Antwoorden paragraaf 7

1 a. De verhoudingen van de rechthoekszijden zijn niet gelijk: 2 : 5 ≠ 3 : 8.

b. Helling schuine zijde blauwe driehoek = $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

Helling schuine zijde rode driehoek = $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

Er zit een klein verschilletje tussen deze hellingen, dus de schuine zijden liggen niet helemaal in elkaars verlengde.

c. De schuine zijden van de rode en blauwe driehoeken maken een flauw hoekje, de vierde hoek. Dit hoekje is goed te zien als je langs deze schuine zijden kijkt. Je ziet dan dat de hoek bij de ene figuur ietsjes naar binnen knikt, bij de andere ietsjes naar buiten.

2 a. helling = rc = $^{8}/_{100}$ = 0,08

b. rc = $^{(21-0)}/_{(63-0)} = {}^{1}/_{3}$

c. rc = $^{(210-80)}/_{(80-10)} = {}^{13}/_{7} \approx 1{,}86$

d. rc = $^{(130--30)}/_{(35--15)} = {}^{160}/_{50} = 3{,}2$

e. rc = 4½

3 a. Het hoogteverschil is 1912 – 290 =1622 meter. Dat geeft een gemiddelde stijging van $^{1622}/_{22,7}$ is ongeveer 71,5 m per kilometer.

Of: dat geeft een stijgingspercentage van $^{1622}/_{22700}$ 100% ≈ 7,15%

b. t/m 3d: zie tabel hieronder

horizontale verplaatsing	1	2	3	4	5	6	7
hoogteverandering	290-308	308-332	332-359	359-403	403-459	501-459	501-563
hellingspercentage	1,8	2,4	2,7	4,4	5,6	4,2	5,9
controle	290-308=18 klopt	332-308=24 klopt	359-332=27 klopt	403-359=44 klopt	459-403=56 klopt	501-459=42 klopt	563-501=62 klopt niet

e. helling in F is 0
f. ja, de grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt, dus de helling is <u>overal</u> 3.

15 a. De raaklijn in punt F loopt horizontaal.
b. Door de top, dus de symmetrieas is de verticale lijn door punt F.
c. Het punt met x = 1 ligt gespiegeld in de symmetrieas ten opzichte van x = 3, dus de helling is dan hetzelfde als bij x = 3, maar dan tegengesteld; de helling bij x = 1 is dus -2.

16 Stijgend: helling positief; dalend: helling negatief.

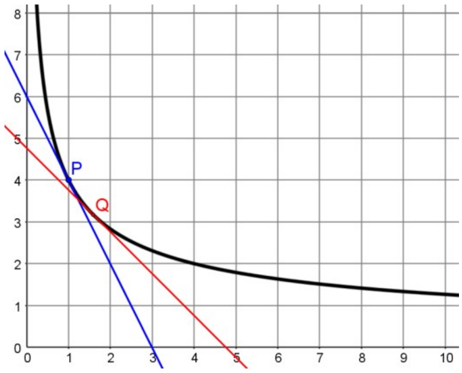
17 Neem x = -9,999, dan y = 3,00079995; helling = $\frac{-}{- \quad --} = \frac{}{} =$ $\approx$; klopt.

18 Helling in Q: 0,2; helling in R: -0,8

19 a. De lijn gaat 5 naar rechts en 5 omhoog, dus helling is 1.
b. In die punten is de raaklijn evenwijdig met de lijn door (-5,0) en (0,5).
c. Schuiven met de geodriehoek met helling 1 totdat de grafiek geraakt wordt: bij x = -12
d. Leg de geodriehoek door (0,5) en (5,0) en schuiven totdat de grafiek geraakt wordt: bij x = 8

20 Top: (-2,0; 6,2)

21 Grafiek zie hiernaast.



a. Raaklijn tekenen in P, zie grafiek: helling = -2
b. Dan moet de helling -1 zijn: punt Q in de grafiek; (ongeveer) (1,6; 3,2)
c. De helling is negatief (want dalend), maar de helling wordt steeds minder negatief; de helling neemt dus toe.
d. Neem bijvoorbeeld x y

helling = $\frac{-}{-} = \frac{-}{} \approx -$

22 a. Raaklijn tekenen: helling = 1.
b. Dan moet de helling ½ zijn, dus lijn tekenen met deze rc en dan met geodriehoek schuiven: bij x = 5.
c. Bijvoorbeeld x invullen y ; helling = $\frac{-}{-} \approx$
d. Weer schuiven met een geodriehoek met helling 2: bij x = 1,25.

23 a. De hellingen zijn de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen, dus 1,8 en 2,25. Het verschil is 0,45.
b. Die is bij benadering gelijk aan -1.
c. De mier moet eerst klimmen naar de top bij x≈-3 op hoogte 2,1. De klim wordt steeds minder steil. Daarna daalt hij af tot bij x≈2,3 tot een diepte van ongeveer-1,4. Deze afdaling is alleen bij de toppen wat vlakker en verloopt verder vrij gelijkmatig. Daarna moet de mier steeds steiler klimmen naar het eindpunt.

24 a. de helling in punt A is ongeveer 8, in B ongeveer 1.
b. Je ziet dat de parabool de exponentiële grafiek als het ware "inhaalt". De parabool moet dus wel steiler lopen, en moet de helling van de exponentiële grafiek er kleiner zijn.

