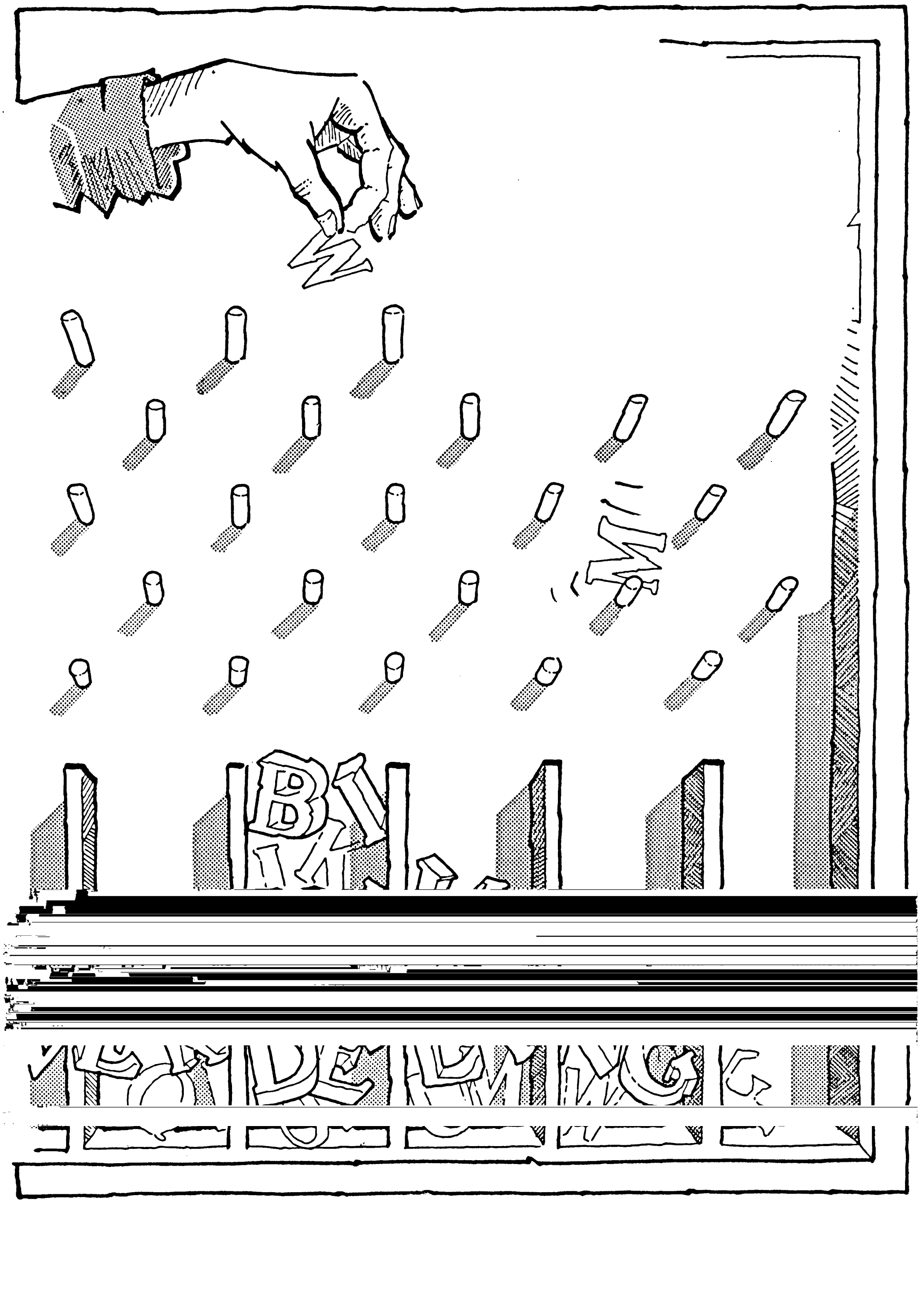
Binomiale verdelingen



Inhoudsopgave

Binomiale verdelingen

Experimentele uitgave 2008 voor wiskunde D vwo 5, 40 slu

Colofon

© 2008 Stichting De Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

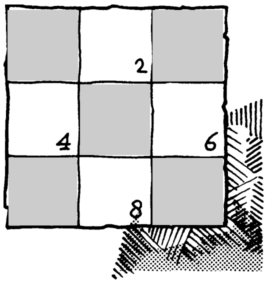
Illustraties Wilson Design, Uden

Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

ISBN

Homepage www.wageningse-methode.nl

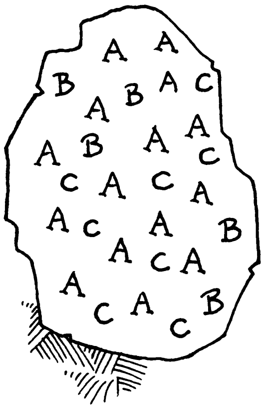
1 De kansdefinitie



1 Kikker
Een kikker is onrustig. Hij springt over de hiernaast getekende tegelvloer alsof zijn leven ervan afhangt. Hij springt steeds naar een naburige tegel: horizontaal of verticaal (dus niet diagonaal).
a. Leg uit dat de kans dat de kikker op een zeker ogenblik op een donkere tegel zit niet noodzakelijk $\frac{5}{9}$ is.
b. Welke tegel heeft de meeste kans en welke tegels hebben de minste kans ? Kun je ook zeggen waarom ?

Kansdefinitie
Als er bij een experiment n *even waarschijnlijke* uitkomsten zijn, waarvan er k zijn van een bepaald type, dan is de kans op een uitkomst van dat type gelijk aan $\frac{k}{n}$.

Bij zo'n experiment is een kans dus een getal tussen 0 en 1.



Voorbeeld
Je hebt een verzameling van 28 dingen. Er zijn drie soorten dingen. Van soort A zijn er 15, van soort B zijn er 5 en van soort C zijn er 8 dingen.
Iemand pakt willekeurig één ding uit die verzameling. Elk van de dingen heeft dezelfde kans om gepakt te worden.
Dan is de kans dat hij een ding van soort A pakt $\frac{15}{28}$.

2 Anneke werpt met twee zuivere muntstukken. (Bij een zuivere munt zijn de kansen op kop en op munt gelijk; dus beide $\frac{1}{2}$.) Er zijn drie mogelijke uitkomsten: "2 kop", "2 munt" en "1 kop en 1 munt". Anneke redeneert als volgt: *Bij twee van de drie mogelijke uitkomsten heb je een "dubbele" (de munten vallen op dezelfde kant). Dus is de kans op een dubbele $\frac{2}{3}$.*
a. Wat is de fout in Annekes redenering ?
b. Wat is de juiste kans op een dubbele ?

3 Voor een loket staan acht mensen in een rij. Je weet dat Anneke en Egon in de rij staan.
Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat Egon vóór Anneke in de rij staat.

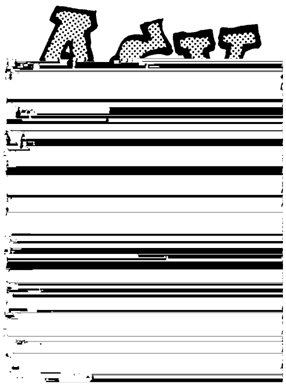
4 Bij een verloting zijn er 100 verschillende loten, genummerd 1 t/m 100. De personen A, B, C en D krijgen ieder willekeurig een lot.

a. Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat het nummer dat A krijgt groter is dan de nummers die B, C en D krijgen.

b. Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat het nummer dat A krijgt groter is dan 50, maar kleiner is dan 70.

De kansdefinitie is voor het eerst zo geformuleerd door de grote Franse wiskundige Laplace. Hij deed behalve veel aan waarschijnlijkheidsrekening ook aan astronomische mechanica en differentiaalvergelijkingen. Laplace leefde tijdens de roerige tijden van de Franse revolutie. Uit zijn leven zijn de volgende gebeurtenissen bekend. De zestienjarige Napoleon heeft examen gedaan bij Laplace. In 1790 hielp Laplace mee met de standaardisatie van maten en gewichten op decimale basis. Tijdens het schrikbewind van Robespierre ontvluchtte hij Parijs. In 1799 wordt Laplace minister onder Napoleon en daarna kanselier van de senaat.

Als je de kansdefinitie wilt toepassen is het belangrijk te weten of de mogelijk uitkomsten wel *even waarschijnlijk* zijn. Uitkomsten zijn even waarschijnlijk als ze als *gelijkwaardig* mogen worden beschouwd: als er geen enkele reden is dat een van de uitkomsten vaker zal voorkomen dan een andere. Bijvoorbeeld in opgave **3** is (als je geen extra informatie hebt) er geen reden om aan te nemen dat Egon vaker voor Anneke staat in de rij dan omge-



7 De koningin gaat op staatsbezoek in China. In haar kielzog gaan er onder andere drie parlementariërs mee. In aanmerking voor de reis komen drie parlementariërs van de PvdA, vier van de VVD en twee van het CDA. Wie mee mag, wordt door het lot aangewezen.
Er zijn in totaal 84 drietallen mogelijk.
a. Bereken de kans dat ze alle drie van één partij komen.
b. Bereken de kans dat er van elke partij een parlementariër mee mag.

Het probleem van opgave **7b** kun je met de kansdefinitie als volgt aanpakken.
Er moet een keuze gedaan worden van drie uit in totaal negen personen. Er zijn 84 van zulke keuzes; die zijn allemaal even waarschijnlijk.
Je telt nu hoeveel keuzes er zijn, bestaande uit 1 PvdA-er, 1 VVD-er en 1 CDA-er: dat zijn er $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.
Het antwoord op vraag **7b** is dus $\frac{24}{84}$.

8 Je vriend heeft een telefoonnummer dat bestaat uit de cijfers 1, 2, 3, 5, 7 en 9. Dat weet je nog, maar de volgorde van de cijfers ben je vergeten.
a. Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 2, 3, 5, 7 en 9 ?

Op de gok toets je het nummer "325197" in.
b. Bereken de kans dat je het goede nummer hebt.
c. Dezelfde vraag als je je herinnert dat de 3 vooraan staat.

9 Een tennistoernooi telt 64 deelnemers, waarvan zes Nederlanders en acht Duitsers. Er wordt gespeeld volgens het knock-out systeem: wie verliest ligt eruit. Voor de finale houden we twee spelers over. Omdat voor elke ronde tussen de overgebleven spelers geloot wordt, kan in principe elke speler tegen elke andere speler in de finale komen.
a. Hoeveel finales zijn er mogelijk ?
b. Hoeveel finales zijn er mogelijk waarbij een Nederlander tegen een Duitser speelt ?

Veronderstel dat alle spelers even sterk zijn en dus even grote kans hebben de volgende ronde te bereiken.
c. Bereken de kans dat de finale wordt gespeeld tussen een Nederlander en een Duitser.

12 We werken met de context van opgave **9**. X is het aantal Nederlanders in de finale.
a. Bereken de waarden die X kan aannemen en de bijbehorende kansen. Schrijf je antwoorden overzichtelijk in een tabel:

k	0	
$P(X=k)$	0,82	

b. Controleer je antwoorden door de kansen op te tellen.

De som van de kansen op de verschillende waarden van een stochast is 1. Je zou kunnen zeggen dat de totale kans 1 *verdeeld* is over die waarden. We noemen het geheel van waarden en bijbehorende kansen de **kansverdeling** van de stochast. Je kunt die goed in de vorm van een tabel geven.

13 a. Je werpt met een zuivere dobbelsteen. X is het aantal ogen dat je werpt.
Maak een tabel van de kansverdeling van X.
b. Een gezin telt 3 kinderen. M is het aantal meisjes in het gezin.
Maak een tabel van de kansverdeling van M.
c. Als je bij mens-erger-je-niet met de dobbelsteen een 6 gooit, mag je een nieuwe pion op het speelbord plaatsen. Je werpt één keer met de dobbelsteen. X is het aantal pionnen dat je vervolgens op het speelbord mag plaatsen.
Maak een tabel van de kansverdeling van X.

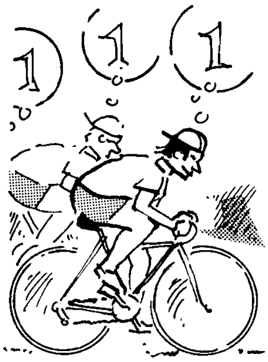
Overzichtsvragen

1 Er staan vijf mensen in een rij voor een loket, waaronder Anne, Bea en Cleo.
a. Wat is de kans dat Anne voor Bea staat, maar achter Cleo ?
b. Wat is de kans dat Anne en Cleo achter elkaar staan, zonder iemand tussen hen in.
c. Wat is de kans dat Anne bij de voorste twee mensen in de rij staat ?

2 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen A dat Anne krijgt.
a. Anne vindt dat de kans dat ze hartenaas krijg $\frac{1}{4}$ is.
Leg uit hoe Anne dat beredeneert kan hebben.
b. Anne redeneert verder: "Ik kan 0, 1, 2, 3 of 4 azen krijgen. Dat zijn vijf mogelijkheden. Dus is de kans dat ik 0 azen krijg $\frac{1}{5}$".
Geef commentaar op deze redenering.
c. Bereken $P(A=0)$, $P(A=1)$ en $P(A=4)$.

3 We werpen met twee "dobbelstenen": een gewone (met 1 t/m 6 ogen) en een regelmatig viervlak (met 1 t/m 4 ogen).
Wat is de kans dat het viervlak een hoger aantal ogen geeft dan de gewone dobbelsteen ?

2 Combinatoriek en kans



1 In de finale van een wielerklassieker bestaat de kopgroep uit zeven renners. Het peloton is zo ver achter dat het zeker is dat de zeven koplopers de prijzen zullen verdelen. Drie van hen zullen op het podium komen, als nummer 1, 2 en 3.
Hoeveel verschillende bezettingen van het podium zijn er mogelijk ?

Stel je hebt zeven dingen en je gaat er drie uit pakken, lettend op de volgorde. Dat kan op $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}$ manieren.

Op de GR (in het menu MATH, PRB) en op een gewone wetenschappelijke rekenmachine vind je dat getal via de knop nPr.

2 In een serie van de 1500 meter (atletiek) bestaat de kopgroep uit zeven lopers. De anderen hebben een zo grote achterstand opgelopen dat het zeker is dat deze zeven lopers zullen strijden om de eerste plaatsen. De eerste drie gaan door naar de halve finale. Hierbij is het niet van belang wie er eerste, tweede of derde wordt.
Hoeveel verschillende drietallen zijn er voor de halve finale mogelijk ?

Stel je hebt zeven dingen en je wilt er drie dingen uit pakken, waarbij de volgorde niet van belang is. Dan kan dat op $\binom{7}{3}$ manieren.

Op de GR (in het menu MATH, PRB) en op een gewone wetenschappelijke rekenmachine vind je dat getal via de knop nCr.

3 **a.** Wat is het verband tussen 7P3 en 7C3 ?
Leg dat uit.
b. Wat is het verband tussen nPr en nCr ?
c. $\text{nPr} = \frac{n!}{(n-r)!}$. Welke formule geldt bijgevolg voor nCr ?

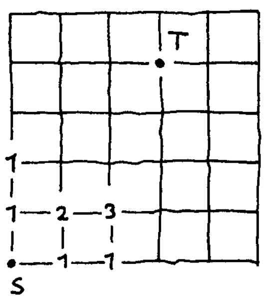
$\text{n Cr k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ is een zogenaamd **combinatiegetal**; spreek uit: *n boven k.*

$\binom{n}{r}$ is het aantal 0-1-rijtjes van lengte n met r nullen,

$\binom{n}{r}$ is het aantal kortste routes van lengte n in een rooster met r stappen naar rechts,

$\binom{n}{r}$ is het aantal grepen van r dingen uit een verzameling van n dingen.

Met een "greep" bedoelen we een **ongeordende greep zonder herhalingen**: de volgorde waarin je de dingen pakt, is niet van belang; je kunt een ding maar één keer pakken.



4 Hiernaast is bij enkele roosterpunten aangegeven met hoeveel kortste routes je dat punt vanuit S kunt bereiken.

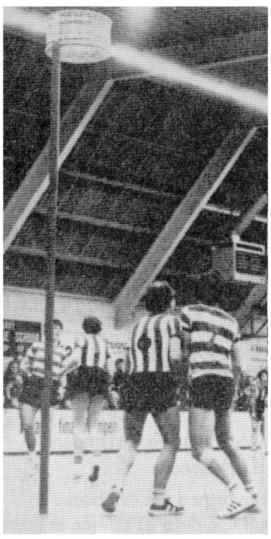
a. Bepaal in het rooster hoe groot $\binom{7}{3}$, dat is het aantal kortste routes van S naar T.

b. Geef in een rooster de plaats aan van $\binom{6}{4}$, $\binom{8}{0}$ en $\binom{8}{7}$.

c. Hoe groot zijn deze drie combinatiegetallen ?

