, het brandpunt is het midden van de bovenkant en twee hoekpunten liggen op de parabool.
b. Wat is de verhouding van de zijden van de rechthoeken? Waarom?

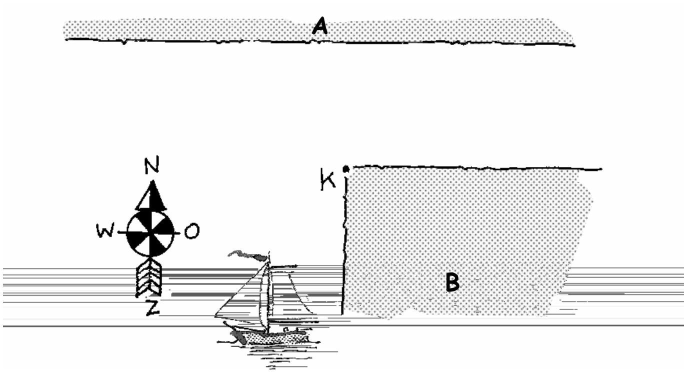
De stukjes parabool binnen de rechthoeken zien er wel gelijkvormig uit!

35 Hieronder is van een parabool de richtlijn getekend en twee van zijn punten P_1 en P_2.



a. Bepaal op het werkblad de mogelijke plaatsen van het brandpunt.
b. Schets beide parabolen.

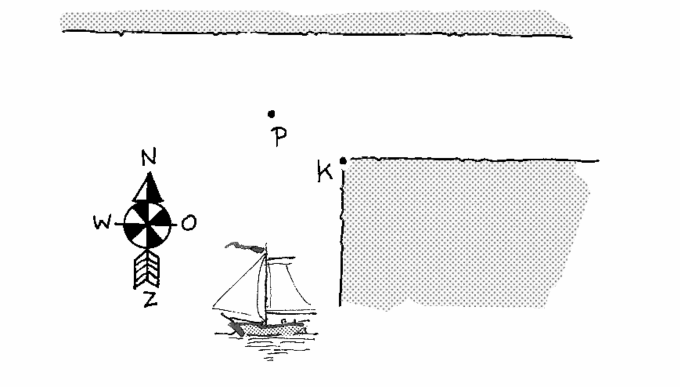
36 Betwist gebied
Twee landen *A* en *B* worden gescheiden door een zee. De kustlijn van *A* loopt west-oost. De kustlijn van *B* maakt bij kaap *K* een hoek van 90°; een deel van de kustlijn loopt noord-zuid en een deel west-oost. De afstand tussen de kustlijnen die west-oost lopen is 40 km; zie plaatje.



Beide landen maken aanspraak op een deel van de zee. Ze vinden beide dat de strook tot 30 km uit de kust hen toebehoort. Een deel van de zee blijft dus betwist gebied.
a. Kleur op het werkblad het betwiste gebied.

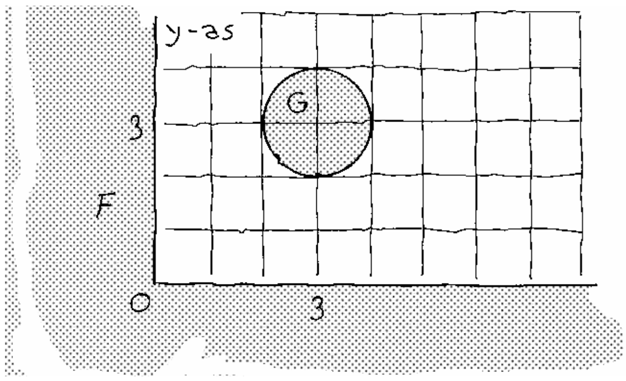
De zee zou verdeeld kunnen worden volgens het naastebuurprincipe.
b. Teken op het werkblad de bijbehorende grenslijn. Licht je werkwijze toe.

Hieronder is een punt P getekend van de grenslijn bij verdeling volgens het naaste-buurprincipe. Het betwiste gebied heeft een noordrand en een zuidrand.



c. Toon aan dat P even ver van beide randen afligt.
CSE wiskunde b12 2005 I

37



F is het gebied hierboven bestaande uit de punten (x,y) met $x \leq 0$ of $y \leq 0$ en G de cirkel met middelpunt (3,3) en straal 1.
a. Welke drie roosterpunten in de getekende roosterrechthoek liggen op de conflictlijn?

De conflictlijn van de twee gebieden zijn delen van twee parabolen.
b. Geef van elk van die parabolen het brandpunt en de richtlijn.

Op de lijn $x=2$ liggen twee punten van de conflictlijn. De tweede coördinaat van het punt dat het dichtst bij de x-as ligt, noemen we y.
c. Laat zien dat y oplossing is van de vergelijking:
$y+1=\sqrt{1+(y-3)^2}$ en bereken de exacte waarde van y.
d. Bepaal op soortgelijke wijze ook exact de tweede coördinaat van het andere punt op de conflictlijn met $x=2$.

38 We bekijken de parabool P met richtlijn $y=-1$ en brandpunt (0,1).

a. Welk punt is de top van de parabool? En welke lijn de symmetrieas?

Het punt (x,y) ligt op de parabool.

b. Laat zien dat $|y+1| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ en herschrijf deze vergelijking in de vorm: $y = \_\_ \cdot x^2$.

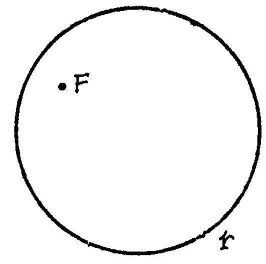
c. Toon aan dat de parabool die je krijgt door P met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van $O(0,0)$ vergelijking $y = x^2$ heeft.

Opmerking

De grafiek van de standaard-parabool $y = x^2$ die je in klas 3 bij algebra tegen bent gekomen is dus ook in meetkundige zin een parabool, dus een conflictlijn van een punt en een lijn. Omdat alle parabolen (algebraïsch en meetkundig gezien) gelijkvormig zijn, is de grafiek van elke kwadratische functie een conflictlijn van een punt en een lijn.

39 Bepaal het brandpunt en de richtlijn van de grafiek van de functie $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$, exact.

3 Ellips, hyperbool, meer parabool



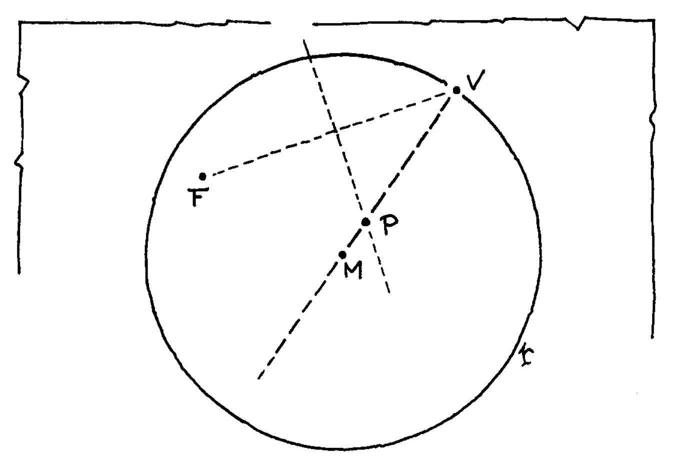
Definitie

Gegeven zijn een punt *F* en een cirkel *r* met middelpunt *M*; *F* ligt binnen *r*.
De conflictlijn tussen *F* en *r* heet een **ellips**.

F heet **brandpunt**, *r* heet **richtcirkel** van de ellips.

Een punt *P* ligt op de ellips met brandpunt *F* en richtcirkel *r* als d(*P*,*F*) = d(*P*,*r*). Als je een punt *P* op de ellips hebt, kun je zijn voetpunt *V* op r bepalen. Omdat |*PF*| = |*PV*|, ligt *P* op de middelloodlijn van *FV*.
Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt *V* op *r* het bijbehorende punt *P* op de ellips bepalen. Als volgt:

- Richt de loodlijn in *V* op *r* op (dat is de lijn van *V* naar het middelpunt *M* van *r*).
- Teken de middelloodlijn van *FV*.
- Het snijpunt van deze twee lijnen is *P*.



40 De constructie van de ellips vanuit voetpunten

a. Teken een cirkel *r* met straal 4 cm en een punt *F* op afstand 3 cm van het middelpunt *M*.
Kies vijf voetpunten op *r* en voer bovenstaande constructie met elk van deze voetpunten uit. Schets daarna de ellips met *F* als brandpunt en *r* als richtlijn.
b. Dezelfde opdracht, maar nu met *F* op afstand 1 cm van het middelpunt *M* van *r*.

Het is duidelijk dat de lijn *FM* symmetrieas is van de ellips.
c. Bereken van de twee ellipsen in **a** en **b** hoe lang het stuk van de symmetrieas is, binnen de ellips.
d. Zijn alle ellipsen gelijkvormig?

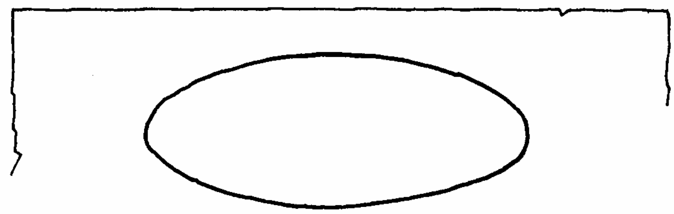
41 a. Bekijk nog eens bovenstaande constructie.
Leg uit dat $|PF|+|PM|$ voor elk punt P op de ellips hetzelfde is.
b. We verwisselen de rollen van F en M.
Wat is de conflictlijn tussen het punt M en de cirkel r' met middelpunt F en dezelfde straal als r?

F en M zijn dus gelijkwaardig. Een ellips heeft dus twee brandpunten en twee richtcirkels.

Als F_1 en F_2 de brandpunten zijn van een ellips, dan is voor elk punt P op de ellips de som van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde: $|PF_1| + |PF_2|$ is constant.
Die constante is de straal van de richtcirkels.
We noemen haar de **ellipsconstante**.

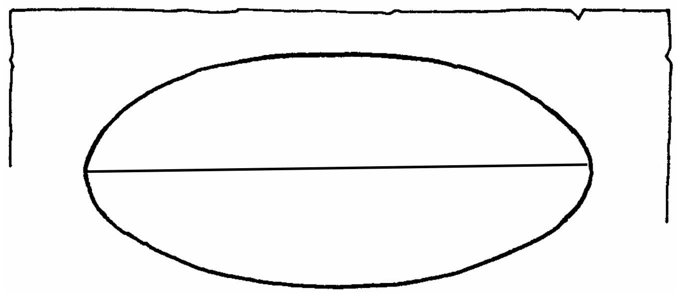
Een ellips met brandpunten F_1 en F_2 heeft twee symmetrieassen: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van F_1F_2. Deze symmetrieassen snijden de ellips in de zogenaamde **toppen**. Het lijnstuk dat door de ellips van de lijn F_1F_2 wordt afgesneden heet de **lange as**. Het lijnstuk dat door de ellips van de middelloodlijn van F_1 en F_2 wordt afgesneden heet de **korte as**.

42 Van een ellips is $|F_1F_2| = 24$ en is de ellipsconstante 26.



a. Hoe lang is de lange as?
b. Bereken hoe lang de korte as is.

43 Van een ellips is de lange as 34 en de korte as 16. De lange as is in de ellips getekend.

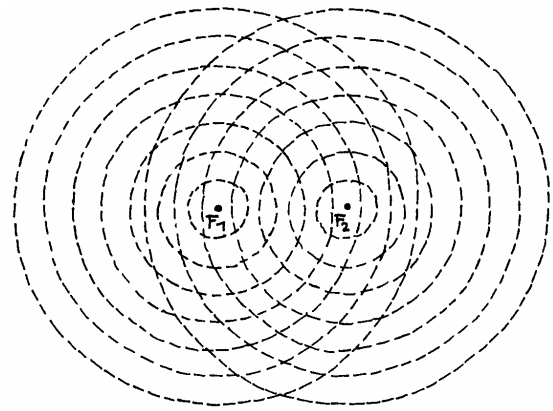


a. Wat is de ellipsconstante?

b. Bereken de afstand van de brandpunten.
c. Teken de brandpunten van de ellips op het werkblad.

De eigenschap dat de som van de afstanden tot de brandpunten voor punten op de ellips constant is, brengt ons op een andere constructiemethode voor de ellips.

44 Op het werkblad staan de brandpunten F_1 en F_2 van een ellips en isoafstandslijnen van F_1 en F_2 bij afstanden 1, 2 3, 4, 5, 6 en 7.
a. Teken enkele punten van de ellips als de ellipsconstante 6 is en schets daarna de ellips.



b. Ook als de ellipsconstante 11 is.
De constructie via de som van de afstanden tot de brandpunten is heel praktisch. Duw twee punaises op de plaatsen van de brandpunten en maak met een touwtje een lus. Leg de lus om de punaises en trek hem strak met een potlood. Door het potlood rond te bewegen, teken je een ellips.

45 De afstand van de brandpunten in opgave **44** is $4\frac{1}{2}$.
a. Hoe lang moet de lus zijn voor de ellips uit **44a**?
b. En voor de ellips uit **44b**?

De touwtjesconstructie wordt in Duitsland "die Gärtnerkonstruktion" genoemd. Dit omdat deze wel door tuinlieden wordt gebruikt voor de aanleg van ovale bloemperken. De constructie werd het eerst beschreven door Anthemius van Tralles (6e eeuw), een van de bouwmeesters van de Hagia Sophia te Constantinopel.

