

# De Wageningse Methode

## 5&6 VWO wiskunde B

### Uitgebreidere antwoorden Hoofdstuk 8

#### Integralen toepassen

##### Paragraaf 1 Inhoud en integraal

- 1 a. Het 'topje' van de piramide is gelijkvormig met de hele piramide met factor  $f = \frac{x}{4}$ , dus

$$O(x) = f^2 \cdot 36 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot 36 = 2\frac{1}{4}x^2$$

b. 32

c.  $\text{sum}(\text{seq}(2\frac{1}{4} \cdot 1/8 \cdot (1/8K)^2, K, 1, 32, 1)) = 50,273\dots$

d.  $\sum_{k=0}^{31} O(x_k) \Delta x$

$\text{sum}(\text{seq}(2\frac{1}{4} \cdot 1/8 \cdot (1/8K)^2, K, 0, 31, 1)) = 45,773\dots$

e. Bovensom:  $\sum_{k=1}^{32} 2\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{8}k)^2 \cdot \frac{1}{8}$ ;

ondersom:  $\sum_{k=0}^{31} 2\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{8}k)^2 \cdot \frac{1}{8}$

f. Een primitieve van  $O(x) = 2\frac{1}{4}x^2$  is  $F(x) = \frac{3}{4}x^3$ . De inhoud is:  $F(4) - F(0) = 48$ .

- 2 a. Het topje van de kegel is gelijkvormig met de hele kegel, met factor  $\frac{3}{4}$ , dus  $(\frac{3}{4})^2 \cdot 4\pi = 2\frac{1}{4}\pi$

b. De gelijkvormigheidsfactor  $f$  is  $\frac{x}{4}$ , dus  $O(x) =$

$$f^2 \cdot 4\pi = \frac{1}{4}\pi \cdot x^2$$

c.  $\sum_{k=1}^{32} O(x_k) \Delta x$

d.  $\frac{1}{4}\pi \cdot x^2$

e. Een primitieve van  $O(x) = F(x) = \frac{1}{12}\pi \cdot x^3$ , de inhoud is

$$\int_0^4 \frac{1}{4}\pi \cdot x^2 dx = F(x)\Big|_0^4 = 5\frac{1}{3}\pi.$$

- 3 a.  $2\frac{1}{4}\pi$ ; de oppervlakte is namelijk  $\pi x^2 = \pi y$ .

b.  $\pi y$  op het interval  $[0,4]$

c.  $8\pi$

d.  $P(x) = \pi y^2 = \pi x^4$

e. Een bovensom bij een verdeling in 20 gelijke

stukjes bijvoorbeeld is  $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{10} \pi \cdot (\frac{1}{10}k)^4$ . Dit is

precies de bovensom die je op zou schrijven om de oppervlakte onder de grafiek van de functie  $f(x) = \pi x^4$  op het interval  $[0,2]$  te berekenen bij een verdeling in 20 gelijke stukjes.

f.  $\int_0^2 \pi \cdot x^4 dx = \frac{1}{5}\pi \cdot x^5\Big|_0^2 = 6\frac{2}{5}\pi$

4  $\int_1^4 \pi \cdot (e^x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \pi \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}\pi \cdot e^{2x}\Big|_1^4$   
 $= \frac{1}{2}\pi \cdot (e^8 - e^2)$

5 a.  $\int_0^4 \pi \cdot x^3 dx = \frac{1}{4}\pi \cdot x^4\Big|_0^4 = 64\pi$

b.  $y = x^{1\frac{1}{2}}$ , dus  $y^{\frac{2}{3}} = (x^{1\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$ , dus  $x = y^{\frac{2}{3}}$

c.  $\int_0^8 \pi \cdot y^{\frac{4}{3}} dy = \frac{3}{7}\pi \cdot y^{\frac{7}{3}}\Big|_0^8 = 54\frac{6}{7}\pi$

- 6 a.  $x=1$  en  $x=-1$

b. Voor  $x=0$  is  $y=1$ . De inhoud is  $\int_1^{\sqrt{2}} \pi x^2 dy$ .

$$y^2 = \frac{1}{1-x^2} \Leftrightarrow 1-x^2 = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{y^2}$$

De inhoud is dus:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \pi(1 - \frac{1}{y^2}) dy = \pi(y + \frac{1}{y})\Big|_1^{\sqrt{2}} = \pi(1\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2).$$

- 7 a.  $y = 2 - \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 - y \Leftrightarrow \pi x^2 = \pi(2-y)^6$

c. Een primitieve van  $\pi(2-y)^6$  is

$G(y) = -\frac{1}{7}\pi(2-y)^7$  (-teken vanwege kettingregel)

$$\int_0^2 \pi(2-y)^6 dy = -\frac{1}{7}\pi(2-y)^7\Big|_0^2 = 18\frac{2}{7}\pi$$

- 8 a. 3 ; 1,08 ; het 'topje' is gelijkvormig met de hele piramide met factor  $f = \frac{x}{10}$ , dus op  $x$

eenheden van de top is de oppervlakte  $\frac{x^2}{100} \cdot 12$ .