25 a.

	x								
	$y = x$								
	$y = \quad x$								
	$y = \quad ^x$								

b. De helling van $y \quad x$ is steeds vier keer zo groot als die van $y \quad x$
c. De helling verdubbelt steeds.
d. Dat is nog vier stappen, dus 5,5471*2^4 ≈ 88,7536.

26 a. De grafiek is overal stijgend, dus de helling is positief en daarom ook de marginale kosten.
b. Raaklijn tekenen en helling bepalen: marginale kosten zijn (ongeveer) 0,7 (ruime marge)
c. Punt met dezelfde helling: (ongeveer) q = 250.
d. Punt met kleinste helling zoeken (buigpunt): q = 190 (ongeveer).

27 a. t = 0 invullen geeft n = 0; klopt.
b. 3 uur is 180 minuten, dus t = 180 invullen: n ≈ 10181
c. Bijv. door de grafiek te tekenen op de GR, schets overnemen: de grafiek is afnemend stijgend.

d. Helling bij t = 30 met de GR bepalen (Calc – dy/dx) geeft helling ≈ 75,3
Helling bij t = 90 met de GR: helling ≈ 49,0
Klopt: 75,3 / 49,0 ≈ 1,54 en dat is ongeveer anderhalf.

28 a. L = 20 invullen in de gegeven formule: K = 5723,50 €

b. L = 15 geeft K = 4913; L = 15,001 geeft K ≈ 4913,138473; helling ≈ $\frac{-}{-}$ ≈

c. Helling raaklijn bepalen: helling ≈ –618 (of –620);
Betekenis: de kosten van de kavel nemen met 618 euro af per hm bij een lengte van 5 hm.

d. Richtingscoëfficiënt van de lijn bepalen: helling ≈ 233

e. Bij grote waarden van L wordt $\frac{}{L}$ steeds kleiner en zelfs (bijna) nul, dus dan K ≈ 233 L
De grafiek gaat bij grotere waarden van L steeds meer op deze lijn met richtingscoëfficiënt 233 lijken.

29 a. x = 0 invullen in de formule: r = 100 = 10; dit vervolgens weer invullen geeft S = $^{100\,000}/_{1000}$ = 100 (lux)

b. Als x toeneemt, dan neemt x^2 + 100 ook toe, dus ook de wortel hiervan; dus r neemt toe;
Als r toeneemt, dan wordt de noemer van $\frac{}{r}$ groter, dus wordt de breuk kleiner; dus S wordt kleiner.

c. Teken op de GR de grafiek van $S = \frac{}{r}$, schets overnemen: deze grafiek is afnemend dalend.

d. Van x = 0 tot (ongeveer) x = 6 is de grafiek toenemend dalend; daarna afnemend dalend;

e. In het steilste punt (buigpunt) de helling bepalen met berekening:
x = 6 invullen geeft S ≈ 63,05095042; x = 7,001 geeft S ≈ 63,04260567;
helling ≈ $\frac{-}{-}$ ≈ – dus inderdaad kleiner dan -8.

Antwoorden paragraaf 8

1 De punten worden (21, 3) en (56, 5); $a = \frac{-}{-} = - \approx$;
Dus de formule is $B = - \; t - \; + \; = - t + - = - t + \; \approx \; \cdot t +$

2 a. De groeifactor in 83 jaar is 6,8/2=3,4.

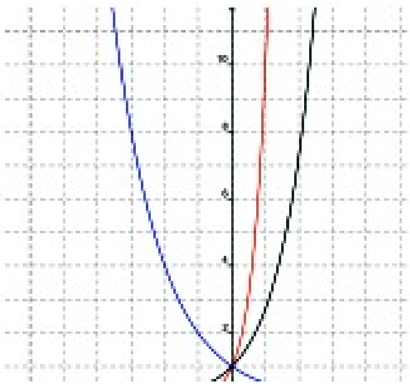
b. De groeifactor per jaar is dus ≈

c. B t

d. De helling in het punt op de ‘kromme’ lijn moet gelijk zijn aan de helling van de rechte lijn, dus schuiven met je geodriehoek: ongeveer bij 1975.

3 Neem bijvoorbeeld y = x + 3; x = 0 geeft y = 3; x = 3 geeft y = 6, dus verdubbeling in 3 jaar;
Maar weer 3 verder, dus x = 6 geeft y = 9 en dat is geen verdubbeling.

4 a. Dit kan met de GR: Zoek het snijpunt van de grafieken $y = 2 \cdot 1{,}015^x$ en y=4. Je kunt ook logaritmes gebruiken: $^{1,015}\log(2)$ of log(2)/log(1,015). Het antwoord is ongeveer 46,6. Dat is nogal snel, dat iedere 46,6 jaar de wereldbevolking zou verdubbelen.



. b. Exponentieel: B = 2 $1{,}015^{123}$ ≈ 12,48 miljard mensen.
Lineair: B = $^{2}/_{35}$ 123 + 1,8 ≈ 8,83 miljard.

c. $1{,}015^{10}$≈1,16. Klopt.

d. Daarbij hoort een groeipercentage van (1,16 – 1)·100% = 16%.