Definitie

Gegeven zijn een punt *F* en een cirkel *r* met middelpunt *M*; *F* ligt buiten *r*.
De conflictlijn tussen *F* en *r* is een tak van een **hyperbool**.
De punten *F* en *M* heten de **brandpunten** van de hyperbool. *r* heet **richtcirkel** van de hyperbool.

Een punt P ligt op de hyperbooltak met brandpunt F en richtcirkel r als d(P,F) = d(P,r). Als je een punt P op de hyperbooltak hebt, kun je zijn voetpunt V op r bepalen. Omdat $|PF| = |PV|$, ligt P op de middelloodlijn van FV. Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt V op r het bijbehorende punt P op de hyperbooltak bepalen.

46 De constructie van de hyperbool vanuit voetpunten
a. Teken een cirkel r met straal 4 cm en een punt F buiten r op afstand 1 cm van r.
Kies vier voetpunten op r en zoek de bijbehorende punten van de hyperbool. (Je kunt alleen maar bij voetpunten op r die "aan de kant van F" liggen punten van de hyperbool vinden; we komen daarop terug in opgave **49**.)
Schets daarna de hyperbooltak met F als brandpunt en r als richtlijn.
b. Dezelfde opdracht, maar nu met F op afstand 3 cm van het middelpunt van r.

Het is duidelijk dat een hyperbooltak een **symmetrieas** heeft en een **top** (het punt dat het dichtst bij r ligt).

47 a. Bekijk nog eens de constructie in de vorige opgave.
Leg uit dat $|PM| - |PF|$ voor elk punt P op de hyperbooltak hetzelfde is.

We verwisselen de rollen van F en M. De conflictlijn tussen het punt M en de cirkel r' met middelpunt F en dezelfde straal als r is ook een hyperbooltak.
b. Wat weet je van $|PM| - |PF|$ voor de punten P op deze conflictlijn?
c. We hebben nu twee hyperbooltakken.
Wat hebben die met elkaar te maken?

De twee hyperbooltakken samen vormen de hyperbool met brandpunten F en M. Een hyperbool heeft dus twee brandpunten en twee richtcirkels.

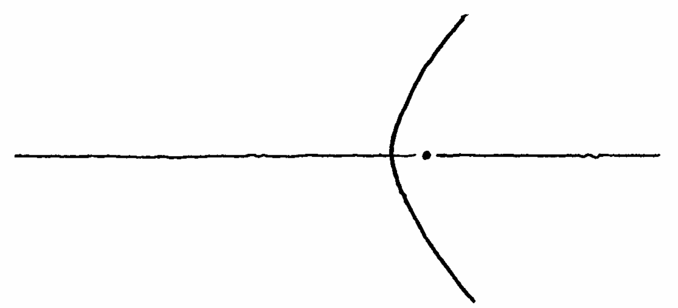
Als F_1 en F_2 de brandpunten zijn van een hyperbool, dan is voor elk punt P op de hyperbool het absolute verschil van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde:
$\big||PF_1| - |PF_2|\big|$ is constant.
Die constante is de straal van de richtcirkels.
We noemen haar de **hyperboolconstante**.

Een hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 heeft twee **symmetrieassen**: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van F_1F_2. De eerste symmetrieas snijdt de hyperbool in de zogenaamde **toppen**. Het verbindingslijnstuk tussen de toppen heet de **as** van de hyperbool.

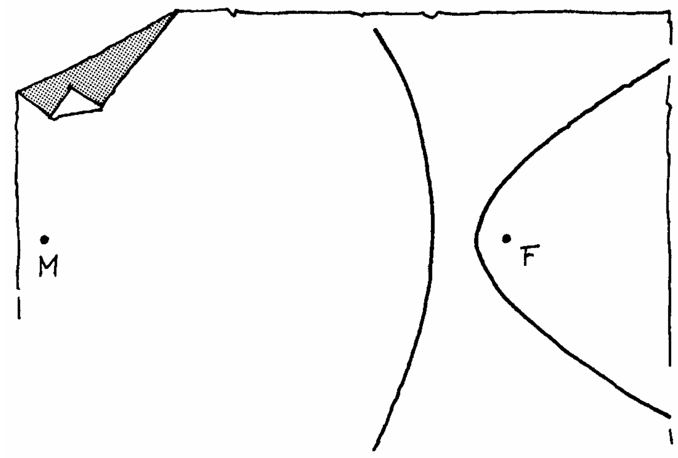
48 Hieronder staat een hyperbooltak met een van zijn brandpunten en zijn symmetrieas. Van de hyperbool is $|F_1F_2| = 6$ en is de hyperboolconstante 4.

a. Teken op het werkblad de richtcirkel.

b. Hoe lang is de as?



49 Hieronder staat een tak van een hyperbool met zijn brandpunt F en een stuk van zijn richtcirkel r.



Bij elk punt P op de hyperbooltak bepalen we zijn voetpunt op de richtcirkel. Deze voetpunten tezamen vormen een boog van de richtcirkel.

a. Geef op het werkblad zo goed mogelijk die boog aan.

b. Teken in de tweede figuur op het werkblad de raaklijnen uit F aan de richtcirkel.

Noem de raakpunten R_1 en R_2.

c. Leg uit dat R_1 en R_2 geen voetpunten van punten op de hyperbooltak kunnen zijn.

Kennelijk zijn R_1 en R_2 de eindpunten van de cirkelboog uit **a**.

Noem de middelloodlijnen van FR_1 en FR_2: a_1 en a_2.

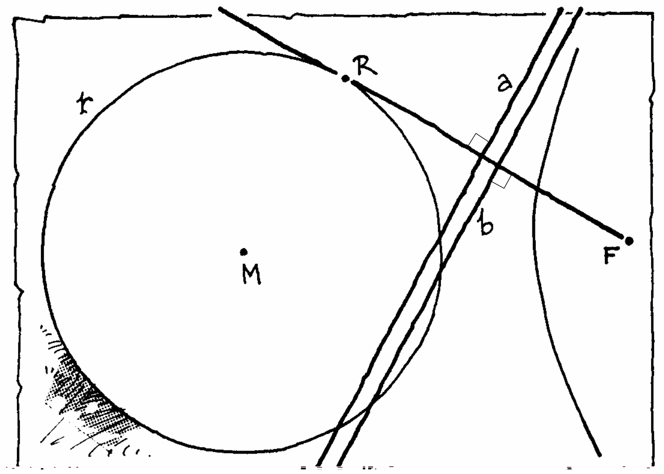
d. Bewijs dat a_1 en a_2 door het midden van FM gaan.

e. Bewijs dat elk punt Q van a_1 dat dichter bij de richtcirkel ligt dan bij het brandpunt.

Tip: Driehoeksongelijkheid in driehoek MQR_1.

In **e** heb je gezien dat de hyperbooltak geheel aan één kant van a_1 ligt. In de volgende opgave bewijzen we dat de hyperbooltak willekeurig dicht bij a_1 komt. Bijgevolg is de lijn a_1 **asymptoot** van de hyperbooltak.

50 In de figuur hieronder is *r* de richtcirkel (*M* is zijn middelpunt) en *F* het brandpunt van een hyper-booltak. Getekend is een raaklijn uit *F* aan *r*; het raakpunt heet *R*. *a* is de middelloodlijn van *FR*; *b* is een lijn parallel aan *a*, aan de kant van *F*.



We willen bewijzen dat er tussen *a* en *b* nog punten van de hyperbooltak liggen. (Omdat *b* willekeurig dicht bij *a* gekozen kan worden, is *a* bijgevolg asymptoot van de hyperbooltak.)

a. Bepaal op het werkblad het spiegelbeeld *G* van *F* in *b*. Bepaal de snijpunten *A* en *B* van *MG* met respectievelijk *a* en *b*.

b. Bewijs dat d(*B*,*r*) > |*BF*|, dus dat *B* aan die kant van de conflictlijn ligt waar *F* ook ligt.

c. Bewijs dat d(*A*,*r*) < |*AF*|, dus dat *A* aan die kant van de conflictlijn ligt waar *r* ook ligt.

d. Leg uit hoe uit **b** en **c** volgt dat er een punt is van de hyperbooltak tussen *a* en *b*.

4 Op de computer

Parabolen, ellipsen en hyperbolen kun je ook goed tekenen met een meetkunde-computerprogramma. Daarvoor construeer je vanuit een voetpunt op de richtlijn of richtcirkel een punt van de conflictlijn. Vervolgens sleep je het voetpunt over de richtlijn/richtcirkel. Het spoor van het geconstrueerde punt is de conflictlijn.
Meetkunde computerprogramma's zijn:

- CABRI
- PenL (Passer en Liniaal) (freesoftware)
- WinGeometry (freesoftware)
- Geonet (freesoftware)
- GeoGebra, tegenwoordig **het** standaardprogramma op dit gebied.

De opdrachten in deze paragraaf moet je met zo'n meetkunde-computerprogramma op het scherm uitvoeren.

51 **a.** Teken een lijn *r* en een punt *F*.
Kies een voetpunt *V* op *r*.
Construeer hierbij een punt *P* van de parabool met richtlijn *r* en brandpunt *F*. Zie zonodig opgave **16**.
Sleep *V* over *r*; dan beweegt *P* over de parabool.
b. Het punt *P* is het snijpunt van de loodlijn in *V* op *r* en de middelloodlijn van *FV*.
Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de parabool?

52 We gaan verder met de parabool van opgave **51**.
a. Hoe verandert de parabool als je *r* draait?
b. Hoe verandert de parabool als je het punt *F* naar *r* toe beweegt?

53 **a.** Teken een cirkel *r* en een punt *F* daarbinnen.
Kies een voetpunt *V* op *r*.
Construeer hierbij een punt *P* van de ellips met richtcirkel *r* en brandpunt *F*. Zie zonodig opgave **40**.
Sleep *V* over *r*; dan beweegt *P* over de ellips.
b. Het punt *P* is het snijpunt van de loodlijn in *V* op *r* en de middelloodlijn van *FV*.
Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de ellips?

54 We gaan verder met de ellips van opgave **53**.
a. Hoe verandert de ellips als je *F* om het middelpunt van *r* draait?
b. Hoe verandert de ellips als je het punt *F* naar *r* toe beweegt?
En als je *F* naar het middelpunt van *r* toe beweegt?

55 **a.** Teken een cirkel *r* en een punt *F* daarbuiten.
Kies een voetpunt *V* op *r*.

Construeer hierbij een punt *P* van de hyperbooltak met richtcirkel *r* en brandpunt *F*. Zie zonodig opgave **46**.
Sleep *V* over *r*; dan beweegt *P* over de hyperbooltak.
b. Het punt *P* is het snijpunt van de loodlijn in *V* op *r* en de middelloodlijn van *FV*.
Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de hyperbooltak?
c. Welke punten kunnen als voetpunt optreden?

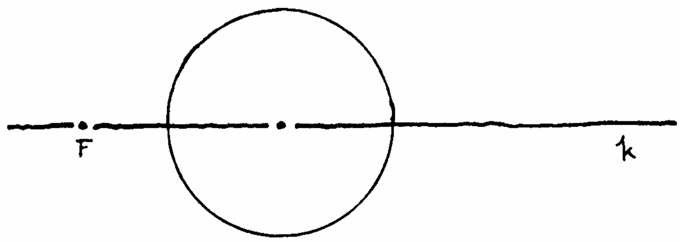
56 We gaan verder met de hyperbool van opgave **55**.
a. Hoe verandert de hyperbool als je *F* om het middelpunt van *r* draait?
b. Hoe verandert de hyperbool als je het punt *F* naar *r* toe beweegt?

Met GeoGebra kun je de *baan* tekenen die een punt beschrijft als een ander punt wordt versleept. Een conflictlijn is ook zo'n baan: het is de verzameling punten met een zekere eigenschap. Zo'n verzameling punten noemt men ook wel LOCUS of MEETKUNDIGE PLAATS.

57 a. Gegeven zijn twee punten *A* en *B*.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van *A* en *B* liggen?
b. Gegeven zijn twee lijnen *a* en *b*.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van *a* en *b* liggen? Onderscheid twee gevallen.
c. Gegeven is een punt *A* en een positief getal *r*.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op afstand *r* van *A* liggen?
d. Gegeven zijn een cirkel *c* met straal *r* en een positief getal *s*.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op afstand *s* van *c* liggen? Onderscheid drie gevallen.
e. Gegeven zijn een lijn *a* en een punt *A* dat niet op *a* ligt.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van *A* en *a* liggen?
f. Gegeven zijn een lijn *a* en daarop een punt *A*.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van *A* en *a* liggen?
g. Gegeven zijn een cirkel *r* en een punt *A* daarbinnen.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van *A* en *r* liggen?
h. Gegeven zijn een cirkel *r* en een punt *A* daarbuiten.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van *A* en *r* liggen?
i. Gegeven zijn een cirkel *r* en een punt *A* daarop.
Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van *A* en *r* liggen?

58 Met dezelfde richtcirkel

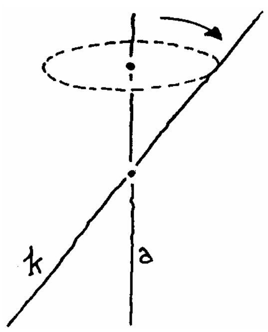
Teken op het scherm een cirkel en een lijn *k* door zijn middelpunt. Teken op *k* een punt *F*.



Construeer de conflictlijn met de cirkel als richtcirkel en *F* als brandpunt.
Versleep *F* over *k* en constateer hoe de conflictlijn verandert.