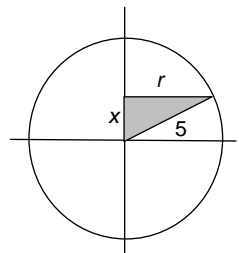
b.  $\int_0^{10} \frac{x^2}{100} \cdot 12 dx = \frac{1}{25}x^3\Big|_0^{10} = 40$

c. De verkleiningsfactor is  $\frac{x}{h}$ .

d. De inhoud is  $\int_0^h \frac{x^2}{h^2} \cdot G dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{G}{h^2}\Big|_0^h = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$ .

e. Klopt.

- 9 a. Zie plaatje. De straal van de snijcirkel is  $r$ .  $r^2 = 25 - x^2$  (stelling van Pythagoras), de oppervlakte van de snijcirkel is dus  $\pi(25 - x^2)$ .



b.  $\int_3^5 \pi \cdot (25 - x^2) dx = \pi \cdot (25x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_3^5 = 17\frac{1}{3}\pi$

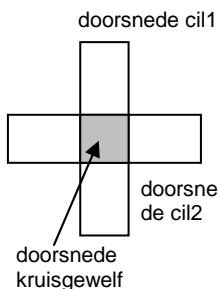
c. De inhoud van een halve bol met straal  $R$  is:

$$\int_0^R \pi \cdot (R^2 - x^2) dx = \pi \cdot (R^2x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_0^R = \pi \cdot (R^3 - \frac{1}{3}R^3) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

De hele bol heeft inhoud  $1\frac{1}{3}\pi R^3$ .

d.  $\int_{R-h}^R \pi \cdot (R^2 - x^2) dx = \pi \cdot (R^2x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_{R-h}^R = \pi \cdot (R^3 - \frac{1}{3}R^3 - R^2(R-h) + \frac{1}{3}(R-h)^3) = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h).$

10 a. Een liggende cilinder heeft op elke hoogte een rechthoekige doorsnede. Het kruisgewelf heeft dus op elke hoogte een vierkante doorsnede, zie plaatje



Een cirkel met straal 3 heeft op hoogte  $x$  boven het middelpunt, breedte  $2\sqrt{9 - x^2}$ .

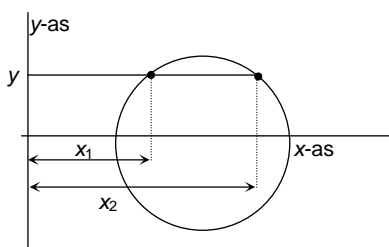
Het kruisgewelf met hoogte 3 heeft op hoogte  $x$  een vierkant met zijde  $2\sqrt{9 - x^2}$  als doorsnede.

$$(2\sqrt{9 - x^2})^2 = 36 - 4x^2.$$

b.  $\int_0^3 (36 - 4x^2) dx = 36x - \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^3 = 72$

11 a.  $(x-4)^2 + y^2 = 4$

b.  $O(y)$  is de oppervlakte van het gebied tussen twee concentrische cirkels, de een met straal  $x_1$  en de ander met straal  $x_2$ , zie plaatje.



$$O(y) = \pi x_2^2 - \pi x_1^2.$$

Er geldt:  $x_2 = 4 + \sqrt{4 - y^2}$  en  $x_1 = 4 - \sqrt{4 - y^2}$ .

$$\text{Dus: } x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) =$$

$$= (4 + \sqrt{4 - y^2} + 4 - \sqrt{4 - y^2})$$

$$\cdot ((4 + \sqrt{4 - y^2}) - (4 - \sqrt{4 - y^2})) =$$

$$= 2\sqrt{4 - y^2} \cdot 8, \text{ dus: } \pi(x_2^2 - x_1^2) = 16\pi\sqrt{4 - y^2}$$

c. We verdelen het interval  $[-2,2]$  bijvoorbeeld in 400 gelijke stukjes. Elk stukje heeft dan lengte  $\frac{1}{100}$ .

Het  $k$ -de verdeelpunt is  $y_k = -2 + \frac{1}{100}k$ .

De integraal wordt goed benaderd door:

sum(

$$\text{seq}(0.01 * 16\pi * (4 - (-2 + k/100)^2)^{.5}, K, 0, 400, 1) = 315,785\dots$$

d. De cirkel met middelpunt  $O$  en straal 2 heeft vergelijking  $x^2 + y^2 = 4$ . Voor de punten  $(x,y)$  op het deel boven de  $x$ -as geldt:  $y = \sqrt{4 - x^2}$ .