5 a. Rood: g ; zwart: g ; blauw: g

b. Rood: verdubbelingstijd $^{6}\log(2)$ ≈ 0,39; zwart: $^{2,5}\log(2)$ ≈ 0,76

c. (met de GR) rood: helling ≈ 1,79; zwart: helling ≈ 0,92;
Het verschil is dus 1,79 – 0,92 = 0,87

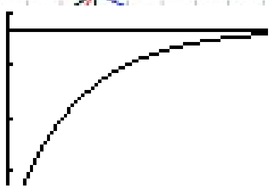
6 Halveringstijd = 1

7 I: verdubbelingstijd ≈ 3,80; II: halveringstijd ≈ 2,41
III: verdubbelingstijd ≈ 35,00

8 a. Maak een tabel:

t			
h			

$0{,}82^2$ is niet gelijk aan 1,396



b. Zie grafiek rechts hiernaast.

c. Als t toeneemt, dan is de grafiek van 3,6 $0{,}8^t$ afnemend dalend, dus van 3,7 wordt een afnemend dalend hoeveelheid afgehaald; de uitkomst is dus afnemend stijgend.

d. t = 0 invullen geeft h = 0,1 meter, dus 1 dm.

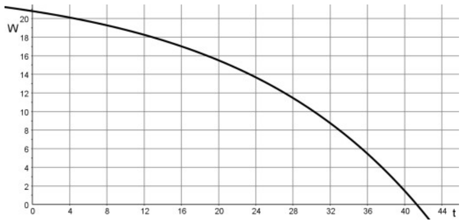
e. t erg groot, dan komt $0{,}8^t$ steeds dichter bij nul, dus dan komt h steeds dichter bij 3,7; de hoogte van een zonnebloem is dus maximaal 3,7 meter.

f. (intersect) $t \approx 7{,}34$ weken, dus na 52 dagen.

9 a. 0,5141 m/week

b. 51,41 cm/week dus ongeveer 7,3 cm/dag

c. Dan moet de groeisnelheid 0,08 m/week zijn; zoeken met de GR: $t \approx 10{,}3$



10 a. Grafiek zie rechts hiernaast.

b. 3,2 $1{,}05^t$ is toenemend stijgend, dus van 24 wordt een toenemend stijgende hoeveelheid afgehaald; de uitkomst is dan toenemend dalend.

c. Met de GR: helling ≈ –0,41426, dus de daalsnelheid is 0,414

11 a.

t					
P					

(grafiek zelf doen)

b. Bij y ^{t} is sprake van exponentiële afname, dus is de grafiek afnemend dalend; bij de waarde 13 wordt een afnemend dalende hoeveelheid opgeteld, dus ook dan is de grafiek afnemend dalend.

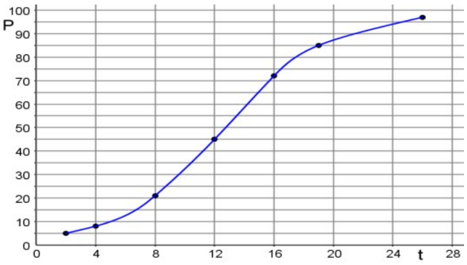
c. Met de rekenmachine (of rc raaklijn, of helling berekenen tussen t = 6 en t = 6,0001): helling ≈ -1,43

12 a. H(1) = 71,3; H(5) = 625,039…; toename = $\frac{-}{}\times$ ≈

b. Afnemend stijgend

c. t erg groot, dan wordt $0{,}7^t$ (ongeveer) nul, dus H wordt dan 800 (gram)

d. Met de GR: helling ≈ 181,93 gram/jaar



13 a. Zie grafiek hiernaast.

b. Aflezen: na 21,5 dagen

14 a. Waarden invullen: past vrijwel perfect

b. t = 0 invullen: $^{100}/_{36} \approx 2{,}8\%$

c. GR intersect met $Y_2 = 50$: $t \approx 12{,}71$, dus na 13 dagen

d. Als t groot wordt, dan wordt $0{,}756^t$ gelijk aan nul, dus ook 35 $0{,}756^t$ wordt nul; de noemer wordt dan 1, dus de uitkomst van de breuk wordt 100.

e. (zelf doen)

f. Maak een tabel:

t				
P				

$^{8{,}04}/_{2{,}78} \approx 2{,}89$; $^{21{,}12}/_{8{,}04} \approx 2{,}63$; $^{45{,}05}/_{21{,}12} \approx 2{,}13$

Toch nog wel grote verschillen in de groeifactoren per 4 dagen, dus niet echt exponentieel…

g dus $g =$ ≈ is de groeifactor per dag.

15 a. 288 + 846 + 258 = 1392, geeft groeifactor $^{1392}/_{940} \approx 1{,}48$ dus toename van 48%

b. Grote waarden van t invullen geeft dat P groeit naar de grenswaarde $^{222}/_{3} \approx 74$ (%)

c. Als t toeneemt, wordt $0{,}43^t$ kleiner, dus 43 $0{,}43^t$ wordt kleiner, dus 3 + 43 $0{,}43^t$

P

d.

t					
P					

factoren achtereenvolgens: 2,14; 1,96; 1,71; 1,44; 1,23

Nee, gen sprake van exponentiële groei.

e. t = 4 invullen geeft $P \approx 49{,}66349148$ en t = 4,001 invullen geeft $P \approx 49{,}67727398$

groeisnelheid = helling = $\frac{-}{-}$ ≈ (procent per jaar)

16 a. Oplossen: ^{t} t

b. $g = 2^{0{,}083} \approx 1{,}059$ dus toename van 5,9% en dat is ongeveer 6%

c. Met de GR, eerst grafiek plotten, dan helling bepalen: 21,89 (gram/dag)