5 Anders bekeken

Er zijn ook heel andere manieren om tegen parabool, ellips en hyperbool aan te kijken. We laten enkele daarvan de revue passeren. Het is soms helemaal niet duidelijk dat de verschillende benaderingen dezelfde figuren opleveren. Het gaat te ver dit aan te tonen. Deze paragraaf heeft dan ook meer een beschrijvend karakter.

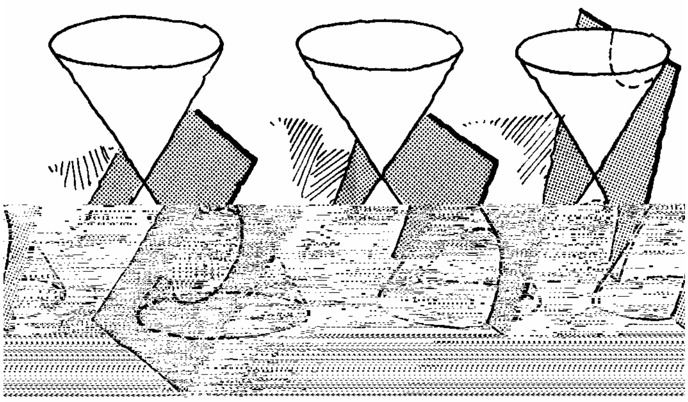


Kegelsneden

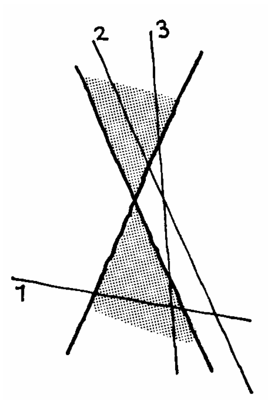
Twee lijnen *a* en *k* snijden elkaar. Als je *k* om *a* wentelt, ontstaat een **kegel**. In het dagelijks leven is een kegel een figuur met een top en een grondvlak. Nu (en in het algemeen in de wiskunde) heeft een kegel twee stukken die elkaars spiegelbeeld zijn in de top. Beide stukken zijn onbegrensd. (Om een goed plaatje te krijgen, tekenen we er wel een grondvlak en bovenvlak bij; bedenk echter dat de kegel daar niet ophoudt.)

Een **kegelsnede** is een figuur die je krijgt door een kegel met een vlak te snijden.

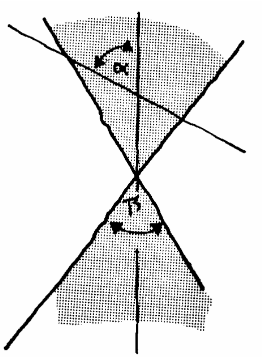
Afhankelijk van de hoek die het vlak maakt met de as van de kegel krijg je:



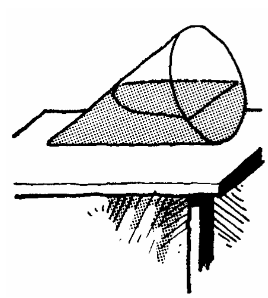
1. een ellips: dat is een gesloten snijkromme met één van de twee helften van de kegel.
2. een parabool: dat is een onbegrensde snijkromme met één van de twee helften van de kegel.
3. een hyperbool: die heeft twee onbegrensde takken; met elke helft van de kegel een.



Hiernaast staat in een dwarsdoorsnede aangegeven hoe je moet snijden om de drie gevallen te krijgen.
Je zou kunnen zeggen dat de parabool het grensgeval is tussen ellips en hyperbool.

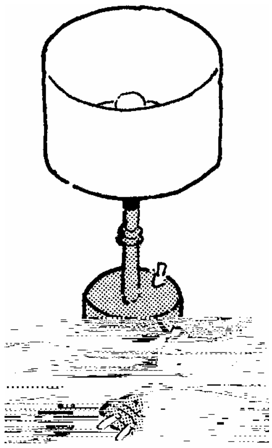


59 Noem de hoek die het snijvlak met de as van de kegel maakt α. Noem de tophoek van de kegel β. In de dwarsdoorsnede hiernaast zijn α en β aangegeven.
a. Voor welke α is de snijfiguur een cirkel?
b. Voor welke α is de snijfiguur een langgerekte, smalle ellips?
c. Hoe moet je een kegel snijden om twee rechte lijnen als snijfiguur te krijgen?
d. Wat merk je op over de snijkrommen als je de kegel snijdt met twee evenwijdige vlakken?

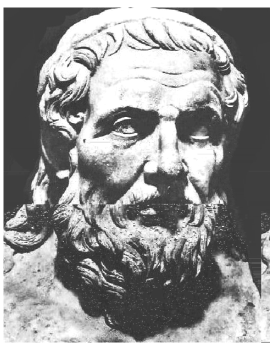


60 Een holle doorzichtige kunststoffen kegel ligt op tafel. Hij is gedeeltelijk gevuld met water. Zie plaatje.
a. Wat is de vorm van het wateroppervlak?
b. Wat wordt die vorm als de kegel aan de linkerkant (bij de top) wordt opgetild?
c. En als hij aan de rechterkant (bij het grondvlak) wordt opgetild?

Een andere manier om kegelsneden zichtbaar te maken is met licht.

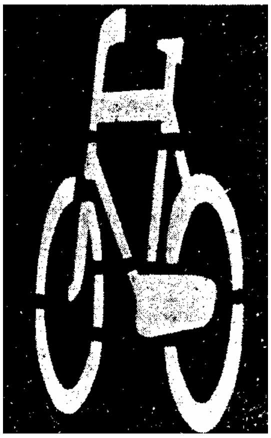


61 Laat in een donkere kamer een lichtkegel schuin op de vloer vallen. Het verlichte deel van de vloer is een kegelsnede.
a. Wat weet je van de lichtkegel ten opzichte van de vloer, als het verlichte deel een parabool is.
b. Hoe moet je de lichtkegel draaien om een ellips te krijgen. En hoe om een hyperbooltak te krijgen?
c. Van een staande schemerlamp laat de kap geen licht door. Zodoende wordt maar een deel verlicht van de muur waar de lamp bij staat.
Wat is de vorm van de lichtvlek op de muur?



62 Een bol ligt op tafel en wordt beschenen door een puntvormige lichtbron. De schaduw die de bol op tafel werpt, is een kegelsnede.
Wat weet je van de positie van de lichtbron ten opzichte van de bol als de schaduw een parabool is?

In de oudheid schreef Apollonius van Perga (ca 262 - ca 190 voor Chr) de *Conica*: acht boeken waarin hij de kegelsneden behandelde.



Opgerekte cirkel

Als je scheef op een cirkel kijkt, zie je een ellips. Probeer maar bij de rand van een emmer, een lampenkap, of de middencirkel op een voetbalveld. Je ziet de cirkel dan in één richting verkort en in de richting loodrecht daarop onverkort.
Omgekeerd, als een vorm in werkelijkheid een ellips is, kun je hem zien als cirkel door er vanuit een geschikte plek naar te kijken. Daarom worden fietsen opgerekt op het wegdek geschilderd.

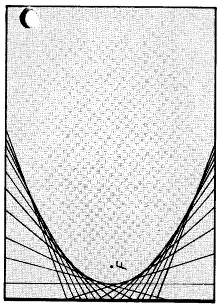
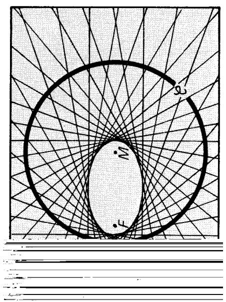
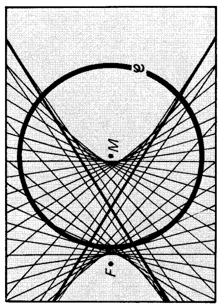
"Oprekken en indrukken" is wiskundig "vermenigvuldigen ten opzichte van een lijn". Op de GR gaat dat eenvoudig.

63 We gaan uit van de eenheidscirkel met bewegingsvergelijkingen: $x = \cos t$, $y = \sin t$. Zorg voor een vierkant scherm, via ZOOM 5:ZSquare.
We vermenigvuldigen de eenheidscirkel met factor a ten opzichte van de y-as (met $a > 0$).
a. Teken voor enkele waarden van a de krommen met bewegingsvergelijkingen $x = a \cdot \cos t$, $y = \sin t$.
b. Geef bewegingsvergelijkingen van een ellips met lange as 8 en korte as 6.

Vouwen

Neem een rechthoekig stuk papier. Teken daarop een punt F. Kies een van de randen van het papier. Maak scherpe vouwen zo dat die rand door F gaat. Als je voldoende vouwen hebt, wordt de parabool zichtbaar met F als brandpunt en de rand van het papier als richtlijn.

De plaatjes zijn afkomstig uit *Pythagoras*, jrg 20, nr2.

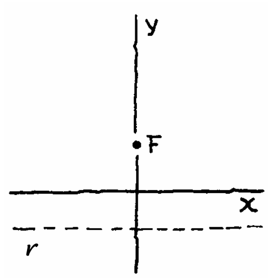
Door een cirkelrand te vouwen op een punt F, kun je een ellips en een hyperbool zichtbaar maken.

Vergelijkingen

In klas 3 heb je kennis gemaakt met formules voor rechte lijnen, parabolen, cirkels en hyperbolen in een assenstelsel.

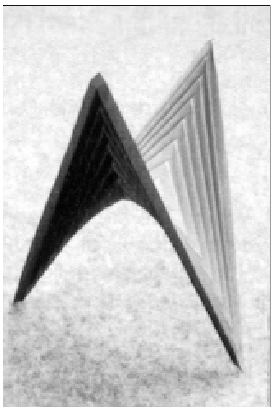
- rechte lijn: $y = ax + b$
- parabool: $y = px^2$ (als (0,0) de top is)
- cirkel: $x^2 + y^2 = r^2$ (als (0,0) het middelpunt is)
- hyperbool: $x \cdot y = c$ (als (0,0) het middelpunt is).

In dit hoofdstuk hebben we een parabool gedefinieerd als conflictlijn tussen punt en lijn. We laten zien dat een formule voor die conflictlijn inderdaad van de vorm $y = px^2$ is. (De parabolen uit klas 3 en de parabolen uit klas 6 zijn dus dezelfde figuren, zie ook de opmerking na opgave van paragraaf 1.)



64 In een assenstelsel zijn gegeven: het punt $F = (0,1)$ en de lijn r: $y = -1$. We bekijken de conflictlijn van F en r.
a. Laat zien dat de volgende punten op de conflictlijn liggen: (0,0), (2,1), (-4,4), $(3,2\frac{1}{4})$, (-6,9).
b. Zij $P = (x,y)$ een punt van de conflictlijn.
Druk d(P,r) en $|PF|$ beide uit in x en y.
c. Deze afstanden zijn gelijk. Laat zien dat daaruit volgt dat $y = \frac{1}{4}x^2$. Tip: Kwadrateer beide afstanden en vereenvoudig.

65 In de vorige opgave heb je gezien dat de conflictlijn tussen $F = (0,1)$ en r: $y = -1$ vergelijking $y = \frac{1}{4}x^2$ heeft.
Bij welk brandpunt en welke richtlijn heeft de conflictlijn vergelijking $y = x^2$?



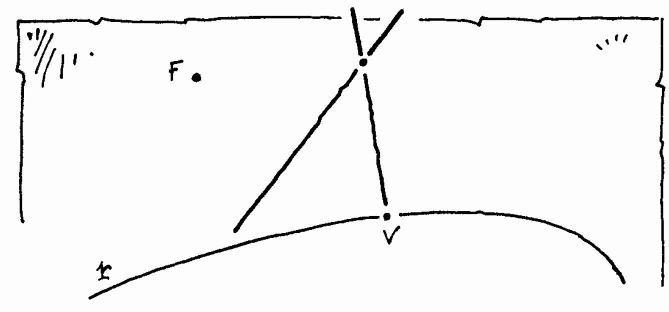
De hyperbolische parabool, gevouwen uit een vierkant stuk papier (origami).

66 De eenheidscirkel (met middelpunt (0,0) en straal 1) heeft vergelijking $x^2 + y^2 = 1$. Door deze te vermenigvuldigen met factor 2 ten opzichte van de y-as ontstaat de ellips met vergelijking $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.
a. Geef een vergelijking van de ellips die ontstaat door de eenheidscirkel ten opzichte van de y-as te vermenigvuldigen met 3 en ten opzichte met de x-as met 4.
b. Van een ellips zijn de toppen (5,0), (-5,0), $(0,\sqrt{3})$ en $(0,-\sqrt{3})$. Geef een vergelijking van die ellips.
c. Schets de ellipsen met vergelijking:
$4x^2 + y^2 = 1$, $3x^2 + 5y^2 = 1$ en $2x^2 + 3y^2 = 12$.
Hoe lang zijn de assen?

Vergelijkingen van hyperbolen zullen we hier niet bespreken.

6 De raaklijneigenschap

De constructie van punten van een parabool, ellips en hyperbool gaat bij alledrie volgens hetzelfde principe. Dat principe gaat bij een gegeven gladde kromme *r* en een punt *F* (dat niet op *r* ligt) als volgt.

