vwo wiskunde d

Hypothesetoetsen

de Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN xxx
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit hoofdstuk behandelt het onderwerp Hypothesetoetsen.
Het behoort tot de kansrekening van het vak 456 vwo wiskunde d.
De stof van de hoofdstukken 1. Combinatoriek en Rekenregels en 2.Binomiale en normale verdelingen wordt bekend verondersteld.
 In (de facultatieve) paragraaf 6 heb je de Rekentechniek van hoofdstuk 7. Continue dynamische modellen nodig.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

Voorliggende versie is van augustus 2019.
Alleen de afbeeldingen van deze versie verschillen (soms) van de versie van juli 2018.

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

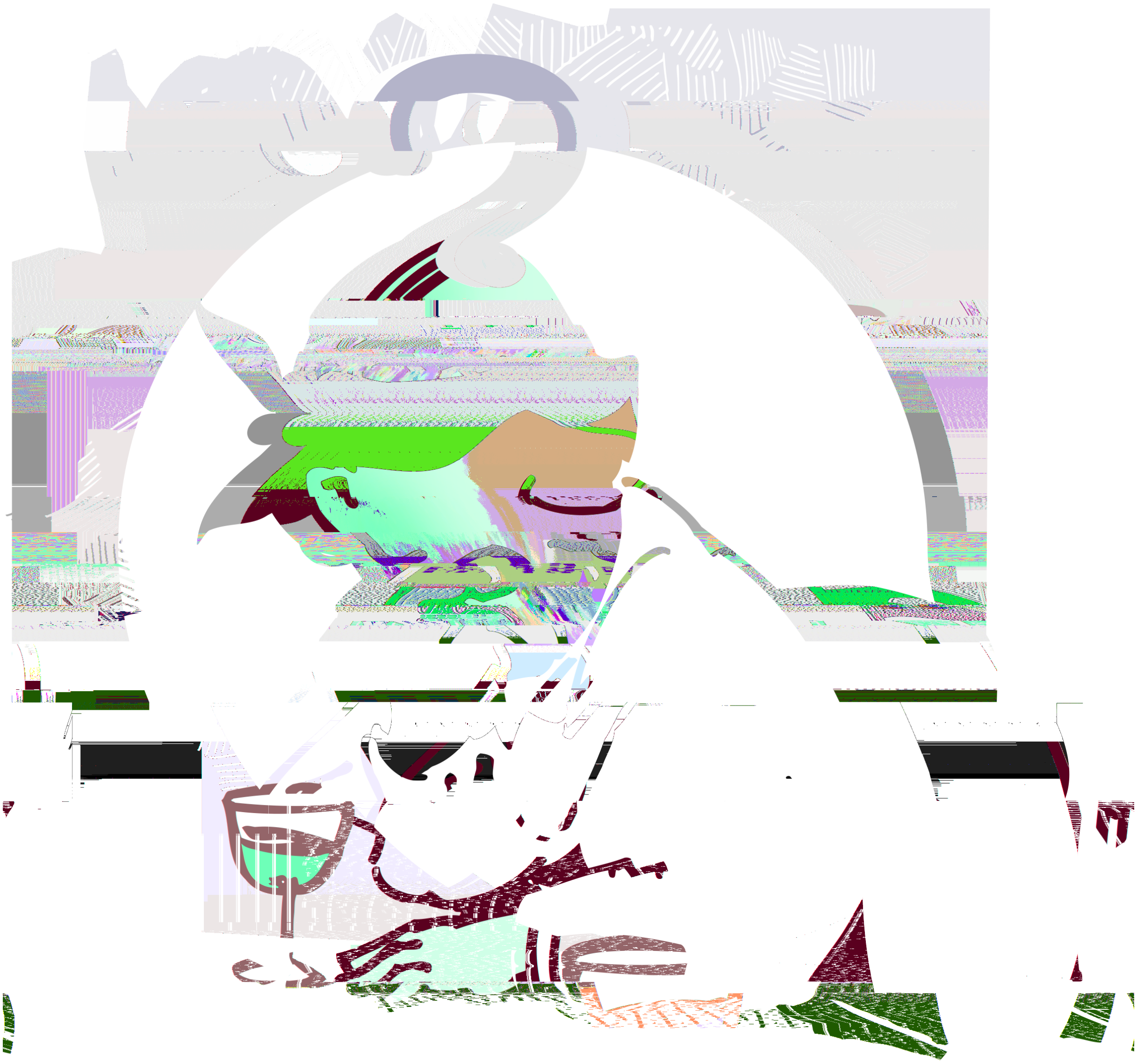
Echt, moet kunnen
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.

Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.



1 **Verkeersdoden**
Het aantal verkeersdoden in een zeker land is de laatste jaren normaal verdeeld met gemiddelde 105 en standaardafwijking 15.

Hoe groot is in een jaar de kans op minder dan 100 verkeersdoden? We volgen twee berekeningen.
1. $\text{P}(0 < X < 100|\ 105, 15)$
2. "minder dan 100" is hetzelfde als "hoogstens 99", dus $\text{P}(0 < X < 99|\ 105, 15)$.

a Welke antwoorden geven deze berekeningen?

De antwoorden zijn niet hetzelfde.
b Weet jij waarom?

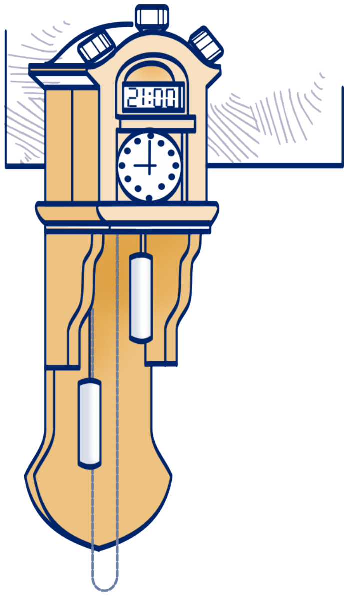
We hebben dus een probleem. Dat wordt veroorzaakt doordat de stochast "het aantal verkeersdoden in een jaar" alleen gehele waarden kan aannemen. We benaderen hem met een normale verdeling, die ook *andere* waarden kan aannemen.

Stochasten, dus grootheden die bij een kansexperiment allerlei waarden kunnen aannemen, afhankelijk van het toeval, zijn te onderscheiden in twee soorten: discrete en continue
Een **discrete stochast** verandert trapsgewijs. De mogelijke uitkomsten zijn een rij losse punten op de getallenlijn. Bij twee opvolgende uitkomsten kan geen enkele waarde daartussen als uitkomst optreden.

Voorbeelden
- Kansexperiment: je stopt zes verschillende brieven in zes verschillend geadresseerde enveloppen.
  $X =$ het aantal brieven dat in de juiste envelop zit.
- Kansexperiment: je gooit met een dobbelsteen tot je voor het eerst een zes gegooid hebt.
  $Y =$ het aantal worpen dat daarvoor nodig is.

2 **a** Welke waarden kan X aannemen?
b En welke waarden kan Y aannemen?

Een **continue stochast** verandert traploos. De mogelijke uitkomsten zijn een interval op de getallenlijn. Bij elk tweetal uitkomsten kan elke waarde daartussen ook als uitkomst optreden.



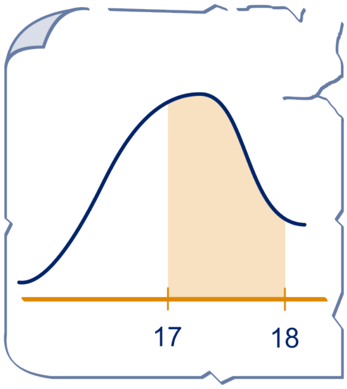
Voorbeelden

- Kansexperiment: je kiest een tomaat uit een grote partij tomaten.
  $G =$ het gewicht van die tomaat.
- Kansexperiment: je neemt de tijd op waarin iemand de 100 meter loopt.
  $H =$ de tijd die je klokt.
- Kansexperiment: je kijkt op een willekeurig moment naar een klok.
  $T =$ de tijd die de klok aangeeft (in minuten na het vorige hele uur.

3 Hoe, discreet of continu, is T verdeeld en welke waarden kan T aannemen in de volgende gevallen?

a Bij een gewone (analoge) klok.
b Bij een digitale klok (die niet de seconden aangeeft).

Continue en discrete stochasten worden grafisch verschillend weergegeven. Bij een discrete stochast teken je een kanshistogram, bij een continue stochast een vloeiende kromme.
Bij een kanshistogram is de oppervlakte van de staven een maat



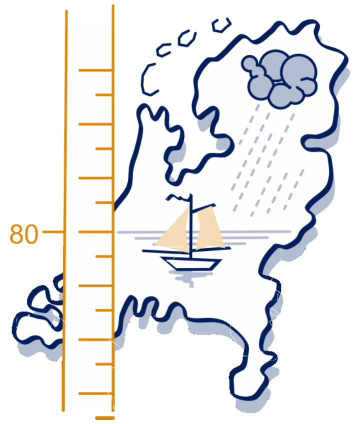
4

X is het aantal keren kop bij een worp met vijf munten.

a Wat is het verschil tussen $\mathrm{P}(X = 3)$ en $\mathrm{P}(2 < X < 4)$?

Y is de jaarlijkse hoeveelheid neerslag in Nederland. Y is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 80$ cm en standaardafwijking $\sigma = 15$ cm.

b Wat is het verschil tussen $\mathrm{P}(Y = 78)$ en $\mathrm{P}(77 < Y < 79)$?



Opmerking

In de praktijk worden de gemeten waarden van een continue stochast vrijwel altijd afgerond. Een jaarlijkse neerslag van 78 cm betekent dan dat de hoeveelheid neerslag tussen 77,5 en 78,5 cm ligt.

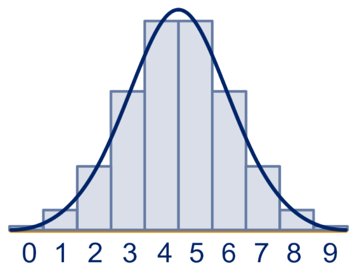
5

X is het aantal keren kop bij negen worpen met een munt.

a Is X een discrete of een continue stochast?

b Ga na: $\mathrm{Sd}(X) = 1{,}5$ en $\mathrm{E}(X) = 4{,}5$.

c Bereken in vier decimalen: $\mathrm{P}(X) = 6$.



Hiernaast is het kanshistogram van X getekend. Erbij is de kromme getekend van de normaal verdeelde stochast U die het best bij X past.

Dat wil zeggen: $\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(X) = 4{,}5$ en $\mathrm{Sd}(U) = \mathrm{Sd}(X) = 1{,}5$.

d Bereken ook $\mathrm{P}(5{,}5 < U < 6{,}5)$ en ga na dat dit een redelijke benadering is van $\mathrm{P}(X = 6)$.

e Bereken $\mathrm{P}(X < 6)$ en $\mathrm{P}(U < 5{,}5)$ en ga na dat de uitkomsten ongeveer gelijk zijn

f Bereken $\mathrm{P}(X \leq 6)$ en $\mathrm{P}(U < 6{,}5)$ en ga na dat de uitkomsten ongeveer gelijk zijn.

Laat X een discrete stochast zijn die alleen gehele waarden aanneemt en laat U de continue benadering zijn van X. Dan geldt:

- $\mathrm{P}(X = 6) \approx \mathrm{P}(5{,}5 < U < 6{,}5)$
- $\mathrm{P}(3 \leq X \leq 8) \approx \mathrm{P}(2{,}5 < U < 8{,}5)$
- $\mathrm{P}(3 < X \leq 8) = \mathrm{P}(4 \leq X \leq 8) \approx \mathrm{P}(3{,}5 < U < 8{,}5)$
- $\mathrm{P}(3 \leq X < 8) = \mathrm{P}(3 \leq X \leq 7) \approx \mathrm{P}(2{,}5 < U < 7{,}5)$

Als je U gebruikt om kansen voor X te benaderen moet je de waarden dus corrigeren met $0{,}5$. Dit heet de **continuïteitscorrectie**.

6 Laat X en U zijn als in het theorieblok hiervoor.
Neem over en vul de ontbrekende getallen in.

a $\text{P}(X < 7) \approx \text{P}(U < \ldots)$
b $\text{P}(X \geq 9) \approx \text{P}(U > \ldots)$
c $\text{P}(5 < X < 12) \approx \text{P}(\ldots < U < \ldots)$
d $\text{P}(10 > X \geq 2) \approx \text{P}(\ldots > U > \ldots)$

7 We gaan terug naar opgave 1 Het aantal verkeersdoden is bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 105 en standaardafwijking 15.

a Hoe groot is in een jaar de kans op minder dan 100 verkeersdoden?
b Bereken de kans op precies 100 verkeersdoden.

8 In een diepvriespak lekkerbekjes zitten volgens de verpakking 4 tot 6 wijtingfilets in beslag die samen een gewicht hebben van 300 gram. Neem aan dat het gewicht Y in zo'n pak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 300 gram en een standaardafwijking van 15 gram.

a Waarom zal de standaardafwijking in dit gewicht waarschijnlijk groter zijn dan de standaardafwijking in het gewicht van bijvoorbeeld een pak suiker?
b Hoe groot is de kans dat het gewicht Y meer dan 10% afwijkt van de 10 gram die op de verpakking staat?

Pim koopt drie van deze diepvriespakken met een totaal gewicht van T gram.

c Hoe groot zijn $\text{E}(T)$, $\text{Var}(T)$ en $\text{Sd}(T)$?
d Hoe groot is de kans dat dit totale gewicht T meer dan 10% afwijkt van het te verwachten totale gewicht $\text{E}(T)$?
e Kun je verklaren waarom de kans op deze afwijking van 10% duidelijk kleiner is dan de kans op een afwijking van 10% bij één pak?