17 a. Na 6,5 uur was de temperatuur 80 C, dus van 80 C naar 50 C duurt 24 – 6,5 = 17,5 uur

b. Aflezen:

T		
°		

, dus per 24 uur is de groeifactor $^{30}/_{75}$

c. Het verschil met 20 C is dan 75 $0{,}4^2$ = 30 0,4 = 12, dus de temperatuur is dan 32 C

d. Het verschil met 20 C is 75 $0{,}4^{16/24}$ = 75 $0{,}4^{2/3}$ ≈ 40,7 dus de temperatuur is dan 60,7 C

e. g $g = \sqrt{} =$

t t V t T t

18 a. Bij 40 C is de verdubbelingstijd kleiner dan bij 42 C, dus dan groeit de populatie sneller
b. T = 34 invullen: V ≈ 0,384 uur, 0,384 60 ≈ 23 minuten; klopt.
c. Grafiek van V plotten en minimum bepalen: T ≈ 37,5 C
d. t = 3 invullen: N = 1144,9008 dus 1145 bacteriën per liter water
e. t (intersect of met log) t ≈ 4,595769 uur (dus 4 uur en 36 minuten)
f. Met de GR: helling ≈ -200,8 dus afname van 201 bacteriën per uur.

Antwoorden paragraaf 9

1 a.

x					

b. De oppervlakte wordt 2^2 = 4 keer zo groot.
c. Het volume wordt 2^3 = 8 keer zo groot.
d. Je ziet dat "Inhoud" de oppervlakte inhaalt. Dit komt doordat oppervlaktes "2 kanten op groeien" (lengte en breedte - 2 dimensies) en volumes/inhouden "3 kanten op" (lengte, breedte en hoogte - 3 dimensies). Denk aan het hoofdstuk verhoudingen: lengtes k, dan oppervlaktes k en inhouden k .

2 Voor $I = x : c$ en p . Voor O $x : c$ en p .

3

I					I
x				$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{I}$

4 a. I
b. $x = I$

5 a. $x = x \cdot x = I \cdot I = I$
b. $O = \cdot I$ (dus in de algemene formule: c en p)

6 Afnemend stijgend. De toename op [0,1] is 6, op [4999,5000] is hij ongeveer 0,23.

7 Dan wordt de inhoud $=$ keer zo klein.

8 $f = \frac{O}{I} = \frac{x}{x} = \frac{\cdot x}{x \cdot x} = \frac{}{x}$

9 a. $f = x$
b. Als x twee keer zo groot wordt, wordt x half zo groot.

10 Als de inhoud 16 keer zo klein wordt, wordt de oppervlakte $16^{2/3}$ keer zo klein, dat is ongeveer 6,35 keer zo klein. Dus relatief krimpt het huidoppervlakte veel minder en heeft een baby dus meer huid.

11 Afkoeling gebeurt door de huid, en de baby heeft een relatief grote huidoppervlakte. De baby koelt dus snel af.

12 Omdat p voor elke p. Voor x heb je dus y p .

13 zwart: y x x , rood: y x , blauw: y x x en groen y x . Blijft over y x is niet getekend.

14 a. y x heeft een horizontale asymptoot, en op den duur stijgt hij harder. y x gaat door de oorsprong, is symmetrisch in de y-as en komt aan de negatieve kant veel hoger; is dalend voor negatieve waarden van x, terwijl de andere altijd stijgend is. y x heeft een punt met horizontale raaklijn. De toenames van y x zijn lineair, die van y x exponentieel

15 a.

$f(x)=$				
x				
x				

x				
x				
x				

b. Inderdaad.

c. Als de exponent *p* oneven is geldt altijd dat de grafiek door (–1,–1), (0,0) en (1,1) gaat en dat de grafiek toenemend stijgend is voor x en afnemend stijgend voor x .

16 a.

$f(x)=$				x
x^{-}				
x^{-}				
x^{-}				
x^{-}				
x^{-}				

b. De grafieken bij een oneven exponent zijn afnemend dalend voor x>0 en gaan door (1,1). Is de negatieve exponent even, dan gaat de grafiek door (–1,1), is hij oneven dan gaat hij door (-1,-1).

c. De grafieken bij een negatieve oneven exponent zijn toenemend dalend voor $x < 0$ en afnemend dalend voor $x > 0$; de grafieken gaan door (1,1) en (-1,-1).

d. De grafieken bij een oneven exponent zijn toenemend dalend voor x<0.

17 a. Invullen van *x*- en *y*-coördinaten van de twee gegeven punten.

b. Uit c ^{p} volgt c .

c. Je krijgt dan voor het andere punt ^{p}. Dus ^{p} en dus p .

d. y x

18 a. Invullen van *x*- en *y*-coördinaten van de twee gegeven punten.

b. Delen door de macht, dus bij de ene links en rechts delen door ^{p} en bij de andere door ^{p}.

c. Gelijk stellen aan elkaar.

d. Met intersect: p ; deze waarde invullen in een formule van vraag b geeft c ; y x

(Het kan ook algebraïsch: je kunt herschrijven naar $\frac{3}{24} = \frac{3^p}{6^p} = \left(\frac{3}{6}\right)^p$, dus $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^p$ en *p=3*. Invullen in de formules van vraag b geeft dat c .)

