deel 2a havo

de Wageningse Methode

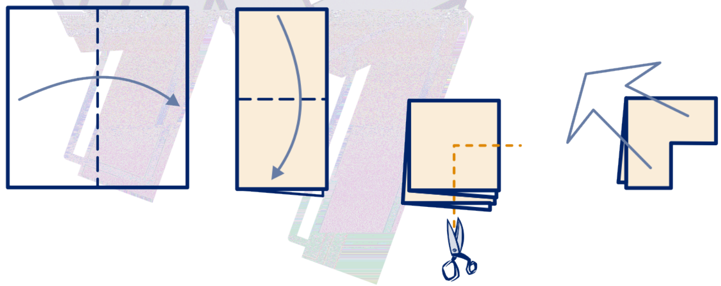
Auteurs Leon van den Broek, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren
Dolf van den Hombergh, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN 01234567890-0-0
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Knippen

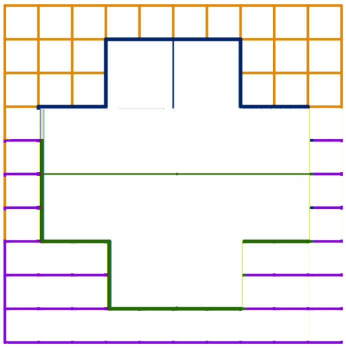
1

We gaan een figuur knippen uit een vierkant van 8 cm bij 8 cm.



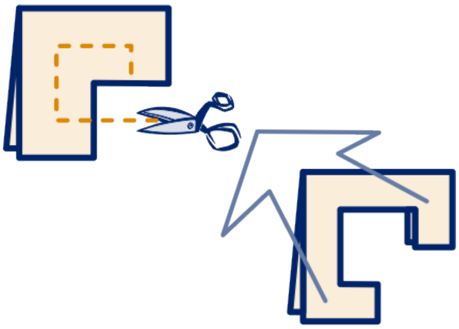
a Zie het plaatje hierboven. Vouw het vierkant dubbel, eenmaal in de lengte en eenmaal in de breedte. Knip een vierkant van 2 bij 2 cm uit de hoek, zodat er een L-vorm ontstaat.

Als je de figuur netjes hebt uitgeknipt kun je hem uitvouwen en op roosterpapier leggen zoals in de figuur hiernaast.



b Bepaal de omtrek en de oppervlakte van de uitgeknipte figuur.

Vouw de figuur weer op tot de L-vorm.
Knip er een kleinere L van 1 cm breedte uit, zoals in het plaatje hieronder.

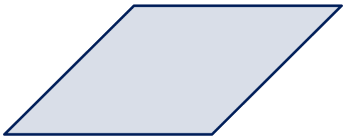


c Wat is de omtrek en de oppervlakte van de figuur die je krijgt door dit knipsel uit te vouwen?

Hint 1.

Als een gebied kleiner wordt in oppervlakte, kan de omtrek toch groter worden.

2



a Knip het parallellogram op het werkblad uit.
b Knip het met één keer knippen in twee stukken die je tot een rechthoek aan elkaar kunt leggen.

Er is ook een manier om het parallellogram met één knip tot een rechthoek te verknippen door in een andere zijde te beginnen.
c Laat zien hoe dat gaat.

Door het parallellogram op verschillende manieren te verknippen krijg je rechthoeken met dezelfde oppervlakte en verschillende omtrek.

Twee figuren met dezelfde oppervlakte kunnen verschillende omtrek hebben.

Bekend is de sage van koningin Dido.
Dido was gevlucht uit Tyrus en kwam aan land in het huidige Tunesië. Daar regeerde een koning, Hiarbas genaamd. Deze stond haar toe een stuk grond in gebruik te nemen zo groot als zij met een runderhuid kon omtrekken. Dido sneed daarop een huid in zeer smalle repen, legde deze reepjes achter elkaar en kon op die manier een aanzienlijk gebied voor haar nieuw te bouwen stad veroveren.

3 Wist je dat het mogelijk is om door een briefkaart van 15 bij $10{,}5$ cm heen te kruipen?

a Lees het stappenplan hieronder en voer de handelingen uit. Je hebt hiervoor nodig een briefkaart, geodriehoek, pen/potlood en schaar.

Stap 1:
Meet of schat je omtrek, dat kan met een meetlint (in dit voorbeeld 80 cm).

Stap 2:
Trek een oneven aantal evenwijdige lijntjes naast elkaar (in dit voorbeeld 15).

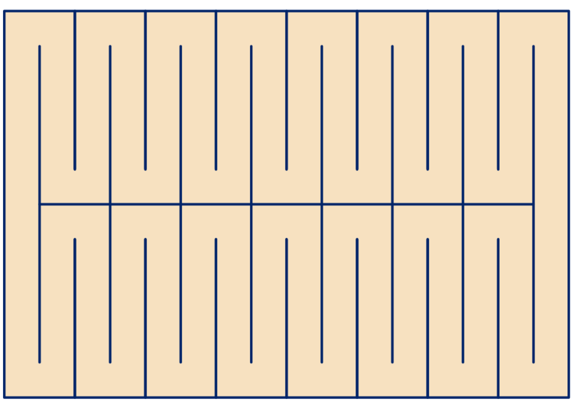
Stap 3:
Vouw de briefkaart dubbel en knip langs de twee lijnen die zich direct naast de korte zijden van de kaart bevinden. Begin bij de vouwlijn en knip niet door tot het eind: de laatste 5 à 10 mm knip je niet door, zodat de kaart een geheel blijft.

Stap 4:
Vouw de kaart open en knip langs de vouwlijn, maar pas op: de beide stroken aan de rand van de kaart moet je niet doorknippen.

Stap 5:
Trek de kaart voorzichtig uit elkaar.
Waar eerst de vouwlijn zat, ontstaat nu een gat.

Stap 6:
Als je het goed gedaan hebt is het gat groot genoeg om er doorheen te kruipen.

Erik heeft een briefkaart van 16 bij 11 cm en wil de opdracht uitvoeren. Hij meet met een meetlint zijn grootste omtrek bij zijn schouders: 125 cm. “Als het gat 150 cm is dan kan ik er door!”, zegt Erik. Hij zet 15 lijntjes en knipt steeds in tot 1 cm voor het eind, zie figuur.



[redacted]

b Lukt het Erik om er door heen te kruipen? Bereken daarvoor eerst de omtrek van het gat.

Hint 2.

Dolf denkt dat hij het gat zo groot zou kunnen maken dat er een olifant door heen moet kunnen. Hij moet dan alleen meer lijntjes trekken.

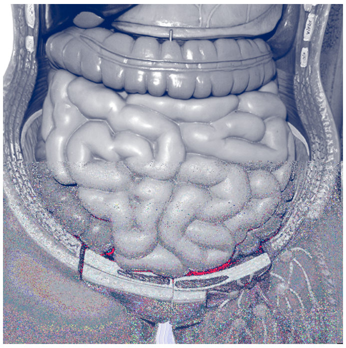
c Denk jij dat dat kan?

Bron: Pythagoras

Het is mogelijk om op een kleine oppervlakte een figuur met grote omtrek te tekenen.

Het cirkelvormig labyrint op de Waalkade in Nijmegen stamt uit 1982. Het heeft een diameter van 24 meter: één draaiend pad van basaltstenen, in totaal zo'n 240 meter lang. Aan weerszijden van het pad is water.
Je kunt op een beperkte oppervlakte een zeer lang pad leggen, als je het maar smal genoeg maakt (en veel kronkels aanbrengt).

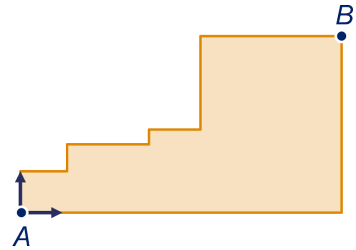
Voorbeelden in de natuur



- De lengte van de dunne darm van de mens is ruim 5 meter en heeft een oppervlakte van 150 à 200 m^2 (de grootte van een tennisveld). Dat hij toch in je buik past, komt doordat hij erg gekronkeld is. Ook is het oppervlak geen gladde buis, maar bestaat hij uit talloze plooien.
- De totale lengte van het menselijk bloedvatenstelsel is bijna 1500 km. Bij deze lengte zijn ook de kleinste haarvaten meegerekend.
- Als je alle zenuwbanen van het menselijk lichaam achter elkaar legt, blijkt de totale lengte van het perifere zenuwstelsel ongeveer 150.000 kilometer te zijn. Dat is bijna vier keer de aarde rond.

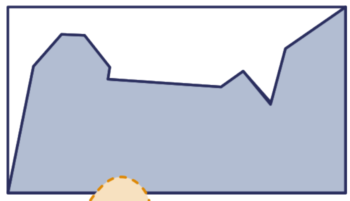
Omtrek

4 Bekijk de plattegrond. Iemand gaat van A naar B. Hij kan uit twee routes kiezen: linksom en rechtsom.



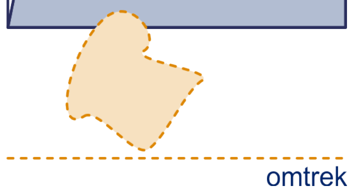
a Welke route is het langst? Waarom?