Neem aan dat er evenveel pakken zijn met 4 filets, met 5 filets en met 6 filets.
Coen koopt ook drie diepvriespakken lekkerbekjes.

f Hoe groot is de kans:
- dat er in één pak 4, in één pak 5 en in één pak 6 filets zitten?
- dat hij in totaal 15 filets koopt?
- dat hij in totaal 12 filets koopt?

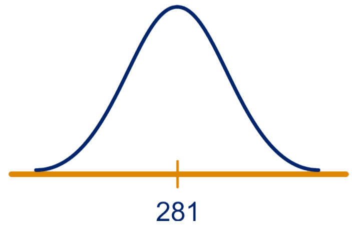
9

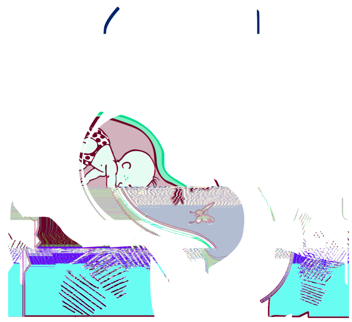
De duur van een zwangerschap

Als een vrouw zwanger is, wordt berekend op welke dag de geboorte valt te verwachten. Dat is de dag waarop de vrouw is "uitgeteld". 4 % van de geboortes vindt inderdaad plaats op de dag dat de vrouw is uitgeteld. Een zwangerschap duurt gemiddeld 281 dagen. We veronderstellen dat de duur normaal verdeeld is.

a Bereken de standaardafwijking van de duur van de zwangerschap.

b Bereken het percentage zwangerschappen dat langer dan 295 dagen duurt.





een
van
eft de onrust
In het dorpje Weurt bij Nijmegen heerst grote onrust over
volgens de bevolking onrustbarend hoog aantal gevallen
gehouden onderzoek van de GGD regio Nijmegen he
periode 1989-1992 bij mannen in Weurt 50 procent meer gevallen
van kanker voorkwamen dan het landelijk gemiddelde.
Er waren 33 gevallen van kanker geconstateerd, terwijl op basis van het landelijk gemiddelde 22 gevallen te verwachten waren. Weurt (gemeente Beuningen) is aan drie kanten omgeven door industrieterreinen, waar een vuilverbrandingsoven, een ijzergieterij en andere zware industrie dagelijks hun afvalstoffen lozen. Volgens de bewoners zijn de fabrieken verantwoordelijk voor de kankergevallen en steeds meer voorkomende neus, keel- en oogklachten.

10 Lees bovenstaand artikel uit NRC-Handelsblad van 19 januari 1995 (ingekort). Je mag aannemen dat de helft van Weurts bevolking mannelijk is.

a Lijkt jou het aantal keer dat kanker voorkomt in Beuningen significant hoger dan in de rest van het land?

b Lijkt jou dat het aangrenzende fabrieksterrein de oorzaak is van het verhoogde aantal kankergevallen in Weurt?

In dit hoofdstuk zullen we een methode behandelen om te beslissen of de inwoners van Weurt een verhoogd risico hebben op kanker. (Het alternatief is dat het hogere aantal kankergevallen op toeval berust.)

c Leg uit dat je uit het artikel kunt afleiden dat onder normale omstandigheden het percentage kankergevallen onder mannen ongeveer $1{,}7\%$ is.

Stel dat in Weurt de kans op kanker even groot is als in de rest van Nederland, dus $0{,}017$ per persoon. Je kunt de mannelijke bevolking van Weurt dan beschouwen als een groep van 1300 willekeurige mannen. Het aantal kankergevallen in zo'n groep noemen we X. X is binomiaal verdeeld.

d Wat is het "aantal herhalingen n", wat is de "succeskans p" en wat is de verwachtingswaarde van X?

e Wat is de kans dat X niet meer dan 5 van 22 afwijkt?
Wat is de kans dat X niet meer dan 10 van 22 afwijkt?

f Vind jij, gezien de kansen in het vorige onderdeel, een aantal van 33 uitzonderlijk hoog? Vind jij dat de bevolking van Weurt reden tot ongerustheid heeft?

8.2 Wie heeft gelijk?

In dit hoofdstuk zal de volgende vraag centraal staan: bij welke aantallen kankerpatiënten verwerp je de mogelijkheid dat zo'n aantal door toeval tot stand is gekomen.
(Dit bekijken we natuurlijk ook in andere contexten.) De conclusie is dat de mannen in Weurt een duidelijk hoger risico op kanker hebben. Wat de oorzaak hiervan is, is een heel ander verhaal. Uit een rapport van het Universitair Medisch Centrum St Radboud, uit april 2004:
De resultaten van de huidige studie laten zien dat, over een periode van 13 jaar, de longkankerincidentie bij mannen in Weurt is verhoogd met circa 35 (SMR= Standardised Mortality Rate: 1,35). Ook over deze lange periode blijft de nauwkeurigheid van deze schatting echter beperkt. De schatting is gebaseerd op 27 gevallen van longkanker, terwijl er 20 werden verwacht. In het verleden leek de longkankerincidentie bij mannen sterker verhoogd. De huidige berekeningen wijzen erop dat tenminste een deel van die verhoging door toeval is veroorzaakt.
De resultaten zeggen niets over mogelijke oorzaken van longkanker. Aangezien roken de belangrijkste oorzaak is voor het ontstaan van longkanker, zou op zijn minst informatie bekend moeten zijn over het aantal rokers in Weurt in de afgelopen decennia. Hiernaast kunnen ook beroepsexposities een rol hebben gespeeld. De rol van milieufactoren lijkt ondergeschikt daar alleen bij mannen en niet bij vrouwen een verhoging in de longkankerincidentie is gevonden.

We gaan allerlei situaties bekijken, waar je ook op grond van een statistisch gegeven een conclusie moet trekken. Het is de bedoeling is dat je de vragen op gevoel beantwoordt; je hoeft je antwoorden dus niet te verantwoorden. Hoe je verantwoord conclusies kunt trekken, komt later in de hoofdstuk aan de orde. Dan zullen we op deze voorbeelden terugkomen.

11 In tien worpen valt een munt zeven keer op kop. Iemand beweert daarom dat de munt vals is.

a Geef je hem gelijk?

b Zeg dat het aantal keer (van de tien) dat de munt op kop valt niet zeven is maar n.
Bij welke waarden van n geef je hem gelijk?

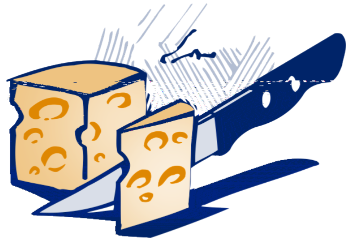
We vergroten de aantal met een factor 100: in duizend worpen valt een munt 700 keer op kop.

c Denk je dat de munt vals is?

Zeg dat het aantal keer (van de duizend) dat de munt op kop valt niet 700 is maar n.

d Bij welke waarden van n concludeer je dat de munt vals is?

12 “Ik had graag een stuk Edammer van een pond”. De kaasboer snijdt op het oog een stuk kaas voor de klant. In acht van de tien keer blijkt het meer dan 500 gram te zijn. Een klant beweert dat de kaasboer systematisch teveel snijdt.



a Geef je hem gelijk?

Zeg dat het aantal keer (van de tien) dat de kaasboer te veel afsnijdt niet acht is maar n.

b Bij welke waarden van n geef je de klant gelijk?

13 De consumentenbond neemt een steekproef en weegt twintig 5 kg-zakken aardappelen (zo staat het op de zakken) van een zekere groothandel. Ze blijken in totaal 97 kg te bevatten.

a Lijkt jou de conclusie gerechtvaardigd dat 5 kg-zakken van de groothandel minder dan 5 kg bevatten?

b Wat zou je nog meer willen weten, om met meer zekerheid een oordeel te kunnen vellen?

14 Een dictator beweert dat 70% van de bevolking zijn beleid steunt. Van de eerste tien mensen die je ondervraagt zeggen er vijf dat ze het beleid van de dictator afkeuren.

a Lijkt je de conclusie gerechtvaardigd dat de dictator de zaak te gunstig voor hem voorstelt?

b Wat zou je nog meer willen weten, om met meer zekerheid een oordeel te kunnen vellen?

15 Een supermarkt zegt dat de gemiddelde wachttijd voor haar kassa’s niet meer dan 2 minuten bedraagt. De laatste vier keer heb ik bijgehouden hoelang ik moest wachten: 3, 4, 3 en 2 minuten. Ik beweer dat de supermarkt een oneerlijk beeld schetst van de werkelijkheid.
Ben jij het met mij eens?

16 Geloof je in helderziendheid? In 1968 experimenteerde de parapsycholoog J. Barry om te kijken of personen met hun gedachten de groei van paddenstoelen konden vertragen. Zijn experiment werd goed opgezet. Er namen tien personen aan het experiment deel. Ze werden elk in een kamer gezet; elk had een eigen maar verder identieke verzameling paddenstoelen. Elke verzameling was verdeeld in tweeën: vijf paddenstoelen waren experimenteel en vijf vormden de controlegroep. Iedere proefpersoon moest zich concentreren op de experimentele paddenstoelen en

ze met zijn gedachten dwingen trager te gaan groeien. Het bleek dat bij negen van de tien personen de experimentele groep paddenstoelen trager groeide dan de controlegroep. Volgens J. Barry was dit een significant resultaat. (Uit: Risico's van Peter Sprent, 1990)

a Geef commentaar.

b Wat zou jij aanbevelen om meer zekerheid te verkrijgen?

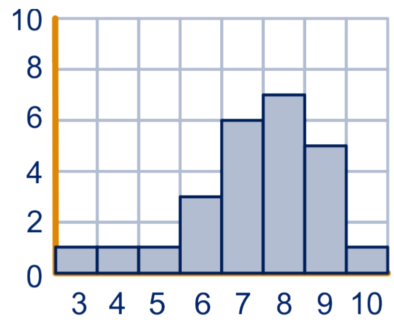
17 Op de website nos.nl werd op 21 juni 2011 het volgende bericht geplaatst (het bericht is enigszins ingekort).

Onder de 47 patiënten die op de Intensive Care van het Maasstad Ziekenhuis in Rotterdam een multiresistente bacterie hebben opgelopen, zijn 21 doden gevallen. Dat blijkt uit het onderzoek van het ziekenhuis zelf. Wetenschappers van het RIVM zijn nu bezig die onderzoeksresultaten te controleren. Het aantal besmettingen en ook doden zou dus nog kunnen oplopen.
Het is heel moeilijk om te zeggen hoeveel doden daadwerkelijk het gevolg zijn van een infectie veroorzaakt door de multiresistente bacterie. Patiënten op een IC zijn altijd ernstig ziek en verzwakt. De artsen op de intensive care van het Maasstad Ziekenhuis gaan ervan uit dat alle patiënten zijn overleden aan hun eigenlijke kwaal, zegt arts microbioloog Tjaco Ossenwaarde van het Maasstad Ziekenhuis.

a Lijkt je de conclusie gerechtvaardigd dat alle 21 patiënten zijn overleden aan hun eigenlijke kwaal en niet mede aan de besmetting met de multiresistente bacterie?

b Wat zou je nog meer willen weten, om met meer zekerheid een oordeel te kunnen vellen?

18 De wiskunde A-docent Jan Stoer zag het examen met vertrouwen tegemoet. Zijn klas had goed gewerkt, dus verwachtte hij dat het vwo wiskunde A-examen wel goed zou gaan. En dat bleek ook het geval te zijn: de 25 leerlingen scoorden de volgende cijfers:



7,6	8,7	8,0	7,8	6,1
8,5	6,8	6,9	8,3	9,9
5,6	6,8	8,0	3,4	5,3
9,4	8,6	5,7	4,1	6,9
6,8	8,5	7,6	7,1	8,0

Jan maakte bij de cijfers een frequentiehistogram, met klassebreedte 1. De cijfers 4,5 tot en met 5,4 komen in de klasse “5”, enzovoort.

a Wat was de mediaan van de cijfers?

Voor alle leerlingen in Nederland die het wiskunde A-examen in 2010 hebben gemaakt, was de mediaan 6,7.

b Hoeveel procent van de klas van Jan Stoer scoorden boven de landelijke mediaan?

Geen wonder dat Jan Stoer trots was op zijn klas (en op zichzelf). Henk Modaal, zijn collega Frans, is niet zo onder de indruk van de prestaties van Jans klas. Hij redeneert: als je een munt 25 keer opgooit, kan die best 19 of meer keer op kop vallen.

c Bereken die kans.

d Wat denk jij, is de trots van Jan Stoer terecht?

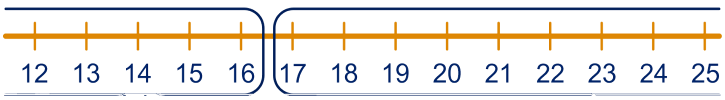
Twee meningen, die van Jan en van zijn collega staan tegenover elkaar:
Jan: “De klas heeft buitengewoon goed gepresteerd”,
Henk: “Dit kan best toeval zijn”.
Als Henk gelijk heeft, is de kans p dat een leerling bovenmodaal scoort $\frac{1}{2}$. Dat noemen we de nulhypothese: H_0. Als Jan gelijk heeft, is die kans groter dan $\frac{1}{2}$; dat is de alternatieve hypothese H_1. H_1 zegt niet hoe groot de kans p precies is; alleen maar dat hij groter is dan $\frac{1}{2}$.
Wie gelijk heeft is niet met zekerheid vast te stellen. Maar wel hoe zeldzaam de prestatie van Jans klas is, onder de aanname dat Henk gelijk heeft.

We benaderen het probleem nu algemener (en vergeten even dat er 19 leerlingen boven de landelijke mediaan scoorden.