19 6 = *c* ^{p} en c ^{p} geeft y x

20 c ^{p} c ^{p} $c = \frac{}{p}$ en $c = \frac{}{p}$ $\frac{}{p} = \frac{}{p}$ met de GR (intersect): p

Invullen in een formule geeft c

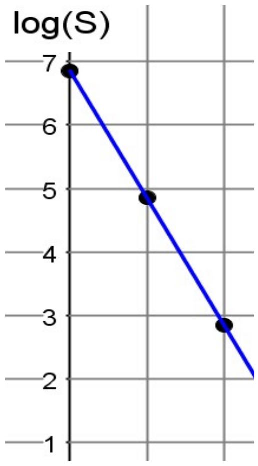
21 a. Je kunt hem schrijven als S L .

b. 50 cm: S ; 10 cm: S . Dat is 25 keer zo veel.

22 Er zijn volgens de eerste formule ongeveer 8930 soorten met dezelfde lengte en volgens de tweede formule ongeveer 7980 met hetzelfde gewicht. Het zou best kunnen dat 7000 soorten in beide groepen zitten.

23 Tabel zie hieronder; grafiek zie hiernaast

L	S	L	S



24 a. 1500/0,4 = 3750 keer zo intelligent.

b. Zie tabel

c. De **muis** heeft het hoogste percentage hersenen (zie tabel laatste rij).

25 a. Mens, dolfijn, olifant: veel hersengewicht ten opzichte van lichaamsgewicht. Nijlpaard: weinig hersengewicht ten opzichte van lichaamsgewicht.

b. Werkelijk (aflezen): ongeveer 600 gram (of 650 gram); trendlijn: 2000 gram; dus 1400 gram tekort

26 a. Volgens de schalingswet hoort bij een gewicht van 70 kg een hersengewicht van $12 \cdot 70^{2/3} \approx 204$ gram.

b. log(204) ≈ 2,3 en log(1500) ≈ 3,2; dus het punt ligt in de grafiek ongeveer 0,9 boven de trendlijn.

c. 1500 − 204 = 1296 gram meer.

27 a. H gram

b. G G G (intikken op je rekenmachine: ≈ 4,98 ofwel 5 kg)

c. H G H G G H H dus p en q

28 a.

x		
$y =$		

b.

x		
y		

c. Zie grafiek hiernaast: blauwe lijn.

d.

x		

(rood) en

x			

(groen)

Ja, het zijn alle drie rechte lijnen.

29 a. $x = 2$ invullen geeft in beide formules $y = 4$, dus snijpunt bij $x = 2$;
$x = 4$ invullen geeft in beide formules $y = 16$, dus snijpunt bij $x = 4$.

b. (zelf doen)

c. Tussen $x = 1$ en $x = 2$, dus [1, 2]

d. [3,4] en

e. Helling bij $x = 2$ bij y x is ; helling bij y is (ongeveer) 2 M

Antwoorden paragraaf 10

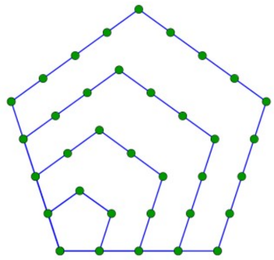
1 De tweede rij krijg je uit de eerste rij door het dubbele te nemen en dan 1 eraf te halen; dus elk getal uit de bovenste rij heeft precies één getal in de 2e rij; er zijn dus evenveel getallen in de twee rijen.

2 a. Vierde rij: Elk getal is de vorige twee opgeteld (Fibonacci-rij)
Vijfde rij: 1, 1+2, 1+2+3, ... (driehoeksgetallen)
Zesde rij: Elk getal is het dubbele van de vorige (machten van twee).
Zevende rij: 1!, 2!, 3!, ... (faculteiten)

b. Zesde rij: y ^{n}; Zevende rij: y n

4 1+2+3+4+5+6+...+9+10 = 55

5 Klopt



6 a. Als je het rangnummer weet kun je de term direct uitrekenen. Je hebt geen eerdere getallen in de rij nodig.

b. 5050.

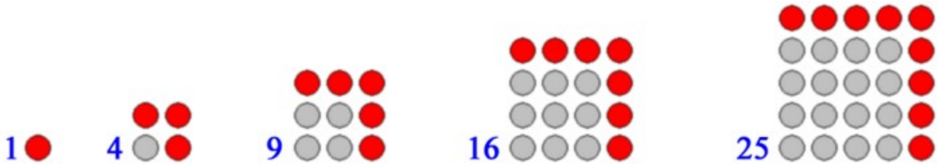
7 a. Zie hiernaast: 35.

b. Klopt.

c. u ; klopt.

e. u

f.

8 a.  dus 25

b. u n n .

c. Die verschillen zijn v n n .