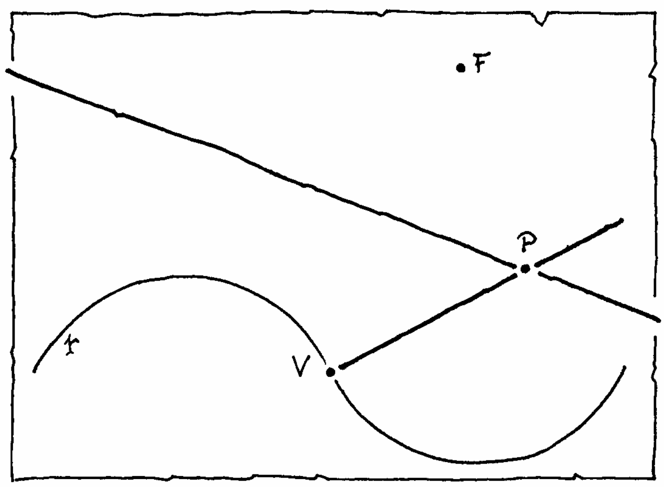


Kies een punt *V* op *r*.

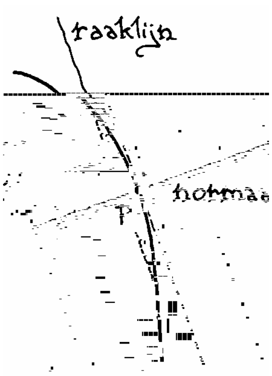
- Richt de loodlijn in *V* op *r* op (dat is de lijn die loodrecht staat op de raaklijn aan *r* in *V*).
- Teken de middelloodlijn van *FV*.
- Het snijpunt van deze twee lijnen ligt op de conflictlijn van *F* en *r*.

Bij de parabool is *r* een rechte lijn, bij de ellips en hyperbool is *r* een cirkel.
Om deze constructie mogelijk te maken, moet *r* een "gladde" kromme zijn, dat wil zeggen dat in elk punt de raaklijn bestaat.

Opmerking
De constructie gaat niet altijd goed. In de situatie hieronder is het punt *P* met de constructie bepaald. Maar *P* is geen punt van de conflictlijn van *r* en *F*. Waarom niet?



Als *r* een rechte lijn of een cirkel is (zoals bij een parabool, ellips en hyperbool) gaat de constructie wel altijd goed.



Gegeven is een punt *P* op een parabool, ellips of hyperbool *C*.
Een lijn *k* door *P* is een **steunlijn** van *r* als alle punten van *C* (op *P* na) aan één kant van *k* liggen.
Als er in het punt *P* maar één steunlijn is, noemen we dat de **raaklijn in   aan** .
In dat geval noemen we de lijn die in *P* loodrecht staat op *r* de **normaal in   op** .

Stelling
Gegeven is een lijn of cirkel *r* en een punt *F*. *P* is een punt op de conflictlijn tussen *r* en *F*.
Bij *P* hoort een voetpunt *V* op *r*. De middelloodlijn van *FV* noemen we *m*.
Dan is *m* raaklijn aan de conflictlijn en *P* is het raakpunt.

Bewijs
Voor elk punt *Q* op *m*, *Q* is een ander punt dan *P*, geldt:
1. $d(Q,r) < d(Q,V)$
2. $d(Q,V) = d(Q,F)$

Hieruit volgt: $d(Q,r) < d(Q,F)$.
Dus ligt elk punt *Q* van m (behalve *P*) dichter bij *r* dan bij *F*.
Dus ligt de conflictlijn aan die kant van *m* waar *F* ligt.
Dus is *m* steunlijn van de conflictlijn.

Dat er door *P* geen andere steunlijn van de conflictlijn gaat, is nu nog niet bewezen. Dat bewijs is te lastig om hier te geven.

67 Maak een plaatje bij de situatie zoals in de stelling is beschreven.
a. Waarom geldt punt 1. van het bewijs?
b. Waarom geldt punt 2. van het bewijs?

Stelling
Dezelfde gegevens als in de vorige stelling.
Dan is *m* de bissectrice van $\angle VPF$.

Bewijs
Noem het snijpunt van *m* met *FV*: *M*.
1. $|PV| = |PF|$ (want *P* ligt op de conflictlijn)
2. $|VM| = |FM|$ (want *M* ligt op de middelloodlijn van *FV*)
3. $|PM| = |PM|$
4. *VPM* en *FPM* zijn congruente driehoeken (1,2,3, ZZZ)
5. $\angle VPM = \angle FPM$ (uit 4.)

Conclusie

Gegeven is de parabool / ellips / hyperbool met F als brandpunt en r als richtlijn / richtcirkel.
P is een punt daarop en V is het voetpunt van P op r.

Dan is de raaklijn in P middelloodlijn van FV en deze maakt gelijke hoeken met PF en PV.

68 Gegeven is een lijn r en een punt F. k is de lijn door F die evenwijdig is aan r.
Maak een tekening van deze situatie.
a. Zoek de punten op k die op de parabool met brandpunt F en richtlijn r liggen.
b. Hoe groot zijn de hoeken waaronder k de parabool snijdt? (Dat zijn de hoeken die k maakt met de raaklijnen aan de parabool.)

l is de lijn die evenwijdig is aan r zo dat F midden tussen r en l in ligt.
c. Zoek de snijpunten van l met de parabool.
d. Hoe groot zijn de hoeken waaronder l de parabool snijdt?

m is de lijn die evenwijdig is aan r en tussen F en r loopt.
De lijn m snijdt de parabool onder hoeken van 30°.
e. Bewijs dat $d(m,F) = \frac{1}{3} \cdot d(r,F)$.

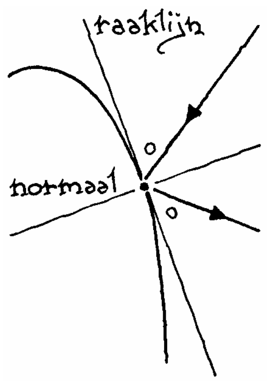
69 Gegeven is een cirkel r met straal 8 en een punt F daarbinnen op afstand 4 van het middelpunt M van r.
k is de lijn door F die loodrecht staat op de lange as van de ellips met brandpunt F en richtcirkel r.
Maak een tekening van de situatie.
a. Geef in de tekening aan waar ongeveer de snijpunten van k met de ellips liggen.

Als S zo'n snijpunt is en $|SF| = x$, dan $x + \sqrt{16 + x^2} = 8$.
b. Leg dat uit.
c. Bereken x.
d. Bereken hoe groot de hoeken zijn waaronder k de ellips snijdt, in graden nauwkeurig.

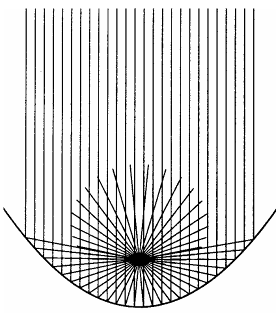
70 Gegeven is een cirkel *r* met straal 2 en een punt *F* daarbuiten op afstand 4 van het middelpunt van *r*.
k is de lijn door *F* die loodrecht staat op de as van de hyperbooltak met brandpunt *F* en richtcirkel *r*.
Maak een tekening van de situatie.
a. Geef in de tekening aan waar ongeveer de snijpunten van *k* met de hyperbooltak liggen.
b. Bereken hoe groot de hoeken zijn waaronder *k* de hyperbooltak snijdt in graden nauwkeurig.

De middelloodlijnen tussen brandpunt en voetpunt zijn raaklijnen aan de conflictlijn. Op deze eigenschap is de vouwconstructie van bladzijde 184 gebaseerd. We gaan de betekenis van deze eigenschap formuleren voor parabool, ellips en hyperbool afzonderlijk.

Raaklijneigenschap parabool
De raaklijn in een punt *P* van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die *P* verbindt met het brandpunt en de lijn door *P* loodrecht op de richtlijn.



Hoek van inval = hoek van terugkaatsing
Een lichtstraal valt in een punt *P* op een spiegelend oppervlak *s*. De straal wordt weerkaatst. De teruggekaatste lichtstraal maakt een even grote hoek met *s* als de invallende: "de hoek van inval is de hoek van terugkaatsing".



71 De parabolische spiegel
Gegeven is een parabool. Een lichtstraal is evenwijdig aan de as van de parabool en valt op de parabool.
a. Leg uit dat de teruggekaatste lichtstraal door het brandpunt van de parabool gaat.
b. Leg uit dat de weg van elk van de getekende lichtstralen tot het brandpunt even lang is.

Als een evenwijdige lichtbundel (zoals van de zon) evenwijdig is aan de as van een parabolische spiegel, worden alle lichtstralen dus gespiegeld naar het brandpunt. Vandaar ook de naam brandpunt. Volgens dit principe werken ook schotelantennes en radiotelescopen.
Volgens een legende zou Archimedes (287-212 voor Chr.) in de strijd tegen Rome voor zijn vaderstad Syracuse parabolische spiegels hebben ontworpen. Door de spiegels zo te richten dat de zonnestralen werden gebundeld op de vijandelijke Romeinse houten schepen, zouden deze in brand zijn gestoken.

De radiotelescoop te Effelsberg (Duitsland) is met zijn diameter van 100 meter een van 's werelds grootste volledig stuurbare telescopen.

72 Fluisteren over grote afstand
Op een kinderspeelplaats in Antwerpen staan twee parabolische spiegels met dezelfde as. De spiegels staan 50 meter van elkaar en zijn naar elkaar toe gericht.
Hoe kun je met deze spiegels fluisteren en toch over een grote afstand verstaan worden?

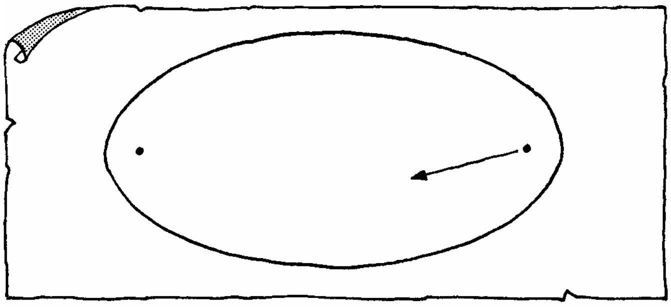
Raaklijneigenschap ellips en hyperbool

De raaklijn in een punt P van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met beide brandpunten.

73 De elliptische spiegel
Gegeven is een ellips. In een van de brandpunten bevindt zich een puntvormige lichtbron. De lichtstralen vallen op de ellips en worden teruggekaatst.
Leg uit dat alle teruggekaatste lichtstralen door het andere brandpunt gaan.

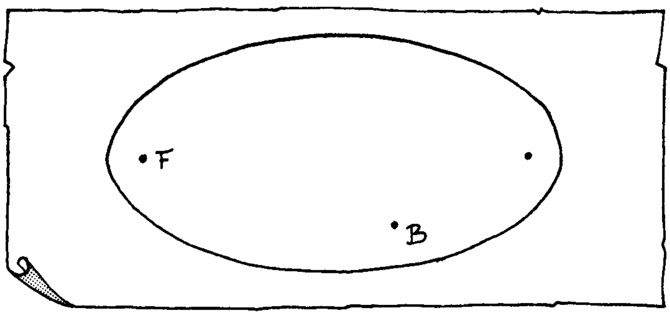
74 Een oude opgave
In zijn beroemde boek *Over brandspiegels* stelt Anthemius van Tralles het volgende probleem: *Ontwerp een situatie waarbij een zonnestraal die door een klein gaatje binnenkomt op elk moment van de dag en op elke dag van het jaar op een gegeven vaste plek terecht zal komen.*
Wat is jouw oplossing?

75 Gegeven is een elliptische spiegel met zijn brandpunten. Vanuit het ene brandpunt vertrekt een lichtstraal zoals is aangegeven.



a. Teken op het werkblad de eerste vier spiegelingen van het verloop van de lichtstraal.
b. Wat is de limietbaan van de lichtstraal?
c. Hoe zit dat als de lichtstraal in een andere richting vertrekt?

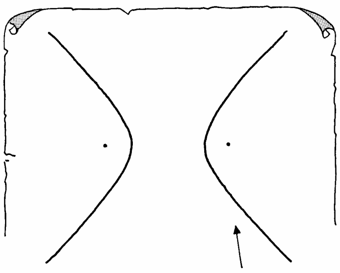
76 Op een ellipsvormig biljart liggen twee ballen: *F* en *B*. Bal *F* ligt in een van de brandpunten.



a. Hoe moet de biljarter bal *B* stoten om via de band (de ellips) zonder effect bal *F* frontaal te raken?
b. Hoe moet de biljarter bal *B* (ook nu zonder effect) stoten zodat deze via twee banden frontaal op *F* komt?

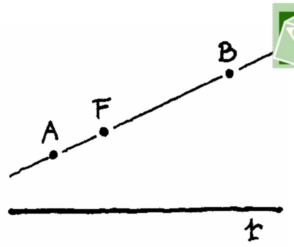
De biljarter probeert bal *B* rechtstreekts op bal *F* te spelen. Hij geeft *B* veel vaart mee, maar hij mikt onnauwkeurig zo dat hij *F* net mist: bal *B* gaat achter bal *F* langs.
c. Is er hoop dat bal *B* na een aantal banden toch nog op bal *F* komt?

77 Gegeven is een hyperbolische spiegel met zijn brandpunten. Er komt een lichtstraal aan zoals is aangegeven. Als de lichtstraal niet zou worden gespiegeld, zou hij door een van de brandpunten gaan.



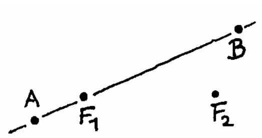
a. Teken op het werkblad de eerste vier spiegelingen van het verloop van de lichtstraal.
b. Wat is de limietbaan van de lichtstraal?
c. Hoe zit dat als de lichtstraal vanuit een andere richting komt, maar wel in de richting van het brandpunt gaat?