- Stel dat in Jan Stoers klas alle 25 leerlingen boven de landelijke mediaan zouden hebben gescoord. Dan zou het wel heel toevallig zijn dat dat resultaat door toeval tot stand is gekomen. In dat geval zal elk weldenkend mens Henks hypothese verwerpen.
- Stel dat in Jans Stoers klas maar 14 leerlingen boven de landelijke mediaan zouden hebben gescoord. Dat is een heel gewoon resultaat. Dan zal een weldenkend mens Henks hypothese niet verwerpen.

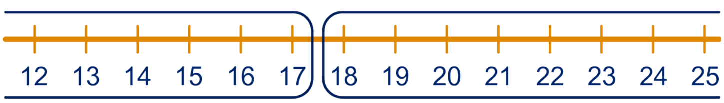
Vraag: *Bij welk aantallen leerlingen die boven de mediaan scoren verwerp je Henks hypothese, en bij welke aantallen niet?* Met andere woorden: *Waar trek je de grens?*

Hierboven staan de mogelijke aantallen leerlingen die boven de landelijke mediaan scoren; de aantallen lager dan 12 zijn weggelaten. Stel dat we de grens tussen 16 en 17 trekken:



De kans dat door louter toeval (zoals Henk beweerde) het aantal in het linker stuk terecht komt is 0,946, de kans dat hij in het rechter stuk terecht komt is dus 0,054. Het aantal leerlingen boven de mediaan in Jan Stoers klas was 19. Dat zit in het rechter stuk. Omdat de kans om daarin terecht te komen slechts 0,054 is, is de prestatie van Jans klas waarschijnlijk geen toeval.

We hadden de grens ook tussen 17 en 18 kunnen trekken:



De kans op het rechter stuk is nu zelfs maar 0,022. Omdat het aantal in Jans klas in dat gebied valt, is de conclusie gerechtvaardigd dat Jan een goede klas had.

Er zit iets willekeurigs in de aanpak. Wat vind je een kleine kans? Dat bepaalt waar je de grens gaat trekken. En dat bepaalt weer of je Henk gelijk geeft of niet.

8.3 Kritiek gebied

De beslissingsprocedure is als volgt:

- We letten op het aantal leerlingen dat boven de landelijke mediaan scoort: dat is de **toetsingsgrootheid** X.
- De mogelijke waarden worden opgesplitst in twee stukken, zo dat - als H_0 waar is - de kans dat X een waarde binnen het ene (in dit geval rechter) stuk aanneemt kleiner is dan α.
- Als X dan toch een waarde in dat stuk aan blijkt te nemen, zal men H_0 verwerpen.

Dat stuk heet het **kritieke gebied**. "Kritiek", omdat dan wel eens een verkeerde beslissing genomen kan worden. Het kritieke gebied hangt af van de waarde van α. α heet wel het **significantieniveau**. Vaak wordt $\alpha = 0{,}05$ genomen.

Voorbeeld

Om het kritieke gebied in bovenstaand voorbeeld bij $\alpha = 0{,}05$ te bepalen, kun je met de GR een tabel maken.

k	$\text{P}(X \geq k, n = 25, p = 0{,}5)$
...	...
16	0,114...
17	0,053...
18	0,021...
19	0,007...
...	...

Met de tabel zie je: 17 ligt niet in het kritieke gebied, 18 wel. Dus het kritieke gebied bij $\alpha = 0{,}05$ bestaat uit de getallen 18,19,...,25.

NB. De kans bij $k = 17$ in de tabel bereken je met de GR als volgt: $\text{P}(X \geq 17, n = 25, p = 0{,}5) = 1 - \text{P}(X \leq 16, n = 25, p = 0{,}5) \approx 0{,}114...$.

19

a Ga na hoe je de tabel in het voorgaande voorbeeld op de GR kunt maken.

b Wat is het kritieke gebied in bovenstaand voorbeeld bij $\alpha = 0{,}02$.

20

Iemand zegt helderziende te zijn. Hij kan zeggen of een speelkaart een klaveren, ruiten, harten of schoppen is – zonder de kaart te zien natuurlijk. Hem worden twintig kaarten voorgelegd, waarvan hij de kleur gaat voorspellen. X is het aantal goede voorspellingen dat hij gaat doen.

a Wat is het waardengebied van X?

Stel H_0 : De "helderziende" is een bedrieger en heeft geen talent om kaarten te voorspellen.

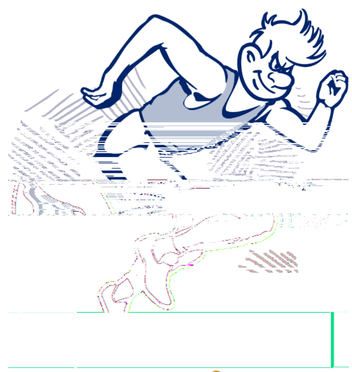
b Wat is dan de kans per kaart dat hij hem goed voorspelt?

c Wat is dan de verwachtingswaarde van X?

d Wat is het kritieke gebied als $\alpha = 0{,}05$? En als $\alpha = 0{,}1$? En als $\alpha = 0{,}02$?

21

Een atleet zegt tegen een journalist dat hij de 100 meter gemiddeld loopt in $11{,}0$ seconden en dat hij 80% van zijn sprints loopt binnen de $11{,}3$ seconden.
Neem aan dat zijn 100-metertijd normaal verdeeld is.



a Welke standaardafwijking volgt uit de beweringen van de atleet? Geef je antwoord in twee decimalen.

De atleet gaat de 100 meter lopen. De tijd in seconden die hij gaat realiseren noemen we T. Veronderstel dat de atleet gelijk heeft. We splitsen de verzameling mogelijke waarden van T in twee stukken:

- waarden boven of gelijk aan een zekere grenswaarde g; dat is het kritieke gebied,
- waarden onder die grenswaarde g.

Dat doen we zo, dat - als de atleet gelijk heeft - een resultaat in het kritieke gebied kleiner dan α is.

b Wat is het kritieke gebied als $\alpha = 0{,}1$.

c Bepaal ook het kritieke gebied als $\alpha = 0{,}05$.

De journalist gelooft de atleet niet als T een waarde boven of gelijk aan g aanneemt; anders wel. De atleet realiseert een tijd van $11{,}48$ seconde.

d Wat is bij elk van de waarden van α de conclusie van de journalist?

Iemand doet een bewering, een ander twijfelt aan de juistheid daarvan. Een **hypothesetoets** is een procedure om te beslissen wie gelijk krijgt. Daarbij heb je:

- twee hypothesen: de **nulhypothese** H_0 en de **alternatieve hypothese** H_1,
- een **toetsingsgrootheid**; dat is het aantal X dat geteld wordt (of een gewicht dat gemeten wordt, of ...),
- een criterium dat zegt bij welke waarden van X de nulhypothese wordt verworpen. Deze waarden vormen het zogenaamde **kritieke gebied**.

Het kritieke gebied wordt zo bepaald dat - als H_0 waar is - de kans dat X een waarde aanneemt in het kritieke gebied kleiner is dan een vooraf afgesproken α. Deze α heet het **significantieniveau**. Voor α neemt men vaak $0{,}05$, $0{,}01$ of zelfs $0{,}005$, afhankelijk van hoe zwaarwegend de beslissing is.

Schematisch:

- H_0: $\cdots$ en H_1: $\cdots$
- $X = \cdots$
- $\alpha = \cdots$
- Kritiek gebied: $\cdots$

Voorbeeld (opgave 9)

- H_0: Henk heeft gelijk en H_1: Jan heeft gelijk
- $X =$ het aantal leerlingen dat hoger dan de landelijke mediaan scoort;
  X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en succeskans $p = \frac{1}{2}$,
- H_0: $p = \frac{1}{2}$ en H_1: $p > \frac{1}{2}$,
- $\alpha = \cdots$
- Kritiek gebied: $17, 18, \cdots, 25$

22 Definieer X en formuleer H_0 en H_1 in de opgaven 11 en 12.

Na het opstellen van de hypothesetoets volgt een experiment (Let op de juiste volgorde. Je moet eerst de toets opstellen en daarna pas het experiment uitvoeren.) Daarin neemt X een waarde aan.

- Als X in het kritieke gebied zit, wordt H_0 verworpen (en dus H_1 geaccepteerd).

Waarschijnlijk gebeurt dat terecht, maar helemaal zeker is dat niet. Het is dus mogelijk dat een verkeerde beslissing wordt genomen. Vandaar de term kritiek gebied.

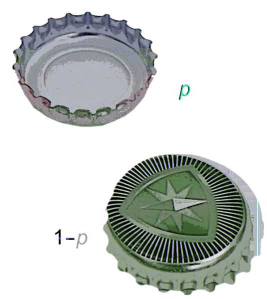
Als H_0 ten onrechte wordt verworpen, spreekt men van de **fout van de eerste soort**. De kans op de fout van de eerste soort is kleiner dan α.

- Als X niet in het kritieke gebied zit, wordt H_0 niet verworpen.
Er is een redelijke kans dat dit onterecht gebeurt. Men spreekt dan van de **fout van de tweede soort**.
Dit wordt meestal minder erg gevonden.

Opmerking
Als H_0 niet verworpen wordt, omdat het resultaat niet significant is, kan er toch (veel) twijfel bestaan of H_0 wel juist is. Vergelijk dit met de rechtspraak: als een verdachte bij gebrek aan bewijs niet wordt veroordeeld, betekent dat nog niet dat hij onschuldig is.

23 In het begin van een voetbalwedstrijd moet de speelrichting van de teams worden bepaald en wie mag aftrappen. De scheidsrechter doet dit door “tossen”: hij gooit een muntstuk op; als het op kop valt kiest het team dat kop koos de speelrichting en de andere partij doet de aftrap. (Voor de tweede helft is het omgekeerd.)

Men gaat er bij de toss vanuit dat het muntstuk met evenveel kans op kop als op munt valt. Als in plaats van een muntstuk een kroonkurk wordt gekozen, is dat niet zo zeker.
De kans dat een kroonkurk met de holle kant naar boven valt, noemen we p.
We zetten twee meningen tegenover elkaar:
H_0: $p = 0{,}5$ en H_1: $p \neq 0{,}5$.
Omdat p volgens de alternatieve hypothese zowel groter als kleiner dan 0,5 kan zijn, hebben we hier te maken met een **tweezijdige toets**.
X is het aantal keer dat de holle kant boven komt, in een serie van vijftig worpen.



H_0 zal worden verworpen als de waarde van X sterk afwijkt van het verwachte aantal 25, naar beneden of naar boven. Het kritieke gebied bestaat dus uit twee stukken, namelijk de erg lage aantallen en de erg hoge aantallen. Beide stukken moeten een kans hebben van hoogstens $\frac{1}{2}\alpha$.

a Bepaal het kritieke gebied bij $\alpha = 0{,}1$.

X blijkt de waarde 37 aan te nemen.

b Is de kroonkurk bruikbaar om te tossen?

24 Sanne en Harm toepen regelmatig samen. Toepen is een kaartspel waarbij de spelers elk vier kaarten krijgen uit een spel van 32 kaarten: B, V, H, A, 7, 8, 9, 10 van elke kleur. De 10 is de hoogste, de boer de laagste kaart. Het is dus gunstig om 10’en te krijgen. De kans dat een speler minstens één 10 krijgt is $0{,}43$.

a Reken dat na.

Die kans is $0{,}43$, tenminste als er eerlijk gedeeld wordt. Harm is argwanend en denkt dat Sanne de kaarten "steekt" als ze de kaarten deelt. Hij denkt dat Sanne - als ze zelf deelt - veel vaker ten minste één 10 heeft dan in 43% van de keren. We gaan dit vermoeden toetsen, in twintig keer dat Sanne deelt.

b Leg uit dat je hier niet met een tweezijdige toets te maken hebt.

We spreken hier van een **eenzijdige toets**.

c Definieer een toetsingsgrootheid X en formuleer H_0 en H_1.

d Bepaal het kritieke gebied bij $\alpha = 0{,}1$.

Harm telt dat Sanne dertien keer een of meer 10'en had als ze deelde.

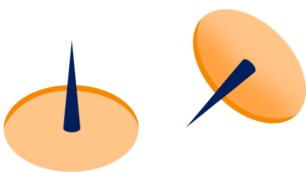
e Wat gaat Harm concluderen bij $\alpha = 0{,}1$?

Opmerking

Over eenzijdig en tweezijdig

Vaak constateren mensen iets, bijvoorbeeld dat een munt vaak op kop valt en denken daarom dat ze eenzijdig moeten toetsen. H_0: kans op kop $p = \frac{1}{2}$ tegen H_1: kans op kop $p > \frac{1}{2}$.
Dit is onjuist. Zo'n constatering mag je wel op het idee brengen een hypothese te toetsen, maar je moet onbevooroordeeld aan de toets beginnen: eerst de toets formuleren en dan pas het experiment uitvoeren. In dit geval moet dus tweezijdig getoetst worden.
In het voorbeeld van het toepen deelt Sanne eerlijk of niet. Als ze oneerlijk deelt, is het verwachte aantal 10'en per keer groter dan $\frac{1}{2}$ en beslist niet kleiner. Nu moet dus eenzijdig getoetst worden.

25 Sanne beweert dat een punaise met kans $\frac{3}{4}$ met de punt naar boven valt en met kans $\frac{1}{4}$ met de punt naar beneden. Harm zou niet weten waarom dat zo is.



Om Sannes bewering te toetsen, keert hij een bakje met honderd punaises ondersteboven en telt het aantal punaises X dat met de punt omhoog komt te liggen. Als significantieniveau neemt hij $0{,}1$.
Het kritieke gebied bestaat uit twee stukken. De kans dat de waarde van X in één van die stukken ligt, moet dus kleiner dan $0{,}05$ zijn.

a Bereken $P(X \geq 84)$ en $P(X \leq 66)$.

b Wat zal Harms conclusie zijn als X de waarde 84 blijkt te hebben?

c Wat zal Harms conclusie zijn als X de waarde 66 blijkt te hebben?