De oppervlakte tussen de grafiek van  $y = \sqrt{4 - x^2}$  en de  $x$ -as is:  $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ . De

uitkomst is de oppervlakte van een halve cirkel met straal 2, dus  $2\pi$ .

e.  $\int_{-2}^2 16\pi\sqrt{4 - y^2} dy = 16\pi \cdot 2\pi = 32\pi^2$ .

f. De hartomtrek van de torus is:  $2 \cdot 4\pi = 8\pi$ . De cilinder met hoogte  $h = 8\pi$  en straal  $r = 2$  heeft als inhoud:  $\pi r^2 h = 32\pi^2$ .

12 a. Noem de gevraagde zijde  $x$ , dan volgt uit gelijkvormigheid:  $x : 10 = (8 - h) : 8$ ,

$$\text{dus } x = 10 - 1\frac{1}{4}h.$$

b.  $O(h) = \frac{3}{4}h(10 - 1\frac{1}{4}h)$  heeft als grafiek een bergparabool.  $O(0) = O(8) = 0$ , dus  $O$  is maximaal als  $h = 4$ , de doorsnede is dan 5 bij 3, niet vierkant.

c.  $I = \int_0^8 \frac{3}{4}h(10 - 1\frac{1}{4}h) dh = \frac{15}{4}h^2 - \frac{15}{48}h^3 \Big|_0^8 = 80$

## Paragraaf 2 Meer over integralen toepassen

1 De oppervlakte onder de grafiek op dat tijdsinterval berekenen en dat delen door de lengte van het interval.

2 a.  $\int_1^3 v(t) dt = \frac{2}{3}(t+1)^{1\frac{1}{2}} - t \Big|_1^3 = 3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3}\sqrt{2}$

b. Delen door  $3 - 1 = 2$ .

c.  $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ , de gemiddelde functiewaarde is

$$\frac{2}{\pi}.$$

d.  $\int_0^3 (x^2 + 4x - 5) dx = 12$ , gemiddelde

functiewaarde: 4.

3 a.  $1\frac{1}{2}\pi$  watt

b. Niet

c. Dan:  $I = 2 \sin t$ , dus  $P = 12 \sin^2 t$ , dus gemiddeld:  $6\pi$  watt, dus 4 keer zo groot.

d.  $1\frac{1}{2} = \frac{V^2}{3}$ , dus  $V = \sqrt{4\frac{1}{2}}$

e. De amplitude noemen we  $V_{\max}$ , dan  $V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} V_{\max}^2$ , dus  $V_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot V_{\max}$ .

- 4 a.  $\frac{y(4) - y(0)}{4 - 0} = 1$   
 b.  $\frac{1}{2}$ ; ja:  $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1}{2}$   
 c. Een primitieve van  $f'$  is  $f$ , dus  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ . De gemiddelde helling is dus  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

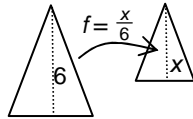
- 5 a.  $(1\frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2}) \cdot x = 9\frac{1}{2}$ , dus  $x = 1,9$ .  
 b. De plaats wordt:  $\frac{3 \cdot 1\frac{1}{2} + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{2}}{5} = 3,9$ .

Dus het zwaartepunt gaat 2 eenheden naar rechts ten opzichte van  $M$ , blijft dus op de plaats.

c. Je krijgt gewichten  $1\frac{1}{2}$  op 0,9 links van het zwaartepunt en 3 op 0,1 en  $\frac{1}{2}$  op 2,1 rechts van het zwaartepunt. Het moment van de gewichten links is:  $1\frac{1}{2} \cdot 0,9 = 1,35$  en het moment rechts is:  $3 \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 2,1 = 1,35$ , dus er is evenwicht.

d. -3,1

6 a.  $\frac{x}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}x$ ,  $\frac{2}{3}x \cdot \Delta x$



b. 48

c.  $\sum_{k=1}^n x_k \cdot m_k$  wordt in de limiet  $\int_0^6 \frac{2}{3} x^2 dx$

en  $\sum_{k=1}^n m_k$  wordt de massa (= oppervlakte) van de driehoek.

d.  $4 : 2 = 2 : 1$

7 a.  $\frac{2}{3}\pi r^3$ , met  $r = 1$ , dus  $\frac{2}{3}\pi$

b. De straal van de schijf is  $\sqrt{1 - h^2}$ , dus  $\pi(1 - h^2) \cdot \Delta h$ .

c. De schijf op afstand  $h$  ten opzichte van  $M$  heeft moment:  $h \cdot \pi(1 - h^2) \cdot \Delta h$ .

d.  $\int_0^1 \pi h(1 - h^2) dh = \pi(\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{4}h^4)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\pi$ , dus het

zwaartepunt ligt  $\frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{8}$  van  $M$ .