9 a. u n n u

b. u n n u

c. u n ^{n} u

d. u n n u

10 a. u n n

b. u n n

Antwoorden paragraaf 11

1. 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28

2 a. Als er maar één persoon is, worden er nul handen geschud

b. Als het n-de lid binnenkomt, moet deze n handen schudden met de n al aanwezige leden.
Dus het aantal is het aantal van voordat hij binnenkwam plus n .

c. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45

3 a. De omtrek is de helft van de vorige omtrek.

b. $\begin{cases} P \quad = \\ P \; n \; = \quad \cdot P \; n - \end{cases}$

4 a. De oppervlakte wordt vermenigvuldigd met $0{,}5^2 = 0{,}25$ (dus het is een vierde deel)

b. $\begin{cases} A \quad = \\ A \; n \; = \quad \cdot A \; n - \end{cases}$

5 a. 8, 6, 2, –6, –22, –54

b. 3, 7, 47, 2207, 4870847, (ongeveer) $2{,}37 \;\; 10^{13}$

c. 4, 4, 4, 4, 4, 4

6 a. Rij *a*: 1, 4, 7, 10; rij *b*: 1, 4, 7, 10; de rijen zijn hetzelfde

b. Nee, je moet alle voorgaande waarden eerst uitrekenen. Je moet de hele rij doorlopen.

7 a a ;
a a a a a

8 Vervang in formule (1) overal n door n

9 u ; u

10 a. u(15) = 10.681.152.342

b. $v(15) \approx -14{,}9987...$; $w(15) \approx 15294{,}327...$

11 a. (begin bij n = 0) 41, 43, 47, 53, 61, 71: zijn inderdaad allemaal priemgetallen

b. $P(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41\ (41 + 2) = 41\ 43 = 1763$ is geen priemgetal

Ook $P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40\ (40 + 1) + 41 = 40\ 41 + 41 = (40 + 1)\ 41 = 41^2 = 1683$ is geen priemgetal

(Maar de getallen $P(0)$ t/m $P(39)$ zijn allemaal wél priemgetallen!)

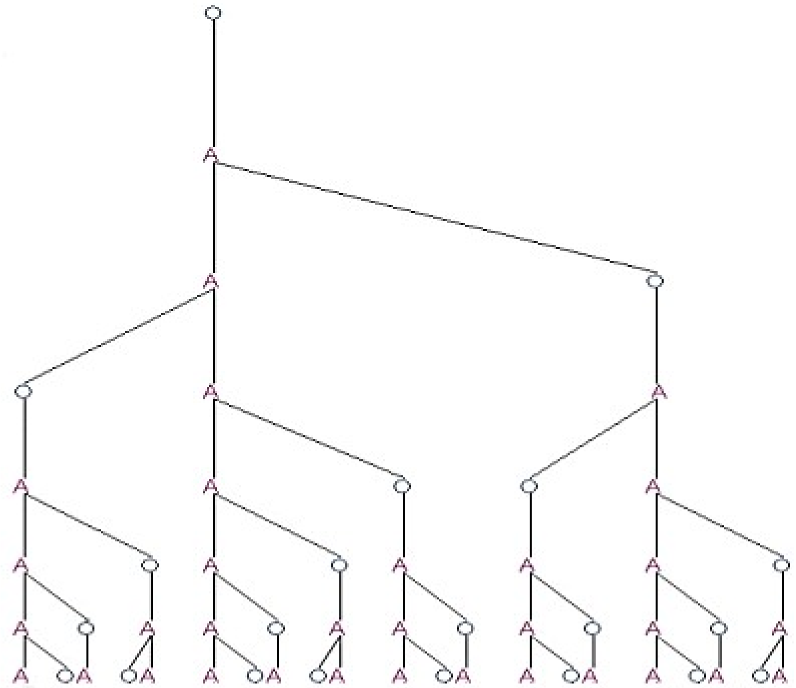
12 a. Zie schema hiernaast

O: onvolwassen, A:adult (volwassen)

Tel op elk 'niveau' het totaal aantal: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc.

b. Je krijgt elke term door de twee voorgaande termen op te tellen.

55, 89, 144, …



13 55, 89, 144, 233, 377

14 Voorafgaand aan 1597:

2584 – 1597 = 987.

Volgend op 6765:

6765 + 4181 = 10946;

10946 + 6765 = 17711.

15 a. $\begin{cases} u \quad = \\ u\ n\ = \ \cdot u\ n- \end{cases}$

b. $u\ n \quad {}^{n}$

c. Achtereenvolgens: keer 2, keer 3, keer 4, keer 5, keer 6, etc.

d. Het zijn de faculteitsgetallen, dus het twaalfde getal is 12! = 12 39.916.800 = 479.001.600

16

$t\ n\ = \ -\ \ n- \quad n$	$t \quad t \quad t$ $t \quad t$	$\begin{cases} t \ = \\ t\ n+ \ = t\ n\ - \end{cases}$
$u\ n\ = \ \cdot \ {}^{n}$	$u \quad u \quad u$ $u \quad u$	$\begin{cases} u \ = \\ u\ n\ = \ \cdot u\ n- \end{cases}$
$u\ n \quad {}^{n}$ of $u\ n \quad {}^{n}$	$u \quad u \quad u$ $u \quad u$	$\begin{cases} u\ n\ = - \cdot u\ n- \\ u \ = \end{cases}$
~~Hoeft niet~~	$v \quad v \quad v$ $v \quad v$	$\begin{cases} v\ n+ \ = -\frac{}{v\ n} \\ v \ = \end{cases}$
$a_n \quad {}^{n}$	$a = \quad a = \quad a = \quad a =$ a	$\begin{cases} a = \\ a_n = \ \cdot a_{n-} \end{cases}$

Antwoorden paragraaf 12

1 a. Je begint met 1 en er komt telkens twee bij.

b. 5 + 5 + 1 = 11

c. 20 haken

d. 13^e haak: 13 + 13 – 1 = 2 13 – 1 = 25; 20^e haak: 2 20 – 1 = 39

e. Je hebt twee 'rijtjes' van lengte zijde vierkant, maar dan tel je het hokje rechtsboven dubbel; klopt.

f. n

g. Zijde vierkant = 196 = 14, dus 14 haken; oppervlakte grootste haak = 2 14 – 1 = 27

2 $t\ n \quad n \quad n \quad n$;

De directe formule is van de vorm $y \quad a\ x \quad b$, met n in plaats van x en $t\ n$ in plaats van y.