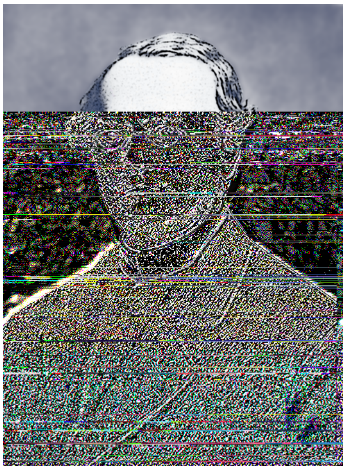
Opmerking
Als X de waarde 84 blijkt te hebben, hoeven we het kritieke gebied niet te bepalen. We kunnen volstaan met de kans $\mathrm{P}(X \geq 84)$. Omdat die kleiner is dan $\frac{1}{2}\alpha = 0{,}05$, kan Harm Sannes bewering verwerpen.
We noemen $\mathrm{P}(X \geq 84)$ de **overschrijdingskans** van 84, dat is de kans op een aantal van 84 of meer.

26 Bekijk nog eens het vermeende steken van de kaarten door Sanne (opgave 15). Neem aan H_0 is waar: Sanne deelt eerlijk. X is het aantal keer dat Sanne een of meer 10'en krijgt in een serie van twintig keer dat ze zelf deelt. Neem als significantieniveau 10%. Wat is dan $\mathrm{P}(X \geq 13)$?

Omdat deze kans kleiner is dan $0{,}1$, zullen we H_0 bij $\alpha = 0{,}1$ verwerpen, als Sanne 13 keer ten minste één 10 krijgt in de serie van twintig. Ook nu hoeven we dus niet het kritieke gebied te bepalen. De kans $\mathrm{P}(X \geq 13)$ is de overschrijdingskans van 13, dat is de kans op een aantal van 13 of groter.

27 Gregor Mendel deed biologische experimenten, waarbij hij erwtenplantjes met elkaar kruiste. Volgens de theorie moesten 75% van de nakomelingen geel zijn en 25% groen. Hij testte de theorie met 8023 erwtenplantjes van de tweede generatie.

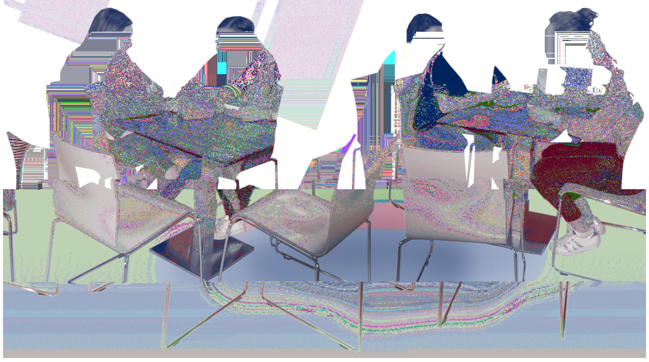
a Wat was Mendels toetsingsgrootheid? En welke waren H_0- en H_1-hypothese, denk je?
b Wat is het kritieke gebied bij $\alpha = 0{,}05$?

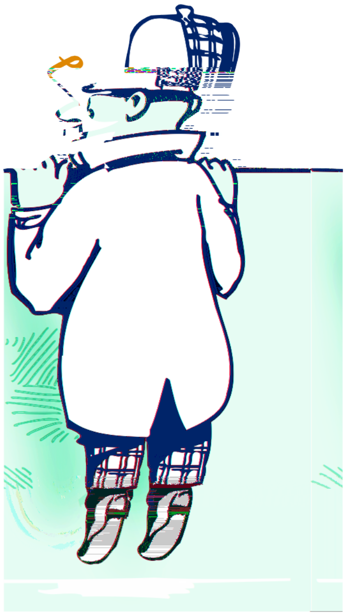


Mendel 1822-1884

Soms moet je eenzijdig en soms tweezijdig toetsen.
In het geval van tweezijdig toetsen, bestaat het kritieke gebied uit twee stukken. Die worden zó bepaald dat de kans dat de toetsingsgrootheid X een waarde in een van die stukken aanneemt – als H_0 waar is – kleiner is dan α. Dus zó dat de kans dat X een waarde in één van die stukken aanneemt kleiner is dan $\frac{1}{2}\alpha$.
Stel dat X de waarde x aanneemt. H_0 wordt verworpen als de overschrijdingskans $\mathrm{P}(X \geq x)$ kleiner is dan $\frac{1}{2}\alpha$ en ook als de overschrijdingskans $\mathrm{P}(X \leq x)$ kleiner is dan $\frac{1}{2}\alpha$.
In het geval van eenzijdig toetsen, bestaat het kritieke gebied uit één stuk. Dat wordt zó bepaald dat de kans dat de toetsingsgrootheid X een waarde in dat stuk aanneemt – als H_0 waar is – kleiner is dan α. Stel dat X de waarde x aanneemt.
Bij een rechtszijdige toets wordt H_0 verworpen als de overschrijdingskans $\mathrm{P}(X \geq x)$ kleiner is dan α en bij een linkszijdige toets als de overschrijdingskans $\mathrm{P}(X \leq x)$ kleiner is dan α.

28 In een kantine staan vierkante tafeltjes met vier stoelen er omheen. Een psycholoog observeert het gedrag van de mensen die zich daar in de middagpauze ophouden. In het bijzonder kijkt hij naar de tafeltjes waaraan twee mensen zitten. Die twee kunnen tegenover elkaar zitten of naast elkaar aan de hoek van het tafeltje.





In de loop van enkele dagen ziet hij 87 keer twee mensen aan een tafeltje: 34 keer tegenover elkaar en 53 keer naast elkaar. De psycholoog concludeert hieruit dat er een uitgesproken voorkeur is voor de hoekopstelling. (Een mogelijke verklaring is dat men oogcontact wil vermijden en dat kan moeilijk als men tegenover elkaar zit.)
Statistisch verdedigt hij zijn bevinding als volgt: als er geen voorkeur zou zijn tussen beide opstellingen, zullen deze met gelijke kans worden gekozen, dus allebei met kans $\frac{1}{2}$. Laat p de kans zijn op de hoekpositie en neem als toetsingsgrootheid X het aantal keer dat de hoekopstelling wordt gekozen.

a Formuleer de H_0- en H_1-hypothese, in termen van p.

De psycholoog deed 87 observaties. X is binomiaal verdeeld met 87 herhalingen en onbekende kans p.

b Bereken de kans dat - onder H_0 - daarbij 53 of meer keer de hoekopstelling wordt geconstateerd.

c Waarom is hier sprake van een tweezijdige toets?

d Wat is je conclusie bij een significantieniveau van 10%?

e Ben je het eigenlijk wel eens met $p = \frac{1}{2}$ als je ervan uitgaat dat de twee mensen zonder een bepaalde voorkeur aan een tafeltje gaan zitten?

We bekijken nog even de situaties van paragraaf 1.

29 In tien worpen valt een munt zeven keer op kop. Iemand beweert daarom dat de munt vals is.

a Geef je hem gelijk, bij een significantieniveau $0{,}1$?

“Ik had graag een stuk Edammer van een pond”. De kaasboer snijdt op het oog een stuk kaas voor de klant. In acht van de tien keer blijkt het meer dan 500 gram te zijn. Een klant beweert dat de kaasboer systematisch teveel snijdt.

b Geef je hem gelijk, bij een significantieniveau $0{,}1$?

Een dictator beweert dat 70% van de bevolking zijn beleid steunt. Van de eerste tien mensen die je ondervraagt zeggen er vijf dat ze het beleid van de dictator afkeuren.

c Verwerp je de bewering van de dictator, bij significantieniveau $0{,}05$?

J. Barry beweerde dat men met zijn gedachten de groei van paddenstoelen kan vertragen. In een experiment bleek dat bij negen van de tien proefpersonen de experimentele groep paddenstoelen trager groeide dan de controlegroep.

d Kun je, bij significantieniveau $0{,}05$, concluderen dat J. Barry gelijk heeft?

30 Een examen bestaat uit twintig multiple-choicevragen. Bij elk van de twintig vragen moet je een van de vier antwoorden aankruisen. Heb je negen of meer antwoorden goed dan ben je geslaagd.
Iemand die niets van het onderwerp begrijpt en alle vragen op de gok beantwoordt kan door stom geluk toch slagen.

a Hoe groot is zijn kans om te slagen?

Van een leerling vermoedt de leraar dat hij de toets volledig op de gok heeft ingevuld. Die leerling scoorde 8 goede antwoorden.

b Is deze score voldoende reden om het vermoeden van de leraar te verwerpen, bij een significantieniveau van 10%?

Een andere leerling heeft zich beter op de test voorbereid. Zijn kans p op het aankruisen van een juist antwoord is duidelijk groter dan $0{,}25$. De kans om te slagen hangt af van p. Bij elke waarde van p kun je die kans op de GR uitrekenen.

c Zoek uit hoe dat op jouw GR gaat.

d Voer die kans op je GR in bij $Y =$ ... (dus als functie) en teken op de GR de grafiek van die functie.

e Voor welke p is de slaagkans 90%?

31 Bij een Aa×Aa-kruising is de kans p dat een nakomeling van type aa is gelijk aan $\frac{1}{4}$. Bij alle andere kruisingen, bijvoorbeeld Aa×aa of Aa×AA, heeft p een andere waarde. In een bepaalde situatie was het type van de ouders niet duidelijk. Wel vermoedde men dat beide ouders van het type Aa zouden zijn. Door middel van een toets wil men vaststellen of het vermoeden juist is.

a Wat zijn de hypothesen? Wat is de toetsingsgrootheid? Is het een éénzijdige toets?

Van de 36 nakomelingen bleken er 15 van het type aa te zijn.

b Wat is je conclusie bij een significantieniveau van 5%?

32 Volgens de VVV van het eiland Texel regent het daar in de zomer maar op 15% van de dagen. Anja gaat daar drie weken kamperen. X is het aantal dagen dat het regent in de eenentwintig dagen dat Anja op Texel kampeert. Neem aan dat X binomiaal verdeeld is. Veronderstel dat de VVV gelijk heeft (dat is H_0).

a Wat zijn dan $E(X)$ en $Var(X)$?

Anja weet alles van hypothesetoetsen en zegt dat ze de bewering van de VVV op grond van haar vakantie-ervaring kan verwerpen bij significantieniveau $0{,}05$.

b Hoeveel dagen heeft Anja regen gehad?

c Waarom is het eigenlijk twijfelachtig of X wel binomiaal verdeeld is?

De tekentoets

33 Een panel deskundigen proeft van acht bekende wijnen de jaargangen 2010 en 2011 en gaat daarbij na of er kwaliteitsverschil is. Na het proeven bleek dat zes van de acht wijnen van 2010 als beter werden beoordeeld.
Concludeer je, bij een significantieniveau van 10%, dat er sprake is van kwaliteitsverschil?

Bij elk van de wijnen wordt beslist welke de beste is: de wijn van 2010 of die van 2011. Het gaat er niet om hoeveel beter. De beste krijgt een +, de andere een −. Vervolgens worden het aantal +'en (of −'en) geteld. Daarom wordt zo'n toets een **tekentoets** genoemd.

Voorbeeld tekentoets

We vergelijken de resultaten van paren planten. Het enige verschil tussen twee planten in een paar is dat bij de een wel kunstmest is toegepast, bij de andere niet. Als de kunstmestplant het beter doet dan de plant in zijn paar zonder kunstmest, noteer je dat met +, anders met −.

De toetsingsgrootheid X is het aantal +'en.
p is de kans op een + met $H_0 : p = \frac{1}{2}$
Voor H_1 : zijn er drie mogelijkheden:
$H_1 : p \neq \frac{1}{2}$; H_0 wordt verworpen als de tweezijdige overschrijdingskans kleiner dan α is. (Dus elk van beide overschijdingskansen is dan kleiner dan $\frac{1}{2}$ α.)
$H_1 : p > \frac{1}{2}$; H_0 wordt verworpen als de eenzijdige overschrijdingskans kleiner dan α is.
$H_1 : p < \frac{1}{2}$; H_0 wordt verworpen als de eenzijdige overschrijdingskans kleiner dan α is.

Opmerking

Wat doe je als er bij een tekentoets twee gelijke voorkomen (twee planten met en zonder kunstmest presteren even goed)? Dat moet je van tevoren afspreken. Je zou die bij de resultaten weg kunnen laten. Je zou ze ook voor de helft mee kunnen tellen bij de ene groep en voor de helft bij de andere groep.

34 Soms scoort een leerling bij een herkansing ineens veel hoger dan bij de eerste toets, maar het omgekeerde komt ook voor. Een docent wiskunde zegt dat herkansingen zinloos zijn, omdat ze even vaak slechter als beter gemaakt worden dan de eerste toets. Dit jaar heeft hij veertien keer een leerling een herkansing gegeven. De resultaten staan hieronder.

eerste toets	4,7	2,0	5,5	6,1	4,7	5,4	6,9	3,3	5,0	5,1	5,5	4,8	4,4	2,9
herkansing	4,6	3,6	5,6	7,1	4,4	5,5	8,0	3,5	5,6	5,2	5,1	5,2	2,8	4,4

Tot welke conclusie leidt een tekentoets bij significantie $0{,}05$?

35 Twaalf mensen met een hoge bloeddruk werden behandeld met een nieuw medicijn. Hieronder staat hun bloeddruk vóór en na de behandeling.

vóór	83	72	101	98	77	101	88	96	96	107	79	79
[illegible]	79	71	91	100	86	96	84	95	97	100	[illegible]	[illegible]

Concludeer je dat het medicijn helpt? Gebruik een tekentoets met significantie 5%.