Een rechthoek is verdeeld in twee stukken. Het gekleurde deel is duidelijk groter dan het witte.



b Welk stuk heeft de grootste omtrek, het gekleurde of het witte?

De **omtrek** van een vlakke figuur is de totale lengte van de buitenkant.
Leg in gedachten een touwtje rond de figuur, precies over de rand.
Trek het touwtje strak en meet de lengte ervan op.
Zo kun je de omtrek van elke figuur bepalen.
Het is ook de afstand die je aflegt wanneer je over de rand rondom de figuur loopt.
Het woord omtrek is waarschijnlijk bedacht door Simon Stevin (1548-1620), een wiskundige en uitvinder uit Vlaanderen.



5

Oppervlakte van rechthoeken

7
a Weet je nog hoe je een oppervlakte van een rechthoek kan berekenen?
b Hoe bereken je de zijde van een vierkant als je de oppervlakte kent?

De snelweg tussen Arnhem en Nijmegen is 20 km lang en 18 meter breed.
c Wat zijn de afmetingen van het vierkant dat je met dezelfde hoeveelheid materiaal kunt asfalteren (even dik als op de snelweg)?

Hint 4.

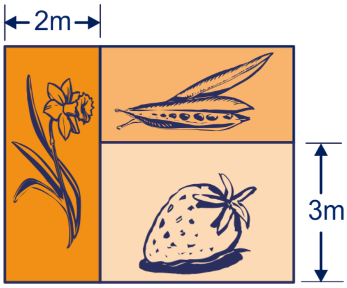
Van een rechthoek bereken je de oppervlakte door zijn lengte en breedte te vermenigvuldigen. Als de lengte en breedte gegeven zijn in cm, vind je de oppervlakte in cm^2. Als lengte en breedte gegeven zijn in m, vind je de oppervlakte in m^2, enz.

8
Een rechthoekig pleintje van 3 bij $1{,}5$ meter is betegeld. Een tegel is 1 bij 1 dm.
a Hoeveel tegels passen er langs een korte zijde van het plein? En hoeveel langs een lange zijde?
b Hoeveel tegels passen er op het plein?

De oppervlakte van één tegel is 1 dm^2.
c Hoeveel dm^2 is de oppervlakte van het plein?

9
Met tegels van 40 bij 60 cm kun je een terras van $4{,}20$ meter bij 8 meter leggen, zonder ze te snijden.
Hoe?

10
Een tuin heeft een oppervlakte van 30 m^2 en is verdeeld in drie rechthoekige stukken. Het stuk voor de bloemen is 2 m breed en heeft een oppervlakte van 10 m^2. Het stuk met de aardbeien is 3 m breed.
Hoeveel m^2 is het stuk voor de bonen?

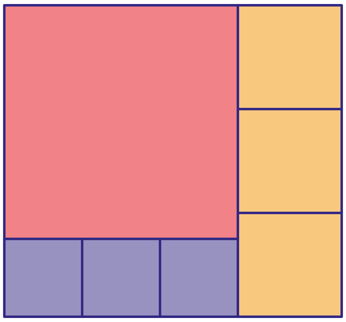


9

a Hoeveel tegels van a bij b passen op een rechthoek van $7a$ bij $3b$?

b Hoeveel blokken van a bij b bij c passen er in een doos van $2a$ bij $3b$ bij $4c$?

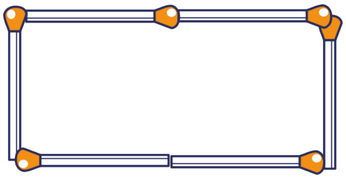
10



Een rechthoek is verdeeld in zeven vierkanten. De zijden van de oker vierkanten aan de rechterkant zijn allemaal 8.
Wat is de zijde van het grote rode vierkant?

Hint 5.

11



Alle rechthoeken die je van zes lucifers kunt maken hebben dezelfde vorm: twee lucifers lang en één lucifer breed.
Je moet nu een rechthoek maken van 14 lucifers.

a Teken alle mogelijke verschillende rechthoeken die je kunt maken.

Zeg dat de lengte van een lucifer 1 eenheid is.

b Wat is dan de oppervlakte van elk van die rechthoeken?

Tangram

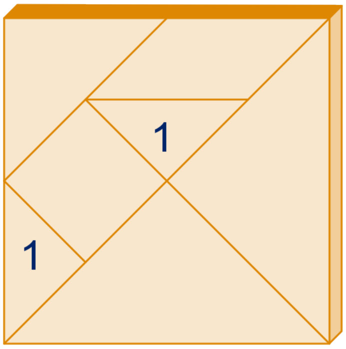
12 De Chinese wiskundige legpuzzel tangram bestaat uit zeven stukken. De kleinste twee zijn driehoeken. De oppervlakte van een zo'n driehoek noemen we 1.

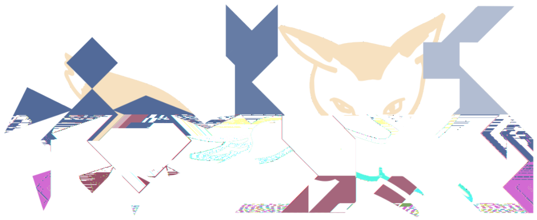
a Wat is dan de oppervlakte van de andere stukken?

Hint 6.

b Wat is de oppervlakte van het hele tangram?

c Knip het werkblad uit en probeer met de vormen de dieren na te maken.

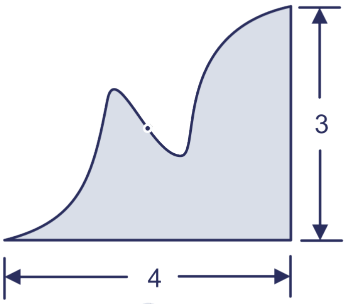




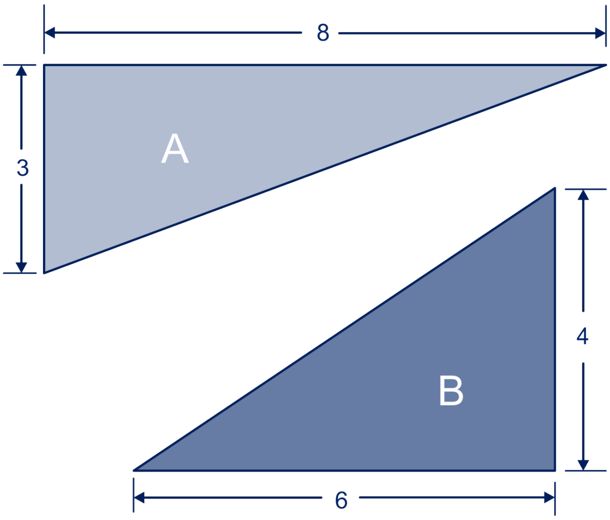
Verknippen tot rechthoeken

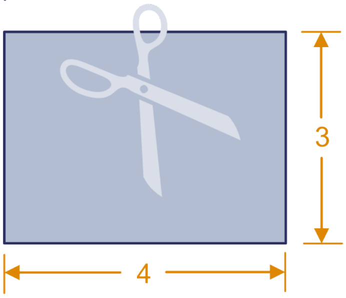
13 De bovenrand van de figuur is puntsymmetrisch. Het symmetriepunt is aangegeven.
Wat is de oppervlakte van de figuur?

Hint 7.



14 Je kunt een rechthoek van 3 bij 4 cm verknippen in twee stukken waarmee je driehoek A kunt leggen en ook in twee stukken waarmee je driehoek B kunt leggen.





a Geef op het knipblad de lijnen aan waarlangs je moet knippen.

Hint 8.

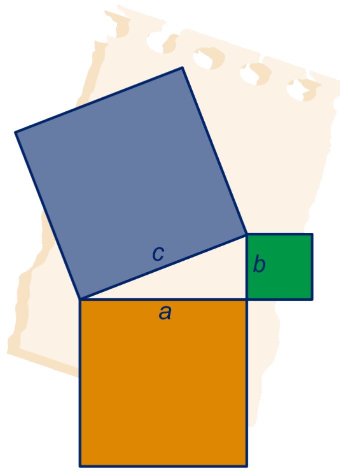
b Wat is de oppervlakte van de twee driehoeken?

Door een figuur te verknippen kan je soms een figuur leggen waarvan je de oppervlakte eenvoudiger kunt berekenen.

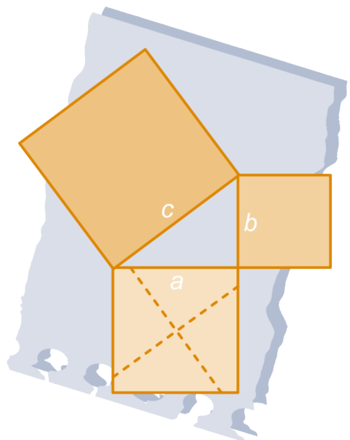
De stelling van Pythagoras bewijzen met knippen

15

Je kunt de stelling van Pythagoras voor de rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c algebraïsch maar ook met oppervlakte formuleren.
Algebraïsch:
$a^2 + b^2 = c^2$
Met oppervlakte:
de oppervlakte van de vierkanten op de rechthoekszijden samen is gelijk aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde.
In de figuur: de oppervlakte van het oker en het groene vierkant samen is gelijk aan de oppervlakte van het blauwe vierkant.