5 **a.** Geef in een rooster de plaats aan van $\binom{7}{5}$, $\binom{7}{4}$ en $\binom{8}{5}$.

b. Als je weet dat $\binom{7}{5} = 21$ en $\binom{7}{4} = 35$, weet je dan ook hoe groot $\binom{8}{5}$ is ?



6 Een zaalkorfbalteam bestaat uit vier dames en vier heren. De coach wijst voor de wedstrijd uit de twaalf beschikbare spelers (zes dames en zes heren) een team aan.

a. Hoeveel verschillende teams kan hij samenstellen ?

Korfbal wordt gespeeld in twee vakken: een verdedigingsvak en een aanvalsvak. In ieder vak staan van een team twee dames en twee heren. (Waar in het vak de spelers staan, doet er niet toe.)

b. Op hoeveel manieren kan de coach uit de al aangewezen vier dames en vier heren een beginopstelling vormen ?

c. Op hoeveel manieren kan de coach de beginopstelling kiezen uit de beschikbare twaalf spelers ?

7 **a.** Laat zien dat $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

b. Geef zo ook een formule voor $\binom{n}{1}$.

c. En voor $\binom{n}{0}$.

De combinatiegetallen zijn mooi geordend in de zogenaamde **driehoek van Pascal**. $\binom{7}{3}$ staat in de 7^{de} rij op de 4^{de} plaats van links (we beginnen met 0 te tellen!).

De driehoek van Pascal

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

8 **a.** Hoe luidt de volgende regel in de driehoek van Pascal ?

b. Ga in de driehoek na dat $\binom{9}{6} = \binom{9}{3}$.

c. Hoe kun je dat uitleggen met behulp van routes ?

d. Hoe kun je dat uitleggen met behulp van 0-1-rijtjes ?

e. Hoe kun je dat uitleggen met behulp van grepen ?

Sommige combinatiegetallen zijn eenvoudig te berekenen (zie opgave **7**). Maar de meeste vind je niet zo gemakkelijk.

Je kunt bijvoorbeeld $\binom{11}{7}$ als volgt vinden.

- In een rooster kun je dat getal stap voor stap opbouwen.
- Uit de driehoek van Pascal kun je het getal aflezen.
- Op rekenmachines zit er een speciale knop voor: nCr (op de GR in het menu MATH-PRB).
- Met de formule $\frac{11!}{7! \cdot 4!}$.

Speelkolom

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45

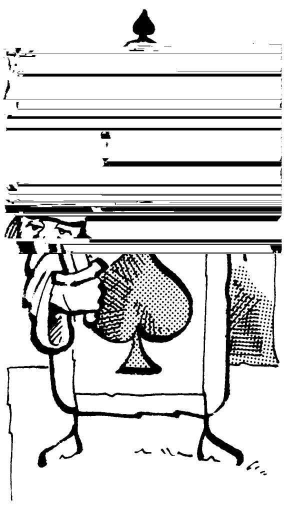
9 Lotto

Als je meedoet in de lotto, mag je tegen betaling zes nummers kiezen uit de getallen 1 tot en met 45. Komen die zes nummers op zondagavond toevallig uit de lottomachine gerold, dan win je ongeveer vier ton.
Per lottoformulier kun je 10 keer je geluk beproeven. Daarvoor betaal je 10 gulden (in 2001).
a. Hoeveel complete formulieren moet je invullen om zeker te zijn van de hoofdprijs ?
b. Hoe groot is de kans op "alle zes goed", als je maar één formulier invult ?

10 In een doos zitten 30 ballen: 20 witte en 10 zwarte. Pak er acht ballen uit (zonder terugleggen). Noem het aantal getrokken witte ballen X.
a. Hoeveel grepen van acht ballen zijn er uit een doos met 30 ballen ? Geef je antwoord met een combinatiegetal.
b. Bij hoeveel grepen heb je vijf witte ballen en drie zwarte ballen gepakt ? Schrijf je antwoord als product van twee combinatiegetallen.
c. Wat is de kans dat je vijf witte en drie zwarte ballen pakt ? Schrijf de kans met behulp van combinatiegetallen en bereken hem ook in drie decimalen.

11 Als nieuw lid van de boekenclub mag je gratis drie boeken kiezen uit een lijst van tien. De eerste vier zijn dure boeken met prachtige platen in kleur, de andere zes zijn romans.
Je kiest willekeurig drie boeken uit de tien, dat wil zeggen dat alle drietallen boeken even waarschijnlijk zijn.
a. Bereken de kans dat je 1 platenboek kiest en 2 romans.
b. Bereken ook de kans op
- 3 platenboeken,
- 2 platenboeken en 1 roman,
- 3 romans.

c. Hoe kun je je antwoorden op **a** en **b** controleren ?



12 Uit een volledig kaartspel van 52 kaarten trekken we (zonder terugleggen) drie kaarten.
a. Hoeveel grepen zijn er van drie kaarten uit een volledig spel ?
b. Bij hoeveel grepen zijn de drie kaarten schoppens ?
c. Wat is dus de kans op drie schoppenkaarten ?

Je kunt de kans op drie schoppenkaarten ook berekenen door een geschikt boomdiagram te tekenen en daaruit drie breuken te vermenigvuldigen.
d. Doe dat.
e. Hoe groot is de kans op drie kaarten van dezelfde kleur (drie schoppen, drie harten, drie ruiten of drie klaveren) ?

13 Bij het (zonder terugleggen) trekken van drie kaarten uit een volledig spel is Y het aantal getrokken schoppenkaarten.
a. Welke waarden kan Y aannemen ?
b. Bereken op twee manieren $P(Y=1)$.
c. Geef in een tabel de kansverdeling van Y. Schrijf de kansen met behulp van combinatiegetallen. Bereken de kansen ook afgerond op drie cijfers na de komma.

14 **a.** Uit een klas van tien jongens en twaalf meisjes wordt een afvaardiging van zes leerlingen gekozen.
Hoe groot is de kans dat er evenveel meisjes als jongens gekozen worden ? Schrijf je antwoord met behulp van combinatiegetallen en benader de uitkomst in drie decimalen achter de komma.
b. Na de wedstrijd van Ajax tegen Feyenoord is het weer eens mis. Vijfentwintig supporters, tien van Ajax en vijftien van Feyenoord gaan met elkaar op de vuist. De politie grijpt in, zonder ergens op te letten. Elke supporter heeft daardoor dezelfde kans om opgepakt te worden. In totaal worden er acht supporters gearresteerd.
Hoe groot is de kans dat er drie aanhangers van Ajax en vijf van Feyenoord naar het bureau moeten ? Schrijf je antwoord eerst met behulp van combinatiegetallen en bereken dit daarna, in drie cijfers na de komma.

Veel opgaven in deze paragraaf komen hierop neer: je hebt een populatie waarbij de leden een eigenschap wel of niet hebben; hieruit worden er een aantal gepakt; X is het aantal dat gepakt wordt, dat de eigenschap wel heeft.
Dit is hetzelfde als trekken **zonder terugleggen** van uit een doos met witte en zwarte ballen.
Dat het zonder terugleggen is, herken je zo: de kans dat de tweede bal wit is, hangt af van de kleur van de eerste bal.

Een kansverdeling als deze wordt een **hypergeometrische verdeling** genoemd.

	○	●	tot.
doos	4	6	10
greep	2	3	5

Voorbeeld
In een doos zitten tien ballen, vier witte en zes zwarte. Iemand trekt zonder terugleggen vijf ballen uit die doos. X is het aantal witte ballen in die greep.

Dan geldt: $P(X=2)=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}$.

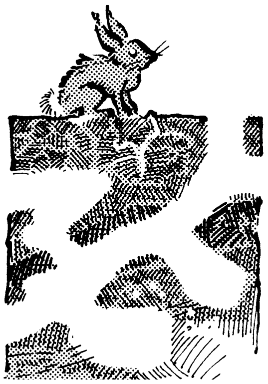
	wel	niet	tot.
klas			
greep			

15 Huiswerkcontrole
Van vijfentwintig leerlingen van V5B hebben er vijf hun huiswerk niet gemaakt. De leraar neemt een aselecte steekproef van vier. Van deze vier leerlingen hebben er X hun huiswerk niet gemaakt.
a. Bereken $P(X=4)$ en $P(X=3)$ in drie cijfers achter de komma.
b. Van de vier leerlingen die aan de tand gevoeld werden, hadden er drie hun huiswerk niet gemaakt. Wat denk je, zou de steekproef wel aselect genomen zijn ?

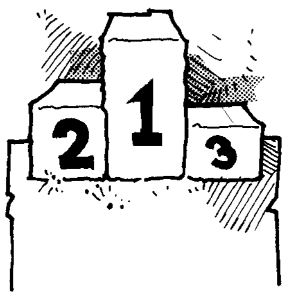
16 Schoolfeest
Voor het schoolfeest heeft de leerlingenvereniging flink wat frisdrank ingekocht. In één van de kratten zitten zes flessen cola, vier flessen seven-up en twee flessen spa. In het donker, en daardoor aselect, pakt iemand drie flessen uit het krat.
a. Hoe groot is de kans dat hij twee flessen cola en één fles spa neemt ?
b. Hoe groot is de kans dat hij twee flessen cola pakt ?
c. Bereken op twee manieren de kans dat het drie flessen van dezelfde soort zijn.
d. Bereken ook op twee manieren de kans dat hij van elke soort één fles pakt.

17 In een vaas zitten vier witte en drie zwarte ballen. Zonder terugleggen wordt uit die vaas steeds een bal gepakt totdat er drie witte ballen gepakt zijn. De stochast X geeft het aantal trekkingen aan dat daarvoor nodig is.
a. Wat is het bereik van X, ofwel: welke waarden kan X aannemen ?
b. Het rijtje wwzw hoort bij de uitkomst X = 4.
Schrijf alle rijtjes op die horen bij de uitkomst X = 4.
c. Stel je hebt een rijtje bij X = 4.
Hoeveel witte zijn er bij de eerste drie ballen ?
Wat is de kleur van de vierde bal ?
d. Ga na: $P(X=4)=\frac{9}{35}$.

e. Wat zijn de twee kenmerkende eigenschappen voor elk rijtje dat hoort bij X = 5 ?
f. Ga na: $P(X=5)=\frac{12}{35}$.
g. Geef in een tabel de kansverdeling van X.



18 Konijntjes
Het konijn van Jasper is moeder geworden van drie kleine konijntjes. Jasper wil van elk van de konijntjes weten of het een mannetje of een vrouwtje is. Zij zijn echter zo klein dat Jasper dat niet kan zien.
We gaan er vanuit dat de kans op een mannetje even groot is als op een vrouwtje.
a. Bereken de kans dat het alle drie vrouwtjes zijn.
b. Bereken de kans dat het twee mannetjes en één vrouwtje zijn.
c. Bereken de kans dat er meer vrouwtjes zijn dan mannetjes.
d. Had je deze kans ook kunnen weten zonder rekenen ?



Overzichtsvragen

1 Er doen n atleten mee aan een wedstrijd. De drie die als eerste finishen komen op het podium.
a. Hoeveel verschillende podia zijn er mogelijk (uitgedrukt in n) ?

Er doen n atleten mee aan een wedstrijd. De drie drie als eerste finishen mogen naar de olympische spelen.
b. Hoeveel verschillende drietallen zijn er mogelijk om uitgezonden te worden, uitgedrukt in n ?

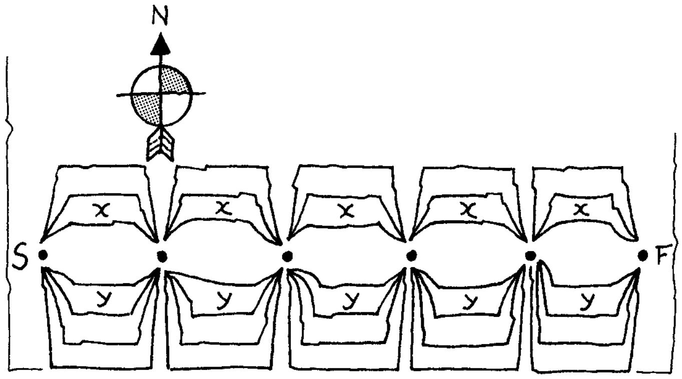
2 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52.

Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen A dat Anne krijgt.
a. Bereken $P(A=3)$.

Het kaartspel heeft 13 klaveren, 13 ruiten, 13 harten en 13 schoppen.
b. Bereken de kans dat Anne van elke soort ten minste 3 kaarten krijgt.

3 Het binomium van Newton

1 Elke route van S naar F bestaat uit vijf stappen. Bij elk van die stappen is zijn er x noordelijke wegen en y zuidelijke wegen.



In het plaatje is $x = 3$ en $y = 4$.
a. Het aantal routes van S naar F waarbij je 3 keer een noordelijke weg neemt en 2 keer een zuidelijke weg is $10 \cdot x^3 \cdot y^2$.
Leg dat uit.
b. Hoeveel routes zijn er van S naar F waarbij je
- 0 keer een noordelijke weg neemt en 5 keer een zuidelijke weg ?
- 1 keer een noordelijke weg neemt en 4 keer een zuidelijke weg ?
- 2 keer een noordelijke weg neemt en 3 keer een zuidelijke weg ?
- 4 keer een noordelijke weg neemt en 1 keer een zuidelijke weg ?
- 5 keer een noordelijke weg neemt en 0 keer een zuidelijke weg ?

c. Het totaal aantal routes van S naar F is $(x+y)^5$.
Welke formule voor $(x+y)^5$ vind je uit **a** en **b** ?
d. Controleer de formule voor $x=1$ en $y=1$.
Ook voor $x=1$ en $y=2$.

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

2 De coëfficiënten in de formule van opgave **1c** staan in regel 5 van de driehoek van Pascal. En dat is niet toevallig.
a. Je kunt de zesde regel van de driehoek van Pascal gebruiken om een formule voor $(x+y)^6$ te geven.
Doe dat.
b. Geef zo ook formules voor $(x+y)^1$, $(x+y)^2$ en $(x+y)^3$.
Controleer of de formules juist zijn door de haakjes uit te werken.

3 In opgave **1c** heb je gezien dat
$(x+y)^5 = 1\cdot x^0\cdot y^5 + 5\cdot x^1\cdot y^4 + 10\cdot x^2\cdot y^3 + 10\cdot x^3\cdot y^2 + 5\cdot x^4\cdot y^1 + 1\cdot x^5\cdot y^0$.
Voor de derde term kunnen we schrijven: $\binom{5}{2}\cdot x^2\cdot y^{5-2}$.

Net zoiets kunnen we ook doen met de andere termen. Dat levert een formule op in de gedaante:

$$(x+y)^5 = \sum_{k=\_}^{\_} \binom{\cdot}{\cdot}\cdot x^{\_}\cdot y^{\_\_} .$$

a. Vul op de zes open plaatsen het passende in.
b. Schrijf op dezelfde manier de formules voor $(x+y)^1$, $(x+y)^2$ en $(x+y)^3$ op.

Het binomium van Newton

Voor alle getallen x en y en alle positieve gehele getallen n geldt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k}.$$

Sir Isaac Newton
(1642-1727)
hoogleraar te Cambridge

De formule is genoemd naar Isaac Newton, ofschoon hij hem niet heeft uitgevonden. De formule was toen al minstens vijf eeuwen bekend (bij Arabische en Chinese wiskundigen). Newton heeft de formule gegeneraliseerd voor niet-gehele exponenten.
$x+y$ is een tweeterm, ofwel een binomium (latijn: bi = twee, nomus = term).
In de formule spelen de combinatiegetallen een belangrijke rol. Daarom worden die ook wel **binomiaalcoëfficiënten** genoemd.

4 Zoals gezegd, geldt de formule voor alle getallen x en y. Elke speciale keuze voor x en y levert een bijzonder geval van de algemene formule.
Welke formule krijg je als:
a. $y=1$?
b. $x=1$ en $y=1$?
c. $x=-1$ en $y=1$?