8 a. We vervangen de kegel door een stapel schijven van dikte  $\Delta x$  die precies op hun gemiddelde hoogte dezelfde doorsnede hebben als de kegel. Een schijf waarvan de gemiddelde hoogte op  $x$  eenheden van de top ligt, heeft straal

$\frac{x}{h} \cdot r$ , dus massa:  $\pi \cdot \frac{x^2}{h^2} \cdot r^2 \cdot \Delta x$ . Het moment

van deze schijf ten opzichte van de top is:

$\pi x \cdot \frac{x^2}{h^2} \cdot r^2 \cdot \Delta x$ .

Bij het nemen van de limiet gaat

$\sum \pi x \cdot \frac{x^2}{h^2} \cdot r^2 \cdot \Delta x$  over in de integraal.

$\int_0^h x \cdot \pi \cdot \frac{r^2 \cdot x^2}{h^2} dx$ .

b.  $\int_0^h x^3 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} dx = \frac{1}{4} x^4 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \Big|_0^h = \frac{1}{4} \pi \cdot r^2 h^2$ .

De inhoud van de kegel is:  $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

Het zwaartepunt ligt dus  $\frac{\frac{1}{4} \pi r^2 h^2}{\frac{1}{3} \pi r^2 h} = \frac{3}{4} h$  van de

top, dus op hoogte  $\frac{1}{4} h$ .

9 a.

$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \sqrt{\Delta x^2 + (f'(x)\Delta x)^2} = \sqrt{\Delta x^2} \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}$

c. De grafiek is precies een twaalfde deel van de cirkel met straal 2; de lengte van de grafiek dus  $\frac{1}{3}\pi$ .

d.

$\text{sum}(\text{seq}(.02 * \sqrt{(1 + (.02K)^2 / (4 - (.02K)^2)}), K, 0, 49)) \approx 1,045663375$

10  $\int_0^4 \sqrt{1 + (1\frac{1}{2}\sqrt{x})^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + 2\frac{1}{4}x} dx =$

$\frac{8}{27} (1 + 2\frac{1}{4}x)^{1\frac{1}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$

11 a.  $y(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$

b. De hoogte  $= y(1) = \frac{1}{2}(e + e^{-1})$

c.  $\sqrt{1 + (f'(x))^2} =$

$\sqrt{1 + (\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}))^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})}$   
 $= \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})} = \sqrt{(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))^2} = f(x)$

d.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx = e - e^{-1}$

12 a.  $\Delta x = 0,06$ , dus de verdelpunten zijn  $x_k = 1 + 0,06k$ , met  $k = 0, 1, 2, \dots$ . De straal van de  $k$ -de cilindermantel is:

$f(x_k) = 4\sqrt{1 + 0,06k}$ , te beginnen met  $k = 0$ .

De hoogte van de cilinder is  $0,06 \cdot \sqrt{1 + f'(x_k)^2} =$

$0,06 \sqrt{1 + (\frac{4}{2\sqrt{x_k}})^2} = 0,06 \sqrt{1 + \frac{4}{1 + 0,06k}}$ .

De oppervlakte van de mantel is:  $2\pi \cdot \text{straal} \cdot \text{hoogte} =$

$2\pi \cdot 4\sqrt{1 + 0,06k} \cdot 0,06 \sqrt{1 + \frac{4}{1 + 0,06k}}$ .

c.  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x}} = \sqrt{x \cdot 1 + x \cdot \frac{4}{x}} = \sqrt{x+4}$ , dus

$$8\pi \sqrt{x+4}$$

d.  $\text{sum}(\text{seq}(0.06 \cdot 8\pi \cdot \sqrt{1+0.06K+4}, K, 0, 49, 1)) \approx 191,3506\dots$

e.  $\int_1^4 8\pi \sqrt{x+4} dx = \frac{16}{3} \pi (x+4)^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 =$

$$\frac{16}{3} \pi (16\sqrt{2} - 5\sqrt{5}) \approx 191,798$$

13 a.  $y = \frac{1}{3}x$  op het interval  $[0,3]$ .

b.  $\int_0^3 2\pi \cdot \frac{1}{3}x \sqrt{1 + \frac{1}{9}} dx = \frac{1}{3} \pi \sqrt{\frac{10}{9}} \cdot x^2 \Big|_0^3 = \pi \sqrt{10}$

c. Opeengeknijpt en platgedrukt krijg je een cirkelsector met straal  $\sqrt{10}$  en sectorhoek

$$\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{10}} \cdot 360^\circ. \text{ De oppervlakte is } \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{10}} \cdot 10\pi$$

$$= \pi\sqrt{10}.$$

14 a.  $R \cdot \sin \alpha = h$ ; straal breedtecirkel  $r = R \cdot \cos \alpha$

b.  $2\pi r \cdot R \Delta \alpha = 2\pi R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \Delta \alpha$

c. Als  $\Delta \alpha \rightarrow 0$ , dan wordt de som  $\sum 2\pi R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \Delta \alpha$

de integraal  $\int_{\beta}^{\gamma} 2\pi \cdot R^2 \cos \alpha d\alpha$ .

d.  $\int_{\beta}^{\gamma} 2\pi \cdot R^2 \cos \alpha d\alpha = 2\pi R^2 \sin \alpha \Big|_{\beta}^{\gamma} =$

$$2\pi R^2 \cdot (\sin \gamma - \sin \beta) = 2\pi R(h_2 - h_1), \text{ want } R \cdot \sin \alpha = h.$$

e. Dan  $h_2 = R$  en  $h_1 = -R$ , dus oppervlakte bol  $= 4\pi R^2$ .