Aan het eind van de 19^{e} eeuw liet de amateur wiskundige Henry Perigal in zijn boek "Geometric disections and transpositions" het volgende zien.
Als je het oker vierkant volgens de stippellijnen verknipt, kun je met de stukken en het groene vierkant precies het blauwe vierkant bedekken.
Op die manier gaf hij een bewijs van de stelling van Pythagoras.



a Knip de figuren op het werkblad uit en laat zien hoe dat gaat.

Als het niet lukt, kun je de applet 'puzzle de Perigal' gebruiken.

Als je verder wil puzzelen: op het werkblad staat een tweede figuur zonder kniplijnen.

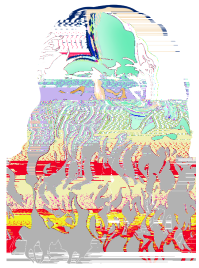
b Teken de kniplijnen van Perigal.

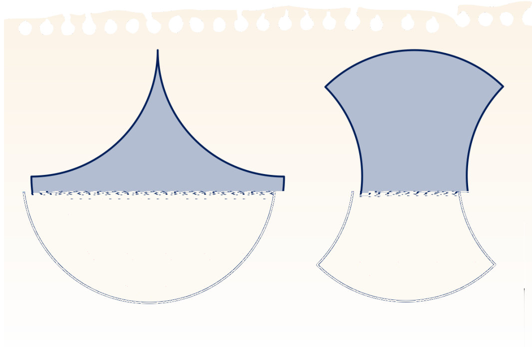
In het laatste onderdeel van deze paragraaf gaan we proberen om verknippen te gebruiken om delen van cirkels te verknippen tot eenvoudigere figuren.

Cirkels verknippen

16

Leonardo da Vinci verdeelde onderstaande figuren (hij noemde ze een paraplu en een bijl) in 3 delen en maakte er een vierkant van.



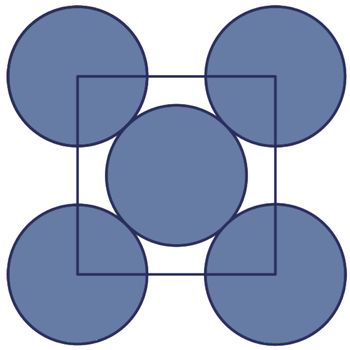


Hoe deed hij dat? Probeer deze puzzel op te lossen en treed Leonardo da Vinci's voetsporen.

17

De vijf even grote blauwe cirkels in de tekening raken elkaar. De middelpunten van de buitenste cirkels zijn de hoekpunten van een vierkant.
Welk deel van het blauwe gebied ligt binnen het vierkant?

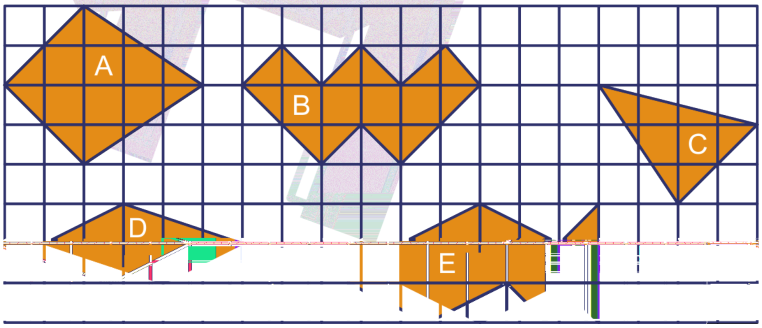
Hint 9.



Oppervlakte van roosterfiguren

18

Hoeveel hokjes zijn de vijf figuren A, B, C, D en E groot? Geef op het werkblad aan hoe je te werk bent gegaan.

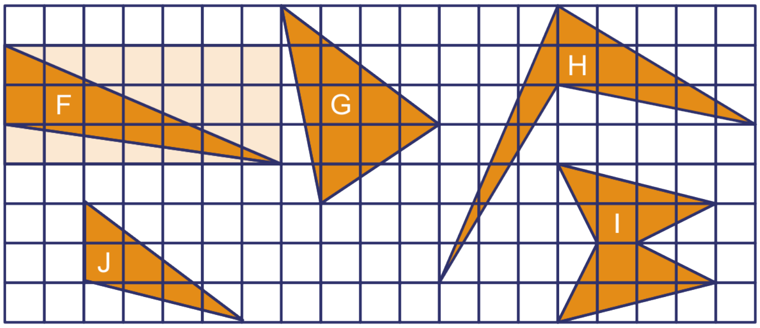


Waarschijnlijk heb je de figuren hierboven verdeeld in hele en halve hokjes of nog kleinere stukken. Twee halve hokjes zijn samen een heel hokje. Ook door de kleinere stukken samen te voegen probeer je hele hokjes te maken.

Soms is het handiger een rechthoek om de figuur heen te tekenen en de stukken die je dan te veel hebt van de rechthoek af te trekken.
Dat is bij figuur F hieronder gebeurd. Die rechthoek is 15 hokjes groot. Daarvan moet je dan de oppervlakte van de twee lichtgekleurde driehoeken aftrekken.

19

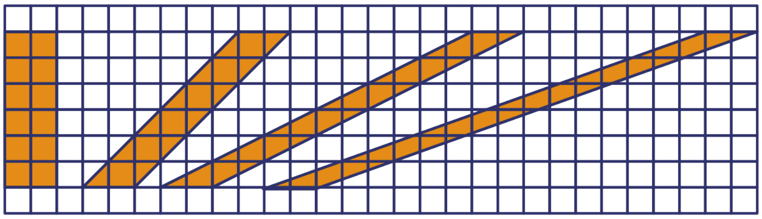
Hoeveel hokjes zijn de vijf figuren F, G, H, I en J groot? Geef op het werkblad aan hoe je te werk bent gegaan.



De oppervlakte van een parallellogram

20

Vier parallellogrammen in een rooster.

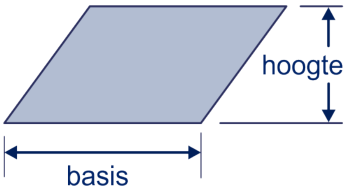


a Hoeveel hokjes is elk van de parallellogrammen groot?
Als je wilt, kun je van het werkblad gebruik maken.

Merk op dat de parallellogrammen even hoog zijn en aan de voet even breed (we zeggen dat ze gelijke bases hebben). Ze zijn wel verschillend van vorm, maar voor de oppervlakte doet dat er kennelijk niet toe.

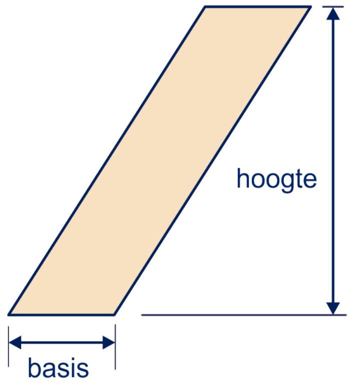
b Je hebt nu ontdekt (vul in):
als een parallellogram basis 2 (hokjes) heeft en hoogte 6 (hokjes), is de oppervlakte … hokjes.

De **oppervlakte van een parallellogram** met basis b en hoogte h is
basis · hoogte. In formule: $b \cdot h$.
Let op: de hoogte moet loodrecht op de basis gemeten worden.

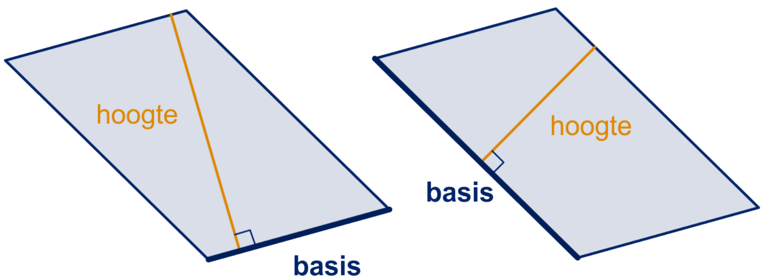


22 Het parallellogram in de figuur kun je met één knip tot een rechthoek verknippen als je de lange zijde als basis neemt. Als je de korte zijde als basis neemt, kan dat niet.
Verknip het parallellogram op het werkblad in twee keer knippen tot een rechthoek. De korte zijde van het parallellogram moet een zijde van de rechthoek zijn.

Opmerking
Als je bij het parallellogram van opgave 22 de korte zijde als basis neemt, kun je de bijbehorende hoogte niet binnen het parallellogram tekenen.

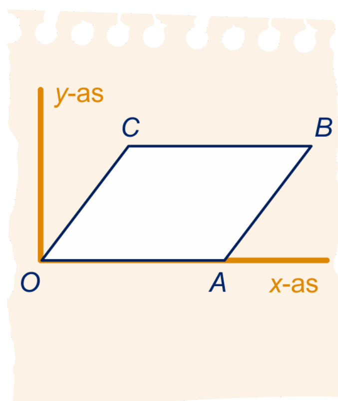


Bij een parallellogram kun je twee zijdes als basis kiezen. Als je de basis eenmaal gekozen hebt, heb je voor de hoogte geen keus.
In de figuur zijn de twee bases met kleur aangegeven en de bijbehorende hoogtes met dezelfde kleur.