78 Van een parabool is gegeven de richtlijn r en het brandpunt F. Een lijn door F snijdt de parabool in de punten A en B.



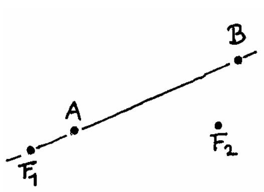
a. Teken op het werkblad de raaklijnen in A en B aan de parabool. Licht je werkwijze toe.
b. Bewijs dat deze raaklijnen loodrecht op elkaar staan.
c. Bewijs dat het snijpunt van de raaklijnen op de richtlijn van de parabool ligt.

79 Van een ellips zijn de brandpunten F_1 en F_2 gegeven. Een lijn door F_1 snijdt de ellips in de punten A en B.



a. Teken op het werkblad de raaklijnen in A en B aan de ellips. Licht je werkwijze toe.
b. Bewijs dat de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken gelijk is aan $90° - \frac{1}{2} \angle AF_2B$.

80 Van een hyperbool zijn de brandpunten F_1 en F_2 gegeven. Een lijn door F_1 snijdt de hyperbool in de punten A en B.



a. Teken op het werkblad de raaklijnen in A en B aan de hyperbool.
b. Bewijs dat de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken gelijk is aan $\frac{1}{2} \angle AF_2B$.

7 Extra opgaven

Tot nu toe
We kennen nu de conflictlijn in de volgende situaties:

- twee punten;
- twee snijdende lijnen;
- een lijn en een punt dat niet op de lijn ligt;
- een cirkel en een punt daarbinnen;
- een cirkel en een punt daarbuiten.

Als bijzondere gevallen kun je ook nog de conflictlijn bekijken van:

- twee evenwijdige lijnen;
- een lijn en een punt daarop;
- een cirkel en een punt daarop;

maar die gevallen zijn flauw.

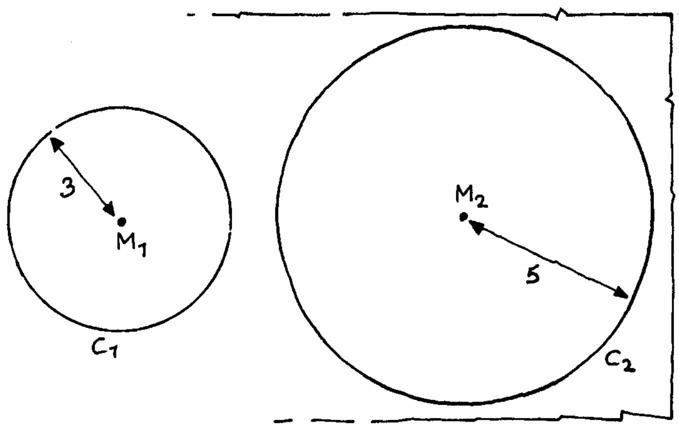
Hoe teken je in de praktijk
Van deze conflictlijnen teken je de *karakteristieke* dingen:

- van een parabool is dat de top,
- van een ellips zijn dat de toppen op de lange as,
- van een hyperbooltak zijn dat de top en de asymptoten.

Met enkele (2 à 4) extra punten kun je dan de conflictlijn heel behoorlijk tekenen. Als twee typen conflictlijnen op elkaar aansluiten (we spreken dan van een *samengestelde* conflictlijn) moet je duidelijk de *aansluitpunten* aangeven.

Sommige situaties kun je terugvoeren tot een van de bovenstaande. We geven een voorbeeld.

Twee cirkels, buiten elkaar
Gegeven zijn twee cirkels c_1 en c_2, met middelpunten M_1 en M_2 en stralen 3 en 5.
Gevraagd wordt de conflictlijn van c_1 en c_2.



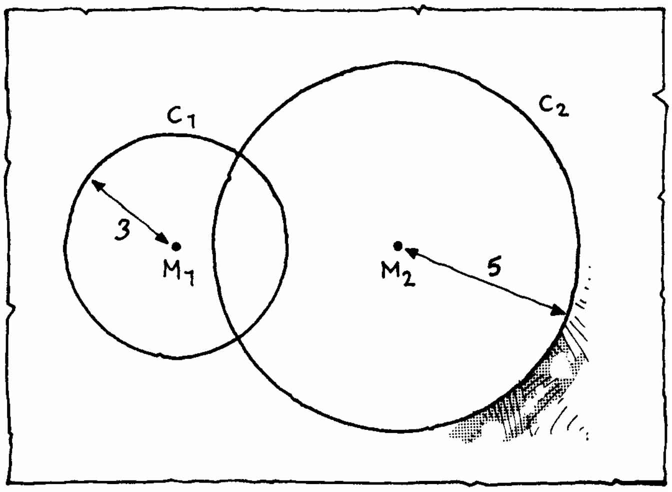
De cirkel met middelpunt M_2 en straal 2 noemen we c_3.

Dan geldt:
P ligt op de conflictlijn van c_1 en c_2 $\Leftrightarrow$ $d(P,c_1) = d(P,c_2)$
$\Leftrightarrow$ $d(P,M_1) - 3 = d(P,c_3) - 3$ $\Leftrightarrow$ $d(P,M_1) = d(P,c_3)$ $\Leftrightarrow$
P ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3.

Dus: een punt ligt even ver van c_1

3 Twee snijdende cirkels

Gegeven zijn twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 en stralen 3 en 5.



Teken de conflictlijn van c_1 en c_2 op het werkblad. Licht je antwoord toe. Onderscheid vier gevallen:

- punten binnen c_1 en buiten c_2
- punten buiten c_1 en binnen c_2
- punten binnen c_1 en binnen c_2
- punten buiten c_1 en buiten c_2

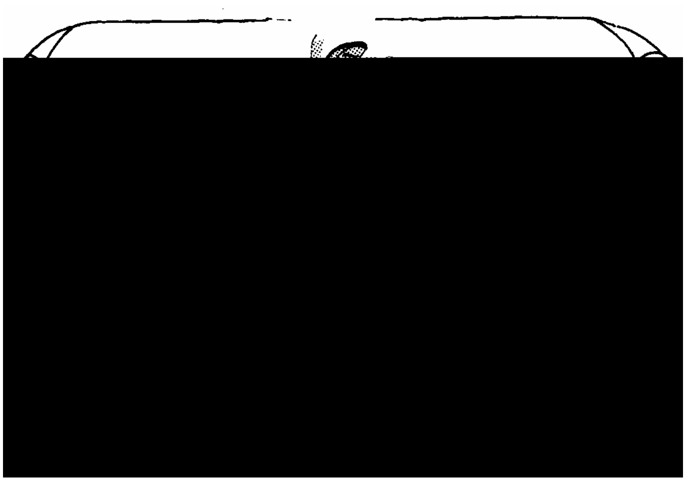
4 Lijn en cirkel

Gegeven is een lijn k en een cirkel c met middelpunt M en straal 5.

Teken de conflictlijn van k en c op het werkblad. Licht je antwoord toe.

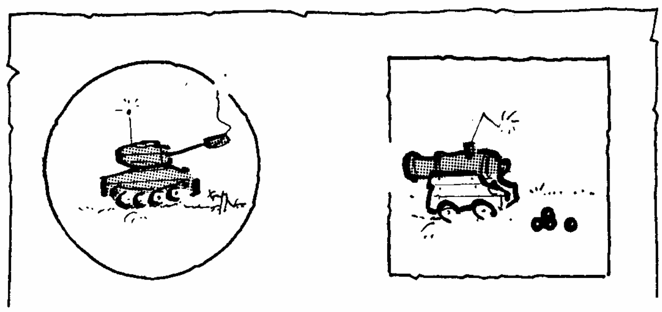
De hangbrug over de Rijn bij Emmerich. De kabels waaraan het wegdek hangt hebben de vorm van een parabool.

5 Driehoek en lijn
De zee wordt verdeeld tussen een driehoekig eiland en het vasteland volgens het naastebuurprincipe.



De conflictlijn bestaat uit vijf delen.
a. Teken op het werkblad elk van die delen. Omschrijf elk van de stukken (bijvoorbeeld: het is de bissectrice van die hoek, of het is de parabool met dit als brandpunt en dat als richtlijn).
b. Geef in de tekening aan waar precies de verschillende stukken op elkaar aansluiten.

6 Cirkel en vierkant
De zee wordt verdeeld tussen een cirkelvormig en een vierkant eiland volgens het naastebuurprincipe. De diameter van het cirkelvormige eiland en de zijde van het vierkante eiland zijn gelijk; het cirkelvormige eiland ligt midden voor het vierkant eiland.

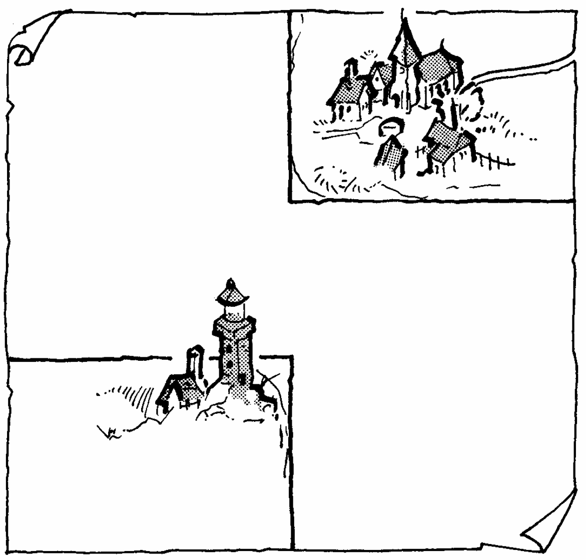


De conflictlijn bestaat uit drie delen.
Teken op het werkblad de conflictlijn. Licht je tekening toe.

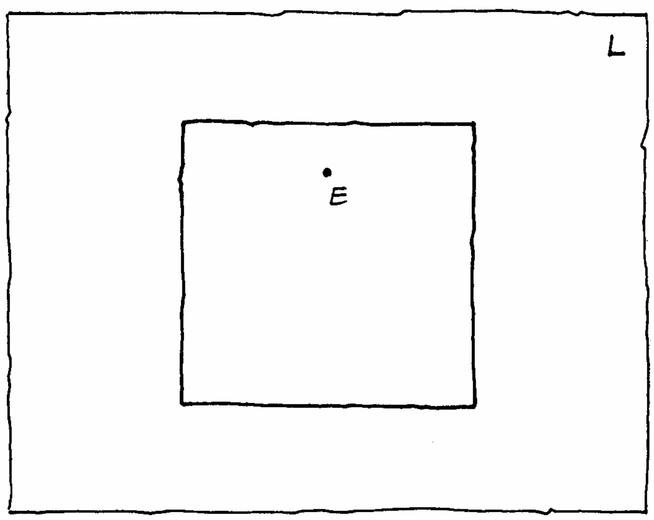
7 Twee rechte hoeken

De zee wordt verdeeld tussen twee landen volgens het naastebuurprincipe. Van de landen lopen twee kustlijnen oost-west en twee kustlijnen noord-zuid. De kustlijnen die noord-zuid lopen, liggen in elkaars verlengde.

Teken de conflictlijn. Licht je tekening toe.



8 Punt binnen vierkant



Hierboven zie je een vierkant met zijde 8 en een punt E dat respectievelijk de afstanden 2, 4, 6 en 4 tot de zijden van het vierkant heeft. De punten die buiten of op het vierkant liggen, vormen een gebied L.

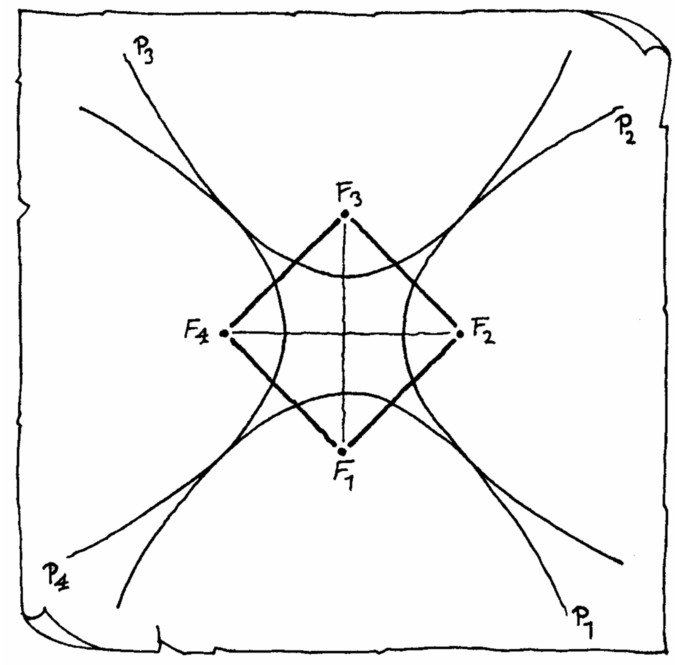
a. Teken op het werkblad de conflictlijn van E en L en beschrijf welke vorm de verschillende delen van de conflictlijn hebben.

b. Bewijs dat de conflictlijn niet overal glad is.

Profi-examen wiskunde B12, 1998 eerste tijdvak

9 Vier parabolen

Gegeven is een vierkant $F_1F_2F_3F_4$ waarvan de diagonalen lengte 4 hebben. De vier parabolen p_1, p_2, p_3 en p_4 hebben respectievelijk het punt F_1, F_2, F_3 en F_4 als brandpunt en als richtlijn die diagonaal van het vierkant, waar het betreffende brandpunt niet op ligt. Zie onderstaande figuur.



a. Bewijs dat de parabolen p_1 en p_2 elkaar raken.