15  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ , dan  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ , dus

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \text{ wordt hier:}$$

$$\int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx =$$

$$\int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - x^2 + (R^2 - x^2) \cdot \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx =$$

$$\int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} dx = \int_{-R}^R 2\pi R dx =$$

$$2\pi R x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2.$$

16 a.  $\Delta l = \frac{1}{3}\pi ((R + \Delta R)^3 - R^3) = \frac{1}{3}\pi (R^3 + 3R^2 \cdot \Delta R + 3R \cdot (\Delta R)^2 + (\Delta R)^3 - R^3) = 4\pi \cdot \Delta R (R^2 + R \cdot \Delta R + \frac{1}{3}(\Delta R)^2)$

b.  $O \approx \frac{\Delta l}{\Delta R} = 4\pi (R^2 + R \cdot \Delta R + \frac{1}{3}(\Delta R)^2)$

c. Als  $\Delta R \rightarrow 0$ , dan  $O \rightarrow 4\pi R^2$ .

Je vindt dus weer  $O = 4\pi R^2$ .

17 a.  $v(t)$  is een primitieve van  $a$ , dus

$$v(t) = -9,8t - 2000 \ln(12700 - 124t) + c$$

$$v(0) = 0, \text{ dus } c = 2000 \ln 12700 \approx 18900$$

b. De brandstoftank is leeg als

$$t = \frac{12700 - 4040}{124} \approx 69,8.$$

$$v(69) \approx$$

$$-9,8 \cdot 69,8 - 2000 \ln 4045 + 2000 \ln 12700 \approx 1604$$

m/s, dus ongeveer 5800 km/h.

c. Met de GR, bijvoorbeeld:

$$\text{fnInt}(-9,8X - 2000 \ln(12700 - 124X) + 18900, X, 0, 69)$$

$$=$$

$$41082 \text{ m} \approx 41 \text{ km}.$$

18 a.  $v(t) =$

$$\sqrt{(1 + \cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{2 + 2\cos t} = \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2} t} = |2\cos \frac{1}{2} t|.$$

b.  $\int_0^{\pi} |2\cos \frac{1}{2} t| dt = \int_0^{\pi} 2\cos \frac{1}{2} t dt = 4\sin \frac{1}{2} t \Big|_0^{\pi} = 4$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |2\cos \frac{1}{2} t| dt = \int_{\pi}^{2\pi} 2\cos \frac{1}{2} t dt = 4\sin \frac{1}{2} t \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$$

De afgelegde weg is dus 8.

19 De kromme  $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$  heeft als baan de grafiek van

de functie  $f$ . De afgelegde weg is dus de lengte van de grafiek van  $f$ .

20 a.  $h(x) = 3 - x$ ;  $\int_0^3 x(3 - x) dx = 1\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = 4\frac{1}{2}$ ;

opp driehoek  $OAB = 4\frac{1}{2}$ , dus  $x_z = 1$  en wegens symmetrie  $y_z = 1$ .

b. Opp  $= 3 + \int_1^3 \frac{3}{x} dx = 3 + (3 \ln x \Big|_1^3) = 3 + 3 \ln 3$

$$\int_0^3 h(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3 dx + \int_1^3 x \cdot \frac{3}{x} dx = 7\frac{1}{2},$$

dus de x-coördinaat is  $\frac{7\frac{1}{2}}{3 + 3 \ln 3}$ .

### Rekentechniek

1 •  $y = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = 1-x \Leftrightarrow y + yx = 1-x \Leftrightarrow$

$$x + xy = 1 - y \Leftrightarrow x(1+y) = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$$

of met herschrijven en machientjes:

$$y = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}, \text{ dit is}$$

PLUS 1 → OMG → MAAL 2 → MIN 1

De omgekeerde ketting is:

PLUS 1 → DD2 → OMG → MIN 1,

$$y \rightarrow y-1 \rightarrow \frac{y-1}{2} \rightarrow \frac{2}{y-1} - 1 = \frac{2}{y-1} - \frac{y-1}{y-1} =$$

$$\frac{1-y}{1+y}, \text{ dus } x = \frac{1-y}{1+y}$$

$$\bullet y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{y^2} - 1$$

$$\bullet y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow y^2 = \frac{1-x}{1+x}, \text{ en dan volgt uit de}$$

eerste van opgave 1:  $x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

$$\bullet y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \text{ dus } y^2 = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$xy^2 + y^2 = x \Leftrightarrow x - xy^2 = y^2 \Leftrightarrow x(1-y^2) = y^2,$$

$$\text{dus } x = \frac{y^2}{1-y^2}$$

$$\bullet y = 2e^{x+3} + 1 \Leftrightarrow 2e^{x+3} = y-1 \Leftrightarrow e^{x+3} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}, \text{ dus}$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) - 3$$

$$\bullet y = \ln(2x+1) + 1 \Leftrightarrow \ln(2x+1) = y-1, \text{ dus } 2x+1 = e^{y-1}, \text{ dus } x = \frac{1}{2}e^{y-1} - \frac{1}{2}$$

$$\bullet y = \ln\frac{x+1}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \text{ dus } 1 + \frac{1}{x} = e^y$$

$$\text{dus } \frac{1}{x} = e^y - 1, \text{ dus } x = \frac{1}{e^y - 1}$$

$$\bullet y = \ln(1-x) - \ln(1+x) = \ln\frac{1-x}{1+x}, \text{ dus}$$

$$e^y = \frac{1-x}{1+x}, \text{ dus (uit de eerste van deze opgave)}$$

$$x = \frac{1-e^y}{1+e^y}.$$

$$\bullet y = \frac{e^x+1}{e^x} = 1 + e^{-x}, \text{ dus } -x = \ln(y-1) \text{ en}$$

$$x = -\ln(y-1).$$

$$\bullet \text{ Uit de voorgaande volgt: } x = -\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right), \text{ dus}$$

$$x = \ln\frac{y}{1-y}$$

$$\bullet y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \text{ geeft } y^2 = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 - y^2 = \frac{1}{x}, \text{ dus}$$

$$x = \frac{1}{1-y^2}$$

$$\bullet y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - y, \text{ dus } x = \frac{1}{(1-y)^2}$$

2 •  $x \neq -1$

•  $x > -1$

• zie voorbeeld  $-1 < x \leq 1$

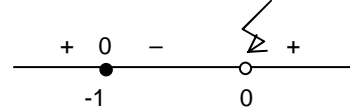
•  $x \geq 0$  en  $x+1 > 0$ , dus  $x \geq 0$

• alle  $x$

•  $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

• Er moet gelden:  $\frac{x+1}{x} > 0$ . Het teken van  $\frac{x+1}{x}$

kan wisselen bij  $x=0$  of bij  $x=-1$



Dus  $x < -1$  of  $x > 0$

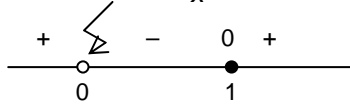
• Er moet gelden:  $1-x > 0$  en  $1+x > 0$ , dus  $-1 < x < 1$

• alle  $x$

• alle  $x$

• Er moet gelden:  $1 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$

Het teken van  $\frac{x-1}{x}$  kan wisselen bij  $x=0$  of  $x=1$ .



Dus  $x < 0$  of  $x \geq 1$

•  $x > 0$

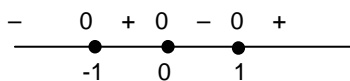
3 •  $-1 \leq x \leq 1$

• geen  $x$

•  $(x-1)^2$  is alleen voor  $x=1$  gelijk aan 0 en anders positief. Dus het teken van  $x(x-1)^2$  is (behalve als  $x=1$ ) het teken van  $x$ , dus  $x \leq 0$  of  $x=1$

•  $x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

Teken van  $x(x-1)(x+1)$ :

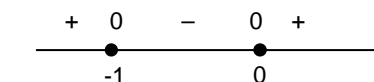


dus  $x \leq -1$  of  $0 \leq x \leq 1$

•  $x^2 + 1 > 0$  voor alle  $x$ , dus  $x \leq 0$

•  $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

•  $x(x^3+1)$  wisselt van teken als  $x=0$  of  $x=-1$



Dus  $-1 \leq x \leq 0$

•  $x^4 + x = x(x^3+1)$ , dus  $-1 \leq x \leq 0$

$$4 \bullet \frac{x^2-4}{x^2-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-4-(x^2-1)}{x^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x^2-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ of } x < -1$$

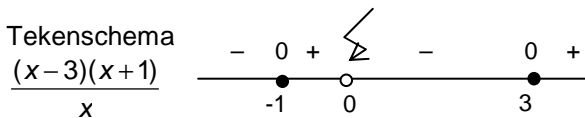
$$\bullet \frac{x^2-x}{x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-3x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x-4 \leq 0 \text{ en } x \neq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \text{ en } x \neq 0$$

$$\bullet \frac{x-2}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{-3}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x+1 > 0$$

dus  $x > -1$

$$\bullet \frac{x^2-x-3}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{x} = \frac{(x-3)(x+1)}{x} \leq 0$$