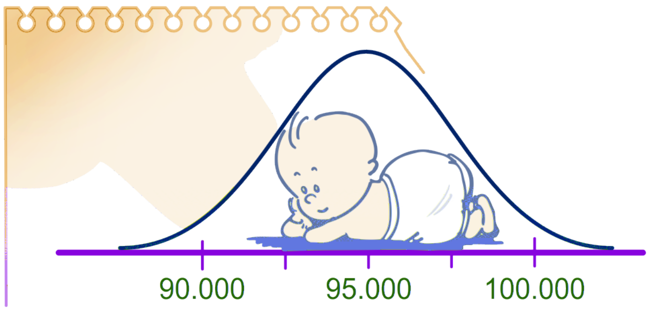
36 In Nederland worden jaarlijks ongeveer 185.000 kinderen geboren. Het aantal jongetjes daaronder is 94.900, met een standaarafwijking (SD) van 215. Op grond hiervan is gesteld dat de kans op een jongetje 0,513 is.

a Reken de kans 0,513 na.

Het aantal jaarlijkse geboortes schommelt wel een beetje, maar dat heeft nauwelijks invloed op de SD.
In 2010 werden 183.866 kinderen geboren.

b Bij welke aantallen jongetjes zal de gestelde kans van 0,513 op een jongetje moeten worden aangepast, bij een significantieniveau van 5%?

Het aantal jongetjes onder de 183.866 geboortes lijkt normaal verdeeld te zijn, maar in feite is het binomiaal verdeeld.



c Controleer daarmee de gegeven SD van 215.

37 Een toetsingsgrootheid X is normaal verdeeld met $\sigma = 4{,}6$ en onbekende μ.
Er zijn twee hypotheses: $H_0 : \mu = 83{,}4$ en $H_1 : \mu \neq 83{,}4$.

a Wat is het kritieke gebied bij $\alpha = 0{,}05$?

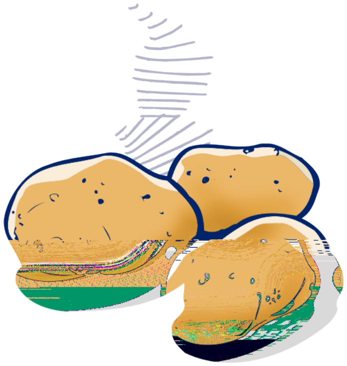
b Wordt de hypothese H_1 geaccepteerd bij het steekproefresultaat $X = 92{,}7$?

Vaak is het probleem bij toetsen met een normaal verdeelde grootheid dat de standaardafwijking eerst moet worden berekend. Dat gebeurt met de wortel n-wet.
Het volgende staat in hoofdstuk 10, De normale verdeling.

Als $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn, allemaal met standaardafwijking σ dan heeft

- de som $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ standaardafwijking $\sqrt{n} \cdot \sigma$,
- het gemiddelde $G = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ standaardafwijking $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma$.

38 Zakken met 2,5 kg aardappelen bevatten natuurlijk zelden precies 2500 gram. Ontevreden klanten beweren dat er vaak te weinig in zit. Een leverancier beweert dat in zijn zakken 2500 gram aardappelen zit met een standaardafwijking van 80 gram.
Een consumentenvereniging doet een onderzoek. In verschillende winkels worden in totaal 40 van die zakken gekocht.
De totale inhoud T van die zakken wordt gewogen (T in grammen).
We mogen wel aannemen dat T normaal verdeeld is.



- **a** Als de leverancier het bij het rechte eind heeft, wat is dan het te verwachten totale gewicht?
- **b** Heb je hier te maken met een éénzijdige of met een tweezijdige toets? Waarom?
- **c** Welke twee hypothesen staan tegenover elkaar?
- **d** Hoe groot is, als H_0 juist is, $\sigma(T)$?
- **e** Bepaal het kritieke gebied bij significantieniveau 5%.

De totale inhoud van de 40 zakken bleek 99,1 kg te zijn.

- **f** Worden de ontevreden klanten in het gelijk gesteld bij een significantieniveau van 5%?

39 Een supermarkt zegt dat de gemiddelde wachttijd voor haar kassa's niet meer dan 2 minuten bedraagt. Laten we eens aannemen dat de wachttijd normaal verdeeld is met een gemiddelde van 2 minuten en een standaardafwijking van 0,5 minuten. De laatste vier keer heb ik bijgehouden hoe lang ik moest wachten: 3, 4, 3 en 2 minuten. Ik beweer dat de supermarkt een oneerlijk beeld schetst van de werkelijkheid.
Krijg ik gelijk bij een significantieniveau van 5%?

Hint 1.

40 Het bedrag dat in een week bij de kassa's van een supermarkt binnenkomt, is in zes van de tien weken meer dan € 40.000.
Neem aan dat de wekelijkse omzet X normaal verdeeld is met standaardafwijking € 6515.

- **a** Bereken $\text{E}(X)$.

Er is nog een filiaal van de supermarkt. De bedrijfsleider hiervan beweert dat zijn omzet € 45.000 per week is met een standaardafwijking van € 5.000. De standaardafwijking van de omzet van de twee vestigingen samen kun je uitrekenen via de varianties van hun omzetten, dankzij de formule
$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$, mits X en Y onafhankelijk zijn.

- **b** Bereken die standaardafwijking.

Een accountant constateert dat in de afgelopen vier weken de totale omzet van de twee winkels € $368.743{,}36$ was.

c Is er, bij een significantieniveau van 5%, voldoende reden om de bewering van de bedrijfsleider van het filiaal te verwerpen?

41 Het IQ van een Nederlander is normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 15. Het vermoeden bestaat dat profvoetballers bovengemiddeld slim zijn. Om dat te onderzoeken nemen we een steekproef van 25 profvoetballers en onderwerpen ze aan een IQ-test. Het gemiddelde IQ in deze steekproef noemen we μ.

a Definieer een toetsingsgrootheid G en formuleer de H_0- en de H_1-hypothese.

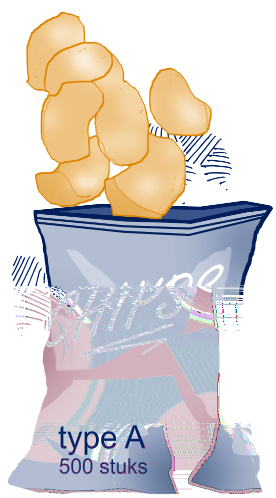
Om de toets uit te kunnen voeren moeten we de standaardafwijking kennen van het gemiddelde IQ van 25 mensen.

b Wat is de standaardafwijking van G?

c Bij welke waarden van μ mag ik concluderen dat profvoetballers inderdaad bovengemiddeld slim zijn, bij $\alpha = 0{,}05$?

42 In een bedrijf is het aantal uur dat dagelijks wordt overgewerkt normaal verdeeld met gemiddeld $9{,}1$ uur en standaardafwijking $2{,}1$ uur. Er wordt een nieuw systeem van flexibele werktijden ingevoerd. In een periode van 25 werkdagen bleek de gemiddelde dagelijkse overwerktijd $8{,}4$ uur per dag te zijn. Neem aan dat de standaardafwijking onveranderd $2{,}1$ uur is.
Onderzoek of bij een significantieniveau van 5% geconcludeerd kan worden dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.

43 In elektronische apparatuur worden veel chips gebruikt. Neem aan dat de levensduur van chips van type A normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $\mu = 8{,}0$ jaar en standaardafwijking $2{,}0$ jaar.



Een klant koopt 500 chips van type A.

a Hoeveel van deze chips zullen naar verwachting binnen 5 jaar stukgaan?

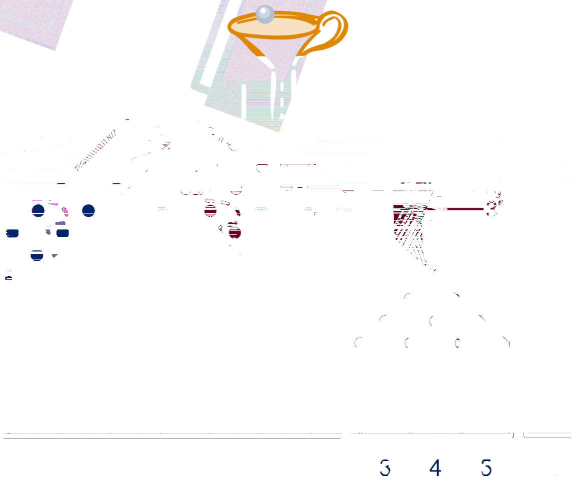
Van de chips van type B vermoedt men dat μ kleiner is dan $8{,}0$ jaar. Een laboratorium test daarom 50 chips van type B. Van deze bleken er na vijf jaar 7 stuk te zijn. Neem aan dat ook van deze chips de standaardafwijking van de levensduur $2{,}0$ jaar is.

b Geeft deze uitkomst voldoende aanleiding om bij een significantieniveau van 1% de aanname dat $\mu = 8{,}0$ jaar te verwerpen?

8.6 Van binomiaal naar normaal

De standaardnormale kromme is verwant aan de grafiek van de functie $y = \mathrm{e}^{-x^2}$. Het is verrassend dat de e-macht ineens opduikt in de kansrekening. Wat heeft de functie $y = \mathrm{e}^{x}$ te maken met de binomiaalcoëfficienten $\binom{n}{k}$?

We leggen het verband tussen die twee aan de hand van het Galtonbord met 10 rijen pinnen (maar dat is niet gemakkelijk).

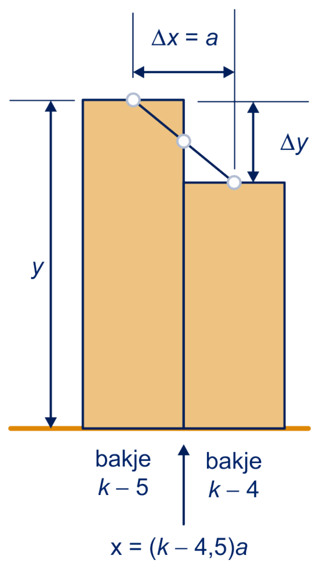


We nummeren de bakjes; het middelste krijgt nummer 0. De breedte van de bakjes noemen we a. Elke keer als een balletje een pin raakt, springt het $\frac{1}{2}a$ naar rechts of $\frac{1}{2}a$ naar links.

Als een balletje k keer naar rechts gaat en dus $10 - k$ keer naar links, komt het in bakje $k - 5$; de kans daarop is: $\binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

Als een balletje $k+1$ keer naar rechts gaat en dus $9-k$ keer naar links, komt het in bakje $k-4$; de kans daarop is $\binom{10}{k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

De grens tussen de twee bakjes ligt bij $x = \left(k - 4\frac{1}{2}\right)a$. Daar is de y-waarde van de kanspolygoon het gemiddelde van de kansen op k en $k+1$ successen, dus $\frac{1}{2}\left(\binom{10}{k} + \binom{10}{k+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.



44

a Ga na dat $\binom{10}{k+1} = \frac{10-k}{k+1}\binom{10}{k}$.

b Laat zien dat bijgevolg de y-waarde bij $x = \left(k - 4\frac{1}{2}\right)a$ gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

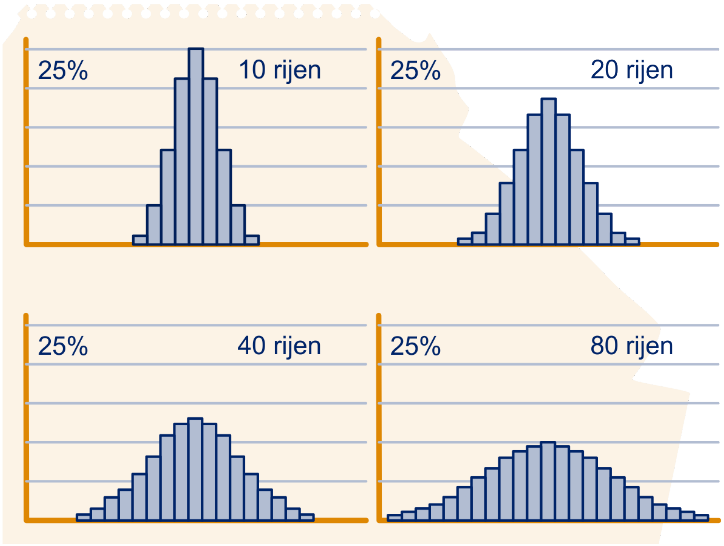
c Laat zien dat de richtingscoëfficiënt van het lijnstukje van de kanspolygoon is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{9-2k}{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

d Ga na dat geldt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{11a^2} \cdot x \cdot y$.

Bij een Galtonbord met n rijen vinden we: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{(n+1)\,a^2} \cdot x \cdot y$.

Bekijk nu de verdelingen voor $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$ en $n = 80$.

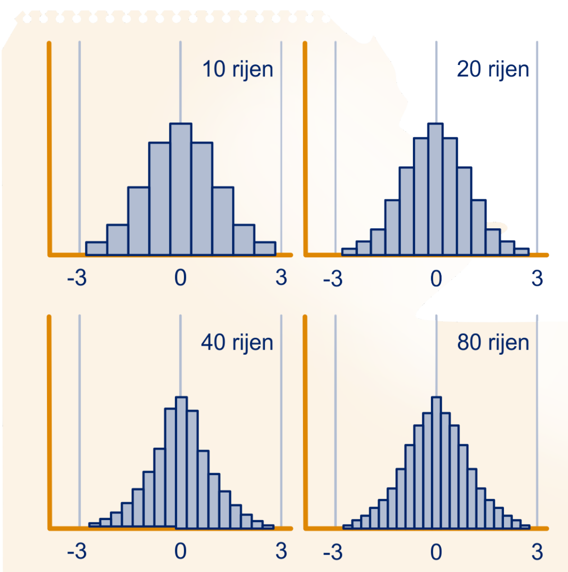
Ze worden steeds breder en lager.