Voorbeeld
11^3 kun je met het binomium van Newton eenvoudig als volgt uitrekenen:
$11^3 = (10+1)^3 = 1\cdot 10^0\cdot 1^3 + 3\cdot 10^1\cdot 1^2 + 3\cdot 10^2\cdot 1^1 + 1\cdot 10^3\cdot 1^0 =$
$1 + 3\cdot 10 + 3\cdot 100 + 1\cdot 1000 = 1331.$

5 **a.** Gebruik zo ook de driehoek van Pascal om 11^4 uit te rekenen.
b. Ook 101^2, 101^3 en 101^4.
c. Ook 9^3. Tip: $9^3 = (10-1)^3$.

Dat het binomium van Newton een juiste formule is, kun je ook inzien door gewoon haakjes uit te werken.

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy$

$(x+y)^3 = (x+y)(xx + xy + yx + yy) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$

$(x+y)^4 = (x+y)(xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy) =$
$xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx + xyyy +$
$yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy + yyyx + yyyy$

6 **a.** Als je op deze manier $(x+y)^5$ uitschrijft, hoeveel termen krijg je dan ?
b. Hoeveel van die termen zijn er gelijk aan x^5 ?
Hoeveel zijn er gelijk aan x^4y, hoeveel aan x^3y^2, hoeveel aan x^2y^3, hoeveel aan xy^4 en hoeveel aan y^5 ?
c. Kloppen de resultaten met het binomium van Newton ?

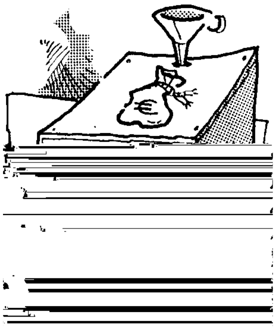
Overzichtsvragen

1 $(x+x^{-1})^6$ wordt zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk geschreven.
a. Hoeveel termen krijg je ?
b. Wat zijn de exponenten van x in elk van deze termen ?
c. Hoe groot is de constante term ?

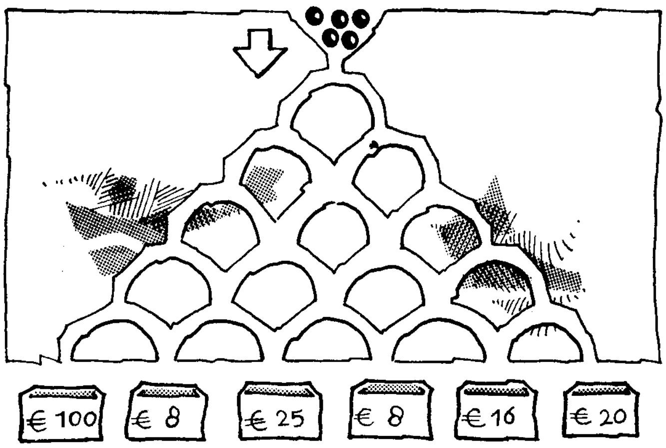
2 Bij een zekere schaatswedstrijd wordt er op vier afstanden gereden door x deelnemers. Voor elke afstand heeft Anne een persoonlijke favoriet. Na de wedstrijd wordt de lijst opgemaakt van de vier winnaars.
a. Hoeveel lijsten zijn er in totaal mogelijk ?
b. Hoeveel lijsten zijn er mogelijk met :
- 0 van Annes favorieten ?
- 1 van Annes favorieten ?
- 2 van Annes favorieten ?
- 3 van Annes favorieten ?
- 4 van Annes favorieten ?

c. Wat is het verband van **a** en **b** met het binomium van Newton ?

4 Verwachting



1 Hieronder staat schematisch het inwendige van een spelautomaat. Bovenaan wordt in de trechter een balletje losgelaten, dat vervolgens naar beneden rolt en in een van de bakjes terecht komt. De speler ontvangt het bedrag dat bij het bakje geschreven staat. We gaan ervan uit dat een balletje bij elke splitsing met gelijke kans naar links of naar rechts gaat.



Stel dit spel wordt per jaar 40.000 keer gespeeld.

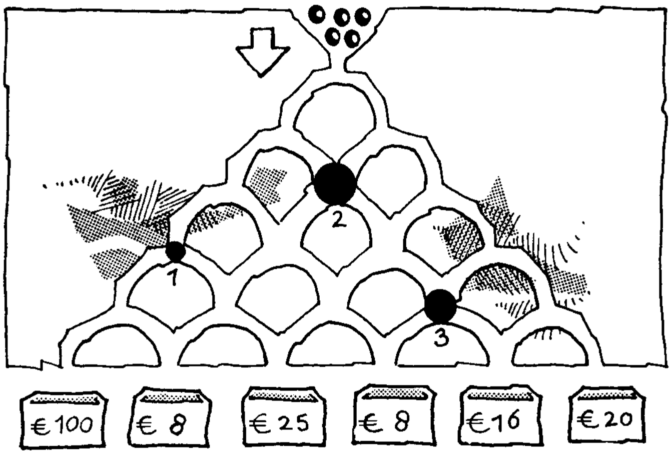
a. Hoe vaak zou je het balletje in het bakje met honderd euro verwachten ?
En hoe vaak in elk van de andere bakjes ?

b. Hoeveel zou de eigenaar van de automaat naar verwachting per jaar moeten uitbetalen ?

c. Natuurlijk zal hij niet precies het bedrag uit onderdeel **b** moeten uitbetalen.
Wat is in theorie het maximale bedrag dat de eigenaar per jaar zou kunnen moeten uitbetalen ?
En het theoretisch minimale bedrag ?

d. Om dit spelletje te mogen spelen moet je € 15,- betalen.
Is dit een aantrekkelijke prijs voor een speler om te spelen?

2 Na enige tijd verandert de eigenaar het spel. Op enkele plaatsen zet hij een "stop". Rolt het balletje daarin dan stopt het spel en er wordt niets uitbetaald. Het nieuwe inwendige van de spelautomaat staat op de volgende bladzijde.



a. Hoeveel moet de eigenaar nu naar verwachting per jaar uitbetalen ?
b. Bij welke inzet is het net niet meer aantrekkelijk om het spel te spelen ?
De stoppen 1,2 en 3 zijn zo neergezet dat het onmogelijk is € 100 te winnen. Dat maakt het niet aantrekkelijk voor men-sen om het te spelen.
c. Ontwerp zelf een spel met drie stoppen waarmee het wel mogelijk is € 100 te winnen. De andere bedragen mag je zelf kiezen.
Bepaal ook hoeveel een speler moet betalen om te spelen: niet te hoog en ook niet te laag.
Bereken de winst die je mag verwachten als het spel 1000 keer gespeeld wordt.

3 Chuck-a-luck is een spelletje op Amerikaanse kermissen. Tegen een inzet van 1 dollar mag je met drie dobbelstenen gooien. Valt geen van de dobbelstenen op 'zes' dan ben je je inzet kwijt. In de andere gevallen krijg je de inzet terug plus een dollar voor elke zes die je gooide.
De exploitant van dit spelletje op de kermis is natuurlijk geïnteresseerd hoeveel hij kan verdienen met dit spel. De inkomsten zijn duidelijk: $1 per spel. De uitgaven liggen minder vast. Die variëren: $0, $2, $3 of $4. Hij maakt een

uitbetaling	$0	$2	$3	$4
kans				

tabel met de kansen op de verschillende uitgaven per spel:
a. Bereken de kansen.
b. Bereken hoeveel de exploitant naar verwachting gemiddeld per spelletje verdient.

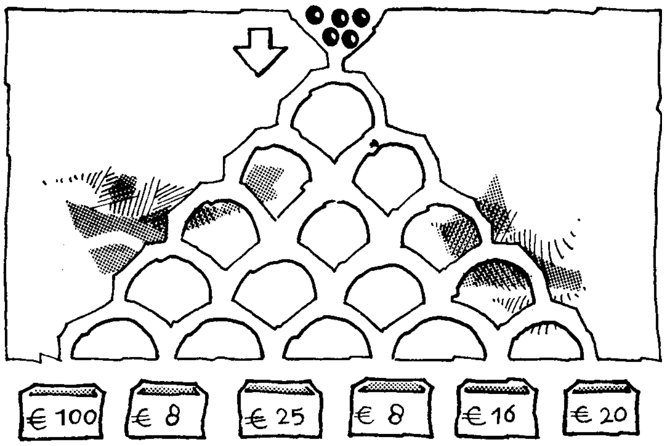
Niet alleen bij spelletjes wordt de gemiddelde winst die je naar verwachting boekt, berekend. We gaan hiervan enkele voorbeelden bekijken.

4 Een druiventeler kan kiezen tussen twee manieren van oogsten.
Manier 1. Direct oogsten als de druiven rijp zijn. De winst per kilo is dan € 1,50. Aan deze manier van oogsten is geen risico verbonden.
Manier 2. Als de druiven rijp zijn laat hij ze nog twee weken hangen. Hierdoor worden de druiven voller van smaak. De druiven zijn dan meer waard. De winst is dan € 2,00 per kilo. Aan deze manier is wel risico verbonden. Als het gaat regenen in deze laatste twee weken, worden de druiven aangetast en daardoor minder waard: nog slechts € 0,75 per kilo winst.
De kans dat het in de betreffende periode van twee weken regent is 0,30 (30%).
a. Laat zien dat de te verwachten winst per kilo bij manier 2 groter is dan € 1,50.

Als de winst van de aangetaste druiven veel lager wordt dan € 0,75, is het voordeliger voor de teler om voor manier 1 te kiezen.
b. Bereken vanaf welke winst per kilo voor de aangetaste druiven hij beter voor manier 1 kan kiezen.

5 Verzekeringsmaatschappijen werken veel met kansen.
Wintersportvakanties zijn niet zonder risico. Ongeveer 6% van alle wintersporters raakt in meer of mindere mate gewond. De behandelingskosten kunnen variëren van enkele tientjes tot duizenden euro's. Gemiddeld liggen de kosten per gewonde rond de 4000 euro.
Per jaar gaan 100.000 Nederlanders naar de wintersport. Laten we aannemen dat ze zich allemaal bij een verzekeringsmaatschappij verzekeren en dat deze maatschappij geen winst hoeft te maken.
a. Hoe hoog zal de verzekeringspremie per persoon moeten bedragen, opdat de verzekeringsmaatschappij de verwachte kosten kan betalen ?
b. Stel dat slechts de helft van de wintersporters zich verzekert. Bereken ook nu de hoogte van de premie.

6 We gaan terug naar het spel van opgave **1**.



In de tabel hieronder staan de kansen op de verschillende uitbetalingen.

uitbetaling	100	8	25	16	20
kans	1/32	15/32	10/32	5/32	1/32

a. Stel dat er n keer gespeeld wordt.
Hoe groot is dan de totale uitbetaling, naar je mag verwachten ?
b. De gemiddelde uitbetaling per keer is dan dus:
$100 \cdot \frac{1}{32} + \ldots$ (vul verder aan).

Bereken deze gemiddelde uitbetaling.

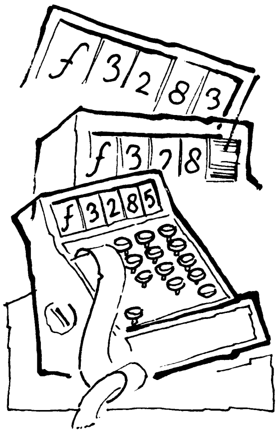
Als bij een experiment de stochast X de waarden x_1, x_2, ... , x_n aanneemt met bijbehorende kansen p_1, p_2, ..., p_n , dan is $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k$.

E(X) is de **verwachtingswaarde** van X.

De verwachtingswaarde vind je dus door elk van zijn uitkomsten te vermenigvuldigen met de kans op die uitkomst en de producten op te tellen.

E(X) is een soort theoretisch gemiddelde: je neemt het gemiddelde van de mogelijke waarden, rekening houdend met de frequentie waarmee ze voorkomen.

De letter E komt van *Expectatio*.



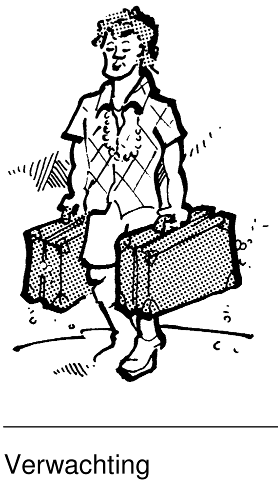
7 In warenhuizen is gedurende een doordeweekse dag bijgehouden hoe lang de mensen met hun boodschappen voor de kassa moesten wachten.

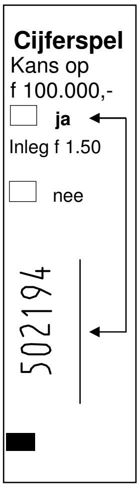
wachttijden (min)	0	0,5	1	1,5	2
% klanten in					
winkel A	20	10	20	25	25
winkel B	0	40	40	20	0

Je leest bijvoorbeeld af dat in winkel A 20% van de klanten 1 minuut moest wachten. De wachttijden zijn afgerond op halve en hele minuten. Met deze gegevens maken we een model: we nemen aan dat bovenstaande verdeling voor iedere doordeweekse dag geldt. Voor iedere klant geldt nu dat de kans dat hij/zij 1 minuut in winkel A moet wachten 0,20 is. Voor andere wachttijden en voor winkel B worden op dezelfde wijze de kansen gedefinieerd.
a. Bereken de verwachtingswaarde van de wachttijd voor winkel A en ook voor winkel B.
b. Een klant bezoekt beide winkels. Bereken de kans dat hij in de winkels even lang moet wachten.

De totale wachttijd W voor iemand die beide winkels bezoekt,varieert van 0,5 tot 3,5 minuut.
c. Maak een tabel van de kansverdeling van W.
d. Bereken de verwachtingswaarde van W.
e. Vergelijk de antwoorden van **a** en **d**. Wat valt je op ?

8 Reisbureaus bieden vlak voor vertrek zogenaamde last-minutereizen aan. Ze proberen het vliegtuig en/of hotel als-nog vol te krijgen door de prijzen te verlagen. Reizen die normaal bijvoorbeeld € 800 kosten, kunnen dan geboekt worden voor € 550. Wie zou dat niet willen ? Maar dit kan alleen als er nog plaatsen over zijn. Dus als je gokt op zo'n last-minute-aanbieding, loop je het risico dat er geen plaats is.
Familie Jansen, met vier personen, wil van de zomer naar Turkije. Het boeken van zo'n reis kan in april voor € 800 per persoon. Vorig jaar zagen zij in de zomer een last minute aanbieding van deze reis voor € 550 per persoon.
Probleem is nu: hoe groot schatten zij de kans dat deze aanbieding dit jaar weer komt. Neem aan dat die kans 0,60 is. Als de aanbieding niet komt zullen ze, om toch naar Turkije te kunnen, een duurdere lijnvlucht moeten boeken. Deze kost € 900 per persoon.
Welk advies zou jij de familie Jansen geven (uitgaande van hun schatting van 0,60): in april boeken of wachten tot de zomer ? Ondersteun je advies met verwachtingswaarden.





9 Naast de lotto en toto kun je ook meedoen aan het zogenaamde cijferspel. Je krijgt als deelnemer een getal van 6 cijfers. Bij de trekking wordt het winnende getal van 6 cijfers bekend gemaakt.
Zijn de laatste 6 cijfers van het getal van de deelnemer goed (dus alle cijfers zijn goed), dan krijgt hij € 100.000.
Zijn de laatste 5 cijfers goed, dan € 10.000.
Zijn de laatste 4 cijfers goed, dan € 1.000.
Zijn de laatste 3 cijfers goed, dan € 100.
Zijn de laatste 2 cijfers goed, dan € 10.
Ieder formulier bevat één getal van 6 cijfers en deelname met zo'n formulier kost € 1,50.
Bereken de verwachtingswaarde van de winst voor de organisator van het cijferspel per formulier.

10 Leonie speelt darts. Zij mikt met een pijltje op het midden van de schijf. De schijf heeft vier gebieden, die (van binnen naar buiten) 10, 5, 3 en 1 punt opleveren. Leonie weet uit ervaring dat zij met kans 0,1 de roos treft, met kans 0,3 de kleine ring, met kans 0,4 de middelste ring en met kans 0,2 de buitenste ring.
a. Leonie werpt 5 keer. Bereken de kans dat zij geen enkele keer de buitenste ring treft.
b. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal punten dat Leonie in een worp haalt ?
c. Wat is de verwachtingswaarde van het totaal aantal punten dat Leonie in vijf worpen haalt ?