23 Hiernaast is in een assenstelsel parallellogram $OABC$ getekend, met $A(6,0)$ en $C(3,4)$.

a Teken het parallellogram op roosterpapier.
b Wat zijn de coördinaten van B?
c Bereken de omtrek van het parallellogram.
Hint 10.

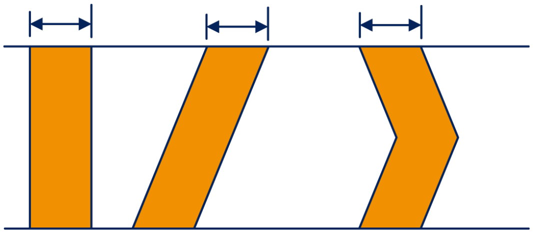


Om de oppervlakte van het parallellogram te berekenen, kun je OA als basis nemen.

d Hoe groot is dan de bijbehorende hoogte en wat vind je vervolgens voor de oppervlakte van het parallellogram?
Controleer je antwoord door hokjes te tellen.
e Bereken de hoogte van het parallellogram als je OC als basis kiest.
Teken deze hoogte in je figuur en meet of je antwoord overeen komt.

24

De drie stroken tussen de twee evenwijdige lijnen hebben aan de boven- en onderkant dezelfde breedte.

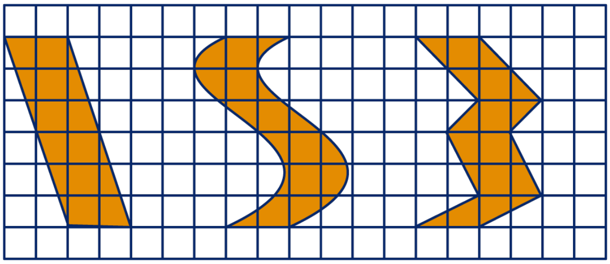


Welke strook heeft de grootste oppervlakte?

Kangoeroe 2003 bovenbouw hv, vraag 3

24

Drie figuren: een parallellogram, een slingerfiguur en een zigzag-figuur. Alle drie hebben ze hoogte 6 en ze hebben op elke hoogte breedte 2.



a Welk van de drie heeft de grootste oppervlakte? Licht je antwoord toe.

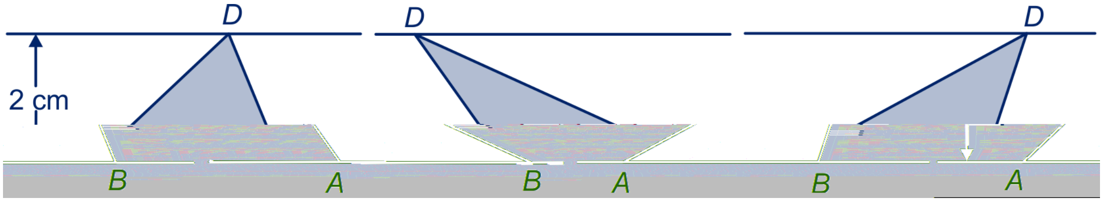
Een parallellogram heeft zijden 6 en 4 cm.

b Wat weet je van de oppervlakte van dat parallellogram?

De oppervlakte van een driehoek

25

Op het werkblad is drie keer een driehoek ABD getekend tussen twee evenwijdige lijnen die een afstand van 2 cm tot elkaar hebben. Het punt D beweegt over de bovenste lijn, de lengte van AB is in alledrie de driehoeken 3 cm.



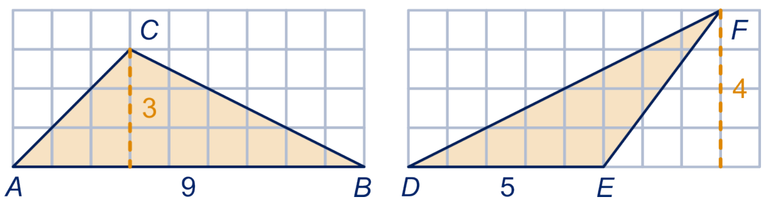
a Teken op het werkblad in elk van de gevallen het punt C (rechts van D) op de bovenste lijn zó, dat $ABCD$ een parallellogram is.

b Wat is de oppervlakte van de parallellogrammen $ABCD$? En van de driehoeken ABD?

26 Knip de zes driehoeken op het knipblad uit. Probeer de drie parallellogrammen te vinden.

Een driehoek is een half parallellogram. De formule om de oppervlakte te berekenen van een driehoek is dus $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.
Bij een driehoek kun je drie zijdes als basis kiezen. Als je de basis eenmaal gekozen hebt, heb je voor de hoogte geen keus.

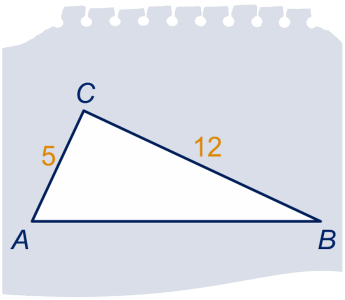
Voorbeeld
Op roosterpapier met hokjes van 1 cm^2 zijn de driehoeken ABC en DEF getekend.



Als je in driehoek ABC de zijde AB als basis neemt, is de hoogte 3, dus de oppervlakte van driehoek is: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = 13\frac{1}{2}$.
Als je in driehoek DEF de zijde DE als basis neemt, is de hoogte 4, dus de oppervlakte van driehoek is: $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$.

27 De driehoek in de figuur is rechthoekig in C. De rechthoekszijden zijn 5 en 12.

a Bereken AB.



Als je de oppervlakte van driehoek ABC wil berekenen, is het niet handig zijde AB als basis te nemen.

b Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

c Bereken de hoogte van driehoek ABC als je zijde AB als basis neemt.

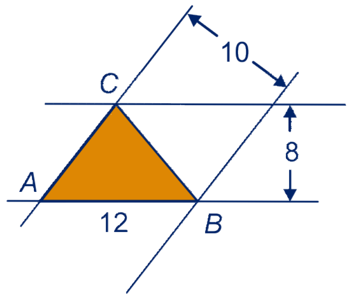
De oppervlakte van een driehoek vervolg

28 De gegevens staan in het plaatje.

a Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

Eén van de andere zijden van de driehoek kun je nu ook berekenen.

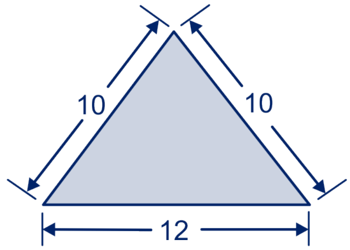
b Welke zijde? Hoe lang is die?



29 Hiernaast is een gelijkbenige driehoek getekend.
We gaan de oppervlakte van de driehoek berekenen. We kiezen als basis de zijde van lengte 12.

a Bereken met de stelling van Pythagoras de bijbehorende hoogte.

b Bereken de oppervlakte van de driehoek.

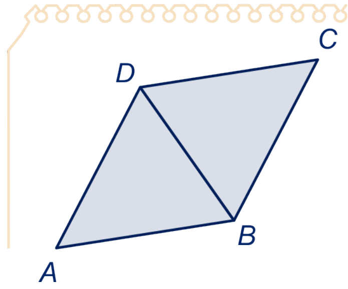


30 Hiernaast is een ruit getekend. De vier zijden hebben lengte $\sqrt{20}$ en de korte diagonaal $BD = 4$.
De diagonalen in een ruit delen elkaar doormidden en staan loodrecht op elkaar.

a Bereken de lengte van de lange diagonaal.

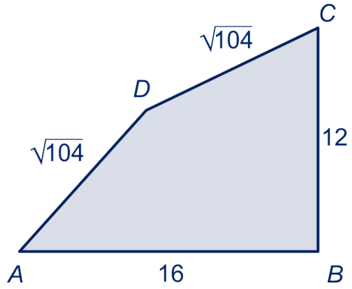
Hint 11.

b Bereken de oppervlakte van de ruit.



30 $ABCD$ is een vierhoek met een rechte hoek in B. De lengten van de zijden staan in de figuur.
Bereken de oppervlakte van de vierhoek.

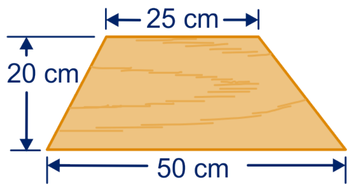
Hint 12.



De oppervlakte van een trapezium

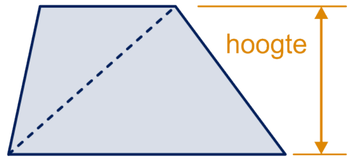
31 Een timmerman heeft uit een plank van 20 cm breed een trapezium gezaagd; zie plaatje.
Bereken de oppervlakte van het trapezium.

Hint 13.

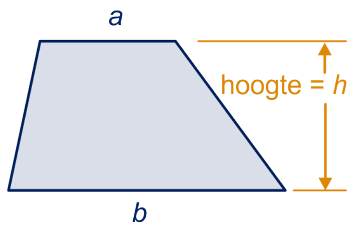


Een trapezium kun je verdelen in twee driehoeken, zie figuur. Als je de zijden boven en onder als basis neemt, vind je voor de oppervlakte van het trapezium:

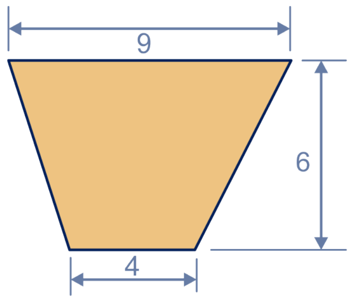
$\frac{1}{2}\times$ zijde boven $\times$ hoogte $+$ $\frac{1}{2}\times$ zijde onder $\times$ hoogte $=$
$\frac{1}{2}\times$ hoogte $\times$ (zijde boven $+$ zijde onder).