Om de normale verdeling geheel in beeld te krijgen, moeten we de bakjes bij toenemende n steeds smaller maken.

We kiezen $a = \frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

De betrekking tussen de richtingscoëfficiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en en de coördinaten van het punt (x, y) wordt dan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -x \cdot y$.



Voor grote waarden van n kunnen we dit redelijk vervangen door: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x \cdot y$.

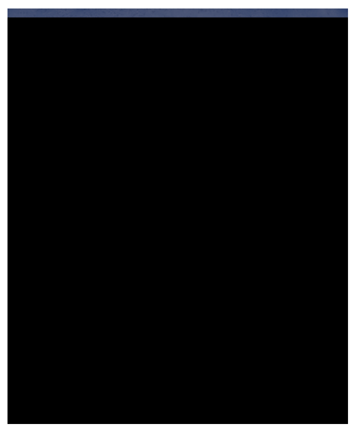
Dus y is oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x \cdot y$.
De 'algemene oplossing' van deze differentiaalvergelijking kun je vinden door de variabelen te scheiden (zie de paragraaf **Rekentechniek** van het hoofdstuk **Continue dynamische modellen**:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x \cdot y && \text{variabelen scheiden} \\ -x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y && \text{primitiveren} \\ \int -x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

De oplossingen zijn de functies y met $-\frac{1}{2}x^2 + a = \ln|y|$, waarbij a een constante is.

Er geldt: $-\frac{1}{2}x^2 + a = \ln|y| \Leftrightarrow |y| = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. De oppervlakte onder de grafiek van de gezochte oplossingsfunctie moet 1 zijn. Wij kunnen de oppervlakte onder de grafiek van de functie $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ alleen maar numeriek benaderen. Een exacte oplossing vinden is in dit kader niet mogelijk. Uiteindelijk blijkt: $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Omstreeks 1720 ontdekte De Moivre de normale kromme als limietvorm voor de verdeling van het aantal keren kop bij een groot aantal worpen met een munt. Zijn wiskundige afleiding werd in die tijd niet opgemerkt.



Abraham de Moivre
1667 - 1754

Een **hypothesetoets** is een methode om te beslissen bij een meningsverschil.
De twee meningen die tegenover elkaar staan zijn H_0, de **nul-hypothese** en H_1, de **alternatieve hypothese**.
Er wordt een steekproef gedaan. Hierbij wordt een **toetsingsgrootheid** X (een binomiaal of normaal verdeelde stochast) gedefinieerd.
De hypotheses gaan over de kansparameter p van X (als X binomiaal is) of de verwachtingswaarde μ (als X normaal is).

Als je uitgaat van een onbevooroordeelde, kritische waarnemer, is de inhoud van H_0 : er is niets bijzonders aan de hand; wat er gebeurt, is zuiver toeval.
p of μ hebben onder H_0 een vaste waarde (bijvoorbeeld $p = \frac{1}{3}$), terwijl bij H_1 een heel gebied van mogelijkheden is, bijvoorbeeld H_1: $p < \frac{1}{3}$,
Op grond van de waarde die X aanneemt bij een steekproef, wordt H_0 verworpen of niet.
Als H_0 juist is, zal het steekproefresultaat in de buurt van $E(X)$ zitten. Als het steekproefresultaat daar sterk van afwijkt, zal H_0 worden verworpen.
De waarden van X waarbij H_0 wordt verworpen vormen het **kritieke gebied** . Dat wordt zo bepaald dat de kans op een uitkomst in het kritieke gebied - als H_0 waar is - kleiner is dan een vooraf gekozen waarde α, het zogenaamde **significantieniveau**.

Als bij H_1 verondersteld wordt:
$X < p$ of $X < \mu$,
dan spreekt men van een **links-eenzijdige toets**,
$X > p$ of $X > \mu$,
dan spreekt men van een **rechts-eenzijdige toets**,
$X \neq p$ of $X \neq \mu$,
dan spreekt men van een **tweezijdige toets**.

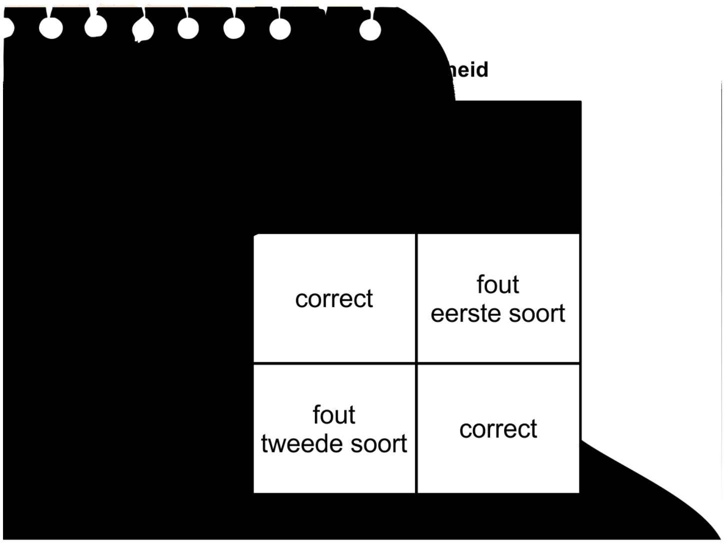
Bij een uitkomst a van de steekproef is de **overschrijdingskans** bij a

- bij een linkseenzijdige toets:
  $P(X \leq a, n = \ldots, p = \ldots)$ of $P(X \leq a | \mu = \ldots, \sigma = \ldots)$.
  a ligt dan in het kritieke gebied als de overschrijdingskans bij uitkomst a kleiner is dan α;
- bij een rechtseenzijdige toets:
  $P(X \geq a, n = \ldots, p = \ldots)$ of $P(X \geq a | \mu = \ldots, \sigma = \ldots)$.

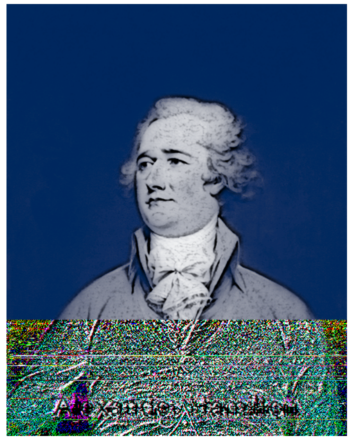
a ligt dan in het kritieke gebied als de overschrijdingskans bij uitkomst a kleiner is dan α;

- Bij een tweezijdige toets:
  als $a < \mathrm{E}(X)$:
  $\mathrm{P}(X \leq a,\ n = \ldots,\ p = \ldots)$ of $\mathrm{P}(X \leq a \mid \mu = \ldots,\ \sigma = \ldots)$.
  als $a > \mathrm{E}(X)$:
  $\mathrm{P}(X \geq a,\ n = \ldots,\ p = \ldots)$ of $\mathrm{P}(X \geq a \mid \mu = \ldots,\ \sigma = \ldots)$.
  a ligt dan in het kritieke gebied als de overschrijdingskans bij uitkomst a kleiner is dan $\frac{1}{2}$α.

Het ten onrechte verwerpen van H_0 is meestal een ernstige fout, de zogenaamde **fout van de eerste soort**.



1 in 1787 en 1788 schreven Alexander Hamilton en James Madison de zogenaamde The Federalist Papers, om de inwoners van New


Alexander Hamilton


James Madison

a Hoe groot is de kans dat hij tien keer het goede wijnjaar noemt?

Nu worden de tien glazen stuk voor stuk 'ad random' met een van de wijnsoorten gevuld (er wordt steeds een geldstuk geworpen; bij 'kop' schenkt men 1975 in, anders 1970).
Neem opnieuw aan dat de wijnkenner alleen maar raadt.

b Hoe groot is de kans dat hij tien keer het goede jaar noemt?

De wijnkenner zwakt zijn bewering af en zegt dat hij weliswaar niet met zekerheid kan vaststellen met welk wijnjaar hij te doen heeft, maar dat hij vaker goed dan fout kiest. Hij krijgt opnieuw tien glazen wijn voorgezet, stuk voor stuk 'ad random' gevuld, en noemt achtmaal het goede jaar.

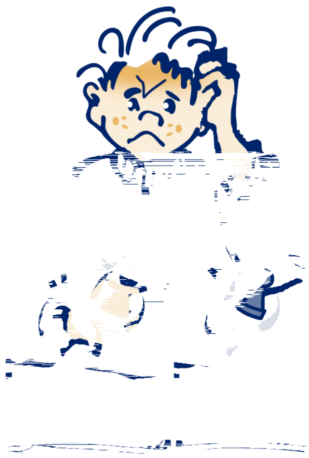
c Is er op grond van deze uitslag reden genoeg om hem te geloven bij een significantieniveau van 5%?

d Een week later voert men opnieuw deze toets uit, maar nu met een ander aantal glazen 'ad random' met één van beide wijnsoorten gevuld). Bij een significantieniveau van 5% wordt de wijnkenner slechts geloofd als hij ten hoogste één keer een verkeerd jaar noemt.
Hoeveel glazen krijgt hij ten minste voorgezet?

Examen wiskunde A Vwo, 1983II

3

Mens erger je niet



Bij een spelletje *Mens erger je niet* heeft Harrie flink verloren. Volgens hem ligt dat aan de dobbelsteen; die zou niet helemaal in orde zijn. Hij had bij dat spelletje opvallend weinig zessen gegooid, terwijl zijn vriendinnetje Mady juist erg vaak een zes gooide. Harrie heeft op school net voor het eerst van een hypothesetoets gehoord en besluit die kennis meteen te gebruiken.

a Harrie besluit een tweezijdige toets op te stellen. Ben jij het daarmee eens?

Hij gooit 100 keer met de dobbelsteen en telt daarbij op het aantal keren zes. Dat aantal noemen we X.

b Formuleer H_0 en H_1 en bepaal het kritieke gebied bij significantieniveau $\alpha = 0{,}10$.

4

Taaltest

Met deze test wordt onderzocht of iemand iets afweet van een bepaalde taal. De test bestaat uit tien vragen. Bij iedere vraag zijn er drie woorden in de vreemde taal gegeven met de bijbehorende Nederlandse woorden, maar die staan in een willekeurige volgorde. De proefpersoon moet bij elke vraag de juiste volgorde van de woorden aangeven door één van de zes mogelijke volgordes te kiezen. Hij krijgt dan zoveel punten als er woorden goed geplaatst zijn.
X_1 is het aantal punten dat bij de eerste vraag gescoord wordt.
Neem even aan (H_0) dat de proefpersoon niets van de vreemde taal weet.

a Ga na dat $E(X_1) = \frac{1}{2}$ en $Var(X_1) = 1$.

Laat T het totaal aantal punten zijn dat de proefpersoon behaalt bij de tien vragen, dus $T = X_1 + X_2 + ... + X_{10}$.

b Bereken: $P(T = 0)$, $P(T = 1)$, $P(T = 28)$ en $P(T = 30)$

c Bereken $E(T)$ en $Var(T)$.

T is bij benadering normaal verdeeld.

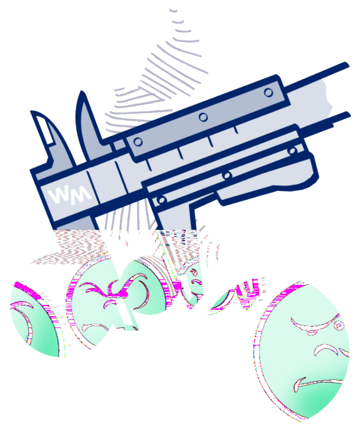
d Bereken hiermee $P(T = 15)$.

We willen met een hypothesetoets onderzoeken of de proefpersoon wel of niet iets van de taal afweet.
De proefpersoon scoort in totaal 17 punten.

e Formuleer H_0 en H_1 en ga na of deze score bij een significantieniveau van 5% voldoende is om te concluderen dat de proefpersoon niets van de vreemde taal afweet.

5

In een kogellagerfabriek worden stalen kogeltjes gemaakt die een diameter tussen 3,98 en 4,02 mm dienen te hebben. Door middel van twee zeven worden de kogeltjes gesorteerd. Het is inmiddels bekend dat de diameter van de kogeltjes normaal verdeeld is met standaardafwijking 0,008 mm, maar het gemiddelde μ is onbekend. Van een aselecte steekproef van 250 kogeltjes werden er 11 uitgezeefd omdat ze te dun of te dik waren.



Neem aan dat $\mu = 4{,}005$.

a Bereken de kans dat een aselect gekozen kogeltje een te grote of te kleine diameter heeft.

b Wordt op grond van de uitkomst van de steekproef de hypothese dat $\mu = 4{,}005$ verworpen? Neem als significantieniveau $\alpha = 0{,}05$.

Naar: WS bulletin, januari 1982

Discreet en continu

1
a $0{,}3694$, $0{,}3446$
b ? Maar niet doordat het benaderingen zijn.

2
a 0, 1, 2, 3, 4 en 6
b Alle positieve gehele getallen

3
a Continu, $[0{,}60\rangle$
b Alle gehele getallen k met $0 \leq k < 60$

4
a Er is geen verschil: $\text{P}(X = 3) = \text{P}(2 < X < 4)$.
b $\text{P}(Y = 78) \approx 0$, $\text{P}(77 < Y < 79) \neq 0$.