Dus  $x \leq -1$  of  $0 < x \leq 3$

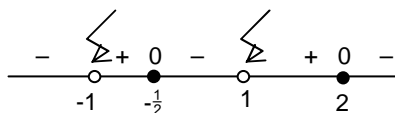
$$\bullet \frac{2x}{x^2+1} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$$

Dit is voor alle  $x$

$$\bullet \frac{3x}{x^2-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3x}{x^2-1} - \frac{2x^2-2}{x^2-1} =$$

$$\frac{-(2x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

Tekenschema  $\frac{-(2x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$ :



Dus:  $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$  of  $1 < x \leq 2$

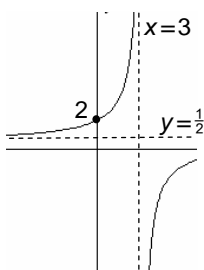
5 a. Verticaal vermenigvuldigen met 2, 1 eenheid naar rechts schuiven, 3 eenheden naar boven schuiven (sommige bewerkingen kunnen verwisseld worden).

b. Door de eerste bewerking veranderen de asymptoten niet, door de tweede bewerking wordt de verticale asymptoot  $x=0$  overgevoerd in de verticale asymptoot  $x=1$  en door de derde bewerking wordt de horizontale asymptoot  $y=0$  overgevoerd in de horizontale asymptoot  $y=3$ .

c. Alle waarden  $\neq 3$ .

$$d. y = \frac{x-12}{2x-6} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2x-6}$$

Verticaal vermenigvuldigen met -9, 6 eenheden naar rechts schuiven, horizontaal vermenigvuldigen met  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  eenheden naar boven schuiven. Horizontale asymptoot  $y = \frac{1}{2}$ , verticale asymptoot  $x = 3$ .



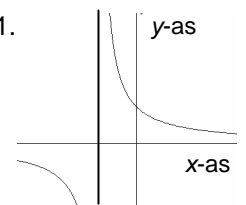
Alle waarden  $\neq \frac{1}{2}$ .

e. Alle waarden die  $y = \frac{x-12}{2x-6}$  aan kan nemen als je voor  $x$  alleen positieve getallen invult. Dus:  $y > 2$  of  $y < \frac{1}{2}$ , zie de schets van de grafiek van  $y = \frac{x-12}{2x-6}$ .

6  $\bullet y = \frac{1-x}{1+x}$ , de grafiek is een hyperbool met horizontale asymptoot  $y = -1$ , dus bij alle  $y \neq -1$ .

$$\bullet y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{1}{x+1}} \text{ voor } x > -1.$$

De grafiek van  $y = \frac{1}{x+1}$  is een hyperbool met horizontale asymptoot  $y=0$  en verticale asymptoot  $x=-1$ .



$y = \frac{1}{x+1}$  neemt voor  $x > -1$  alle positieve

waarden aan dus  $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$  ook.

Dus bij elke positieve  $y$  is er een  $x$ .

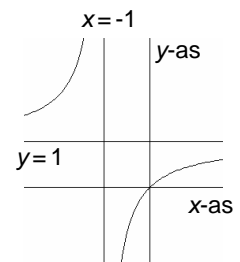
$\bullet y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  neemt alle waarden  $\geq 0$  aan,

want  $y = \frac{1-x}{1+x}$  neemt alle waarden  $\neq -1$  aan, (zie boven).

$\bullet y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$  bestaat voor  $x > -1$  en is dan gelijk

aan  $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ .

$y = \frac{x}{x+1}$  heeft als grafiek een hyperbool met horizontale asymptoot  $y=1$  en verticale asymptoot  $x=-1$ .



Als  $x > -1$ , dan  $0 \leq \frac{x}{x+1} < 1$ , zie plaatje.

Dus als  $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ , dan is er voor alle  $y$  met  $0 \leq y < 1$  een waarde van  $x$  te vinden.

$\bullet y = 2e^{x+3} + 1$

$2e^{x+3}$  neemt alle positieve waarden aan, dus voor elke  $y > 1$  is er een  $x$  met  $y = 2e^{x+3} + 1$ .

$\bullet$  Bij elke  $y = \ln(2x+1) + 1$  is er een  $x$  te vinden, want  $y = \ln x$  neemt alle waarden aan, dus ook  $y = \ln(2x+1) + 1$ .

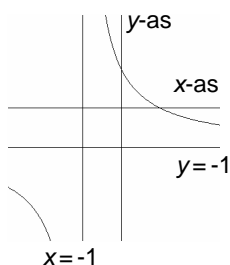
- $\frac{x+1}{x}$  neemt alle positieve waarden  $\neq 1$  aan, dus  $\ln \frac{x+1}{x}$  alle waarden  $\neq 0$ .

Dus als  $y \neq 0$ , is er een  $x$  met  $y = \ln \frac{x+1}{x}$ .

- $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$  bestaat voor  $-1 < x < 1$ . In dat

geval geldt:  $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ .

De grafiek van  $y = \frac{1-x}{1+x}$  is een hyperbool met asymptoten  $y=-1$  en  $x=-1$ .



Als  $-1 < x < 1$ , dan neemt

$$y = \frac{1-x}{1+x} \text{ alle positieve}$$

waarden aan, zie schets.

Dus als, dan is er bij elke  $y$  een waarde van  $x$ .

- $y = \frac{e^x+1}{e^x} = 1+e^{-x}$  neemt alle waarden  $> 1$  aan,

want  $y = e^{-x}$  neemt alle positieve waarden aan.

Dus als  $y = \frac{e^x+1}{e^x}$ , is er bij elke  $y > 1$  een waarde van  $x$  te vinden.

$$\bullet y = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$$

$\frac{1}{e^x+1}$  neemt alle waarden tussen 0 en 1 aan, dus

$$y = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1} \text{ ook alle waarden tussen 0}$$

en 1.

Dus bij elke waarde van  $y$  is er een  $x$  met

$$y = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\bullet y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

$1 - \frac{1}{x}$  neemt alle waarden  $\geq 0$  en  $\neq 1$  aan, dus

$$y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \text{ ook. Dus als } y \geq 0 \text{ en } y \neq 1, \text{ dan is er een}$$

waarde van  $x$  met  $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ .

$$\bullet y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$  neemt alle positieve waarden aan,

dus  $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$  alle waarden kleiner dan 1.

Dus bij elke  $y < 1$  is er een  $x$  met  $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

$$7 \text{ a. } y > 4: x = -2 + \sqrt{y-4} \text{ of } x = -2 - \sqrt{y-4}$$

$$y=4: x=-2$$

b. Zie a,  $\sqrt{x} = -2 + \sqrt{y-4}$  (want  $\sqrt{x} = -2 - \sqrt{y-4}$  kan niet omdat  $-2 - \sqrt{y-4}$  voor elke waarde van  $y$  negatief is.)

Bij  $\sqrt{x} = -2 + \sqrt{y-4}$  is een  $x$  te vinden als

$$-2 + \sqrt{y-4} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 8$$

$$\text{Dus: } y \geq 8: x = (-2 + \sqrt{y-4})^2$$

c.  $x^2 + 4xy = y^2 \Leftrightarrow (x+2y)^2 = -3y^2$ . Dus moet  $-3y^2 \geq 0$ , dus  $y=0$ , maar dan ook  $x=0$ .

Dus  $x=y=0$ .

d.  $x^2 + 4xy = 5y^2 \Leftrightarrow (x+2y)^2 = y^2$  Dus  $x+2y=y$  of  $x+2y=-y$ , dus  $x=-y$  of  $x=-3y$

e. Voor alle  $x$  geldt:  $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ .

$$\text{Als } 0 < y < 1 \text{ dann } x = \sqrt{1 - \frac{1}{y}} \text{ of } x = -\sqrt{1 - \frac{1}{y}}$$

Als  $y=1$ , dan  $x=0$ .

$$8 \bullet (x+y)^2 + (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$$

$$\bullet (x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$$

$$\bullet \frac{2x^2 + 4x}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{4x}{x} = 2x + 4$$

$$\bullet \frac{2x^2 + 4x}{x+2} = \frac{2x(x+2)}{x+2} = 2x$$

$$\bullet \frac{2x^2 + 4x + 2}{x+1} = \frac{2(x+1)^2}{x+1} = 2(x+1)$$

$$\bullet \frac{x^2 - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

$$\bullet \frac{x^3 - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = x^2 + x + 1$$

•

$$\frac{x^{10} - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^9 + x^8 + \dots + x + 1)}{x-1} = x^9 + x^8 + \dots + x + 1$$

• Je kunt in de eerste formule van opgave 8  $\sqrt{x}$  invullen in plaats van  $x$ . Dit geeft:  $2x + 2y^2$ .

$$\bullet (1 + \sqrt{x+1})(1 - \sqrt{x+1}) = 1 - (x+1) = -x$$

•

$$\sqrt{(e^x - e^{-x})^2 + 4} = \sqrt{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4} = \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} = e^x + e^{-x}$$

$$\bullet \frac{4^x - 1}{2^x - 1} = \frac{(2^x + 1)(2^x - 1)}{2^x - 1} = 2^x - 1$$

---

$$9 \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{(x+1)^2} = \sqrt[6]{x^5 + 2x^4 + x^3}$$

$$x \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{x+1}{x^2}} = \sqrt{x+1}$$

$$2^x \sqrt{2^x + 2^{-x}} = \sqrt{2^{2x}} \cdot \sqrt{2^x + 2^{-x}} = \sqrt{2^{3x} + 2^x}$$

$$\sqrt{\sqrt{2^x}} = \sqrt{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x} = \left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{x}{4}} = \sqrt[4]{2^x}$$