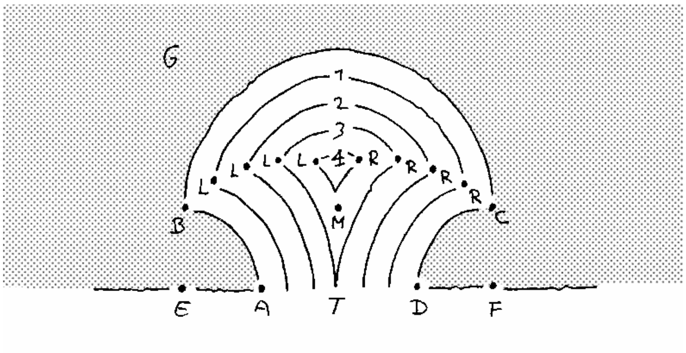
Parabool p_1 snijdt de zijde F_1F_2 in het punt S.
b. Bewijs dat de raaklijn in S aan p_1 door F_4 gaat.

Het raakpunt van de parabolen p_1 en p_2 noemen we R_{12}. Evenzo zijn R_{23}, R_{34} en R_{41} de raakpunten van p_2 en p_3, van p_3 en p_4, en van p_4 en p_1. De punten R_{12}, R_{23}, R_{34} en R_{41} zijn de hoekpunten van een vierkant V.
De vier parabolen p_1, p_2, p_3 en p_4 sluiten een gebied G in.
c. Bereken de verhouding van de oppervlakten van G en van het vierkant V.

Profi examen wiskunde B 1998 tweede tijdvak

10 Cirkelinham

Voor de gegevens, zie opgave **6** van paragraaf 1.



De punten L en R zijn knikken in de iso-afstandslijnen. In opgave **6** heb je bewezen dat voor alle punten L geldt: $LM + LE = 9$.

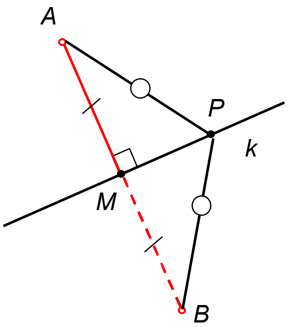
Uit $LM + LE = 9$ volgt dat de punten L op een ellips met brandpunten E en M liggen. Evenzo liggen de punten R op een ellips met brandpunten F en M. De twee ellipsen snijden elkaar in twee punten, die vanwege de symmetrie van de figuur op de middelloodlijn van EF liggen. Een van deze snijpunten is het midden T van EF. Het andere snijpunt is S. Bereken de afstand MS.

CSE VWO wiskunde b12

Antwoorden

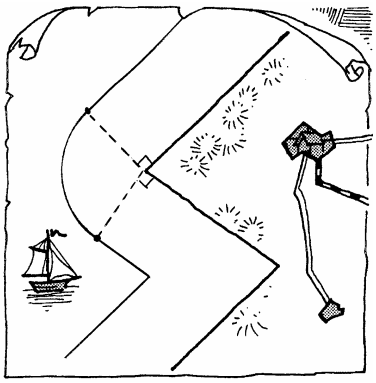
Paragraaf 1 Gelijke afstand

1 **a.** 450 km
b. Het drielandenpunt van Duitsland, Denemarken en Groot-Brittannië ligt verder van Duitsland (540 km) dan van Groot-Brittannië (390 km).
c. 195 km
d. 520 km
e. Langs het kortste verbindingslijnstuk.

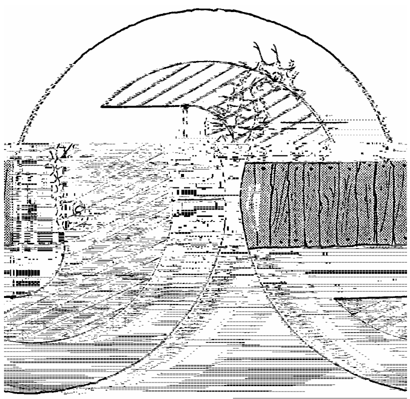


2 Het spiegelbeeld van A in k is B en het voetpunt van de loodlijn M. Neem aan P is een punt op k anders dan M. Dan is driehoek AMP gelijkvormig met driehoek BMP (ZZR), dus $AP = BP$. Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat $AP + BP > AM + MB$, dus $AP > AM$.

3 **a,b.**



4 **a.**

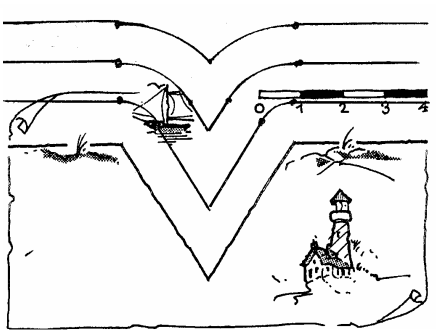


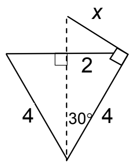
b. 5 meter

5 **a.** $2\pi\cdot(2 + x)$
b. $12 + 2\pi x$
c. $14 + 2\pi x$
d. $14 + 2\pi x$
De iso-x-afstandslijn bestaat uit vier rechte stukken van lengte 2, 3, 4 en 5 en uit vier sectoren van een cirkel met straal 2. Als de hoeken van de vierhoek α, β, γ en δ zijn, zijn de hoeken van de sectoren $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$ en $180° - \delta$. Deze vullen elkaar exact aan tot een volle cirkel.

6 **a.** $\pi \cdot (2+x)^2 - \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot (x^2+4x)$
b. $12x + \pi x^2$
c. $14x + \pi x^2$
d. $14x + \pi x^2$

7 **a.**

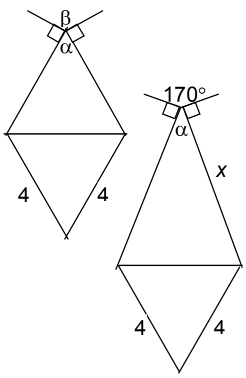




b. $\frac{x}{4} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$

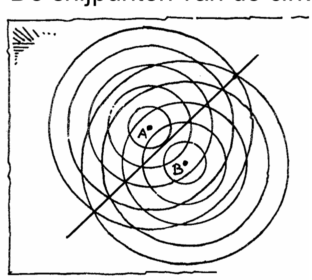
8 **a.** 60° en 120°
b. 0° en 180°

9 **a.** $\sqrt{2}$
b. 90°



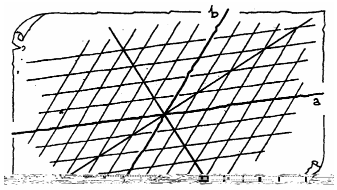
10 **a.** 96°
b. $\alpha = 60° \rightarrow \beta = 360° - 60° - 2 \cdot 90° = 120°$
c. α is dan $360° - 170° - 2 \cdot 90° = 10° \rightarrow \frac{2}{x} = \sin \frac{1}{2}\alpha \approx 0{,}087 \rightarrow x \approx 22{,}95$
d. Nee. De stralen naar het snijpunt zijn nooit evenwijdig.

11 **a.** De snijpunten van de cirkels met dezelfde straal.
b.



De middelloodlijn van *AB*.

12 **a.** Dat zijn de snijpunten van de lijnen die op gelijke afstand van *a* en *b* liggen.
b.

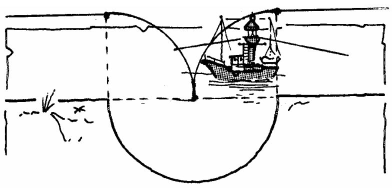


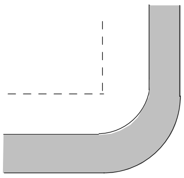
De vier bissectrices van de hoeken die *a* en *b* met elkaar maken.

13 Congruentiegeval HZH

14 a. Dat is de lijn die "halverwege" de twee evenwijdige lijnen ligt.
b. Dat is de middelloodlijn van de middelpunten van de twee cirkels.

15 a.





b. Nee. Hiernaast staat een voorbeeld. De rand van het gebied bestaat uit een kwart cirkel met straal 1 en twee halve lijnen; hij heeft geen knik. De iso-1-afstandslijn (gestippeld) maakt een hoek van 90°.

Paragraaf 2 Parabolen

16 Het zijn geen isoafstandslijnen, want bij de "west-" en "oostpunt" liggen ze verder van *G* dan bij de "noord-" en "zuidpunt".

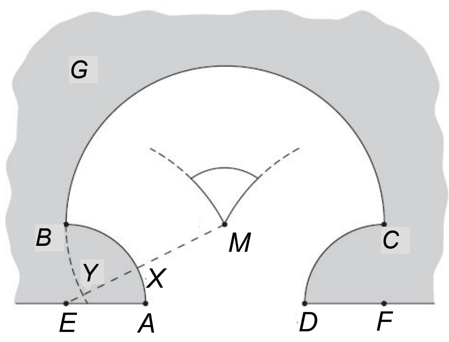
17 b. Nee

18 b. Nee
c. Nee
d. Een hoekpunt van de rechthoek ligt op afstand 1 van de buitenisoafstandslijn en op afstand $\sqrt{2}$ van de binnenisoafstandslijn.

19 b. $24 - 4\sqrt{3} + 4\pi$
c. $24 - 2\sqrt{3} + 2\pi$

20 b. $90 + 5\pi$, $70 + 10\pi$
c. $1000 + 25\pi$, $1800 + 100\pi$

21 a.

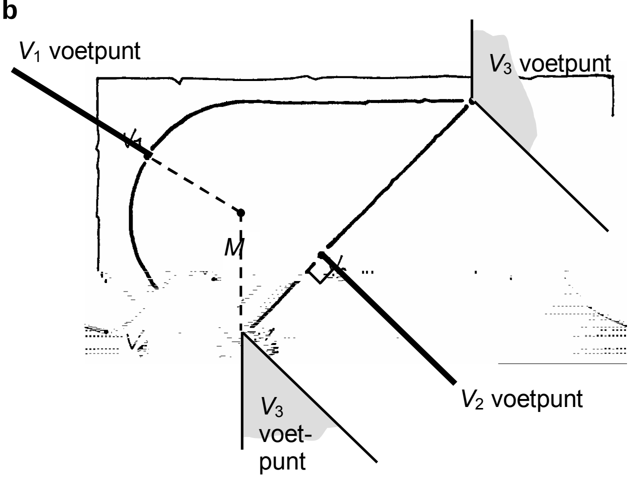


Cirkelbogen door *M* met middelpunt *E* en middelpuunt *F* en een cirkelboog met middelpunt *M* en straal $6 - MX$, waarbij waarbij *X* het snijpunt is van *ME* en cirkelboog *AB*.

b. d(L, boog BC) = d(L, boog AB),
d(L, boog BC) = 6 – LM, d(L, boog AB) = LE – 3
Combinatie van het bovenstaande geeft 6 – LM = LE – 3,
dus LM + LE = 9

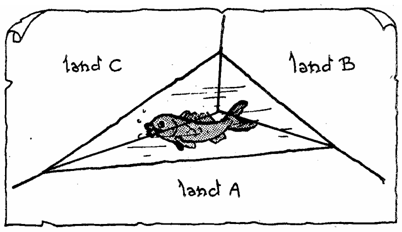
22 b. De punten die even ver van de kust van Noorderland af liggen als van een van de kustlijnen van Zuiderland, liggen op de bissectrice van de hoek die gevormd wordt door deze kustlijnen.
c. Teken de loodlijnen in de hoekpunten van Zuiderland op beide kustlijnen.
d. 135°
e. 90° + $\frac{1}{2}\alpha$

23 a,**b**



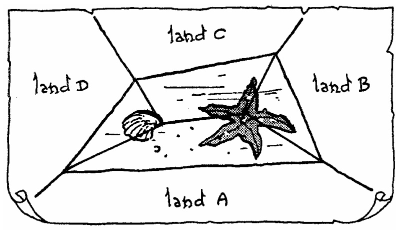
24 a. Op de bissectrice van de hoek van de inham.
b. Het gebied buiten een driehoek en het middelpunt van de ingeschreven cirkel van die driehoek.
c. Het gebied buiten een cirkel en het middelpunt van die cirkel.

25 a.



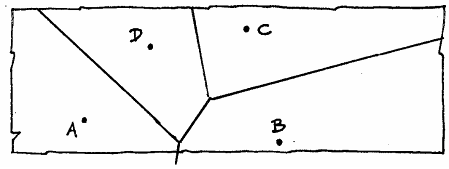
b. Dat zijn de bissectrices van de hoeken van de binnenzee. De bissectrices gaan door één punt
c. Die zijn even groot.

26 a.

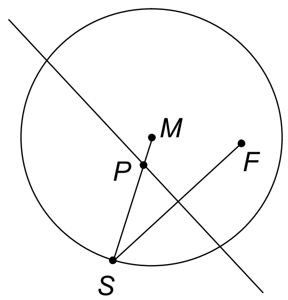


b. De punten met gelijke afstand tot land *A* en *C* bevinden zich op de bissectrice.

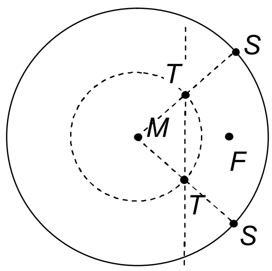
27



28 a.