5
a Een discrete stochast
b $\text{E}(X) = n \cdot p = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5$, $\text{Sd}(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 1{,}5$
c Met de GR: $P(X = 6) = P\left(X = 6, n = 9, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}1641$
d Met de GR: $\text{P}(5{,}5 < U < 6{,}5) = \text{P}(5{,}5 < U < 6{,}5 | \mu = 9\,,\ \sigma = 1{,}5) \approx 0{,}1613$
e Met de GR: $\text{P}(X < 6) = \text{P}\left(X \leq 5, n = 9, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}7461$ en $\text{P}(U < 5{,}5) = \text{P}(U < 5{,}5 | \mu = 9\,,\ \sigma = 1{,}5) \approx 0{,}7475$
f $\text{P}(X \leq 6) = \text{P}\left(X \leq 6, n = 9, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}9102$ en $\text{P}(U < 6{,}5) = \text{P}(U < 6{,}5 | \mu = 9\,,\ \sigma = 1{,}5) \approx 0{,}9088$

6
a $\text{P}(X < 7) \approx \text{P}(U < 6{,}5)$
b $\text{P}(X \geq 9) \approx \text{P}(U > 8{,}5)$
c $\text{P}(5 < X < 12) \approx \text{P}(5{,}5 < U < 11{,}5)$
d $\text{P}(10 > X \geq 2) \approx \text{P}(9{,}5 > U > 1{,}5)$

7
a $\text{P}(U < 100 | \mu = 105\,,\ \sigma = 15) \approx 0{,}3569$
b $\text{P}(99{,}5 < U < 100{,}5 | \mu = 105\,,\ \sigma = 15) \approx 0{,}0252$

8
a Een stuk filet weegt veel meer dan een korrel suiker. Met suiker is het gewicht dus nauwkeuriger af te passen.
b $\text{P}(Y < 270) + \text{P}(Y > 330) \approx 0{,}0455$
c $\text{E}(T) = 900$, $\text{Var}(T) = 3 \cdot 15^2 = 675$ en $\text{Sd}(T) = \sqrt{675} \approx 25{,}98$
d $\text{P}(T < 810) + \text{P}(T > 990) \approx 0{,}00053$
e Een te licht pak wordt waarschijnlijk gecompenseerd door een te zwaar pak.
f $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$,
$\frac{1}{27}$,
$\text{P}(12\text{ filets}) = \text{P}(3\text{ keer }4\text{ filets}) + \text{P}(3,\ 4\text{ en }5\text{ filets}) = \frac{1}{27} + \frac{2}{9} = \frac{7}{27}$

9
a De duur van de zwangerschap noemen we T. Deze is normaal verdeeld met $\mu = 281$. Uit 4 % van de geboortes vindt plaats op de dag dat de vrouw is uitgeteld volgt dat $P(U < 281{,}5) = 0{,}52$. De z-waarde bij $0{,}52$ is $0{,}05$. Noem de standaardafwijking σ, dan $\frac{281{,}5 - 281}{\sigma} = 0{,}05$, dus $\sigma = 10$.

b Gevraagd is: P($U > 295{,}5$).
Met de GR: P($295{,}5 < U < 1000| \mu = 281$, $\sigma = 10 \approx 0{,}0735$

Wie heeft gelijk?

10
a ?
b ?
c $\frac{22}{1300} \cdot 100 \approx 1{,}7\%$
d $n = 1300$, $p = 0{,}017$, de verwachtingswaarde van X is $n \cdot p = 22{,}1$.
e In het eerste geval: de kans dat $X = 17,\cdots,27$, met de binomiale verdeling op de GR:
$P(X \leq 27, n = 1300, p = 0{,}017) - P(X \leq 16, n = 1300, p = 0{,}017) \approx 0{,}7638$;
in het tweede geval: de kans dat $X = 12,\cdots,32$, die kans is
$P(X \leq 32, n = 1300, p = 0{,}017) - P(X \leq 11, n = 1300, p = 0{,}017) \approx 0{,}9768$.
f ?

11
a ?
b ?
c ?
d ?

12
a ?
b ?

13
a ?
b Ik zou niet alleen het totaal, maar ook de afzonderlijke gewichten willen weten en ik zou de gewichten van een veel grotere steekproef willen weten.

14
a ?
b Ik zou de antwoorden van een veel grotere steekproef willen weten.

15
?

16
a ?
b Ook nu zou ik de antwoorden van een veel grotere steekproef willen weten.

17
a ?
b Hoe is dit in andere ziekenhuizen, is daar een lager percentage?

Kritiek gebied

18
a $7{,}6$
b $\frac{19}{25} \cdot 100 = 76$
c $1 - \text{P}(X \leq 18\, n = 25, p = 0{,}5) \approx 0{,}0073$
d Klassengesprek

19
a -

b In de tabel zie je: 18 ligt niet in het kritieke gebied, want $\text{P}(X \geq 18, n = 25, p = 0{,}5) = 0{,}021...$ en 18 wel, want $\text{P}(X \geq 19, n = 25, p = 0{,}5) = 0{,}007...$, dus het kritieke gebied bestaat uit de getallen: 19,20,...,25.

20

a De gehele getallen in het interval $[0{,}20]$

b $\frac{1}{4}$

c $20 \cdot \frac{1}{4} = 5$

d Zie tabel.

k	$\text{P}(X \geq k, n = 20, p = 0{,}25)$
...	...
8	0,101...
9	0,040...
10	0,013...
11	0,003...
...	...

Ui de tabel leid je af:
als $\alpha = 0{,}05$, dan bestaat het kritieke gebied uit de gehele getallen ≥ 9
als $\alpha = 0{,}1$, dan bestaat het kritieke gebied uit de gehele getallen ≥ 9
als $\alpha = 0{,}02$, dan bestaat het kritieke gebied uit de gehele getallen ≥ 10.

21

a Bijvoorbeeld met standaardiseren. De z-waarde van 0,8 kunnen we terugzoeken met de GR. Dat is het getl $P(N \leq a | \mu = 1, \sigma = 0) = 0{,}8$. Je vindt $a = 0{,}844$, dus de z-waarde van 0,8 is 0,844, dus $\frac{11{,}3 - 11}{\sigma} = 0{,}844$, dus $\sigma \approx \frac{11{,}3 - 11}{0{,}844} \approx 0{,}36$.

b Bepaal met de GR het getal g zó, dat $\text{P}(N \leq g | \mu = 11, \sigma = 0{,}36)$. De GR geeft: $g = 11{,}46$, dus het kritieke gebied bestaat uit de getallen groter of gelijk aan 11,46.

c De GR geeft voor g met $\text{P}(N \leq g | \mu = 11, \sigma = 0{,}36)$: $g = 11{,}59$, dus het kritieke gebied bestaat uit de getallen groter of gelijk aan 11,59.

d Als $\alpha = 0{,}1$, dan ligt 11,48 in het kritieke gebied, dus de journalist gelooft de atleet niet.
Als $\alpha = 0{,}05$, dan ligt 11,48 niet in het kritieke gebied, dus de journalist gelooft de atleet wel.

22

In opgave 11: X is het aantal goed voorspelde kaarten; H_0: $p = \frac{1}{4}$ en H_1: $p > \frac{1}{4}$.
In opgave 12: X is de 100 meter tijd; H_0: $\mu = 11$ en H_1: $\mu > 11$.

23

a Uit een tabel op de GR volgt: $\text{P}(X \leq 19, n = 50, p = 0{,}5) = 0{,}059...$ en $\text{P}(X \leq 18, n = 50, p = 0{,}5) = 0{,}032...$, dus aan de 'linkerkant' bestaat het kritieke gebied uit de getallen 0,1,...,18;
$\text{P}(X \geq 31, n = 50, p = 0{,}5) = 0{,}059...$ en $\text{P}(X \geq 32, n = 50, p = 0{,}5) = 0{,}032...$, dus aan de 'rechterkant' bestaat het kritieke gebied uit de getallen 32,33...,50;

b 37 ligt in het kritieke gebied, dus de kroonkurk is niet geschikt.

24

a $$1 - \text{P(geen 10)} = 1 - \frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}} = 0{,}43...$$

b Alleen als Sanne teveel tienen krijgt, denkt Harm dat ze steekt.

c X is het aantal keer dat Sanne minstens één 10 krijgt als ze deelt.
H_0: $p = 0{,}43$ en H_1: $p > 0{,}43$.

d $P(X \geq 11, n = 20, p = 0{,}43) = 0{,}194...$ en $P(X \geq 12, n = 20, p = 0{,}43) = 0{,}095...$, dus het kritieke gebied bestaat uit de getallen 12,13,...,20.

e Harm concludeert dat Sanne steekt.

25

a We hebben een *tweezijdige*toets. $\text{P}\left(X \geq 84, n = 100, p = \frac{3}{4}\right) = 0{,}0211... < \frac{1}{2}\alpha$ en $\text{P}\left(X \leq 66, n = 100, p = \frac{3}{4}\right) = 0{,}0275... < \frac{1}{2}\alpha$.

b 84 ligt in het kritieke gebied, dus geeft Harm Sanne geen gelijk.

c 66 ligt in het kritieke gebied, dus geeft Harm Sanne geen gelijk.

26

$P(X \geq 13, n = 20, p = 0{,}43) = 0{,}039...$

27

a X = het aantal gele nakomelingen; H_0: $p = 0{,}75$, H_1: $p \neq 0{,}75$.

b Voor het kritieke gebied 'links': $\text{P}(X \leq 5940, n = 8023, p = 0{,}75) = 0{,}024...$ en $\text{P}(X \leq 5941, n = 8023, p = 0{,}75) = 0{,}0257...$, dus 'links' bestaat het kritieke gebied uit de getallen 0,1,...5939,5940.
Voor het kritieke gebied 'rechts': $\text{P}(X \geq 6093, n = 8023, p = 0{,}75) = 0{,}0258...$ en $\text{P}(X \geq 6094, n = 8023, p = 0{,}75) = 0{,}0242...$, dus 'rechts' bestaat het kritieke gebied uit de getallen 6094,6095,...8022,8023.

Toetsen met de binomiale verdeling

28

a X = het aantal keer hoekpositie, $\text{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ en $\text{H}_1 : p \neq \frac{1}{2}$.

b $\text{P}\left(X \geq 53, n = 87, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}027$

c Er staat niet dat de psycholoog *vooraf* al het vermoeden had dat mensen veelal oogcontact vermijden.

d $0{,}027 < \frac{1}{2}\alpha$, dus accepteer je H_1, dus accepteer je dat de kans op een hoekpositie geen $\frac{1}{2}$ is.

e Als persoon 1 al zit, zijn er voor persoon 2 nog 3 plaatsen over, 2 van de 3 geven een hoekpositie. De kans op een hoekpositie $= \frac{2}{3}$ zou dus logischer zijn.

29

a X = het aantal keer munt.; H_0: $p = \frac{1}{2}$, H_1: $p \neq \frac{1}{2}$.
$\text{P}\left(X \geq 7, n = 10, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}17 > \frac{1}{2}\alpha$, dus hij krijgt geen gelijk.

b X = het aantal keer dat de kaas meer dan 500 gram weegt; $\text{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ en $\text{H}_1 : p > \frac{1}{2}$ (hij snijdt meer af).
$\text{P}\left(X \geq 8, n = 10, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}054 < \alpha$, dus H_1 wordt geaccepteerd, de klant krijgt dus gelijk.

c X = het aantal keer dat het beleid van de dictator wordt gesteund met $H_0 : p = 0{,}7$ en $H_1 : p \neq 0{,}7$.
$P(X \geq 5, n = 10, p = 0{,}7) \approx 0{,}17 > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt geaccepteerd dictator krijgt dus gelijk.

d X = het aantal keer dat de paddenstoelgroei wordt vertraagd met $H_0 : p = \frac{1}{2}$ en $H_1 : p > \frac{1}{2}$ (J. Barry).
$P\left(X \geq 9, n = 10, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}0107 < \alpha$, dus H_1 wordt geaccepteerd, J. Barry krijgt dus gelijk.

30

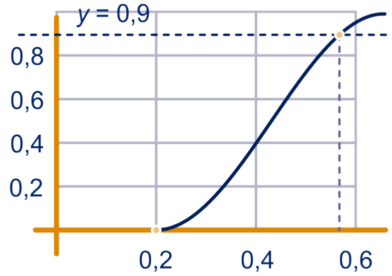
a De kans op goedgokken is $\frac{1}{4}$.
$P\left(X \geq 9, n = 20, p = \frac{1}{4}\right) \approx 0{,}0409$

b X = het aantal goede antwoorden met $H_0 : p = \frac{1}{4}$ (leraar) en $H_1 : p > \frac{1}{4}$.
$P\left(X \geq 8, n = 20, p = \frac{1}{4}\right) \approx 0{,}1018 > \alpha$, dus H_0 wordt geaccepteerd, de leraar krijgt gelijk.

c Voor de kans p neem je op de GR de variablele X.
Dan is de kans op 9 of meer goed $P(X \geq 9, n = 20, p = X) =$
$1 - P(X \leq 8, n = 20, p = X)$.
Zie figuur.

d Zie figuur.

e Bepaal het snijpunt van de grafiek van de functie met de lijn $y = 0{,}9$ (met *intersect* bijvoorbeeld). Je vindt: $p = 0{,}57$.



31

a X = het aantal nakomelingen van type aa met $H_0 : p = \frac{1}{4}$ (Aa×Aa) en $H_1 : p \neq \frac{1}{4}$.
Tweezijdige toets (voor biologen: p kan ook nul zijn, dus kleiner dan $\frac{1}{4}$ kan ook)

b $P\left(X \geq 15, n = 36, p = \frac{1}{4}\right) \approx 0{,}0209 < \frac{1}{2}\alpha$, H_1 wordt geaccepteerd, dus we verwerpen het vermoeden dat beide ouders van het type Aa zijn.

32

a $E(X) = n \cdot p = 21 \cdot 0{,}15 = 3{,}15$ en $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 21 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 2{,}6775$.

b $H_0 : p = 0{,}15$ en $H_0 : p \neq 0{,}15$.
Het kritieke gebied 'links': $P(X \leq 0, n = 21, p = 0{,}15) \approx 0{,}033 > \frac{1}{2}\alpha$, dus 'links' geen kritiek gebied.
Het kritieke gebied 'rechts': $P(X \geq 7, n = 21, p = 0{,}15) \approx 0{,}0287 > \frac{1}{2}\alpha$ en $P(X \geq 8, n = 21, p = 0{,}15) \approx 0{,}008 < \frac{1}{2}\alpha$, dus het kritieke gebied 'rechts' bestaat uit de getallen 8,9...,21, dus het heeft minstens 8 dagen geregend.

c De kans op regen is niet onafhankelijk van de kans op regen de vorige dag.