De evenwijdige zijden van een trapezium hebben lengte a en b en bijbehorende hoogte van het trapezium is h.
De oppervlakte van het trapezium is dan: $\frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$.



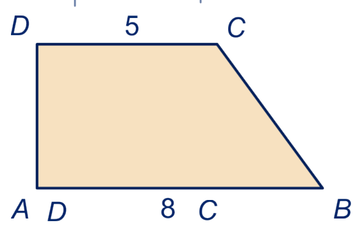
Voorbeeld
Het trapezium hiernaast heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (9 + 4) = 39$.



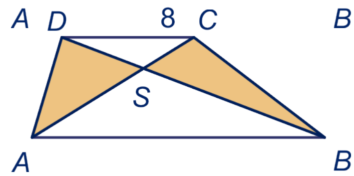
32 Het trapezium hiernaast heeft twee rechte hoeken. De evenwijdige zijden hebben lengte 8 en 5. De oppervlakte van het trapezium is 26.

a Bereken de hoogte van het trapezium.

b Bereken de omtrek van het trapezium.



32 $ABCD$ is een trapezium (AB en CD zijn evenwijdig).
Beredeneer dat de driehoeken ASD en BSC dezelfde oppervlakte hebben.



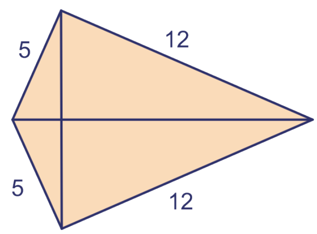
De oppervlakte van een vlieger

33 Een vlieger heeft twee rechte hoeken en zijden van 5 en 12 cm.

a Bereken de oppervlakte van de vlieger.

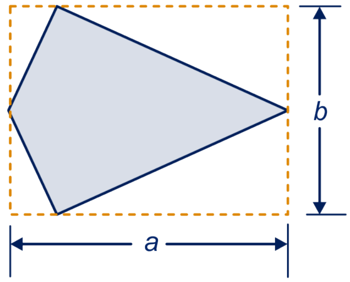
b Bereken de lengte van de lange diagonaal.

c Bereken de lengte van de korte diagonaal.



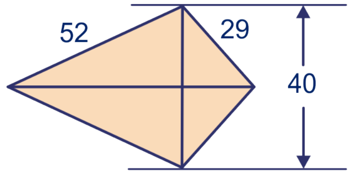
Wanneer je bij opgave 33 het antwoord van **b** en **c** met elkaar vermenigvuldigt krijg je het dubbele van het antwoord bij **a**.
Dat is geen toeval. Door handig knippen zie je dat de vlieger tweemaal in een rechthoek past.

Een vlieger is een halve rechthoek.
De oppervlakte van een vlieger is de helft van het product van de diagonalen, dus $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.



34 De zijden van een vlieger zijn 29 cm en 52 cm. Het korte dwarslatje is 40 cm.

a Bereken de lengte van het andere latje.

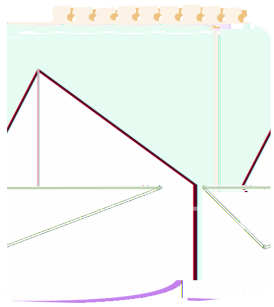


De vlieger is uit een rechthoekig stuk papier geknipt; zie het plaatje.

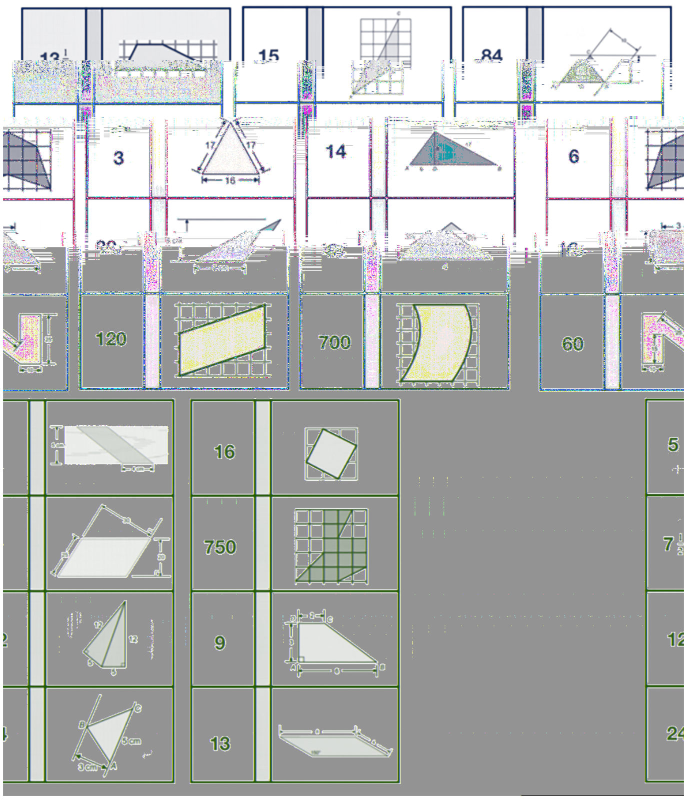
b Hoe groot is de oppervlakte van dat stuk papier?

c Hoe groot is de oppervlakte van de vlieger?

35 De diagonalen van een vierhoek staan loodrecht op elkaar. De ene diagonaal is 3 cm lang en de andere 4 cm.
Bereken de oppervlakte van de vierhoek.

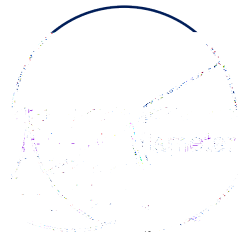


Wil je meer oefenen met oppervlaktes berekenen?
Probeer dan eens de domino: ‘Oppervlaktes berekenen.’



De omtrek en de oppervlakte van een cirkel

In hoofdstuk 12 hebben we kennis gemaakt met het getal π.
π is het getal dat we krijgen wanneer we de omtrek van een cirkel delen door de diameter van die cirkel. Anders gezegd:
De omtrek van een cirkel is $\pi \times$ de diameter van de cirkel.



36

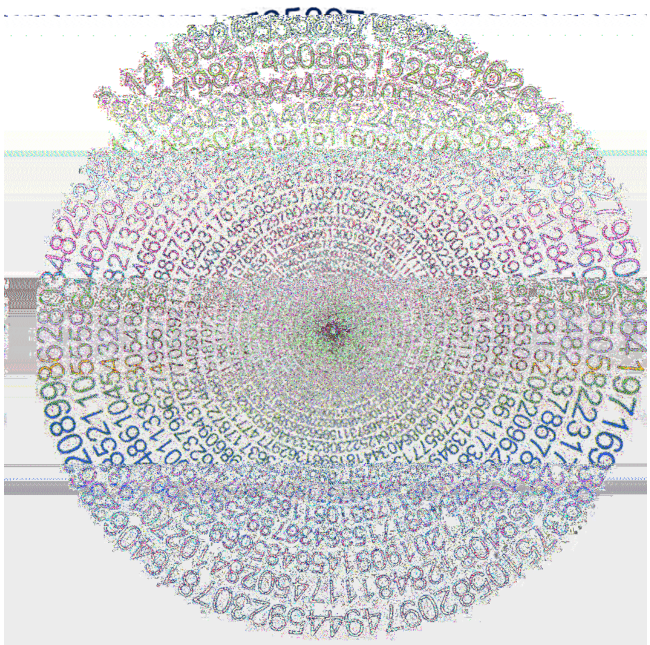
name: optional file: optional state: unknown

Neem enkele voorwerpen die op zekere plaats een cirkelvormige doorsnede hebben (bijvoorbeeld een fles, een colablikje,...). Span er op die plaats een draadje om.
Schrijf steeds het getal op dat je vindt door de lengte van het draadje te delen door de diameter van de cirkel.

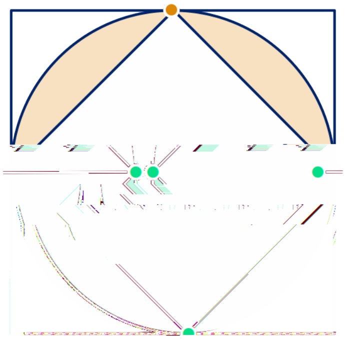
Als je bij het maken van de vorige opgave nauwkeurig hebt gemeten en gerekend, heb je steeds een getal van ongeveer $3{,}1$ gevonden, dat is een benadering van π.
Een betere benadering van π vind je op je rekenmachine:
$\pi \approx 3{,}14$.

π is een irrationaal getal, het heeft dus (oneindig) meer decimalen dan je rekenmachine kan geven. En er valt geen regelmaat in te ontdekken.
Als een antwoord exact gevraagd wordt laat je π in je antwoord staan.