3 $\begin{cases} t \quad = \\ t\ n \ = t\ n - \quad + \end{cases}$

4 1, 2, 3, 4, 5, …: $\begin{cases} t \quad = \\ t\ n \ = t\ n - \quad + \end{cases}$ en $t\ n \quad n$

1, 3, 5, 7, 9, …: $\begin{cases} t \quad = \\ t\ n \ = t\ n - \quad + \end{cases}$ en $t\ n \quad n$

5 a. $\begin{cases} u \quad = \\ u\ n \ = u\ n - \quad + \end{cases}$ en $u\ n \quad n \quad u$

b. $\begin{cases} u \quad = - \\ u\ n \ = u\ n - \quad + \end{cases}$ en $u\ n \quad n \quad u$

c. $\begin{cases} u \quad = \\ u\ n \ = u\ n - \quad - \end{cases}$ en $u\ n \quad n \quad u$

6 a. 2, 2½, 3, 3½, 4
b. 16, 13, 10, 7, 4
c. $- \quad - \quad - \quad - \quad -$
d. -8, -6½, -5, -3½, -2
e. 12, 8, 4, 0, -4

7 $u\ n \quad n \quad ;\ v\ n \quad n$

8 a. Van rij 21 naar rij 34 komen 294 – 216 = 78 zitplaatsen bij, dus per rij $^{78}/_{13}$ = 6 erbij;
Eerste rij dus 216 – 20 6 = 96 zitplaatsen
b. $A\ n \quad n$ $\begin{cases} A \quad = \\ A\ n \ = A\ n - \quad + \end{cases}$

9 a. Nee
b. $a\ n \quad n$
c. 8, 12, 18, 27, 40½, 60¾, … (telkens keer anderhalf)

10 a. 6 40 = 240
b. $C\ n \quad n$
c. $Z\ n \quad n$ $\begin{cases} Z \quad = \\ Z\ n \ = Z\ n - \quad + \end{cases}$
d. 1200 (zwarte cirkels)

Antwoorden paragraaf 13

1 a. 1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; 0,015625; 0,0078125; 0,00390625; 0,001953125; 0,0009765625
b. $\begin{cases} u \quad = \\ u\ n \ = - \cdot u\ n - \end{cases}$
c. Zeno

2 a. Vermenigvuldig telkens met $= - + - \sqrt{\ } \approx$: helemaal precies klopt het niet, het wijkt soms 1 af (bijvoorbeeld bij eerste stap meteen al).
b. Ook hier klopt het niet helemaal precies en wijkt het soms 1 af.

3 Ook hier klopt het niet helemaal precies als je telkens met vermenigvuldigt: wijkt soms 1 af.

4 r
$b \quad b$

5 a. 6, 30, 150, 750, 3750; $\begin{cases} u \quad = \\ u\ n \ = \ \cdot u\ n - \end{cases}$ of $\begin{cases} u \quad = \\ u\ n \ = \ \cdot u\ n - \end{cases}$
b. Je krijgt elke volgende term uit de vorige door het met 5 te vermenigvuldigen, dus de groeifactor is 5.
Je kunt de formule bovendien schrijven als $u\ n \quad ^{n} \quad ^{n}$.

6 Het vaste getal waarmee je vermenigvuldigt, dus de groeifactor, is ½.

7 a. $\begin{cases} u \quad = \\ u\ n \ = \quad \cdot u\ n - \end{cases}$ of $\begin{cases} u \quad = \\ u\ n \ = \quad \cdot u\ n - \end{cases}$

b. $\begin{cases} v \quad = - \\ v\ n\ = \quad \cdot v\ n - \end{cases}$ of $\begin{cases} v \quad = \\ v\ n\ = \quad \cdot v\ n - \end{cases}$

8 a. $u\ n \quad {}^{n} \quad {}^{n}$

b. $u\ n \quad {}^{n} \quad {}^{n}$

9 a. Exponentieel: A, C, F, G, H

b. A: $a\ n \quad {}^{n} \quad {}^{n}$

C: $c\ n \quad {}^{n} \quad {}^{n}$

F: $f\ n \quad {}^{n} \quad {}^{n}$

G: $g\ n \quad {}^{n} \quad {}^{n} \quad {}^{n}$

H: (de rij is eigenlijk $- \ - \ - \ -$) $h\ n\ = - \cdot \left(-\right)^{n-} = \ \cdot \left(-\right)^{n} = \left(-\right)^{n} = \ {}^{-n}$

c. A: $\begin{cases} a \quad = \\ a\ n\ = - \cdot a\ n - \end{cases}$ of $\begin{cases} a \quad = \\ a\ n\ = - \cdot a\ n - \end{cases}$

C: $\begin{cases} c \quad = \\ c\ n\ = \quad \cdot c\ n - \end{cases}$ of $\begin{cases} c \quad = - \\ c\ n\ = \quad \cdot c\ n - \end{cases}$