11 In een doos zitten zes ballen: twee witte en vier zwarte. Uit die doos nemen we aselect drie ballen. X is het aantal witte ballen als met terugleggen getrokken wordt, Y als er zonder terugleggen getrokken wordt.
a. Geef in een tabel de kansverdeling van X en bereken E(X).
b. Geef in een tabel de kansverdeling van Y en bereken E(Y).

12 Bij een worp met een dobbelsteen is X het aantal ogen dat boven komt en Y het aantal dat onder ligt.
a. Hoe groot is Y als X = 2 ?
b. Welke waarden kan X aannemen ? En Y ? En welke waarden kan X + Y aannemen ?
c. Bereken E(X), E(Y) en E(X + Y).
d. Geldt: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$?

13 Iemand werpt met twee dobbelstenen. X_1 is het aantal ogen dat hij met de ene dobbelsteen werpt en X_2 het aantal ogen met de andere dobbelsteen.
$S = X_1 + X_2$ is de som van de aantallen ogen.
a. Hoe groot is $E(X_1)$? En hoe groot is $E(X_2)$?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van S en bereken E(S).
c. Geldt: $E(S) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$?

De verwachtingswaarde van de som van twee stochasten is gelijk aan de som van de verwachtingswaarden van de twee afzonderlijke stochasten. Dit geldt ook als een uitkomst van de eerste stochast van invloed is op de uitkomst van de tweede (zie opgave **12**) en geldt ook bij de som van meer dan twee stochasten.

Als $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$, dan $E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$.

Deze somregel, waarvan we geen bewijs geven, maakt berekeningen vaak veel eenvoudiger. Bijvoorbeeld bij opgave **13** wisten we dat $E(X_1) = E(X_2) = 3{,}5$; zonder de kansverdeling van $S = X_1 + X_2$ uit te rekenen, weten we: $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$.

14 Ard en Bart schieten regelmatig op ballonnen. Uit de praktijk blijkt dat Ard met kans $\frac{1}{4}$ een ballon kapot schiet en Bart met kans $\frac{1}{2}$.
Er wordt een ballon opgeblazen. Eerst schiet Ard op de ballon en dan (als de ballon nog niet kapot is) Bart.
A = het aantal ballonnen dat Ard kapot schiet, B = het aantal ballonnen dat Bart kapot schiet en T is het totaal aantal ballonnen dat kapot geschoten wordt.
a. Bereken E(A), E(B) en E(T).
b. Ga na dat de somregel voor stochasten geldt.

Overzichtsvragen

1 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen A dat Anne krijgt.
a. Maak een tabel van de kansverdeling van A.
b. Bereken EA met behulp van deze kansverdeling.

H = 1 als Anne hartenaas krijgt, anders is H = 0.
c. Bereken EH.
d. Hoe volgt EA uit **c** ?

2 Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen. X is het aantal successen en Y is het aantal mislukkingen.
a. Stel dat je de verwachtingswaarde van X kent. Hoe vind je daaruit de verwachtingswaarde van Y ?
b. Stel dat je de verwachtingswaarde van X kent. Hoe vind je daaruit de succeskans ?

3 Een spel gaat over drie ronden. In elke ronde valt € 120 te verdienen. Dat lukt in de eerste ronde met kans $\frac{1}{2}$; dan kom je in de tweede ronde, anders ben je uitgeschakeld. In de tweede ronde lukt dat met kans $\frac{1}{3}$; dan kom je in de derde ronde, anders ben je uitgeschakeld. In de derde ronde verdien je de € 120 met kans $\frac{1}{4}$.

X is het totale bedrag dat je met het spel verdient.
a. Maak een kanstabel voor X en bereken EX.

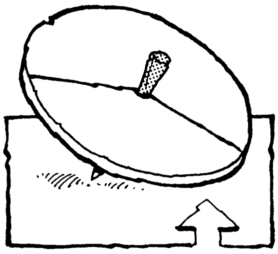
X_1, X_2 en X_3 zijn de bedragen die je in de eerste, tweede en derde ronde verdient.
b. Bereken EX_1, EX_2 en EX_3.
Kloppen de antwoorden met **a** ?

5 De binomiale verdeling

1 Draaiwiel 1

Op een draaiwiel staan, elk in een sector van 36°, de cijfers 0, 1, ..., 9. Dit wiel wordt zes keer rondgedraaid. Hoe groot is de kans

a. op zes verschillende cijfers ?
b. op zes gelijke cijfers ?
c. dat er geen 8 bij is ?
d. dat er minstens één 8 bij is ?
e. dat alleen de eerste twee cijfers 8 zijn ?
f. dat er precies twee cijfers 8 bij zijn ?
g. dat er precies twee cijfers 8 bij zijn die naast elkaar staan ? Tip: Schrijf eens een aantal van die rijtjes op.



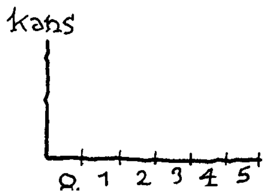
2 Draaiwiel 2

Bij een ander draaiwiel is de successector 144°.

a. Hoe groot is bij één keer draaien van dat wiel de kans op succes ?

Dat draaiwiel wordt vijf keer rondgedraaid. Hoe groot is de kans op:

b. vijf keer succes ?
c. de eerste vier keer succes en de vijfde keer pech ?
d. vier keer succes en één keer pech ?
e. de eerste drie keer succes en de laatste twee keer pech ?
f. drie keer succes en twee keer pech ?



3 Werpen met een munt

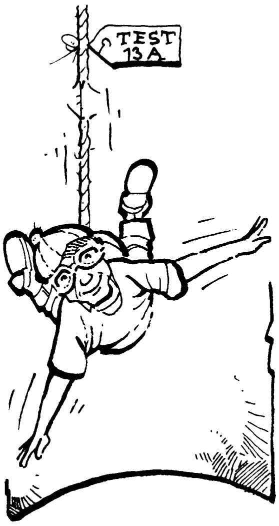
Bij vijf worpen met een munt is Y het aantal keren kop.

a. Geef in een tabel de kansverdeling van Y.
b. Teken het kanshistogram van Y.
c. Waarom is dit kanshistogram symmetrisch ?

k	P(X=k)	P(X=k)
0		0,017
1		0,087
2		0,195
3		0,260
7		0,016
8		0,003
9		0,000
10		0,000

4 Driekeuzevragen

Om bij de KLM te komen, moet je allerlei tests afleggen. Een van de tests bestaat uit tien meerkeuzevragen over aardrijkskunde. Bij elke vraag heb je de keuze uit drie antwoorden. Als je bij een vraag het antwoord absoluut niet weet, kun je gokken. De kans dat je dan het juiste antwoord aanstreept is $\frac{1}{3}$.
Bart vult de KLM-test op de gok in. X is het aantal goede antwoorden. In de tabel hiernaast is een deel van de kansverdeling van X al ingevuld. In de tweede kolom moeten de exacte antwoorden komen, in de derde kolom de antwoorden afgerond op drie cijfers na de komma.



a. Neem de tabel over in je schrift en vul hem verder in.
b. Ga na of de som van de kansen in de derde kolom (ongeveer) 1 is.

De KLM moet bepalen waar de grens ligt tussen slagen en zakken. Met andere woorden hoeveel vragen moeten goed zijn beantwoord opdat de kandidaat slaagt. De KLM kan moeilijk eisen dat alle vragen goed beantwoord worden, maar anderzijds mag een gokker zoals Bart niet te grote kans hebben om te slagen.
c. Waar zou jij de grens leggen ?

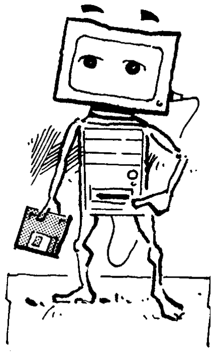
5 Bij een spel heb je kans $\frac{1}{3}$ om twee euro te winnen en kans $\frac{2}{3}$ om één euro te verliezen. Iemand besluit om dit spel drie keer te spelen. X is het bedrag dat hij na die drie spelletjes gewonnen heeft.
a. Welke waarden kan X aannemen ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van X.
c. Laat met een berekening zien dat dit spel eerlijk is.
d. Wat is trouwens een *eerlijk spel*, vind je ?

6 In een doos zitten zeven ballen, waarvan er vijf rood zijn. Uit die doos nemen we blindelings *met* terugleggen drie keer een bal. X is het aantal rode ballen in deze steekproef.
a. Hoe groot is de kans dat de tweede bal rood is ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van X.
Voeg aan die tabel een derde rij toe en vul daar de kansen in, afgerond op drie cijfers na de komma.
c. Ga na dat de som van deze kansen (ongeveer) 1 is.

Veel opgaven in deze paragraaf zijn wiskundig gezien hetzelfde.
Bij een experiment zijn er twee mogelijke uitkomsten: “succes” en “mislukking”. Dit experiment wordt n keer (onafhankelijk van elkaar) herhaald, steeds met dezelfde kans op succes p. X is het totaal aantal successen.
Dan geldt: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

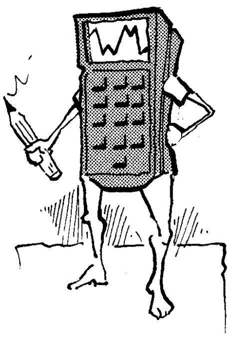
Zo’n stochast X heet **binomiaal verdeeld**.

Voorbeeld Bij 5 herhalingen, steeds met **succeskans** 0,4, is de kans op 2 successen: $\binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3$.



Het voorbeeld komt neer op het **met terugleggen** trekken van vijf ballen uit een doos met vier witte en zes zwarte ballen. X is het aantal witte ballen dat hij pakt.
Dat het met terugleggen is, herken je zo: de kans dat de tweede bal wit is, hangt niet af van de kleur de eerste bal.

Op de schijf Statistiek van de Wageningse Methode staat een programma dat kansen van een binomiaal verdeelde stochast uitrekent en het bijbehorende kanshistogram tekent.



Op de GR kun je ook binomiale kansen uitrekenen. De kans in het bovenstaande voorbeeld $\binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3$ vind je als volgt.
DISTR DISTR 0:binompdf(5,0.4,2)

Algemeen: binompdf(n,p,x), waarbij n het aantal herhalingen is, p de succeskans en x het aantal successen.

7 Bereken met de GR de kansen uit opgave **5** en **6**.

8 Een poes heeft zes jongen gekregen.
Hoe groot is de kans dat er drie katertjes bij zijn ?

9 Van de penalty's bij voetballen in de hoogste afdeling wordt 70% benut, wordt 20% door de keeper gestopt en wordt 10% over of naast geschoten.
a. Wat is de kans dat van de eerstvolgende 10 penalty's er precies 3 gemist (= niet benut) worden ?
b. Je hebt gehoord dat er afgelopen weekend liefst 7 penalty's werden gemist.
Bereken de kans dat er daarvan precies 4 door de keeper werden gestopt.
c. Er zijn op een avond maar 2 wedstrijden gespeeld. Je hebt gehoord dat er die avond liefst 7 penalty's zijn gegeven. Neem aan dat elke club met dezelfde kans een penalty krijgt.
Bereken de kans dat precies 4 van de penalty's aan eenzelfde club werden gegeven.

10 Bij een worp met tien dobbelstenen is X_1 het aantal ogen van de eerste steen, X_2 dat van de tweede steen, enzovoort. $X = X_1 + ... + X_{10}$ is het totaal aantal ogen.
a. Hoe groot is $E(X_1)$?
b. Bereken E(X).

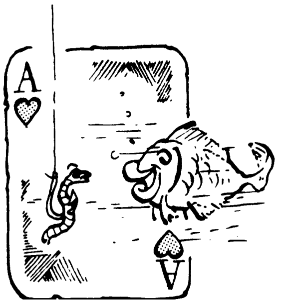
11 Bij een worp met tien dobbelstenen is Y het totaal aantal zessen dat gegooid is.
Y_1 is het aantal zessen dat met de eerste dobbelsteen gegooid is. Y_2 is het aantal zessen dat met de tweede dobbelsteen is gegooid, enzovoort.
a. Ga na dat Y_1 maar twee waarden kan aannemen. Welke waarden zijn dat ?
b. Geef in een tabel de kansverdeling van Y_1 en bereken $E(Y_1)$.

Als met de derde en met de zevende dobbelsteen een zes gegooid wordt en met de andere niet, dan is het totaal aantal zessen gelijk aan 2.
Anders opgeschreven: $Y = 0+0+1+0+0+0+1+0+0+0 = 2$.
Algemeen geldt: $Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_9 + Y_{10}$.

c. Overtuig je zorgvuldig van de juistheid hiervan. Bereken daarna E(Y).

12 Marieke en Debbie zijn aan het kaarten. Zoals je weet zijn er vier "kleuren" in het kaartspel: schoppen, harten, ruiten en klaveren.
Op een gegeven moment pakt Marieke negen kaarten: twee harten, drie schoppen en vier ruiten. Dat waren er echter drie teveel. Daarom trekt Debbie (aselect) drie kaarten uit de negen die Marieke in haar hand heeft.
a. Hoe groot is de kans dat deze drie kaarten alle verschillend van kleur zijn ?
b. Hoe groot is de kans dat ze alle drie van dezelfde kleur zijn ?
c. Hoe groot is de kans dat de eerste kaart die Debbie trekt een harten is ?
d. Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een harten is ?

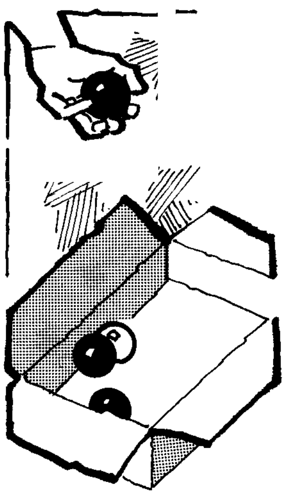
X is het aantal harten dat Debbie trekt.
e. Geef de kansverdeling van X. Schrijf de kansen met behulp van combinatiegetallen en daarna ook als gewone breuk. Controleer de som van de kansen.
f. Bereken op twee manieren E(X).



13 Noortje, Coen, Peter en Anke spelen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten. Noortje heeft X_1 azen in haar hand, Coen X_2, Peter X_3 en Anke X_4.
a. Welke waarden kan X_1 aannemen ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van X_1.
c. Bereken met behulp van deze kansen $E(X_1)$.

Maar $E(X_1)$ kan ook op een andere, veel handigere manier berekend worden!
$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ is het totaal aantal azen van de vier spelers.
d. Welke waarden kan X aannemen ?
Hoe groot is dus $E(X)$?

Op grond van symmetrie geldt: $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4)$.
e. Bereken hiermee opnieuw $E(X_1)$.



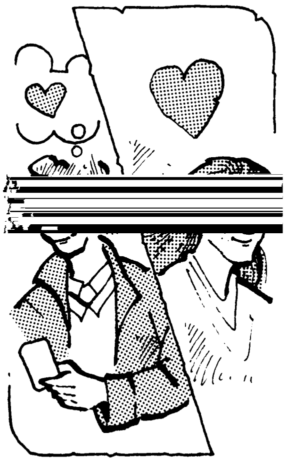
14 In een doos zitten zes ballen: twee witte en vier zwarte. Uit die doos nemen we aselect drie ballen. X is het aantal witte ballen als met terugleggen getrokken wordt, Y als er zonder terugleggen getrokken wordt.
X_1 stellen we gelijk aan 1 als de eerste bal wit is en aan 0 als de eerste bal zwart is. Op dezelfde manier worden Y_1, X_2, Y_2, X_3 en Y_3 vastgelegd.
a. Bereken $P(X_3 = 1)$, de kans dat de derde bal wit is als er met terugleggen getrokken wordt. Bereken ook $E(X_3)$.
b. Bereken ook $P(Y_3 = 1)$ en $E(Y_3)$.
c. Ga na dat $X = X_1 + X_2 + X_3$ en bereken $E(X)$.
d. Ga na dat $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ en bereken $E(Y)$.

Vergelijk je antwoorden met die bij opgave **10** van de vorige paragraaf.

15 We bekijken een binomiaal kansexperiment. Het aantal herhalingen noemen we n en de succeskans p. X is het totaal aantal successen. We kunnen X dan als volgt opsplitsen: $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Hierin is X_1 het aantal successen bij de eerste van de n herhalingen; enzovoort
a. Bereken $E(X_1)$.
b. Bereken $E(X)$.

> We bekijken een binomiaal kansexperiment. Het aantal herhalingen noemen we n en de succeskans p.
> X is het totaal aantal successen.
> Dan geldt: $E(X) = np$.