33

X = het aantal keer dat 2010 beter is beoordeeld met $H_0 : p = \frac{1}{2}$ en $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$.
$P\left(X \geq 6, n = 8, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}14 > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt geaccepteerd, dus er is geen kwaliteitsverschil.

34 X = het aantal keer de herkansing beter is met $H_0 : p = \frac{1}{2}$ en $H_1 : p > \frac{1}{2}$ (herkansing helpt). Het resultaat is $X = 10$, de overschrijdingskans is dus: $P\left(X \geq 10,\ n = 14, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}089 > \alpha$, dus H_0 wordt geaccepteerd, dus herkansen helpt niet, er is dus reden om de wiskunde docent te geloven.

35 X = het aantal keer dat de bloeddruk lager is met $H_0 : p = \frac{1}{2}$ en $H_1 : p > \frac{1}{2}$ (het medicijn helpt).
Het resultaat is: $X = 8$.
$P\left(X \geq 8, n = 12, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}19 > \alpha$, dus H_0 wordt geaccepteerd, dus er is dus geen reden om te geloven dat het medicijn helpt.

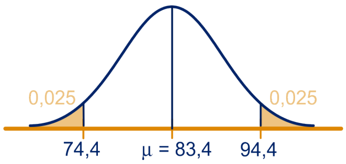
Toetsen met de normale verdeling

36
a $\frac{94.900}{185.000} = 0{,}5129... \approx 0{,}513$

b X = het aantal jongetjes dat geboren wordt in 2010 met $H_0 : p = 0{,}513$ en $H_1 : p \neq 0{,}513$ (de kans moet aangepast worden).
Het kritieke gebied 'links': $P(X \leq 93.902, n = 183.866, p = 0{,}513) \approx 0{,}024 < \frac{1}{2}\alpha$ en $P(X \leq 93.903, n = 183.866, p = 0{,}513) \approx 0{,}0258 > \frac{1}{2}\alpha$, dus het kritieke gebied 'links' bestaat uit de getallen tot en met 93.902.
Het kritieke gebied 'rechts': $P(X \geq 94.743, n = 183.866, p = 0{,}513) \approx 0{,}0252 > \frac{1}{2}\alpha$ en $P(X \geq 94.744, n = 183.866, p = 0{,}513) \approx 0{,}0249 < \frac{1}{2}\alpha$, dus het kritieke gebied 'rechts' bestaat uit de getallen vanaf 94.744.
We besluiten de kans aan te passen als het aantal jongetjes kleiner is dan 93.903 of minstens 94.744.
Opmerking
Als je met je rekenmachine niet met deze grote aantallen kunt rekenen, benader de binomiale stochast X dan met een normale stochast met
$\mu = 183.866 \cdot 0{,}513$ en $\sigma = \sqrt{183.866 \cdot 0{,}513(1 - 0{,}513)}$.

c $\sqrt{183.866 \cdot 0{,}513(1 - 0{,}513)} \approx 214{,}3$

37
a Zie figuur.
Zoek met de GR het getal a met $P(N \leq a \mid \mu = 83{,}4;\ \sigma = 4{,}6) = 0{,}025$. Je vindt: $a \approx 74{,}4$, dit is de bovengrens van het kritieke gebied 'links'. Omdat de verdeling symmetrisch is, is de ondergrens van het kritieke gebied 'rechts' 92,4.



b Ja

38
a $40 \cdot 2500 = 100.000$
b Eenzijdig, omdat klanten niet klagen bij te veel aardappelen.
c T is het totale gewicht van 40 zakken.
$H_0 : \mu = 100.000$ en $H_1 : \mu < 100.000$.
d $\sigma(T) = \sqrt{40} \cdot 80$

e Zoek met de GR het getal a met $\text{P}(N \leq a | \mu = 100.000; \sigma = 80\sqrt{40}) = 0{,}05$.
Je vindt: $a \approx 99168$.
De waarde van T ligt in het kritieke gebied als $T \leq 99168$ gram.

f 99,1 ligt in het kritieke gebied, dus krijgen de ontevreden klanten gelijk.

39 De totale wachttijd noemen we T, met verwachtingswaarde μ en $\sigma = 0{,}5 \cdot \sqrt{4} = 1$.
$\text{H}_0 : \mu = 8$ (supermarkt) en $\text{H}_1 : \mu > 8$ (ik).
$\text{P}(T \geq 12 | \mu = 8, \sigma = 1) = 0{,}000031\cdots < \alpha$, dus ik krijg gelijk.

40

a Noem $\text{E}(X) = \mu$, dan $\text{P}(X > 40.000 | \mu = ?, \sigma = 6515) = 0{,}6$.
Met de GR kunnen we z-waarde van 40.000 terugzoeken:
als $\text{P}(X < a | \mu = 0, \sigma = 1) = 0{,}4$, dan $a \approx$ -0,2534, dus $\dfrac{40.000 - \mu}{6515} =$ -0,2534, dus $\mu = 40.000 + 0{,}2534 \cdot 6515$, dus $\mu = 41.651$.

b $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 6515^2 + 5000^2$, dus $\sigma(X + Y) = \sqrt{\text{Var}(X + Y)} \approx 8213$.

c T is de omzet van beide winkels in de vier weken. Noem $\text{E}(T) = \mu$.
Dan $\text{H}_0 : \mu = 4 \cdot (41.651 + 45.000) = 346.604$ (bedrijfsleider) en
$\text{H}_1 : \mu \neq 346.604$, met $\sigma \approx \sqrt{4} \cdot 8213 = 16.426$.
De overschrijdingskans is $\text{P}(T > 368.743{,}36 | \mu = 346.604, \sigma = 16.426) = 0{,}088\cdots > \frac{1}{2}\alpha$, er is dus geen reden om de bewering van de bedrijfsleider te verwerpen.

41

a $G =$ het gemiddelde IQ van 25 profvoetballers met verwachtingswaarde μ.
$\text{H}_0 : \mu = 100$ en $\text{H}_1 : \mu > 100$.

b $\sigma(G) = \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot 15 = 3$

c We zoeken met de GR het getal a zó, dat $\text{P}(N < a | \mu = 100, \sigma = 3) = 0{,}95$. Je vindt: $a = 104{,}9....$ Dus H_0 wordt verworpen bij een gemiddeld IQ van 105 of hoger.

42 $X =$ de gemiddelde overwerktijd over 25 dagen met verwachtingswaarde μ.
$\text{H}_0 : \mu = 9{,}1$ en $\text{H}_1 : \mu \neq 9{,}1$.
$\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot 2{,}1 = 0{,}42$.
De overschrijdingskans is: $\text{P}(X < 8{,}4 | \mu = 9{,}1; \sigma = 0{,}42) = 0{,}047... > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt geaccepteerd, dus kan er niet geconcludeerd worden dat er invloed is.

43

a De kans op stukgaan van een chip binnen vijf jaar is $\text{P}(X < 5 | \mu = 8{,}0; \sigma = 2{,}0) = 0{,}0668$, dus het verwachte aantal dat stuk gaat is: $0{,}0668 \cdot 500 \approx 33$.

b Het resultaat is 7 stuk na vijf jaar, dat is een aantal, dus dit is een binomiale toets. X is het aantal dat stuk gaat in vijf jaar, dan
$\text{H}_0 : p = 0{,}0668$ en $\text{H}_1 : p > 0{,}0668$ (want dan is μ kleiner).
De overschrijdingskans is $\text{P}(X \geq 7, n = 50, p = 0{,}0668) = \text{P}(X \geq 7, n = 50, p = 0{,}0668) = 0{,}0474... > \alpha$, dus H_0 wordt geaccepteerd, er is geen reden om $\mu = 8{,}0$ te verwerpen.

Van binomiaal naar normaal

44

a $\dbinom{10}{k+1} = \dfrac{10!}{(k+1)!(9-k)!} = \dfrac{10!(10-k)}{(k+1)\,k!(10-k)\,(9-k)!} = \dfrac{10-k}{k+1}\dbinom{10}{k}$

b $\binom{10}{k} + \binom{10}{k+1} = \left(\frac{10-k}{k+1} + 1\right)\binom{10}{k} = \frac{11}{k+1} \cdot \binom{10}{k}$

c $\Delta x = a$ en $\Delta y = \binom{10}{k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{10-k}{k+1} - 1\right) =$

$\binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \frac{9-2k}{k+1}$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{9-2k}{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{9-2k}{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

d Uit **a** volgt: $9 - 2k = \text{-}\frac{2x}{a}$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{9-2k}{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$

$\frac{1}{a} \cdot (9-2k) \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{11}{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{a} \cdot \text{-}\frac{2x}{a} \cdot \frac{1}{11} \cdot 2y = \text{-}\frac{4}{11a^2} \cdot x \cdot y$

Extra opgaven

1

a X = het aantal keren dat dit woord voorkomt onder de eerste 1000 woorden.
$H_0 : \mu = 17{,}2$ en $H_1 : \mu \neq 17{,}2$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 23{,}5 \mid \mu = 17{,}2;\ \sigma = 4{,}1) = 0{,}0622... > \frac{1}{2}\alpha$, dus er is niet voldoende reden.

b X = het aantal keren dat dit woord voorkomt onder de eerste 4000 woorden.
Nu $H_0 : \mu = 68{,}8$ en $H_1 : \mu \neq 68{,}8$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 85{,}5 \mid \mu = 68{,}8;\ \sigma = 8{,}2) = 0{,}0208... < \frac{1}{2}\alpha$, dus er is voldoende reden.

c X = het aantal malen dat men voor Madison kiest.
$H_0 : p = \frac{1}{2}$ (je weet het niet) en $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ (het is Hamilton).
De overschrijdingskans is $P\left(X \geq 15, n = 20, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}02 > \frac{1}{2}\alpha$, dus er is voldoende twijfel.

2

a Er zijn $\binom{10}{6} = 210$ mogelijkheden, dus de kans is: $\frac{1}{210}$.

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$

c X = het aantal keren dat hij goed raadt.
$H_0 : p = \frac{1}{2}$ (hij raadt) en $H_1 : p > \frac{1}{2}$ (hij heeft er verstand van).
De overschrijdingskans is: $P\left(X \geq 8, n = 10, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}0547 > \alpha$, dus hij raadt maar.

d Maak een tabel op de GR met variabele X en $Y = P\left(X \geq X - 1, n = X,\ p = \frac{1}{2}\right)$. Zoek de kleinste waarde van de variabele X waarvoor $Y < \alpha$.
Als $X = 7$, dan $Y = 0{,}062...$;
Als $X = 8$, dan $Y = 0{,}035...$;
hij krijgt minstens 8 glazen voorgezet.

3

a Ja, want hij gooit erg weinig zessen en zijn vriendin gooit er juist veel. Er is dus geen voorkeur voor een afwijking in enige richting.

b $H_0 : p = \frac{1}{6}$, de dobbelsteen is goed en $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$, de dobbelsteen is 'oneerlijk'.
$P\left(X \leq 10, n{,}100, p = \frac{1}{6}\right) = 0{,}042... < \frac{1}{2}\alpha$ en $P\left(X \leq 11, n{,}100, p = \frac{1}{6}\right) = 0{,}077... > \frac{1}{2}\alpha$, dus het kritieke gebied 'links' bestaat uit de getallen 0,1,...,10.
$P\left(X \geq 23, n{,}100, p = \frac{1}{6}\right) = 0{,}063... > \frac{1}{2}\alpha$ en $P\left(X \geq 24, n{,}100, p = \frac{1}{6}\right) = 0{,}037... < \frac{1}{2}\alpha$, dus het kritieke gebied 'rechts' bestaat uit de getallen 24,25,...,100.

4

a We maken een tabel.

k	0	1	2	3
$\text{E}(X_1 = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

Dus $\text{E}(X_1) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 = 1$.
$\text{Var}(X_1) = \frac{1}{3} \cdot (0-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1-1)^2 + \frac{1}{6} \cdot (3-1)^2 = 1$.

b $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$, $10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9$, $10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9$ en $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$.

c $\text{E}(T) = 10 \cdot 1 = 10$ en $\text{Var}(T) = 10 \cdot 1 = 10$.

d $\text{P}(T = 15) \approx \text{P}(14{,}5 \leq X \leq 15{,}5 | \, \mu = 10, \sigma = \sqrt{10}) \approx 0{,}0354$

e T is het totaal aantal punten dat de proefpersoon haalt.
$\text{H}_0 : \mu = 10$ en $\text{H}_1 : \mu > 10$ (de proefpersoon weet er iets vanaf).
De overschrijdingskans is $\text{P}(X \geq 16{,}5 | \, \mu = 10, \sigma = \sqrt{10}) \approx 0{,}02 < \alpha$, dus de proefpersoon weet er iets vanaf.

5

a $\text{P}(3{,}98 \leq X \leq 4{,}02 | \, \mu = 4{,}005, \sigma = 0{,}008) \approx 0{,}9687$, dus de gevraagde kans$\approx 1 - 0{,}9687 = 0{,}0313$.

b $X =$ het aantal keren dat een kogeltje te groot of te klein is.
$\text{H}_0 : p = 0{,}0313$ ($\mu = 4{,}005$) en $\text{H}_1 : \mu \neq 4{,}005$.
De overschrijdingskans is $\text{P}(X \geq 11, n = 250, p = 0{,}0313) \approx 0{,}1638 > \alpha$, dus hypothese wordt niet verworpen.

8 Hypothesetoetsen

1 Bekijk de totale wachttijd.

Index