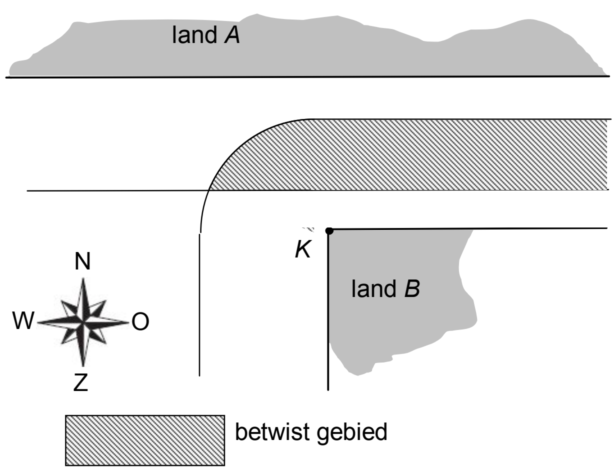
b. Teken de cirkel met middelpunt *M* en een straal die half zo groot is als de straal van de gegeven cirkel.
De punten *T* zijn snijpunt van die cirkel en de middelloodlijn van *MF*. *S* zijn de snijpunten van een lijn *MT* met de oorspronkelijke cirkel.



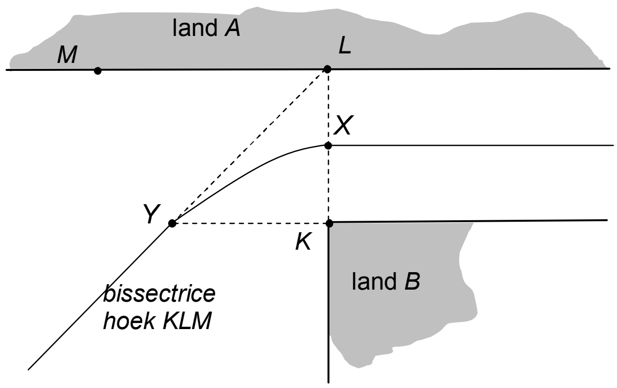
29 b. 2 : 1, want de hoekpunten van de rechthoeken links- en rechtsboven liggen even ver van het brandpunt als van de richtlijn.

30 a. Teken de cirkels met middelpunten P_1 en P_2 en stralen de afstanden van P_1 en P_2 tot de richtlijn. De snijpunten van deze cirkels zijn de mogelijke plaatsen van het brandpunt.

31 a.

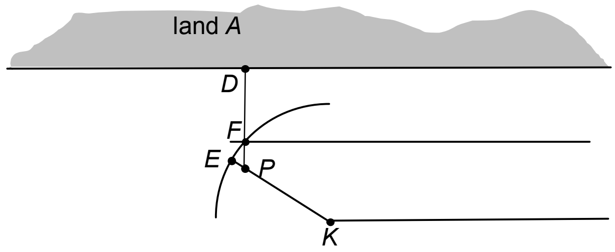


b.



'Links' van Y is de conflictlijn de bissectrice van hoek KLM, 'tussen' X en Y deel van de parabool met brandpunt K en richtlijn de kustlijn van land A en 'rechts' van X de middenparallel van de oost-west-kustlijnen.

c.



Zie plaatje hierboven.
- $PK = PD$, want P ligt op de conflictlijn,
- $KE = DP = 30$,

Dus $PE = PF$.

32 a. (1,3), (3,1) en (7,3).
b. Brandpunt in beide gevallen (3,3) en richtlijnen $x = \text{-}1$ en $y = \text{-}1$.
c. De afstand punt $(2,y)$ tot de x-as is y, dus de afstand tot de cirkel is ook y, dus de afstand tot (3,3) is $y + 1$.
De afstand van $(2,y)$ tot (3,3) is $\sqrt{1+(y-3)^2}$
Dus:
$$y+1=\sqrt{1+(y-3)^2} \Rightarrow y^2+2y+1=1+y^2-6y+9 \Leftrightarrow y=1\tfrac{1}{8}$$
d. Het andere punt heeft een y-coördinaat groter dan 3. Het ligt even ver van de y-as als van de cirkel. De afstand tot de y-as is 2, dus de afstand tot (3,3) is 3.
Dus:
$$3=\sqrt{1+(y-3)^2} \Rightarrow 9=1+y^2-6y+9 \Leftrightarrow y^2-6y+1=0 \Leftrightarrow$$
$$(y-3)^2=8 \Leftrightarrow y=3\pm 2\sqrt{2}$$
Dus de tweede coordinaat van het andere punt is $3+2\sqrt{2}$.

33 a. (0,0) ; de y-as
b. De afstand tot de lijn $y = \text{-}1$ is $|y+1|$ en de afstand tot (0,1) is $\sqrt{x^2+(y-1)^2}$.

$|y+1| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1$
Dus $y = \frac{1}{4} \cdot x^2$.
c. Als (a,b) op P, dan $b = \frac{1}{4} \cdot a^2$. Als $x = \frac{1}{4}a$ en $y = \frac{1}{4}b$, dan $x^2 = \frac{1}{16}a^2 = \frac{1}{4}b = y$.

34 Stel de richtlijn heeft vergelijking $y = -a$, met $a > 0$, dan is het brandpunt $(-2, a-2)$, want de top van de parabool is (-2,-1). Een punt van de parabool is bijvoorbeeld (0,1).
De afstand van (0,1) tot de lijn $y = -a$ is hetzelfde als de afstand van (0,1) tot $(-2, a-2)$, dus $a + 1 = \sqrt{2^2 + (a-3)^2}$; dit geeft $a = 1\frac{1}{2}$, dus het brandpunt is $(-2, -\frac{1}{2})$ en de richtlijn heeft vergelijking $y = -1\frac{1}{2}$.

Paragraaf 3 Parabool, ellips, hyperbool

35 c. 4
d. Nee. De verhouding van de lange en de korte as is niet voor elke ellips hetzelfde. Die verhouding varieert zelfs van 1 : 1 (bij een cirkel) tot 1 : willekeurig groot getal (bij een "lange-platte" ellips).

36 a. Voor elk punt P van de ellips geldt: $|PF| = |PV|$, dus $|PF| + |PM| = |MV|$ en dat is de straal van de richtcirkel.
b. Die bestaat ook uit de punten P waarvoor geldt:
$|PF| + |PM|$ = straal van de richtcirkel. Het is dus precies dezelfde ellips als in opgave **1**.

37 a. 26
b. 10

38 a. 34
b. 30
c. Noem de eindpunten van de lage as X en Y. Dan liggen de brandpunten op de lange as op afstand 2 van X en Y.

39 a. $10\frac{1}{2}$
b. $15\frac{1}{2}$

40 a. Voor elk punt P van de hyperbooltak geldt: $|PF| = |PV|$, dus $|PM| - |PF| = |MV|$; dat is de straal van de richtcirkel.
b. Die is tegengesteld aan de straal van de richtcirkel.
c. Die zijn elkaars spiegelbeeld in de middelloodlijn van FM.
41 b. 4

42 c. Als R_1 het voetpunt is van een punt P van de hyperbooltak, ligt P op de lijn MR_1. Die lijn staat loodrecht op R_1F (want R_1F is raaklijn aan de cirkel). Dus $|PF| > |PR_1|$, dus ligt P niet even ver van F als van r. Tegenspraak.
d. a_1 is evenwijdig aan MR_1 (want ze staan beide loodrecht op FR_1). En a_1 gaat door het midden van FR_1 (want a_1 is de *middel*loodlijn van FR_1). Dus is a_1 midden-

parallel vann F en MR_1. Dus verdeelt a_1 elk lijnstuk tussen F en een punt op MR_1 middendoor. Dus ook FM.
e. Als Q op a_1 ligt, is $|QR_1| = |QF|$. En $|QR_1| > d(Q,r)$ (Volgt uit de stelling van Pythagoras in driehoek R_1VP, waarbij V het voetpunt is van P op r). Dus $d(Q,F) > d(Q,r)$.

43 b. De lijn RF ligt geheel buiten r (op het punt R na), want FR is raaklijn aan r. Dus ligt G buiten r. Dus is $|BG| < d(B,r)$. En $|BG| = |BF|$, want B ligt op de middelloodlijn van FG. Dus $d(B,r) > |BF|$.
c. $d(A,r) < |AR| = |AF|$.
d. A ligt links van de conflictlijn (dat is de kant waar r ook ligt) en B ligt rechts van de conflictlijn (dat is de kant waar F ook ligt). De conflictlijn van r en F loopt dus tussen A en B door. Het snijpunt van de conflictlijn met AB is een punt dat tussen de lijnen a en b ligt.

Paragraaf 4 Op de computer

44 b. De middelloodlijn van FV is raaklijn aan de parabool.

45 a. Dan draait de parabool mee.
b. Dan wordt de parabool smaller.

46 b. De middelloodlijn van FV is raaklijn aan de hyperbool.

47 a. Dan draait de ellips mee.
b. Dan wordt de ellips "platter".
Dan wordt de ellips "ronder".

48 b. De middelloodlijn van FV is raaklijn aan de parabool.
c. Trek de raaklijnen vanuit F aan r. De punten van r tussen de raakpunten in kunnen als voetpunt optreden.

49 a. Dan draait de hyperbool mee.
b. Dan wordt de hyperbool "smaller".

50 a. De middelloodlijn van AB.
b. Als a // b: de middenparallel van a en b.
Anders: het bissectricepaar van de hoeken die a en b maken.
c. De cirkel met straal r en middelpunt A.
d. Als $s < r$: twee cirkels met stralen $r + s$ en $r - s$.
Als $s = r$: een cirkel met straal $r + s$ en een punt.
Als $s > r$: een cirkel met straal $r + s$.
e. De parabool met brandpunt A en richtlijn a.
f. De loodlijn in A op a.
g. De ellips met brandpunt A en richtcirkel r.
h. De hyperbooltak met brandpunt A en richtcirkel r.
i. De halve lijn met het middelpunt van r als beginpunt die door A gaat.

51 De conflictlijn is achtereenvolgens: een hyperbooltak,een halve lijn, een ellips, een halve lijn, een hyperbooltak.

Paragraaf 5 Anders bekeken

59 a. $\alpha = 90°$
b. Voor α iets groter dan β.
c. Door de top van de kegel.
d. Die zijn gelijkvormig (ze ontstaan uit elkaar door een vermenigvuldiging vanuit de top van de kegel).

60 a. Een stuk parabool.
b. Een stuk hyperbool.
c. Een (stuk) ellips.

61 a. De bovenste rand van de lichtkegel is evenwijdig aan de vloer.
b. De lichtkegel moet steiler omlaag schijnen.
De lichtkegel moet minder steil omlaag schijnen.
c. Een deel van een hyperbool.

62 De lichtbron bevindt zich op dezelfde hoogte als het hoogste punt van de bol.

63 b. $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$

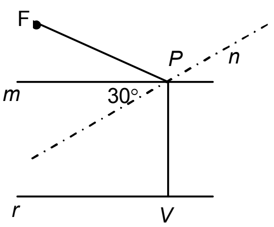
64 a. De afstanden tot F en r zijn steeds gelijk; de afstanden zijn achtereenvolgens: 1 , 2 , 5 , $3\frac{1}{4}$, 10.
b. $d(P,r) = y + 1$, $|PF| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$
c.
$$\begin{aligned} (y+1)^2 &= x^2 + (y-1)^2 \\ y^2 + 2y + 1 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ 4y &= x^2 \\ y &= \tfrac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

65 Brandpunt $(0,\frac{1}{4})$ en richtlijn $y = -\frac{1}{4}$

66 a. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$, ofwel $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$
b. $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$, ofwel $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$
c. 1 en 2 ; $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ en $\frac{2}{5}\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$ en 4

Paragraaf 6 De raaklijneigenschap

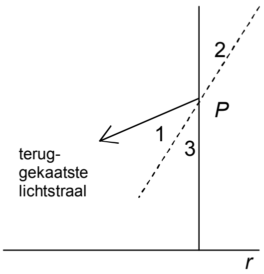
67 a. $d(Q,r)$ is de lengte van het *kortste* verbindingslijnstuk van Q met r. En $d(Q,V)$ is de lengte van een speciaal verbindingslijnstuk van Q met r.
b. Omdat Q op de middelloodlijn van FV ligt.



68 b. 45°
d. 60°
e. Zie plaatje; noem de middelloodlijn van FV: n.
Uit $\angle(m,n) = 30°$ volgt dat $\angle(n,PV) = 60°$, dus ook $\angle(n,PF) = 60°$, dus $\angle(m,FP) = 30°$, dus $d(F,m) = \frac{1}{2} \cdot |FP| = \frac{1}{2} \cdot |PV|$, dus $d(F,m) = \frac{1}{3}d(F,r)$.

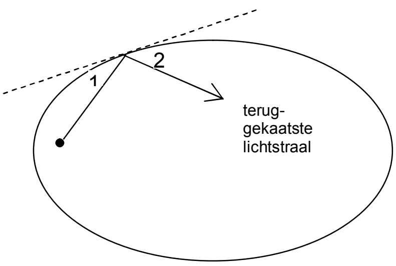
69 b. De rechthoekszijden van driehoek *SMF* zijn x en 4. Volgens de stelling van Pythagoras is de schuine zijde dan $\sqrt{16+x^2}$. Gebruik dan dat de ellipsconstante 8 is.
c. $x = 3$
d. De tangens van de hoek is $\frac{4}{3}$. De hoek $\approx 63°$.

70 b. Laat P een van de snijpunten zijn. Driehoek *FMP* heeft zijden 3, 4 en 5. De hoek $\approx 27°$.