16 Een kolom van het totoformulier vul je in door bij elk van de twaalf wedstrijden één van de hokjes 1, 2 of 3 aan te kruisen. (1 betekent "de thuisspelende club wint", 2 betekent "de uitspelende club wint" en 3 betekent "gelijkspel".) Neem aan dat elke wedstrijd met kans $\frac{1}{3}$ goed voorspeld wordt.
Wat is de verwachtingswaarde van het aantal juist voorspelde wedstrijden ?



✂ **17 ESP, Extra Sensory Perception**
Soms lijkt het er op dat bepaalde mensen weten wat iemand anders denkt of doet zonder dat ze die ander kunnen horen of zien. Men spreekt van buitenzintuiglijke waarneming. (In het Engels: Extra Sensory Perception, afgekort ESP.)
Sommige geleerden geloven er in, anderen beweren dat het onzin is. Er zijn op dit gebied allerlei onderzoekingen gedaan.
Zo'n proef kunnen we ook zelf doen. Twee personen, Vincent en Jeroen, bevinden zich in verschillende kamers. Op een afgesproken tijdstip trekt Vincent een kaart uit een gewoon kaartspel en noteert de soort: harten, ruiten, schoppen of klaveren. Jeroen, die zich op Vincent "concentreert", noteert op hetzelfde moment de soort die Vincent volgens hem getrokken heeft. Datzelfde gebeurt nog vijf keer; dus zes keer in totaal. Daarna wordt gekeken hoe vaak Jeroen de juiste soort heeft opgeschreven. Laat X dit aantal zijn.
a. Bij welke waarden van X zou er volgens jou bij Jeroen van ESP sprake kunnen zijn ?

Vincent gelooft er niet in; hij denkt dat Jeroen zuiver raadt. Neem bij de volgende onderdelen aan dat Vincent gelijk heeft.
b. Maak een tabel van de kansverdeling van X. Geef de kansen in drie decimalen.
c. Hoe groot is de kans op drie of minder goed als Vincent gelijk heeft ?

✂ **18** Jeroen beweert dat hij bij elke kaart met een kans van 75% de juiste soort noteert. Neem bij de volgende onderdelen aan dat Jeroen gelijk heeft.
a. Maak opnieuw een tabel van de kansverdeling van X. Geef de kansen weer in drie decimalen.
b. Hoe groot is nu de kans op meer dan drie goed ?
c. Hoe groot is dus de kans op drie of minder goed als Jeroen gelijk heeft ?

⌘ **19** **a.** Hoeveel goede antwoorden verwacht je als Vincent gelijk heeft ?
b. En hoeveel goede antwoorden verwacht je als Jeroen gelijk heeft ?

Zij spreken af dat Vincent gelijk krijgt als er drie of minder kaarten juist zijn genoteerd. (Dat wil overigens nog niet zeggen dat hij ook gelijk heeft!) Als er meer dan drie goed zijn, krijgt Jeroen gelijk.
c. Als Vincent gelijk krijgt, wat weet je dan van X ?
d. Als Jeroen gelijk heeft, wat weet je dan van p ?
e. Stel dat Jeroen gelijk *heeft.*
Bereken $P(X \leq 3)$, dat is de kans dat Vincent gelijk *krijgt.*
f. Stel dat Vincent gelijk *heeft.*
Bereken $P(X \geq 4)$, dat is de kans dat Jeroen gelijk *krijgt.*
g. Vind je het eerlijk dat de grens op deze manier bij drie of minder getrokken is ?

⌘ **20** Ga er weer van uit dat Vincent gelijk heeft.
a. Hoe groot is de kans op alle zes goed ?
b. En hoe groot is dan de kans op niet alle zes goed ?

Het experiment met zes kaarten wordt vijftien keer herhaald.
c. En hoe groot is de kans dat minstens één keer alle zes goed voorkomt ?

Overzichtsvragen

1 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Het kaartspel heeft vier azen.
Anne redeneert als volgt: "De kans dat ik hartenaas krijg is $\frac{1}{4}$; die kans geldt ook voor de andere drie azen. Dus is de kans dat ik 3 azen krijg $\binom{4}{3}\cdot(\frac{1}{4})^3\cdot(\frac{3}{4})^1$".
Geef commentaar.

2 Iemand werpt 20 keer met een dobbelsteen. X is het aantal zessen dat hij werpt.
a. Vul in: $P(X \leq 5) = \sum_{k=...}^{...} \binom{...}{...}\cdot(...)^{...}\cdot(...)^{...}$.
b. Op welke gebeurtenis is $\sum_{k=0}^{10} \binom{20}{2k}\cdot(\frac{1}{6})^{2k}\cdot(\frac{5}{6})^{20-2k}$ de kans ?

6 Cumulatieve binomiale kansen

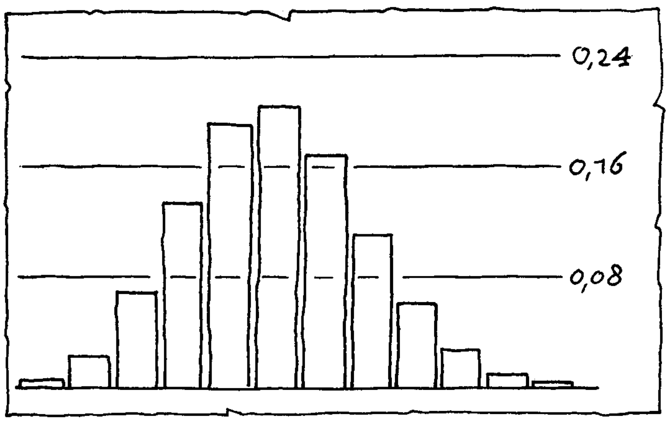
1 Een multiple-choicetest bestaat uit 20 vierkeuze-vragen. Iemand beantwoordt de vragen volkomen op de gok. We zijn geïnteresseerd in het aantal goede antwoorden. Dat kan zijn: 0, 1, 2,...., 20. Het is een binomiaal kansexperiment met 20 herhalingen en met succeskans 0,25.
Hoe de kansen over deze 21 mogelijkheden zijn verdeeld, vind je in de linkertabel hieronder.

aantal goede =	kans
0	0,0032
1	0,0211
2	0,0670
3	0,1339
4	0,1896
5	0,2024
6	0,1686
7	0,1124
8	0,0609
9	0,0270
10	0,0100
11	0,0030
12	0,0007
13	0,0002
14	0,0000
15	0,0000
16	0,0000
17	0,0000
18	0,0000
19	0,0000
20	0,0000

aantal goede ≤	kans
0	0,0032
1	0,0243
2	0,0913
3	0,2252
4	0,4148
5	0,6172
6	0,7858
7	0,8982
8	0,9591
9	0,9861
10	0,9961
11	0,9991
12	0,9998
13	1,0000
14	1,0000
15	1,0000
16	1,0000
17	1,0000
18	1,0000
19	1,0000
20	1,0000

a. Bepaal uit de linkertabel de kans op 4 of minder goede antwoorden.
b. De kans op 4 of minder goede kun je ook direct uit de rechter tabel aflezen. Doe dat.
c. Hoe kun je de rechter tabel uit de linker maken ? Controleer de eerste drie kansen in de rechter tabel.

Hieronder staat een kanshistogram voor het aantal goede antwoorden.



d. In de rechter tabel vind je dat de kans op 5 of minder goede gelijk is aan 0,6172.
Uit welke balken bestaat de bijbehorende oppervlakte in het histogram ?
e. In de rechter tabel vind je ook dat de kans op 6 of minder goede gelijk is aan 0,7858.
Uit welke balken bestaat de bijbehorende oppervlakte in het histogram ?
f. Hoe vind je met de kansen in **d** en **e** de kans op precies 6 goede ?
Hoe kun je de linker tabel uit de rechter tabel maken ?

2 Nog even verder met de multiple-choicetest van opgave **1**. We willen weten wat de kans is op meer dan 4, maar minder dan 10 goede antwoorden; dus 5, 6, 7, 8 of 9 goede.
a. Bepaal die kans uit de linker tabel.
b. Bepaal die kans uit de rechter tabel.
c. Welk van de twee manieren heeft jouw voorkeur ?

Soms kost het meer rekenwerk om met de linker tabel een kans te vinden dan met de rechter tabel. Het omgekeerde komt zelden voor. Daarom werkt men vaak met kansen zoals de rechter tabel. Dat zijn dus niet de kansen op de aantallen successen zelf, maar de kansen op alle mogelijkheden van 0 tot en met een aantal successen opgeteld. We noemen dat een **cumulatieve kanstabel** (cumulatief = stapelend).

3 Een voorbeeld van hoe je met cumulatieve kansen werkt. Hieronder staat de cumulatieve tabel bij een binomiaal kansexperiment met 6 herhalingen en succeskans 0,4. S is het aantal successen.

aantal successen (=k)	P(S≤k)	aantal successen (=k)	P(S≤k)
0	0,0467	4	0,9590
1	0,2333	5	0,9959
2	0,5443	6	1,000
3	0,8208		

Bepaal uit de tabel
a. $P(S = 4)$,
b. $P(S > 3)$,
c. $P(2 \le S \le 5)$.

Cumulatieve kansen bij een binomiaal kansexperiment kun je ook met de GR vinden. Als voorbeeld berekenen we de kans $P(S \leq 3)$ van de vorige opgave:
2nd DISTR DISTR A:binomcdf(6,0.4,3) ENTER.
Ga na dat het antwoord 0,8208 is.
"cdf" staat voor "cumulative distribution function".

4 Een binomiaal kansexperiment bestaat uit 14 herhalingen. S is het aantal successen. p is de succeskans.
Bepaal de volgende kansen met de GR
a. $P(S < 7)$ als p = 0,15,
b. $P(1 < S < 4)$ als p = 0,25,
c. $P(S < 8)$ als p = 0,15,
d. $P(3 < S < 8)$ als p = 0,30.

5 Een binomiaal kansexperiment heeft 14 herhalingen en succeskans 0,3. X is het aantal successen.
Bepaal de volgende kansen:
a. $P(X \geq 7)$,
b. $P(X \geq 8)$,
c. $P(X = 7)$,
d. $P(3 \leq X < 10)$.

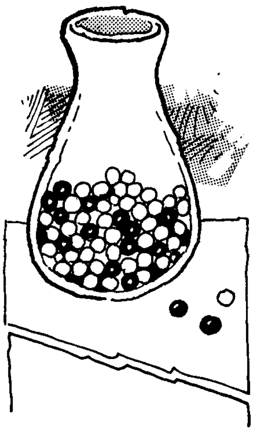
6 We werpen tien keer met een dobbelsteen en letten op het aantal zessen in die tien worpen.
Hoe groot is de kans dat er minstens drie zessen bij zijn ?

7 Zo'n 10% van de auto's die over de Nederlandse wegen razen, vertoont technische gebreken. Regelmatig worden door de politie uitgebreide technische keuringen uitgevoerd langs de kant van de autoweg.

a. Er worden 100 auto's gecontroleerd.
Hoe groot is de kans dat er bij meer dan dertien auto's gebreken worden geconstateerd ?

Gemiddeld 1 op de 100 auto's is zo gammel dat hij van de weg wordt gehaald en naar de sloper gaat.
b. Hoe groot is de kans dat bij 100 controles er minstens één auto rijp is voor de sloop ?

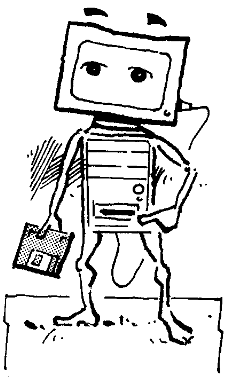
Het Nederlandse wagenpark telt zo'n 7 miljoen automobielen. De verkeerspolitie kiest 100 *verschillende* auto's uit, dat wil zeggen ze werkt eigenlijk *zonder terugleggen*. Omdat de populatie waaruit getrokken wordt zo groot is, maakt het nauwelijks uit of de trekking met of zonder terugleggen gebeurt. In de volgende opgave bekijken we wat het verschil is.



8 Uit een vaas met 100 witte en 200 rode ballen worden 3 ballen getrokken. We willen weten wat de kans is op twee witte ballen.
a. Bereken die kans als de trekking met terugleggen gebeurt in zes decimalen.
b. Bereken die kans als de trekking zonder terugleggen gebeurt in zes decimalen.

Hypergeometrisch ≈ binomiaal

Als het aantal trekkingen klein is ten opzichte van de totale populatie, dan kun je de kansen zonder terugleggen (hypergeometrisch) praktisch berekenen alsof de trekking met terugleggen gebeurt (binomiaal).



Zie ook schijf 1 - *Kansrekening* van de Wageningse Methode.

9 Uit een vaas met 30 witte en 20 rode ballen wordt een aantal keren met teruglegging een bal getrokken.
a. Hoe groot is de kans dat bij 15 trekkingen de meerderheid van de getrokken ballen rood is ?
b. Bereken bij 12 trekkingen de kans op vijf, zes of zeven witte ballen.

10 Bij een eerlijke munt zijn de kansen op "kop" en "munt" gelijk. Je mag dus verwachten dat in ongeveer 50% van de worpen "kop" zal worden gegooid. De kans is groot dat het aantal keer kop ten minste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.
a. We doen 10 worpen.
Bereken de kans dat het aantal keer "kop" ten minste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.

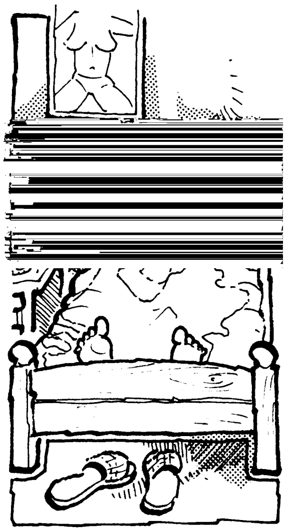
b. Dezelfde vraag voor 20 worpen, voor 50 worpen en voor 100 worpen.
c. Hoe groter het aantal worpen, des te groter de kans dat het aantal keer "kop" tussen de 40% en 60% ligt.
Kun je dat verklaren ?

11 Bij een landelijk onderzoek is gebleken dat 15% van alle middelbare scholieren regelmatig spijbelt.
a. Hoe groot is de kans dat in een havo5-klas van twintig leerlingen er meer dan 4 zijn die regelmatig spijbelen ?
b. Bij vraag **a** heb je de binomiale kanstabel gebruikt.
Maar hebben we hier wel te doen met een binomiaal kansexperiment ? Waarom is dat twijfelachtig ?

12 In een bedrijf worden schroeven gefabriceerd. Volgens de bedrijfsleider is 5% van de productie niet bruikbaar. De slechte exemplaren worden niet verwijderd, omdat de controle daarop te veel geld kost. De schroeven worden in doosjes van 50 stuks verkocht aan de winkeliers.
a. Hoe groot is de kans dat een doosje meer dan vier onbruikbare schroeven bevat ?
b. Een winkelier heeft een partij van 500 doosjes schroeven besteld bij de fabriek.
Hoeveel doosjes met 50 bruikbare schroeven kan hij daarbij verwachten ?

13 Een docent geeft een multiple-choicetest die bestaat uit twintig vierkeuzevragen.
a. Stel dat hij voor elke goed beantwoorde vraag een half punt toekent.
Hoe groot is de kans dat iemand die alle antwoorden gokt als cijfer een 4 of hoger krijgt ?
b. De docent vindt dat een gokker ten hoogste 1% kans mag hebben om een cijfer 4 of hoger te halen.
Bij welk aantal goede antwoorden moet hij dan het cijfer 4 toekennen ?

spijde14141h4141e 4141

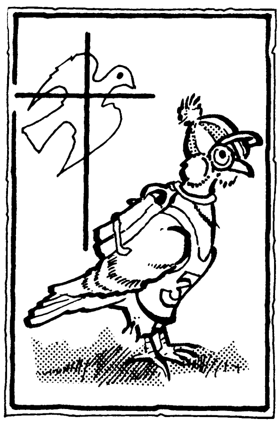


c. Hoe groot is de kans dat minstens vijf leraren griep krijgen ?
d. Hoe groot is de kans dat minstens vijf leraren geen griep krijgen ?
e. En hoe groot is de kans dat precies vijf leraren griep krijgen ?

Neem aan dat er op een dag vijf leraren door de griep geveld zijn.
f. Hoe groot is de kans dat van de elf leraren die Sofie heeft er die dag drie met griep thuis zijn gebleven ?