F: $\begin{cases} f \quad = \\ f\ n\ = \sqrt{\ } \cdot f\ n - \end{cases}$ of $\begin{cases} f \quad = \sqrt{\ } \\ f\ n\ = \sqrt{\ } \cdot f\ n - \end{cases}$

G: $\begin{cases} g \quad = \\ g\ n\ = \quad \cdot g\ n - \end{cases}$ of $\begin{cases} g \quad = \\ g\ n\ = \quad \cdot g\ n - \end{cases}$

H: $\begin{cases} h \quad = \ ^{-} \ = - \\ h\ n\ = \ ^{-} \cdot h\ n - \quad = - \cdot h\ n - \end{cases}$ of $\begin{cases} h \quad = \\ h\ n\ = \ ^{-} \cdot h\ n - \quad = - \cdot h\ n - \end{cases}$

d. A: 2, $^{2}/_{3}$, $^{2}/_{9}$

B: 36, 44, 53 (de regelmaat in de rij is +3, +4, +5, +6, +7, +8, etc.; $b\ n \quad n \quad n$)

C: 600¼, 2100$^{7}/_{8}$, 7353$^{1}/_{16}$ (of met decimalen: 600,25; 2100,875; 7353,0625)

D: 36, 49, 64 (het zijn de kwadraten: $d\ n \quad n$)

E: –23, –29, –35 (telkens 6 eraf; $e\ n \quad n$)

F: 8 2 = 128, 16, 16 2 = 512

G: 0,00001; 0,000001; 0,0000001

H: 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}

10 Het klopt meteen al niet. De eerste stap is maal 1, de tweede maal 2.

11 a.

term	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
waarde	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
verhouding		1	2	1,5	1,667	1,600	1,625	1,615	1,619	1,618	1,618	1,618	1,618

b. De verhouding lijkt te naderen tot 1,618, ofwel , de gulden snede verhouding.

term	u(1)	u(2)	u(3)	u(4)	u(5)	u(6)	u(7)
waarde	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625
afname		0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625

12 a. 1025 €; 1050,63 € (onafgerond 1050,625 €)

b. $B\ t \quad {}^{t} \quad \begin{cases} B \quad = \\ B\ t\ = \quad \cdot B\ t - \end{cases}$

c. €

d. $\begin{cases} B \quad = \\ B\ t\ = \quad \cdot B\ t - \quad + \end{cases}$

13 groeifactor = $^{72}/_{152}$ = $^{9}/_{19}$ (≈ 0,4737); $u \quad = \quad \cdot\left(—\right)^{-} \;=\; \cdot\left(—\right) \;=\; — \approx \quad ;$

$$\begin{cases} u \quad = \quad — \;\approx \\ u\;n\; = —\cdot u\;n- \quad \approx \quad \cdot u\;n- \end{cases}$$

Herhalingsopgaven rijen

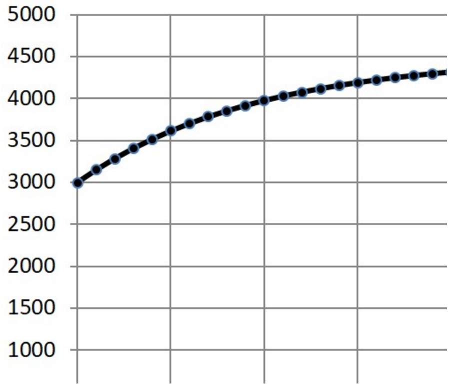
1 a. Volgende rechthoeken afmeting: 6 x 7 en 7 x 8
  b. 42, 56, 72, 90, 110

2 a. 1 man, 7 vrouwen, 49 zakken, 343 katten, 2401 kittens; exponentiële rij met groeifactor 7
  b. 1 + 7 + 49 + 343 + 2401 = 2801
  c. 7 (vrouwen) + 7^2 (muilezels) + 7^3 (zakken) + 7^4 (broden) + 7^5 (foudralen) + 7^6 (messen) = 137.256

3 a. Na 1 jaar: 3000 – 300 + 450 = 3150; na 2 jaar: 3150 – 315 + 450 = 3285
  b. $\begin{cases} B \quad = \\ B\ t = \quad \cdot B\ t - \quad + \end{cases}$
  c.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3000	3150	3285	3407	3516	3614	3703	3783	3854	3919	3977	4029	4076	4119	4157	4191	4222	4250	4275	4297	4318

  d. Hij kan ‘oneindig’ zo doorgaan
  e. 4500



4 a. Doordat 50% overblijft, wordt de oude hoeveelheid met 0,5 vermenigvuldigd, maar dan komt dan weer 5 mg nieuw medicijn bij; daarom $H\ n$
  b.

n (dagen)	0	1	2	3	4	5	6	7	
medicijn (mg)	5	7,5	8,75	9,375	9,688	9,844	9,922	9,961	9

  c. Er ontstaat op den duur een evenwicht van 10 mg medicijn in het bloed.

5 a. Begin (t = 0): L = 1 (cm); na 1 week (t = 1): L ≈ 1,8145 (cm)
  b. g dus L ^{t} ^{t}
  c. $\begin{cases} L \quad = \\ L\ t = \quad \cdot L\ t - \end{cases}$
  d. ??
  e. L(9) ≈ 140,97 (cm); H(9) = 134,68 (cm); het verschil is 6,3 cm.