Hieronder zie π uitgeschreven in een aantal decimalen.



37

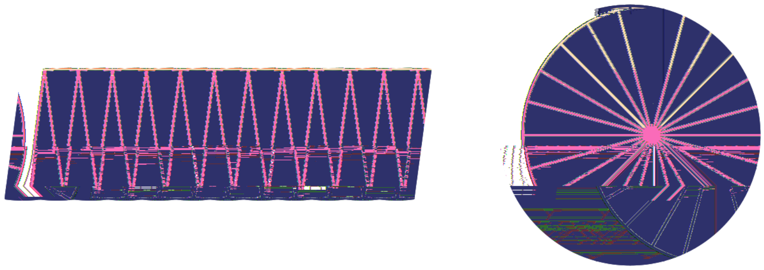


De cirkel in het plaatje heeft straal r. De vier hoekpunten van het kleine vierkant liggen op de cirkel; het zijn de middens van de vier zijden van het grote vierkant.

a Druk de oppervlaktes van het kleine en het grote vierkant uit in r.

De oppervlakte van een cirkelschijf met straal r ligt dus tussen $2r^2$ en $4r^2$.

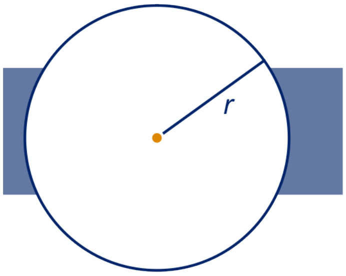
b Knip de cirkel op het werkblad in sectoren en leg daarvan een strook zoals in de figuur is voorgedaan.



Als je de cirkel in nog meer sectoren verdeelt, lijkt de strook nog meer op een rechthoek.

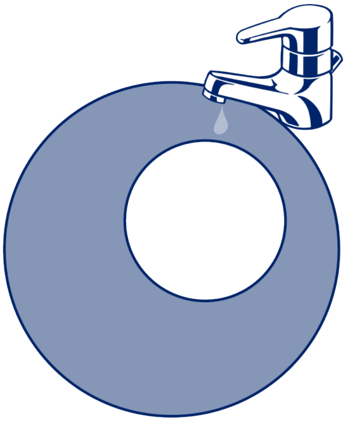
c Wat is de oppervlakte van de rechthoek, die ontstaat uit een cirkel met een straal van 2 cm? Laat π in je antwoord staan. En van een rechthoek die ontstaat uit een cirkel met straal 5 cm?

De **omtrek van een cirkel** met straal r is $2\pi r$ (of π × diameter).
De **oppervlakte van een cirkel** met straal r is πr^2.

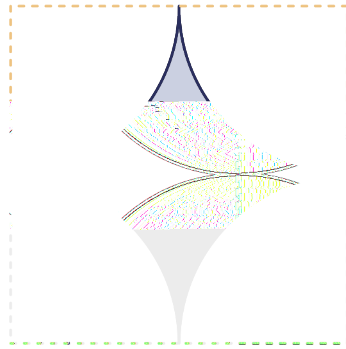


38

In een cirkelvormig bad ligt een cirkelvormig eiland. De diameters van de cirkels zijn 100 en 50 meter.
Bereken de wateroppervlakte exact en geef daarna een benadering in m^2.



39 Van een vierkant van 4 bij 4 zijn van de hoeken kwartcirkels afgeknipt, met een straal van 2.
Bereken exact de oppervlakte van het stervormige figuur dat overblijft.



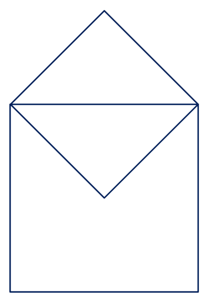
40 De fraaie figuur wordt begrensd door halve cirkels. De grootste breedte van de figuur is 4 cm.

- **a** Bereken de oppervlakte exact en geef een benadering in mm^2 nauwkeurig.
- **b** Bereken de omtrek van de figuur exact en geef een benadering in mm nauwkeurig.

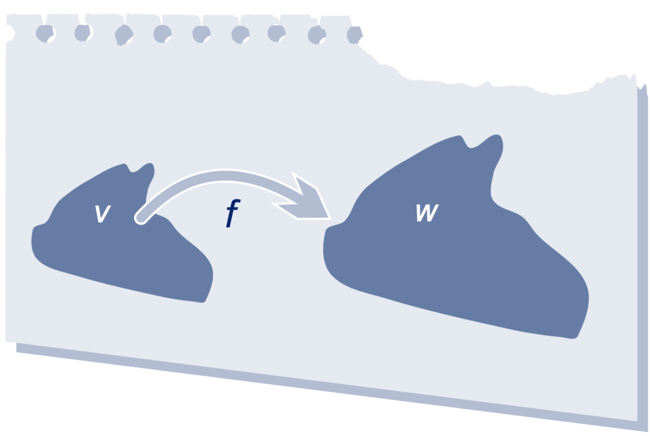
Vergrotingsfactor

41 In de figuur hiernaast zijn twee vierkanten getekend. De zijden van het kleine vierkant zijn 1.

- **a** Bereken met verknippen de oppervlakte van het grote vierkant.
- **b** Wat is de zijde van het grote vierkant exact?



Het kleine vierkant van opgave 41 wordt met factor f vermenigvuldigd tot het grote vierkant.
Er geldt: $f^2 = 2$, dus $f = \sqrt{2}$.



Als je figuur V met factor f vergroot tot figuur W, dan is:

- omtrek $W = f \cdot$ omtrek V;
- oppervlakte $W = f^2 \cdot$ oppervlakte V.

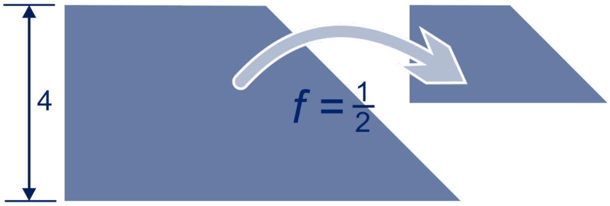
Voorbeeld

Neem aan: omtrek $V = 10$, oppervlakte $V = 16$ en de vergrotingsfactor $f = 1{,}5$.

Dan is

- de omtrek van $W = 1{,}5 \cdot 10 = 15$ en
- de oppervlakte van $W = 1{,}5^2 \cdot 16 = 36$.

42 Het rechthoekig trapezium met hoogte 4 en oppervlakte 24 wordt met factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.



a Bereken de oppervlakte van het kleine trapezium.

Het kleine trapezium past ook precies vier keer in het grote.

b Laat op het werkblad zien hoe dat gaat. Knip eventueel de kleine trapezia uit.

De hoogte van het grote trapezium is 4 en de zijde boven is de helft van de zijde onder.

c Bereken hoe lang die zijden zijn.

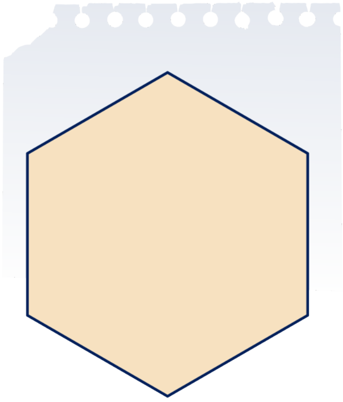
Hint 14.

43 Hiernaast is een regelmatige zeshoek getekend met zijden van lengte 2. Je kunt de zeshoek verdelen in gelijkzijdige driehoeken met zijde 2.

a Hoeveel?

b Bereken de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 2, zie bijvoorbeeld opgave 29.

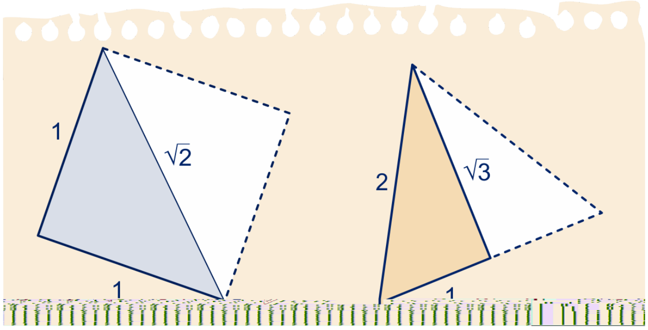
c Wat is de oppervlakte van de regelmatige zeshoek?



In de vorige 2 opgaven hebben we het vierkant en de regelmatige driehoek bekeken. We kunnen die doorzagen tot speciale rechthoekige driehoeken.

Speciale driehoeken

Herhaling



De zijden van een 30-60-90-graden driehoek verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.
De zijden van een 45-45-90-graden driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.

Opmerking
Een 30-60-90-graden driehoek noemen we ook een halve regelmatige driehoek en een 45-45-90-graden driehoek een half vierkant.

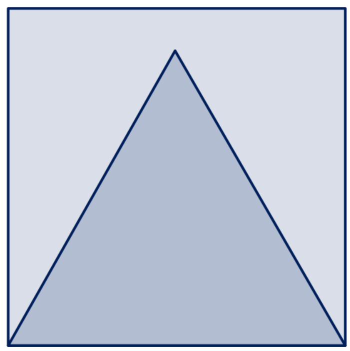
44

Hiernaast is een gelijkzijdige driehoek in een vierkant getekend. Twee hoekpunten van het vierkant zijn ook hoekpunten van de driehoek. De oppervlakte van het vierkant is 16.

a Bereken de oppervlakte van de driehoek.