15 Mag het iets meer zijn ?

De kruidenier snijdt een stuk kaas van het grote stuk af. Hoewel hij dat heel aardig kan uitmikken, is het toch altijd iets te veel of iets te weinig. Neem aan dat die twee mogelijkheden dezelfde kans hebben.
In de afgelopen tijd heb je acht keer een pond kaas gekocht. Van die acht keer was het afgesneden stuk zes keer iets meer en twee keer iets minder dan een pond.
a. Hoe groot is de kans op zes of meer keer te veel ?
b. Toont dit resultaat voor jou aan dat de kruidenier liever iets te veel dan te weinig afsnijdt of kan dit best toeval zijn ?
c. Zou je hier anders over denken als er zeven keer te veel was afgesneden ?



16 Postduiven

Volgende week is er weer de beruchte postduivenvlucht op St. Vincent. Bij die vlucht heeft een duif 60% kans dat hij niet meer in zijn til terugkomt. Eduard Marée, in zijn dorp een bekende duivenmelker, doet met negen duiven mee.
a. Hoe groot is de kans dat meer dan de helft van zijn duiven terugkomt ?

Die zondag is er ook een vlucht voor jonge duiven op Vijlen (Zuid-Limburg). Hiervoor schrijft Eduard met zeven duiven in. Uit ervaring weet hij dat zo'n jonge duif in negen van de tien gevallen terugkomt.
b. Hoe groot is de kans dat precies vijf van de zeven duiven weer thuis komen ?

Eduard heeft elf jonge duiven: zes doffers en vijf duivinnen. Aselect kiest hij zeven duiven uit voor de vlucht op Vijlen.
c. Hoe groot is de kans dat er meer duivinnen dan doffers uitgekozen worden ?

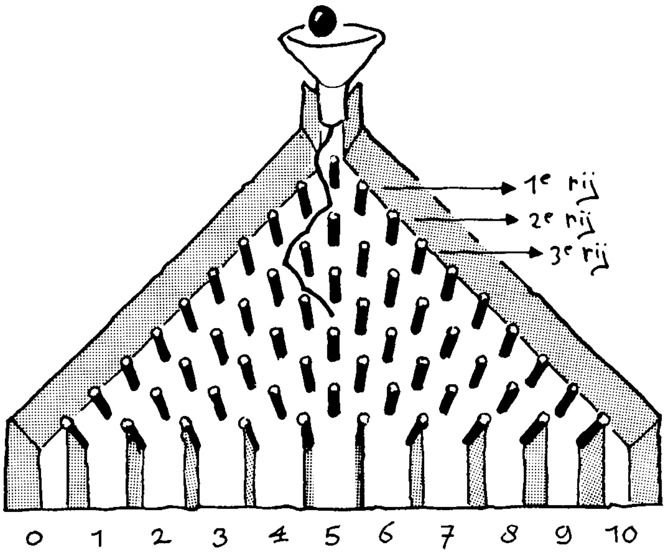
Overzichtsvragen

1 X is een zekere binomiaal verdeelde stochast.
a. Vul in: $P(X \le 10) = 1 - P(X \ge ...)$
b. Vul in: $P(X = 15 \text{ of } X = 16 \text{ of } X = 17) =$
$P(... < X < ...) =$
$P(... \le X \le ...) =$
$P(X \le ...) - P(X \le ...)$

2 Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen. X is het aantal successen en Y is het aantal mislukkingen.
a. Stel dat je de cumulatieve kanstabel van X kent. Hoe vind je daaruit de cumulatieve kanstabel van Y ?
b. Stel dat je de cumulatieve kanstabel van X kent. Hoe vind je daaruit de gewone kanstabel van X ?
c. Stel dat je de kleinste kans in de cumulatieve kanstabel van X kent. Hoe vind je daaruit de succeskans ?

7 De standaardafwijking

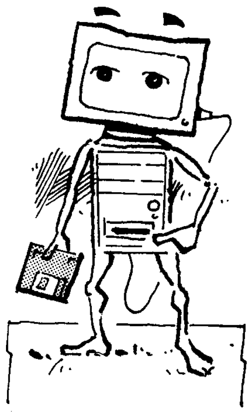
1 Hieronder staat schematisch het bord van Galton. Een balletje wordt boven in de trechter losgelaten en valt over de pinnen naar beneden. De pinnen zijn zo geplaatst dat, als het balletje op zo'n pin komt, het met even grote kans naar links als naar rechts valt. Na 10 keer een pin geraakt te hebben, komt het balletje in een van de elf bakjes onderaan het bord. De bakjes zijn genummerd van 0 tot en met 10.



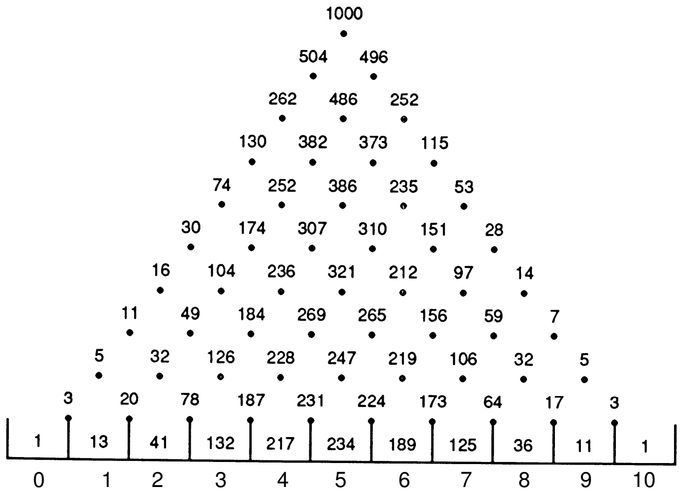
a. Hoeveel routes leiden er naar bakje 3 ?
b. Een balletje raakt op zijn weg naar beneden de derde pin van links op de zevende rij.
In welke bakjes kan het balletje dan nog terecht komen ?

2 Op de volgende bladzijde zie je het resultaat van een simulatie op een Galtonbord met 10 rijen. Men liet 1000 balletjes naar beneden vallen.
a. Hoe groot schat jij op grond van deze simulatie de kans dat een balletje in bakje 3 terecht komt ?

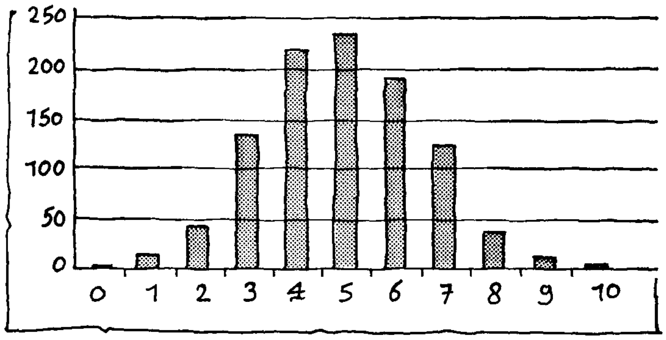
Bij een enkel balletje valt absoluut niet te voorspellen welke route het zal volgen. Alle routes zijn namelijk even (on)waarschijnlijk.
b. Bereken de kans dat een balletje in bakje 3 terecht komt.



Met het programma Het Galtonbord op schijf 1 Kansrekening van de Wageningse Methode kun je zelf simulaties uitvoeren.

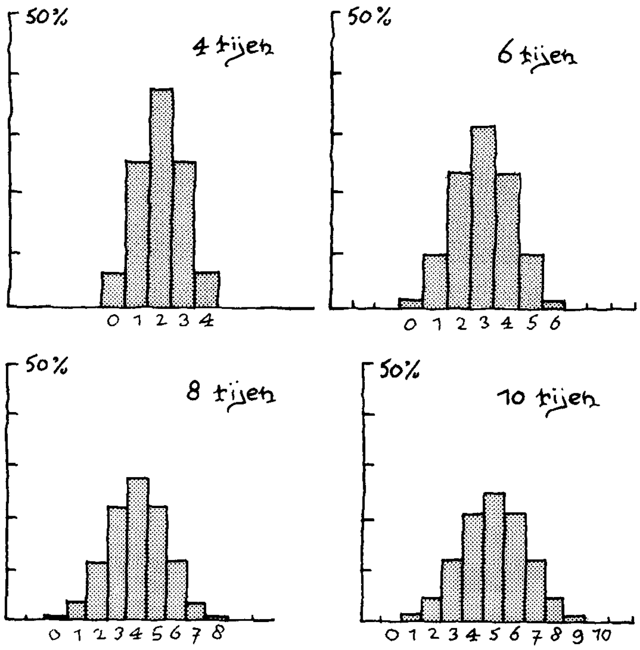


Bij de simulatie met 1000 balletjes kan een histogram gemaakt worden:



3 Het nummer van het bakje waarin het balletje terecht komt, noemen we X. X is binomiaal verdeeld.
a. Maak een tabel van de kansverdeling.
b. Teken het bijbehorende kanshistogram. Vergelijk het met het histogram van de simulatie hierboven.

We kijken naar Galtonborden met verschillende aantallen rijen pinnen. Dan krijg je de volgende histogrammen.



Het is lastig om uit deze histogrammen precieze kansen af te lezen. Voor precieze kansen moet je rekenen.

4 Hoe hoog is, in het histogram bij 8 rijen, de balk van bakje 2 precies ?

5 Het laten vallen van een balletje in een Galtonbord met n rijen pinnen, is een binomiaal kansexperiment.
a. Wat is de succeskans ?
Wat is het aantal herhalingen ?
Wat is de stochast X: het aantal successen ?
Hoe groot is E(X) ?
b. Als het aantal rijen n toeneemt, verandert het kanshistogram van vorm; het blijft niet gelijkvormig!
Wat verandert er aan de vorm van het kanshistogram ?
c. Bij elk aantal rijen n is het kanshistogram symmetrisch.
Waar ligt de symmetrie-as ?
d. Het verschil tussen de kanshistogrammen dat bedoeld werd in **b** heeft te maken met de "spreiding". Dat is de mate waarin de waarden van X uit elkaar liggen.
Als n groter wordt, wordt dan de spreiding groter of kleiner ?

6 De spreiding bekijk je ten opzichte van de verwachtingswaarde. Dat wil zeggen, bij een waarde k bekijk je de afwijking $|k - E(X)|$.

a. Vind je de absolute-waardestrepen terecht ?

Bekijk even de kanstabel bij het Galtonbord met n = 6.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

b. Welke waarden nemen de afwijkingen $|k - E(X)|$ aan? Wat is de kans op deze waarden ?

c. Wat is de verwachtingswaarde van deze afwijkingen ?

We gaan preciezer zeggen wat we met spreiding bedoelen. Dat doen we niet alleen voor de binomiale verdeling, maar algemeen.

Zoals gezegd nemen we daarvoor de afwijking ten opzichte van de verwachtingswaarde. Als de kans op een afwijking groot is, zal hij vaker voorkomen dan wanneer de kans op een afwijking klein is. Kansrijke afwijkingen moeten dus een groter "gewicht" hebben dan kansarme afwijkingen. De grootte van het gewicht is de kans op die afwijking. Daarom lijkt de volgende formule wel redelijk.

$\text{Vaa}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \cdot |x_k - E(X)|$, waarbij x_k de verschillende waarden zijn die X kan aannemen en p_k de bijbehorende kansen (voor k = 0, 1, ... , n).

Vaa staat voor *verwachte absolute afwijking.*

Toegepast op het voorbeeld in opgave **6** is deze formule helemaal uitgeschreven:

$$\text{Vaa}(X) = \tfrac{1}{64} \cdot |0-3| + \tfrac{6}{64} \cdot |1-3| + \tfrac{15}{64} \cdot |2-3| + \tfrac{20}{64} \cdot |3-3| + \tfrac{15}{64} \cdot |4-3| + \tfrac{6}{64} \cdot |5-3| + \tfrac{1}{64} \cdot |6-3|.$$

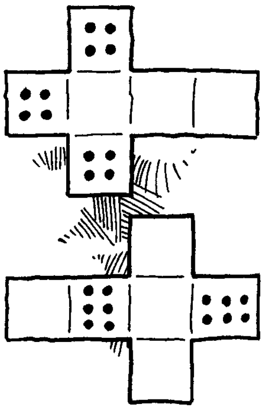
d. Bereken Vaa(X).

7 Welke uitkomst krijg je als je in de formule de absolute-waardestrepen weglaat en dus werkt met de formule

$\text{Vaa}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))$?

Als je de verwachtingswaarde en de verwachte absolute afwijking kent, ligt de stochast nog niet vast. Maar deze twee gegevens samen zeggen toch wel aardig wat over de stochast. Dit blijkt uit de volgende opgave.

8 In een bak zitten zes kaartjes, elk met een geheel getal erop geschreven. We pakken aselect een kaartje uit de bak. De stochast X is het getal dat op dat kaartje staat. Gegeven is dat $E(X) = 10$ en $Vaa(X) = 1$.
Welke getallen staan er op de zes kaartjes ? Een van de mogelijkheden is: 8, 9, 10, 10, 11, 12.
Geef de andere vier mogelijkheden.



9 We bekijken twee "dobbelstenen". De ene heeft drie grensvlakken met 0 ogen en drie grensvlakken met 4 ogen. De andere heeft twee grensvlakken met 6 ogen en vier grensvlakken met 0 ogen. Iemand werpt met beide stenen.
Het aantal ogen waarop de eerste steen valt, noemen we X, dat van de andere steen Y.
a. Bereken Vaa(X) en Vaa(Y).

De stochast $X + Y$ neemt dus de waarden 0, 4, 6 en 10 aan.
b. Maak een kanstabel voor $X + Y$ en bereken Vaa(X+Y).
c. Ga na dat $Vaa(X) + Vaa(Y) \neq Vaa(X+Y)$.

Vaa lijkt een goede maat te zijn voor de spreiding. Er is echter een probleem: $Vaa(X) + Vaa(Y) \neq Vaa(X+Y)$. Een spreidingsmaat waarvoor zo'n eigenschap wel zou gelden, heeft grote voordelen. Dat zal verderop blijken. We kiezen daarom de volgende spreidingsmaat.

Laat X een stochast zijn die de waarden x_0 t/m x_n kan aannemen met kansen achtereenvolgens p_0 t/m p_n.
Dan is $Var(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2$.
Var(X) is de zogenaamde **variantie** van X.

Zijn er nu geen absolute-waardestrepen nodig ?

10 a. Bereken voor de stochasten X en Y uit opgave **9** zowel Var(X) als Var(Y).
b. Bereken ook Var(X+Y).
c. Ga na dat nu wel geldt: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Als je de verwachtingswaarde en de variantie kent, ligt de stochast nog niet vast. Maar deze twee gegevens samen zeggen toch wel aardig wat over de stochast. Dit blijkt uit de volgende opgave.

11 In een bak zitten 16 kaartjes, elk met een geheel getal erop geschreven. We pakken aselect een kaartje uit de bak. De stochast X is het getal dat op dat kaartje staat. Gegeven is dat E(X) = 10 en Var(X) = 1.
Wat zit er in de bak ? Een mogelijkheid is: 6 kaartjes met 9, 6 kaartjes met 10 , 2 kaartjes met 11 en 2 kaartjes met 12.
Geef de andere acht mogelijkheden.

12 Iemand werpt met een aantal munten. Het aantal munten noemen we n. X is het aantal kop. E(X) en Vaa(X) staan in de tabel hieronder voor n = 1, 2, 3 en 4.

n	1	2	3	4
E(X)	½	1	1½	2
Vaa(X)	½	½	¾	¾
Var(X)				

a. E(X) vertoont een regelmaat. Druk E(X) uit in n.
b. Ga na dat Vaa(X) wel een regelmaat lijkt te hebben, maar dat die niet doorgaat voor n = 5.
c. Bereken Var(X) voor elk van de vier gevallen.
d. Var(X) laat wel een regelmaat zien. Druk Var(X) uit in n. (In opgave **21b** zullen we zien dat die formule juist is.)

Als je met de definitie de variantie wilt uitrekenen, kan dat vervelend rekenwerk zijn. Maar de somregel, zoals die in opgave **10c** staat, helpt ons als je de stochast kunt opsplitsen als som van eenvoudigere stochasten. Dan reken je namelijk de variantie uit voor de eenvoudigere stochasten en telt die varianties gewoon op. Iets dergelijks heb je al eerder gedaan bij de verwachtingswaarde (zie de opgaven **12** tot en met **17** van paragraaf 5).