71 a. Zie plaatje. De raaklijn in het punt P aan de parabool is gestippeld. Er geldt:
$\angle 2 = \angle 3$ (overstaande hoeken)
$\angle 1 = \angle 2$ (hoek van inval = hoek van terugkaatsing).
Dus: $\angle 1 = \angle 3$.
Uit de raaklijneigenschap volgt dat de teruggekaatste lichtstraal door het brandpunt gaat.
b. De wegen vanaf de spiegel tot het brandpunt zijn even lang als tot de richtlijn r. De weglengte tot het brandpunt is dus gelijk aan de weglengte tot de richtlijn (als de spiegel er niet zou zijn geweest). En al die weglengtes zijn gelijk.

72 De ene persoon bevindt zich met zijn mond in het brandpunt van de ene spiegel. Zijn geluidsgolven worden door de spiegel een evenwijdige bundel, evenwijdig aan de as van de spiegels. Door de spiegel aan de overkant wordt de evenwijdige bundel geconcentreerd naar het brandpunt. De andere persoon moet zich dus met zijn oor in het brandpunt van die ontvangende spiegel bevinden.



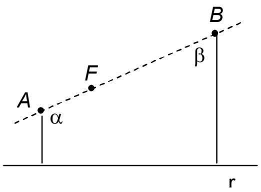
73 Zie plaatje. De raaklijn in het punt P aan de ellips is gestippeld.
$\angle 1 = \angle 2$ (hoek van inval = hoek van terugkaatsing)
Uit de raaklijneigenschap volgt dat de teruggekaatste lichtstraal naar het andere brandpunt gaat.

74 Maak een ellipsvormige spiegel (een omwentelingsellipsoïde). Maak een opening in het ene brandpunt van de ellips, waardoor het licht op de spiegel valt. Waar op de spiegel, doet er niet toe: de lichtstraal wordt overal weerkaatst naar het andere brandpunt.

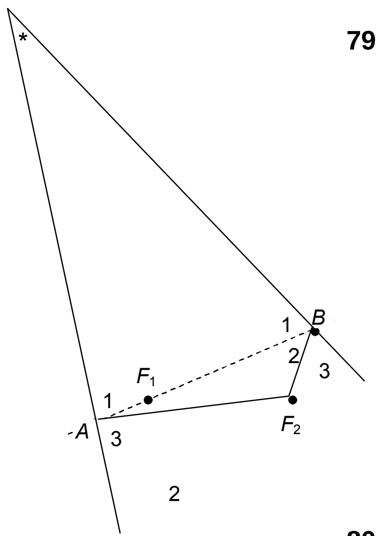
75 b. De lange as van de ellips.
c. Dan is de limietbaan ook de lange as.

76 a. In de richting van het andere brandpunt (waar bal F niet ligt).
b. Langs de lijn *FB*, weg van F. Dan gaat de baan van B via een band door het andere brandpunt en dan via weer een band naar F.
c. Als de baan van de bal door het rechter brandpunt gaat, treft hij bal F al na één band. Als de bal achter het rechter brandpunt gaat, gaat hij ook achter F door. Als de bal voor het rechter bandpunt langs gaat, gaat hij ook voor F langs. Het kan dus niet.

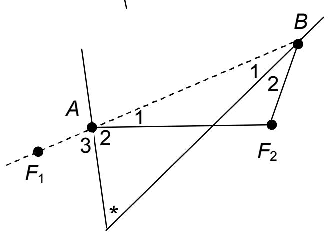
77 b. De as van de hyperbool.
c. Dan is de limietbaan ook de as.



78 b. Zie plaatje.
$\alpha + \beta = 180°$ (volgt uit *F*-hoeken, want de verticale lijnen zijn evenwijdig).
De raaklijnen zijn bissectrices van deze hoeken.
Noem het snijpunt van de raaklijnen: *S*. $\angle BAS + \angle ABS = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Dus $\angle ASB = 180° - 90° = 90°$.
c. Noem de voetpunten van *A* en *B*: *V* en W. De driehoeken *AVS* en *AFS* zijn congruent (ZHZ: $|AV| = |AF|$, $\angle VAS = \angle FAS$, $|AS| = |AS|$). Dus: $\angle VSA = \angle FSA$.
Evenzo: $\angle WSB = \angle FSB$.
Dus $\angle VSW = \angle VSA + \angle ASF + \angle FSB + \angle BSW =$
$2 \cdot (\angle ASF + \angle FSB) = 2 \cdot 90° = 180°$.
Dus ligt *S* op *VW*.
Merk op dat bovendien geldt: *SF* staat loodrecht op *AB*.



79 b. Zie plaatje. $\angle A_1 = \angle A_3$ en $\angle B_1 = \angle B_3$
De hoek tussen de raaklijnen (met *) $= 180° - \angle A_1 - \angle B_1$
$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A_2) - \frac{1}{2}(180° - \angle B_2) =$
$180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A_2 - 90° + \frac{1}{2}\angle B_2 = \frac{1}{2}(\angle A_2 + \angle B_2) =$
$\frac{1}{2}(180° - \angle AF_2B) = 90° - \frac{1}{2}\angle AF_2B$.



80 b. Zie plaatje. $\angle A_2 = \angle A_3$ en $\angle B_1 = \angle B_2$
De hoek tussen de raaklijnen (met *) is
$180° - \angle A_{12} - \angle B_1 = \angle A_3 - \angle B_1 = \frac{1}{2}(\angle A_{23} - \angle B_{12}) = \frac{1}{2}\angle AF_2B$.

Paragraaf 7 Extra opgaven

2 De cirkel met middelpunt M_2 en straal 8 noemen we c_3.
P ligt op de conflictlijn van c_1 en c_2 $\Leftrightarrow$
$d(P,c_1) = d(P,c_2)$ $\Leftrightarrow$
$d(P,M_1) - 3 = d(P,c_3) - 3$ $\Leftrightarrow$
$d(P,M_1) = d(P,c_3)$ $\Leftrightarrow$
P ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3.
De conflictlijn is dus de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.

3 De cirkel met middelpunt M_2 en straal 8 noemen we c_3.
De cirkel met middelpunt M_2 en straal 2 noemen we c_4.
- Als *P* binnen c_1 en buiten c_2 ligt.

P ligt op de conflictlijn van c_1 en c_2 $\Leftrightarrow$

$d(P,c_1) = d(P,c_2)$ $\Leftrightarrow$
$3 - d(P,M_1) = 3 - d(P,c_3)$ $\Leftrightarrow$
$d(P,M_1) = d(P,c_3)$ $\Leftrightarrow$
P ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3 en dit is de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.

- Als P buiten c_1 en binnen c_2 ligt.

P ligt op de conflictlijn van c_1 en c_2 $\Leftrightarrow$
$d(P,c_1) = d(P,c_2)$ $\Leftrightarrow$
$d(P,M_1) - 3 = d(P,c_3) - 3$ $\Leftrightarrow$
$d(P,M_1) = d(P,c_3)$ $\Leftrightarrow$
P ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3 en dit is de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.

- Als P binnen c_1 en binnen c_2 ligt.

P ligt op de conflictlijn van c_1 en c_2 $\Leftrightarrow$
$d(P,c_1) = d(P,c_2)$ $\Leftrightarrow$
$3 - d(P,M_1) = 3 - d(P,c_4)$ $\Leftrightarrow$
$d(P,M_1) = d(P,c_4)$ $\Leftrightarrow$
P ligt op de conflictlijn van M_1 en c_4 en dit is de hyperbooltak met M_1 als brandpunt en c_4 als richtcirkel.

- Als P buiten c_1 en buiten c_2 ligt.

P ligt op de conflictlijn van c_1 en c_2 $\Leftrightarrow$
$d(P,c_1) = d(P,c_2)$ $\Leftrightarrow$
$d(P,M_1) - 3 = d(P,c_4) - 3$ $\Leftrightarrow$
$d(P,M_1) = d(P,c_4)$ $\Leftrightarrow$
P ligt op de conflictlijn van M_1 en c_4 en dit is de hyperbooltak met M_1 als brandpunt en c_4 als richtcirkel.

De conflictlijn van c_1 en c_2 is dus de vereniging van de ellips met brandpunt M_1 en richtcirkel c_3 en de hyperbooltak met brandpunt M_1 en richtcirkel c_4.

4 De lijn evenwijdig aan k, op afstand 5 van k, aan de andere kant van k dan M noemen we k'.
P ligt op de conflictlijn van k en c $\Leftrightarrow$
$d(P,k) = d(P,c)$ $\Leftrightarrow$
$d(P,k') - 5 = d(P,M) - 5$ $\Leftrightarrow$
$d(P,k') = d(P,M)$ $\Leftrightarrow$
P ligt op de conflictlijn van k' en M.
De conflictlijn is dus de parabool met M als brandpunt en k' als richtlijn.

5 **a.** Noem de hoekpunten van het eiland Z(uid), N(oord) en W(est) en noem de kustlijn van het vasteland k.
De conflictlijn bestaat uit achtereenvolgens:
- een stuk van de bissectrice van de hoek van k en WN (dit past niet in de figuur);
- een stuk van de parabool met brandpunt W en richtlijn k
- een stuk van de bissectrice van k en WZ;
- een stuk van de parabool met brandpunt Z en richtlijn k;
- een stuk van de bissectrice van de hoek van k en NZ.

b. Noem de aansluitpunten achtereenvolgens P, Q, R en S.
- PW staat loodrecht op WN,
- QW en RZ staan loodrecht op WZ,
- SZ staat loodrecht op ZN.

6 Het middelpunt van de cirkel *c* noemen we *M*, het linksboven hoekpunt van het vierkant *B* en het linksonderhoekpunt van het vierkant *A*. De lijn over het midden van het vierkant, evenwijdig aan *AB* noemen we *k*.
De conflictlijn bestaat achtereenvolgens uit:
- een stuk van de hyperbooltak met brandpunt *B* en richtcirkel *c*;
- een stuk van de parabool met brandpunt *M* en richtlijn *k*;
- een stuk van de hyperbooltak met brandpunt *A* en richtcirkel *c*.
De aansluitpunten liggen op de verlengden van de noordkust en de zuidkust van het vierkante eiland.

7 Van het zuidelijke land noemen we het hoekpunt *A*, de oost-west kustlijn a_1 en de noord-zuid kustlijn a_2. Van het noordelijke land noemen we het hoekpunt *B*, de oost-west kustlijn b_1 en de noord-zuid kustlijn b_2.
De conflictlijn bestaat achtereenvolgens uit:
- een stuk van de bissectrice van de hoek van a_1 en b_2,
- een stuk van de parabool met brandpunt *B* en richtlijn a_1
- een stuk van de parabool met brandpunt *A* en richtlijn b_1
- een stuk van de bissectrice van de hoek van a_2 en b_1.
Noem de aansluitpunten achtereenvolgens *P*, *Q* en *R*.
- *P* ligt op het verlengde van b_1,
- *Q* is het midden van *AB*,
- *R* ligt op het verlangde van a_1.

8 **a.** De conflictlijn bestaat uit vier stukken parabool, elk met brandpunt *E* en met de vier zijden van *L* als richtlijnen. De aansluitpunten liggen op de diagonalen van het vierkant.
b. Het aansluitpunt linksboven noemen we *P*. De raaklijn in *P* aan de bovenste parabool staat loodrecht op een diagonaal, de raaklijn in *P* aan de linker parabool loopt verticaal. De stukken parabool maken in *P* dus een hoek van 135°.
[Ook in de andere aansluitpunten is de hoek tussen de stukken parabool 135°.]

9 **a.** Trek de horizontale lijn door F_1 en de verticale lijn door F_2; noem hun snijpunt *R*.
Omdat $d(R, F_2F_4)$ en $|RF_1|$ beide 2 zijn, ligt *R* op p_1. De raaklijn in *R* aan p_1 is de bissectrice van $\angle F_1RF_2$.
Evenzo ligt *R* op p_2 en is de raaklijn in *R* aan p_2 de bissectrice van $\angle F_1RF_2$.
Dus raken p_1 en p_2 elkaar in *R*.
b. Noem het voetpunt van *S* op F_2F_4: *T*. De raaklijn in *S* aan p_1 is de bissectrice van $\angle F_1ST$.
De driehoek F_4F_1S en F_4ST zijn congruent (ZZR: $|F_4S| = |F_4S|$, $|F_1S| = |TS|$ en $\angle F_4F_1S = \angle F_4TS = 90°$). Dus $\angle F_4SF_1 = \angle F_4ST$, dus F_4S is bissectrice van $\angle F_1ST$.
Dus is F_4S raaklijn in *S* aan p_1.
c. Breng een assenstelsel aan met F_2 en F_4 op de *x*-as en F_1 en F_3 op de *y*-as zodat $F_2 = (2,0)$. Dan heeft p_3 vergelijking $y = 1 + \frac{1}{4}x^2$.

De oppervlakte tussen p_3 en de x-as is dus

$$\int_{-2}^{2}(1+\tfrac{1}{4}x^2)\mathrm{d}x = x+\tfrac{1}{12}x^3\Big|_{-2}^{2} = 5\tfrac{1}{3}.$$

De oppervlakte van $V \setminus G$ is dus $4(8–5\tfrac{1}{3}) = 10\tfrac{2}{3}$.
De verhouding van de oppervlakten van G en V is $(16–10\tfrac{2}{3}) : 16 = 1 : 3$.

10 Stel $MS = x$, dan $ES = 9 - x$ en $ST = 3 + x$.
De stelling van Pythagoras in driehoek ETS geeft:
$(9-x)^2 = 6^2 + (3+x)^2$, dus $x = 1\tfrac{1}{2}$.