Welk deel heeft een grotere oppervlakte, het lichte deel of het donkere deel?

b Kun je dat zonder te rekenen bepalen?



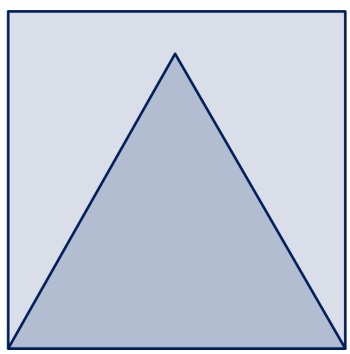
44

Hiernaast is een gelijkzijdige driehoek in een vierkant getekend. Twee hoekpunten van het vierkant zijn ook hoekpunten van de driehoek. De oppervlakte van de driehoek is $100\sqrt{3}$.

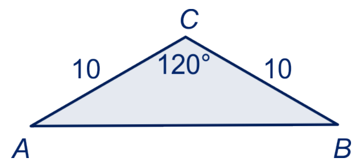
a Bereken de oppervlakte van het vierkant.

Welk deel heeft een grotere oppervlakte, het lichte deel of het donkere deel?

b Kun je dat zonder te rekenen bepalen?

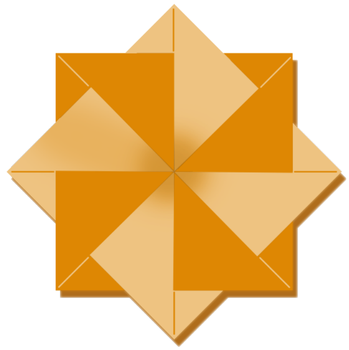


45 De gegevens van driehoek ABC staan in de figuur.
Bereken AB en de oppervlakte van driehoek ABC exact.



46 **Onmogelijk?**

In de figuur zie je een platte ster gemaakt van papier. De ster is samengesteld uit twee verschillende vierkanten. Die zijn met een schaar op een paar plaatsen ingeknipt, en daarna in elkaar geschoven met deze figuur als resultaat.



a Kun je deze ster namaken zonder te verknippen tot losse stukken?

Hint 15.

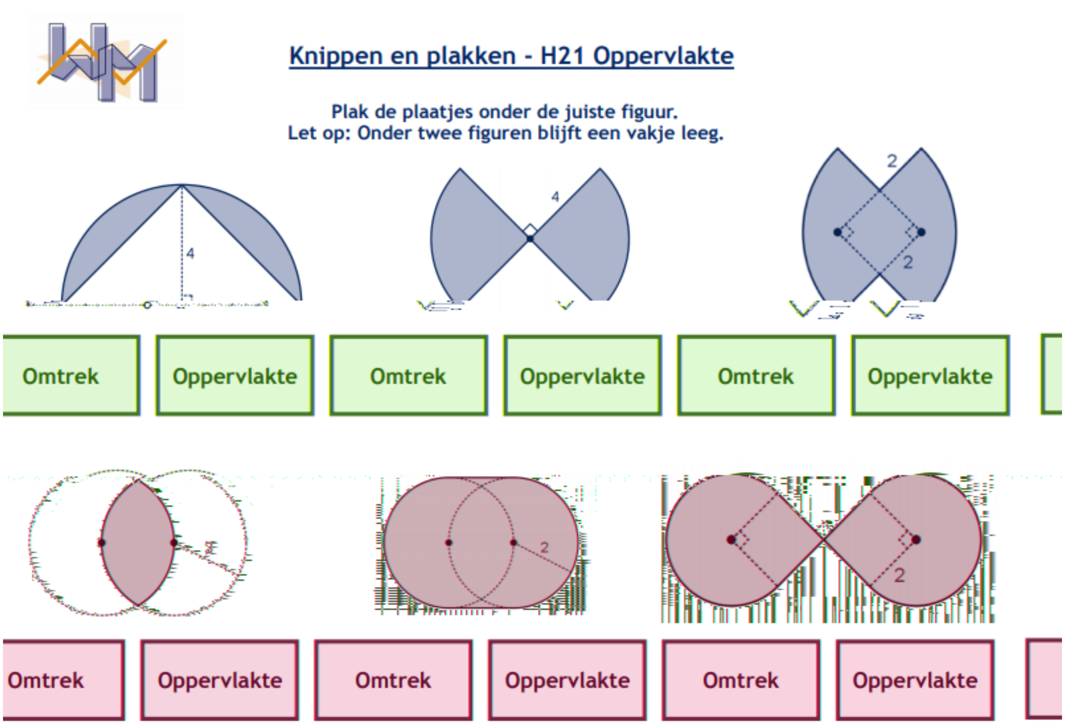
b Welk deel heeft een grotere oppervlakte? Het donkere of het lichte deel?

We kijken naar de achthoekige stervorm als een geheel.
Gegeven is dat de zijden van de stervorm 1 cm zijn.

c Kan je de omtrek van een van de vierkanten berekenen?

Hint 16.

Wil je meer oefenen met cirkels en speciale driehoeken?
Probeer dan eens het werkblad: ‘Knippen en plakken: Oppervlaktes.’

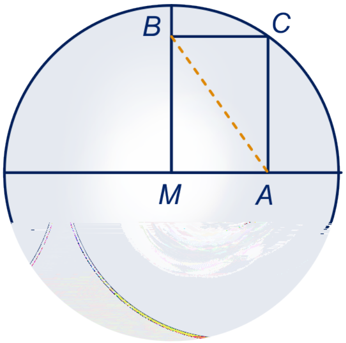


Sangaku

Sangaku zijn Japanse meetkundige puzzels, in kleur geschilderd op houten tafels. Ze werden opgehangen in tempels in de periode 1603-1867.

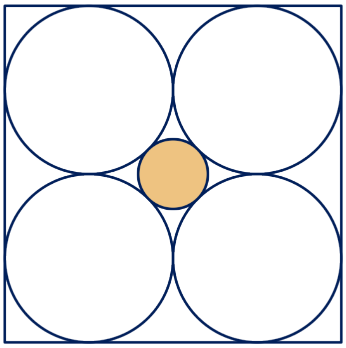
Deze paragraaf gaan we er een aantal van bekijken.

47 De straal van de cirkel is 3 en $ABCM$ is een rechthoek.
Wat is de lengte van lijnstuk AB?



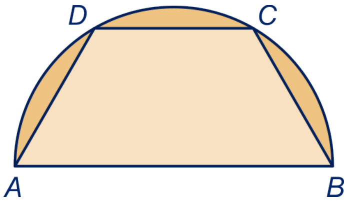
48 De vier cirkels raken een cirkeltje met middelpunt M. Het vierkant heeft zijden van 4 en raakt de vier cirkels.
Hoe groot is dan de straal van het cirkeltje?

Hint 17.



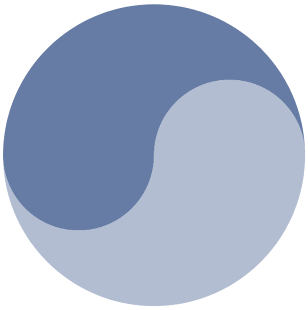
49 In een halve cirkel met straal 2 ligt een trapezium $ABCD$ met $AD = DC = CB$.
Bereken de oppervlakte van $ABCD$.

Hint 18.



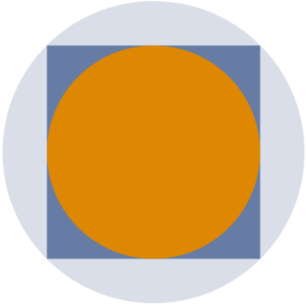
50 De cirkel hiernaast is door middel van cirkelbogen in drie stukken verdeeld. Daarbij wordt de (denkbeeldige) horizontale middellijn in drie precies even grote stukken gesneden.
Erik beweert dat de stukken gelijke oppervlaktes hebben.
Reken na of hij gelijk heeft.

51 Nevenstaande figuur is het bekende Yin-Yang figuur.
Hoe kun je deze figuur (met alleen een liniaal en passer) in twee gelijke oppervlakten verdelen?



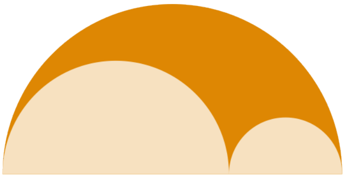
52 De ingeschreven cirkel van een vierkant is met oker getekend.
De omgeschreven cirkel van een vierkant is met lichtgrijs getekend.
Bereken exact de relatie tussen beide cirkels.

Hint 19.



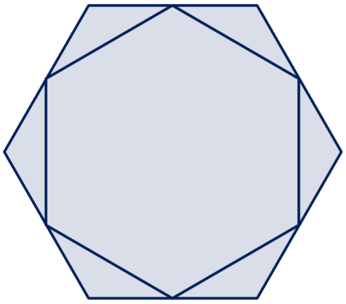
53 **De sikkel van Archimedes**
Een oker gekleurde halve cirkel met een diameter van 4 wordt bedekt door twee halve cirkels waarvan de som van de diameters ook 4 is.
Bereken de omtrek van het oker gekleurde gebied exact.

Hint 20.