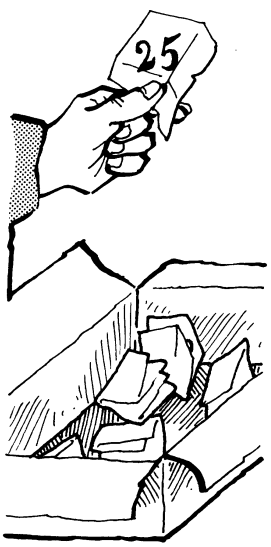
Somregel voor de verwachtingswaarde
Voor elk tweetal stochasten X en Y geldt:
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
In woorden: de verwachtingswaarde van de som is de som van de verwachtingswaarden.

Somregel voor de variantie
Voor elk tweetal *onafhankelijke* stochasten X en Y geldt: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.
In woorden: de variantie van de som is de som van de varianties, mits de stochasten onafhankelijk zijn.

De somregels gelden natuurlijk ook voor drie of meer stochasten.

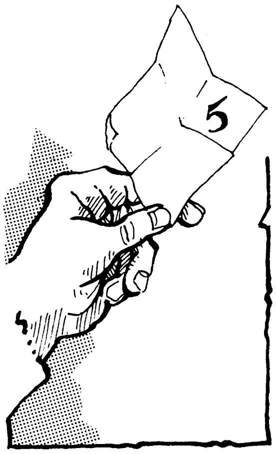
13 Iemand werpt met een aantal dobbelstenen. Het aantal dobbelstenen noemen we n. Y is het totaal aantal ogen van een worp.
a. Neem n = 1.
Ga na dat $Var(Y) = \frac{35}{12}$.
b. Neem n = 2. Hoe groot is dan Var(Y) ?
Neem n = 6. Hoe groot is dan Var(Y) ?

14 Iemand werpt met een dobbelsteen. X is het aantal ogen aan de bovenkant en Y is het aantal ogen aan de onderkant.
a. Hoe groot zijn E(X), E(Y) en $E(X+Y)$?
b. Hoe groot zijn Var(X), Var(Y) en $Var(X+Y)$?
c. Is de somregel voor de verwachtingswaarde van toepassing ?
En de somregel voor de variantie ?



15 In een doos zitten zes briefjes. Op drie briefjes staat het getal 5, op twee briefjes staat 10 en op één briefje staat 25. Iemand trekt aselect en met terugleggen twee keer een briefje uit de doos. S is de som van de getrokken getallen.
a. Welke waarden kan de stochast S aannemen ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van S.
c. Bereken E(S) en Var(S).

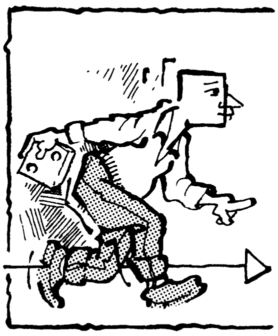
16 We gaan verder met opgave **15**. X is het getal op het eerste briefje, Y is het getal op het tweede briefje dat getrokken wordt. Dus $X+Y=S$.
a. Maak een tabel van de kansverdeling van Y



b. Bereken E(Y) en Var(Y).
c. Hoe groot zijn E(X) en Var(X) ?
d. Ga na dat $E(S) = E(X) + E(Y)$.
e. Is aan de voorwaarde "mits..." in de somregel voor de variantie voldaan ?
Ga na dat $Var(S) = Var(X) + Var(Y)$.

17 Dezelfde doos als in opgave **15**. Nu wordt er zonder terugleggen twee briefjes getrokken. T is de som van de getrokken getallen.
a. Welke waarden kan de stochast T aannemen ?
b. Maak een tabel van de kansverdeling van T.
c. Bereken E(T) en Var(T).

18 We gaan verder met opgave **17**. X is het getal op het eerste briefje en Y is het getal op het tweede briefje dat getrokken wordt. Dus $X + Y = T$.
a. Maak een tabel van de kansverdeling van Y.
b. Bereken E(Y) en Var(Y).
c. Hoe groot zijn E(X) en Var(X) ?
d. Ga na dat $E(T) = E(X) + E(Y)$.
e. Is aan de voorwaarde "mits ..." in de somregel voor de variantie voldaan ?
Ga na dat $Var(T) \neq Var(X) + Var(Y)$.
f. De variantie van de som is bij mèt terugleggen groter dan bij zonder terugleggen.
Waarom mocht je dat wel verwachten ?



19 X is het aantal ogen bij een worp met een dobbelsteen.
Er geldt: $E(X) = 3\frac{1}{2}$ en $Var(X) = 2\frac{11}{12}$; zie opgave **14**.
We bekijken twee spellen.
Spel 1. Werp met een dobbelsteen; je krijgt twee keer zoveel euro's uitbetaald als het aantal ogen van de worp. Deze uitbetaling noemen we D. Dus $D = 2X$.
Spel 2. Werp met twee dobbelstenen; je krijgt zoveel euro's uitbetaald als het totaal aantal ogen van de worp. Deze uitbetaling noemen we S.
a. Welke stochast heeft de grootste variantie denk je, D of S ?
b. Teken een kanshistogram van D en ook van S.
c. Waarom geldt: $Var(S) = 2 \cdot Var(X)$?
d. Ga na dat geldt: $Var(D) = 4 \cdot Var(X)$.

20 De variantie is nog niet helemaal de spreidingsmaat die we zoeken.
a. Stel dat we een toevalsgrootheid X hebben die wordt uitgedrukt in cm. Waarin wordt dan E(X) uitgedrukt ?
En X – E(X) ? En Var(X) ? En $\sqrt{\text{Var(X)}}$?

Stel dat we van cm overstappen op mm. De nieuwe toevalsgrootheid noemen we Y. Dus $Y = 10 \cdot X$.
b. Wat is het verband tussen E(Y) en E(X) ?
Wat is het verband tussen Var(Y) en Var(X) ?
Wat is het verband tussen $\sqrt{\text{Var(Y)}}$ en $\sqrt{\text{Var(X)}}$?

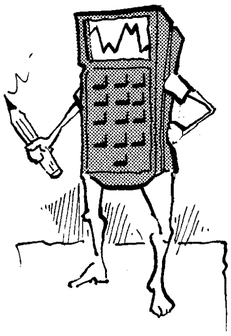
Er zijn veel spreidingsmaten mogelijk. Wij kiezen de volgende.

Als X een stochast is die de waarden x_0 t/m x_n kan aannemen met kansen achtereenvolgens p_0 t/m p_n.
Dan is $\text{Sd}(X) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2} = \sqrt{\text{Var}(X)}$.
Sd(X) is de zogenaamde **standaardafwijking** van X.

21 X is een binomiaal verdeelde stochast, met n onafhankelijke herhalingen, elk met succeskans p. Dus $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Hierbij is $X_i = 1$ als er de i^{de} keer succes is en 0 anders.
a. Bepaal $E(X_1)$, $\text{Var}(X_1)$ en $\text{Sd}(X_1)$.
b. Bepaal E(X), Var(X) en Sd(X).

Als X een binomiale stochast is met n herhalingen en succeskans p, dan
$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ en $\text{Sd}(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

22 **a.** T is het totaal aantal ogen bij 100 worpen met een dobbelsteen. Bereken E(T), Var(T) en Sd(T).
b. K is het totaal aantal keer kop bij 100 worpen met een munt. Bereken E(K), Var(K) en Sd(K).
c. Een Galtonbord heeft 100 rijen pinnen. Op elke pin is de kans dat het balletje naar rechts springt 0,3. De bakjes onderaan het Galtonbord zijn van links naar rechts genummerd 0 t/m 100. N is het nummer van het bakje waarin het balletje terecht komt.
Bereken E(N), Var(N) en Sd(N).



Je kunt ook met wetenschappelijke rekenmachines en met computerprogramma's de Sd uitrekenen. Zie bijvoorbeeld schijf 2 Statistiek van de Wageningse Methode.

Op de TI83 gaat dat als volgt.
STAT
EDIT Vul in lijst L_1 de waarden $x_1, ..., x_n$ in.
Vul in lijst L_2 de frequenties in.
STAT
CALC
1-Var Stats L_1 , L_2 ENTER
Bij σx lees je dan de Sd af.

Overzichtsvragen

1 Van de stochast X zijn de kansen gegeven:
$P(X=0) = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$, $P(X=3) = \frac{1}{6}$.
a. Bereken Sd(X).

Van de stochast Y zijn de kansen gegeven:
$P(Y=0) = \frac{1}{3}$, $P(Y=10) = \frac{1}{2}$, $P(Y=30) = \frac{1}{6}$.
b. Hoe volgt Sd(Y) uit Sd(X) ?

Van de stochast Z zijn de kansen gegeven:
$P(Z=10) = \frac{1}{3}$, $P(Z=11) = \frac{1}{2}$, $P(Z=13) = \frac{1}{6}$.
c. Hoe volgt Sd(Z) uit Sd(X) ?

2 Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen. X is het aantal successen, Y het aantal mislukkingen. Stel je kent Sd(X).
a. Hoe vind je daaruit Sd(Y) ?
b. Hoe vind je daaruit de succeskans ?

3 **Bridge**
a. Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Er zijn vier azen. Het aantal azen dat Anneke krijgt noemen we A. De kansverdeling van A is:

x	0	1	2	3	4
P(A = x)	0,3038	0,4388	0,2135	0,0412	0,0026

Bereken hiermee de Var(A).

H = 1 als Anneke hartenaas krijgt, anders H = 0.
b. Bereken de Var(H).
c. Waarom geldt niet: Var(A) = 4 · Var(H) ?
d. Hoe kun je met behulp van de tabel EA en Sd(A) berekenen op de GR ?

Antwoorden

Paragraaf 1 De kansdefinitie

1 **a.** Die kans is $\frac{1}{2}$. De kikker zit namelijk om en om op een witte en een donkere tegel.
b. De middelste tegel heeft de meeste kans, de hoektegels de minste.

2 **a.** De drie uitkomstens "2 kop", "2 munt" en "een dubbele" zijn niet even waarschijnlijk.
b. $\frac{1}{2}$

3 $\frac{1}{2}$ (Er zijn twee even waarschijnlijke mogelijkheden.)

4 **a.** $\frac{1}{4}$
b. 0,19

5
- werpen met een dobbelsteen
- het eerste nummer bij de lotto

6 **a.** 6
b. 0, 1 en 3
c. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$

7 **a.** $\frac{5}{84}$
b. $\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

8 **a.** 720
b. $\frac{1}{720}$
c. $\frac{1}{120}$

9 **a.** 2016
b. 48
c. $\frac{1}{42}$

10 **a.**
b. nee

11 0, 1, 2 en 3

12 **a.**

k	0	1	2
P(X = k)	$\frac{3306}{4032}$	$\frac{696}{4032}$	$\frac{30}{4032}$

b. De som is 1.

13 a.

k	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b.

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c.

k	0	1
P(X = k)	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Paragraaf 2 Combinatoriek en kans

1 $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

2 $210 : 6 = 35$

3 **a.** 7C3 = 7P3 : 6
b. nCr = nPr : r!
c. nCr = $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

4 **a.** 35
c. 15 , 1 , 8

5 **b.** Ja, dat is $21 + 35 = 56$

6 **a.** $\binom{6}{4} \cdot \binom{6}{4} = 225$
b. $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36$
c. $225 \cdot 36 = 8100$

7 **a.** $\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{1}{2}n(n-1)$
b. n
c. 1

8 **a.** 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
b. Die zijn beide 84.
c. Er zijn evenveel routes van (0,0) naar (6,3) als naar (3,6).
d. Er zijn evenveel rijtjes met 3 nullen en 6 enen als rijtjes met 3 enen en 6 nullen.
e. Er zijn evenveel grepen met 3 uit 9 als van 6 uit 9 (want in beide gevallen scheid je de 9 in een deel van 3 en een deel van 6).

b. Waarschijnlijk niet. Als de keuze echt aselect was, gebeurde er iets met een erg kleine kans (1,6%), en dat is wel erg toevallig.

16 a. $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$

b. $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{6}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{90}{220}$

c. $\dfrac{\binom{6}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{6}{55}$, $\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10} = \frac{6}{55}$

d. $\dfrac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{55}$, $3!\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{2}{10} = \frac{12}{55}$

17 a. 3, 4, 5, 6

b. wwzw , wzww , zwww

c. Bij elk rijtje van 4 letters is de laatste letter een w en van de eerste 3 zijn er 2 een w en 1 een z.

d. $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}\cdot\frac{2}{4} = \frac{9}{35}$

e. Bij elk rijtje van 5 letters is de laatste letter een w en van de eerste 4 zijn er 2 een w en dus ook 2 een z.

f. $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{12}{35}$

g.

k	3	4	5	6
P(Y = k)	$\frac{4}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{10}{35}$

18 a. $\frac{1}{8}$

b. $\frac{3}{8}$

c. $\frac{1}{2}$

d. Ja, dat er meer vrouwtjes zijn is even waarschijnlijk als dat er meer mannetjes zijn. Dus beide mogelijkheden hebben kans $\frac{1}{2}$.

Paragraaf 3 Het binomium van Newton

1 **a.** Je moet 3 van de 5 stappen kiezen waarbij je noordelijk gaat; dat kan op $\binom{5}{2}$ = 10 manieren. Bij elk van die manieren moet je nog 3 keer kiezen uit x (noordelijke wegen) en 2 keer uit y (zuidelijke wegen). Dat geeft $10 \cdot x^3 \cdot y^2$ routes.

b. y^5 , $5xy^4$, $10x^2y^3$, $5x^4y$, x^5

c. $(x+y)^5 = y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 5x^4y + x^5$

d. $32 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$

$243 = 32 + 80 + 80 + 40 + 10 + 1$

2 **a.** $(x+y)^6 = y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6$

b. $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^3 + 3x^{2y} + 3xy^2 + y^3$

3 **a.** $(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot x^k \cdot y^{5-k}$

b. $(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot x^k \cdot y^{1-k}$

$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \cdot x^k \cdot y^{2-k}$

$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot x^k \cdot y^{3-k}$

4 **a.** $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$

b. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

c. $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$

5 **a.** $11^4 = 1 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 10^4 = 14641$

b. $101^2 = 1 + 2 \cdot 100 + 100^2 = 10201$

$101^3 = 1 + 3 \cdot 100 + 3 \cdot 100^2 + 100^3 = 1030301$

$101^4 = 1 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100^3 + 100^4 = 104060401$

c. $(10-1)^3 = -1 + 3 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 + 10^3 = 729$

6 **a.** 32

b. 1 , 5 , 10 , 10 , 5 , 1

c. Je krijgt inderdaad:

$(x+y)^5 = 1 \cdot x^0 \cdot y^5 + 5 \cdot x^1 \cdot y^4 + 10 \cdot x^2 \cdot y^3 + 10 \cdot x^3 \cdot y^2 + 5 \cdot x^4 \cdot y^1 + 1 \cdot x^0 \cdot y^5$.

Paragraaf 4 Verwachting

1 **a.** 1250 keer ; 6250 , 12500 , 12500 , 6250 , 1250 keer
b. € 712500
c. Maximaal € 4.000.000 , minimaal € 320.000
d. Ja, want de gemiddelde uitbetaling is € 17,8125.

2 **a.** € 168750
b. € 4,22

3 **a.** $\frac{125}{216}$, $\frac{75}{216}$, $\frac{15}{216}$, $\frac{1}{216}$
b. $ 0,079

4 **a.** Bij elke 100 keer: 30 keer € 0,75 en 70 keer € 2 $\rightarrow$ totaal € 162,50.
Gemiddeld per keer € 1,625 en dat is meer dan € 1,50.
b. Van elke 100 keer: 30 keer x euro en 70 keer € 2 $\rightarrow$ totaal 30x+140. Dit moet minder dan 150 zijn. $\rightarrow$ $x \leq 0{,}33$.

5 **a.** Stel de premie is x euro. $100000 \cdot x = 6000 \cdot 4000 \rightarrow x = 240$.
b. Ook € 240

6 **a.** $\frac{1}{32} \cdot n \cdot 100 + \frac{15}{32} \cdot n \cdot 8 + \frac{10}{32} \cdot n \cdot 25 + \frac{5}{32} \cdot n \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot n \cdot 20 = 17{,}8125 \cdot n$
b. $\frac{1}{32} \cdot 100 + \frac{15}{32} \cdot 8 + \frac{10}{32} \cdot 25 + \frac{5}{32} \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot 20 = 17{,}8125$

7 **a.** $0{,}20 \cdot 0 + 0{,}10 \cdot 0{,}5 + 0{,}20 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 1{,}5 + 0{,}25 \cdot 2 = 1{,}125$ minuut.
$0 \cdot 0 + 0{,}40 \cdot 0{,}5 + 0{,}40 \cdot 1 + 0{,}20 \cdot 1{,}5 + 0 \cdot 2 = 0{,}9$ minuut.
b. $0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}17$
c.

k	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
P(W=k)	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,15	0,05

d. $0{,}08 \cdot 0{,}5 + 0{,}12 \cdot 1 + 0{,}16 \cdot 1{,}5 + 0{,}20 \cdot 2 + 0{,}24 \cdot 2{,}5 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 3{,}5 = 2{,}025$ minuut.
e. De gemiddelde wachttijd bij A *plus* de gemiddelde wachttijd bij B is 2,025 minuut en dat is precies de gemiddelde totale wachttijd.

8 Als ze gokken op een last minute vlucht hebben ze kans 0,6 op een voordeel van € 1000 en kans 0,4 op een verlies van € 400 (ten opzichte van een gewone vlucht van € 800 per persoon). Gemiddeld is dat een voordeel van 600–160=440 euro. Dus advies: wachten tot de zomer.

9 $10^{-6} \cdot 100000 + 9 \cdot 10^{-6} \cdot 10000 + 9 \cdot 10^{-5} \cdot 1000 + 9 \cdot 10^{-4} \cdot 100 + 9 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \approx 0{,}46$.
Dus verwachte winst is $1{,}50 - 0{,}46 = 1{,}04$.

10 a. 0,32768
b. 3,9
c. 19,5

11 a.

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

E(X) = 1

b.

k	0	1	2
P(Y = k)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

E(Y) = 1

12 a. 5
b. 1,2,3,4,5,6 ; 1,2,3,4,5,6 ; 7
c. $3\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$; 7
d. Ja

13 a. $3\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$
b.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(S = k)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

E(S) = 7
c. Ja

14 a. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$

Paragraaf 5 De binomiale verdeling

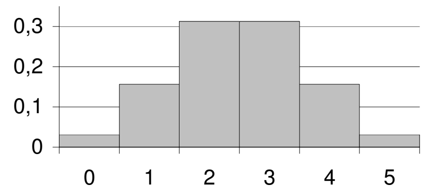
1 **a.** 0,1512
b. 0,00001
c. 0,531441
d. 0,468559
e. 0,006561
f. 0,098415
g. 0,032805

2 **a.** 0,4
b. 0,01024
c. 0,01536
d. 0,0768
e. 0,02304
f. 0,2304

3 a.

k	0	1	2	3	4	5
P(Y = k)	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

b.



c. De kans op k keer kop = de kans op k keer munt = de kans op $5-k$ keer kop, want de succeskans = $\frac{1}{2}$.

4 a.

0	$\binom{10}{0}\cdot(\frac{1}{3})^0\cdot(\frac{2}{3})^{10}\approx 0{,}017$	6	$\binom{10}{6}\cdot(\frac{1}{3})^6\cdot(\frac{2}{3})^4\approx 0{,}057$
1	$\binom{10}{1}\cdot(\frac{1}{3})^1\cdot(\frac{2}{3})^9\approx 0{,}087$	7	$\binom{10}{7}\cdot(\frac{1}{3})^7\cdot(\frac{2}{3})^3\approx 0{,}016$
2	$\binom{10}{2}\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot(\frac{2}{3})^8\approx 0{,}195$	8	$\binom{10}{8}\cdot(\frac{1}{3})^8\cdot(\frac{2}{3})^2\approx 0{,}003$
3	$\binom{10}{3}\cdot(\frac{1}{3})^3\cdot(\frac{2}{3})^7\approx 0{,}260$	9	$\binom{10}{9}\cdot(\frac{1}{3})^9\cdot(\frac{2}{3})^1\approx 0{,}000$
4	$\binom{10}{4}\cdot(\frac{1}{3})^4\cdot(\frac{2}{3})^6\approx 0{,}228$	10	$\binom{10}{10}\cdot(\frac{1}{3})^{10}\cdot(\frac{2}{3})^0\approx 0{,}000$
5	$\binom{10}{5}\cdot(\frac{1}{3})^5\cdot(\frac{2}{3})^5\approx 0{,}137$		

b. Klopt.
c. Tenminste 6 goede antwoorden (?)

5 a. -3 , 0 , 3 , 6
b.

k	-3	0	3	6
P(X = k)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

c. $\frac{8}{27}\cdot -3+\frac{12}{27}\cdot 0+\frac{6}{27}\cdot 3+\frac{1}{27}\cdot 6=0$

d. Als de verwachtingswaarde 0 is (dan is geen van de spelers al bij voorbaat in het voordeel).

6 a. $\frac{5}{7}$
b.

k	0	1	2	3
P(X = k)	0,023	0,175	0,437	0,364

c. Som is 0,999

8 0,3125

9 a. 0,267

b. 0,256
c. 0,231

10 a. $3\frac{1}{2}$
b. 35

11 a. 0 en 1
b.

k	0	1
$P(Y_1 = k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(Y_1) = \frac{1}{6}$
c. $E(Y) = 1\frac{2}{3}$

12 a. $\dfrac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{2}{7}$
b. $\frac{5}{84}$
c. $\frac{2}{9}$
d. $\frac{2}{9}$
e.

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

f. $E(X) = \frac{5}{12} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{2}{3}$
$E(X) = 3 \cdot E(X_1) = 3 \cdot (\frac{7}{9} \cdot 0 + \frac{2}{9} \cdot 1) = \frac{2}{3}$

13 a. 0, 1, 2, 3, 4
b.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0,3038	0,4388	0,2135	0,0412	0,0026

c. $E(X_1) = 0{,}9998$
d. 4; $E(X) = 4$
e. $E(X_1) = \frac{1}{4} \cdot E(X) = 1$

14 a. $\frac{1}{3}$; $E(X_3) = \frac{1}{3}$
b. $\frac{1}{3}$; $E(X_3) = \frac{1}{3}$
c. 1
d. 1

15 a. p
b. n·p

16 $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$

17 a. 3 of meer (?)

b.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,000

c. 0,96

18 a.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	0,000	0,004	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

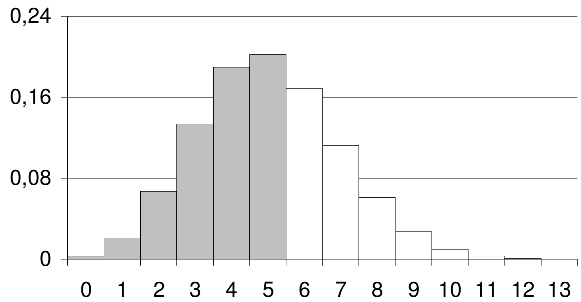
b. 0,83
c. 0,17

19 a. $1\frac{1}{2}$
b. $4\frac{1}{2}$
c. $X \leq 3$
d. $p = 0{,}75$
e. 0,169
f. 0,037

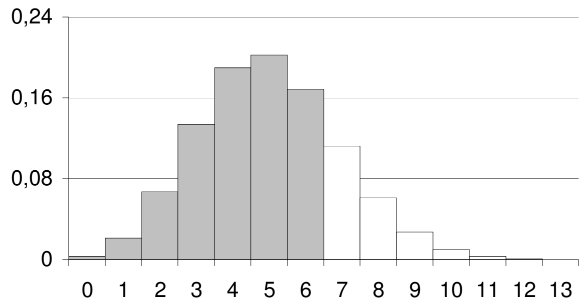
20 a. $(\frac{1}{4})^{6} = 0{,}000244\ldots$
b. $1 - (\frac{1}{4})^{6} = 0{,}999755\ldots$
c. $1 - 0{,}999755\ldots^{15} \approx 0{,}0036$

Paragraaf 6 Cumulatieve binomiale kansen

1 a. $0{,}0032 + 0{,}0211 + 0{,}0670 + 0{,}1339 + 0{,}1896 = 0{,}4148$
c. De kans op x of minder goede antwoorden is de som van de kans op x en alle voorgaande kansen.
d. De linker zes balken.



e. De linker zeven balken.



f. Aftrekken (0,7858 – 0,6172), dan vind je 0,1686.
De linker tabel maak je door steeds van een waarde uit de rechtertabel zijn voorgaande waarde af te trekken.

2 a. $0{,}2024 + 0{,}1686 + 0{,}1124 + 0{,}0609 + 0{,}0270 = 0{,}5713$
b. $0{,}9861 - 0{,}4148 = 0{,}5713$

3 a. $0{,}9590 - 0{,}8208 = 0{,}1382$
b. $1 - 0{,}8208 = 0{,}1792$
c. $0{,}9959 - 0{,}2333 = 0{,}7626$

4 a. 0,9978
b. 0,4204
c. 0,9997
d. 0,6134

5 a. 0,0933
b. 0,0315
c. 0,0618
d. 0,8375

6 $P(S \geq 3) = 1 - P(S \leq 2) = 1 - 0{,}7752 = 0{,}2248$

7 a. $P(S > 13) = 1 - P(S \leq 13) = 1 - 0{,}8761 = 0{,}1239$
b. $P(S \geq 1) = 1 - P(S = 0) = 1 - 0{,}3660 = 0{,}6340$

8 a. 0,222222
b. 0,222217

9 a. $1 - P(R \leq 7) = 1 - 0{,}7869 = 0{,}2131$
b. $P(5 \leq W \leq 7) = 0{,}5045$

10 a. $P(S \leq 6) - P(S \leq 3) = 0{,}8281 - 0{,}1719 = 0{,}6562$
b. $P(S \leq 12) - P(S \leq 7) = 0{,}8686 - 0{,}1316 = 0{,}7368$
$P(S \leq 30) - P(S \leq 19) = 0{,}9405 - 0{,}0595 = 0{,}8810$
$P(S \leq 60) - P(S \leq 39) = 0{,}9824 - 0{,}0176 = 0{,}9648$
c. Als je vaker gooit, wordt het experiment nauwkeuriger. Hierdoor zal het aantal keer "kop" gemiddeld dichter bij 50% liggen, waardoor de kans dat het aantal keer "kop" tussen de 40% en de 60% ligt groter wordt.

11 a. $P(S > 4) = 1 - P(S \leq 4) = 1 - 0{,}8298 = 0{,}1702$
b. Het gaat hier om één klas. Het spijbelen van een leerling beïnvloedt de andere leerlingen. Het spijbelen van de leerlingen is dus niet onafhankelijk.

12 a. $P(S > 4) = 1 - P(S \leq 4) = 1 - 0{,}8964 = 0{,}1036$
b. $0{,}95^{50} \cdot 500 \approx 38$

13 a. $P(S \geq 8) = 1 - P(S \leq 7) = 1 - 0{,}8982 = 0{,}1018$
b. Bij 11 goede antwoorden.

14 a. Bijvoorbeeld verschillen in gezondheid en leefgewoonten.
b. 5
c. 0,5793
d. 1,0000
e. 0,1960
f. 0,2826

15 a. 0,1445
b. Het kan best toeval zijn, maar ...
c. De kans op "toevallig" zeven keer te veel is 0,0352. Nu is er nog meer aanleiding voor ernstige twijfels.

16 a. 0,2666
b. 0,1240
c. 0,3485

Paragraaf 7 De standaardafwijking

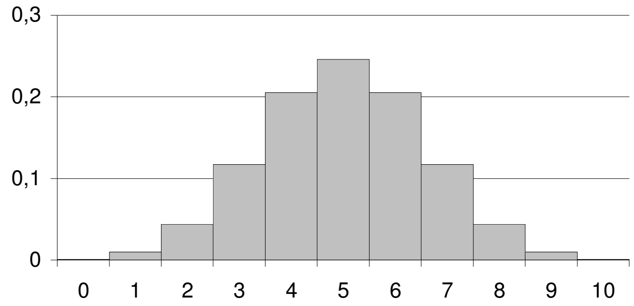
1 a. 120
b. 2, 3, 4, 5, 6.

2 a. 0,132
b. $\frac{120}{1024} \approx 0{,}117$

3 a.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

b.



4 $\frac{28}{256} = \frac{7}{64}$

5 a. $\frac{1}{2}$; n; X = het nummer van het bakje = het aantal keer dat het balletje naar rechts valt; $\frac{1}{2}$n.
b. Het wordt breder en lager.
c. Bij $\frac{1}{2}$n.
d. Groter.

6 **a.** De spreiding is een positief getal.
b.

t	0	1	2	3
$P(A = t)$	$\frac{20}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{2}{64}$

c. $0 \cdot \frac{20}{64} + 1 \cdot \frac{30}{64} + 2 \cdot \frac{12}{64} + 3 \cdot \frac{2}{64} = \frac{15}{16}$
d. $\frac{60}{64} = 0{,}9375$

7 0

8 7 , 10 , 10 , 10 , 10 , 13 ; 7 , 10 , 10 , 10 , 11 , 12
8 , 9 , 10 , 10 , 10 , 13 ; 9 , 9 , 9 , 11 , 11 , 11

9 **a.** 2 , $2\frac{2}{3}$
b.

k	0	4	6	10
$P(X+Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$VAA(X+Y) = 2\frac{2}{3}$.
c. Klopt.

10 **a.** 4 , 8
b. 12
c. Klopt

11 1 keer 7, 2 keer 9, 8 keer 10, 5 keer 11
1 keer 8, 4 keer 9, 6 keer 10, 4 keer 11, 1 keer 12
1 keer 8, 3 keer 9 , 9 keer 10 , 1 keer 11 , 2 keer 12
2 keer 8, 1 keer 9, 9 keer 10, 3 keer 11, 1 keer 12
2 keer 8, 2 keer 9, 6 keer 10, 6 keer 11
2 keer 8, 12 keer 10 , 2 keer 12
5 keer 9, 8 keer 10, 2 keer 11, 1 keer 13
8 keer 9, 8 keer 11

12 **a.** $E(X) = \frac{1}{2}n$
b. Als $n=5$, dan $Vaa(X) = \frac{15}{16}$
c. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1
d. $Var(X) = \frac{1}{4}n$

13 **a.** $\frac{1}{6}\cdot(2\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}\cdot(1\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}\cdot(1\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}\cdot(2\frac{1}{2})^2 = \frac{35}{12}$
b. $\frac{35}{6}$, $\frac{35}{2}$

14 **a.** $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 7
b. $\frac{35}{12}$, $\frac{35}{12}$, 0
c. Ja ; nee, want X en Y zijn niet onafhankelijk.

15 **a.** 10, 15, 20, 30, 35, 50

b.

k	10	15	20	30	35	50
P(S = k)	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

c. 20 ; 100

16 a.

k	5	10	25
P(Y = k)	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

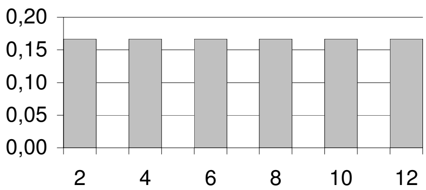
b. 10; 50
c. 10; 50
d. Klopt
e. Ja; klopt.

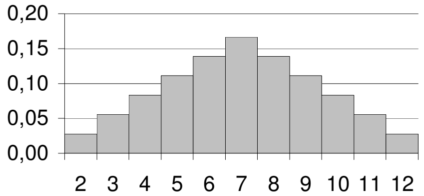
17 a. 10, 15, 20, 30, 35
b.

k	10	15	20	30	35
P(T = k)	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

c. 20 ; 80
18 a. Zie **16a**
b. Zie **16b**
c. 10; 50
d. Klopt.
e. Nee; $80 \neq 50 + 50$.
f. Bij met terugleggen komt de (sterk afwijkende) uitkomst 50 ook voor.

19 a. D
b.





c. Als X het aantal ogen is met de eerste steen en Y het aantal ogen met de tweede steen, dan $S = X + Y$ en $Var(S) = Var(X) + Var(Y) = 2 \cdot Var(X)$.
d. Klopt.

20 a. cm; cm; cm^2; cm

b. $E(Y) = 10 \cdot E(X)$; $Var(Y) = 100 \cdot Var(X)$;
$\sqrt{Var(Y)} = 10 \cdot \sqrt{Var(X)}$

21 a. p; $p(1-p)$; $\sqrt{p(1-p)}$
b. np; $np(1-p)$; $\sqrt{np(1-p)}$

22 a. 350; $291\frac{2}{3}$; ≈ 17
b. 50; 25; 5
c. 30; 21; $\sqrt{21}$