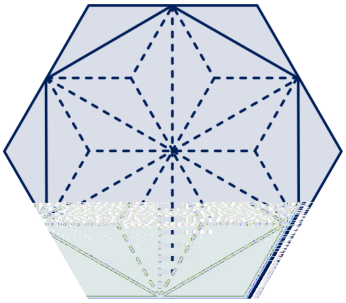


54 De middens van de zijden van een regelmatige zeshoek worden met elkaar verbonden en vormen zo weer een regelmatige zeshoek. De zijde van de oorspronkelijke zeshoek is 2.

a Bereken de oppervlakte van de oorspronkelijke zeshoek.

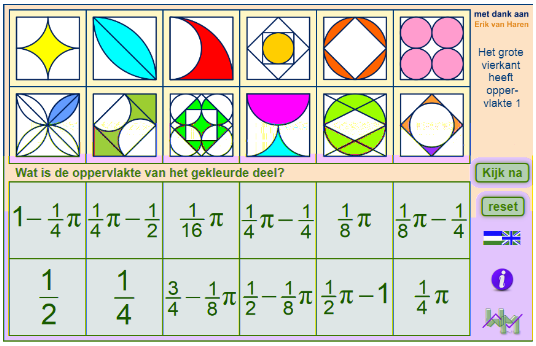


De figuur is te verknippen in identieke gelijkbenige driehoekjes, zie het plaatje hieronder.



b Bereken de oppervlakte van deze nieuwe zeshoek.

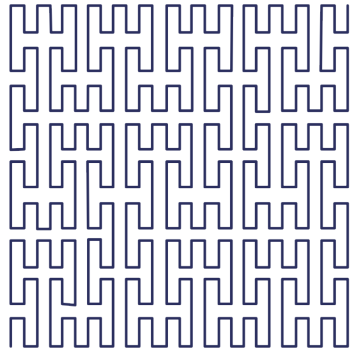
Nog meer oefenen met sangaku kan je in de mini-loco app:
'Oppervlakte van (delen van) cirkels in een vierkant.'



21.8 Eindpunt

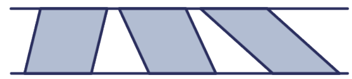
grote lengtes op kleine oppervlakte

Op bijvoorbeeld één A4-velletje papier (van 21 bij 30 cm) kan wel een kilometers lange lijn getekend worden.
Dat lukt als de lijn maar genoeg kronkelt.



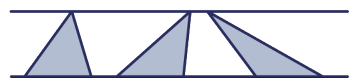
oppervlakte van een parallellogram

Van een parallellogram kun je een rechthoek maken.
Voor de oppervlakte van een parallellogram zijn alleen de basis en de hoogte van belang; niet hoe groot de hoeken zijn.
Deze parallellogrammen hebben gelijke oppervlakte.
Je kunt bij een parallellogram voor de basis uit twee zijdes kiezen; de bijbehorende hoogte staat daar loodrecht op.
De oppervlakte is basis $\times$ hoogte.



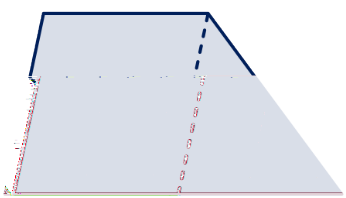
oppervlakte van een driehoek

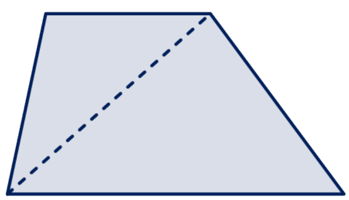
Een driehoek is een half parallellogram.
Voor de oppervlakte van een driehoek zijn alleen de basis en de hoogte van belang; niet hoe groot de hoeken zijn.
Deze driehoeken hebben gelijke oppervlakte.
Je kunt bij een driehoek voor de basis uit drie zijdes kiezen; de bijbehorende hoogte staat daar loodrecht op.
De oppervlakte is $\frac{1}{2}$ $\times$ basis $\times$ hoogte.



trapezium

Een trapezium kun je opsplitsen in een parallellogram plus een driehoek. Zie plaatje hieronder links.



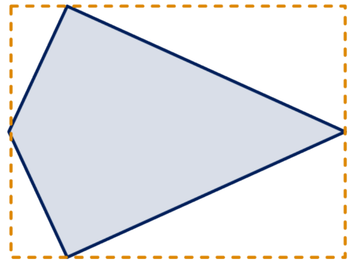


Je kunt een trapezium ook verdelen in twee driehoeken. Zie plaatje rechts hierboven.
De oppervlakte van een trapezium is dus:

$\frac{1}{2}\times$ basis boven $\times$ hoogte $+$ $\frac{1}{2}\times$ basis onder $\times$ hoogte $=$
$\frac{1}{2}\times$ hoogte $\times$ (basis onder $+$ basis boven).

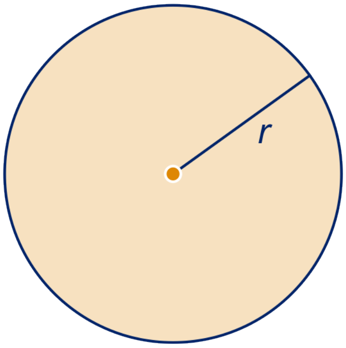
vlieger

Een vlieger is een halve rechthoek.
De oppervlakte van een vlieger is $\frac{1}{2} \times$ korte diagonaal $\times$ lange diagonaal.



cirkel

De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2 en de omtrek is $2\pi r$.

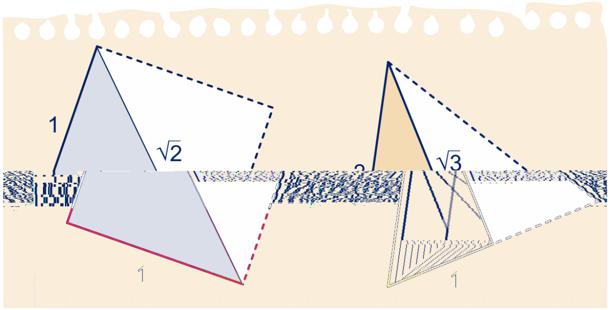


π exact

π is een irrationaal getal.
Als een antwoord exact gevraagd wordt laat je π in je antwoord staan.

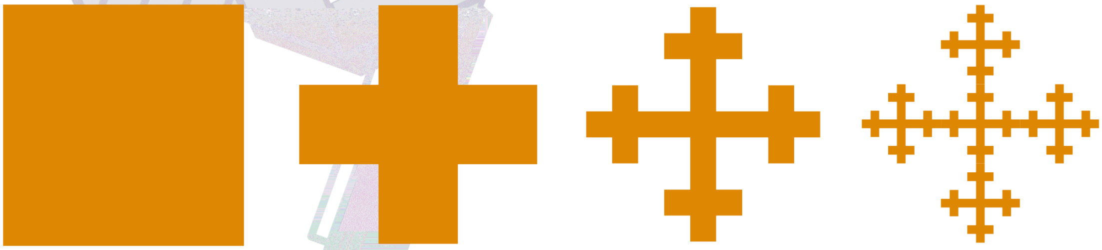
Speciale driehoeken

De zijden van een 45-45-90-graden driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.
De zijden van een 30-60-90-graden driehoek verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.



Intro: grote lengtes klein oppervlak

1 Bekijk de volgende reeks figuren.



We nemen voor de zijde van het beginvierkant 9.

a Bereken de omtrek en de oppervlakte van het beginvierkant.

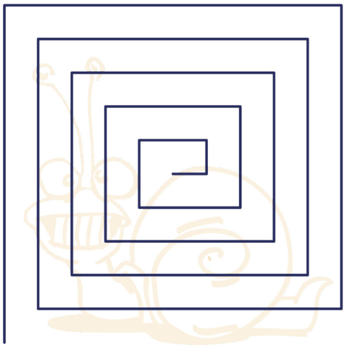
De tweede figuur ontstaat door bij de hoeken van het beginvierkant vier kleinere vierkanten af te halen. De zijden van de kleinere vierkanten zijn 3 eenheden.

b Bereken de omtrek en de oppervlakte van de tweede figuur.

c Bereken de omtrek en de oppervlakte van de derde figuur.

Hint 21.

2 Het kleinste rechte stukje in de spiraal is 5 mm. Alle andere rechte stukken zijn veelvouden hiervan.



a Hoe lang is de spiraal?

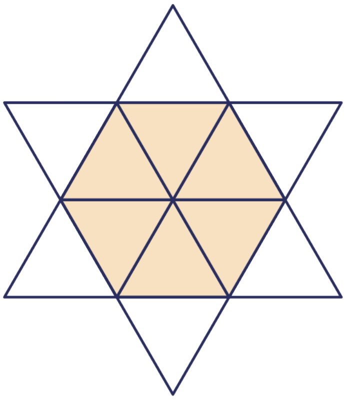
Hint 22.

b Wat is de oppervlakte van het kleinste vierkant waar de spiraal in past?

Omtrek en oppervlakte

3 De ster is gemaakt van twaalf gelijkzijdige driehoekjes, dat zijn driehoekjes waarvan alle zijden even lang zijn. De omtrek van de ster is 36 cm.

Hoeveel cm is de omtrek van de oker zeshoek?

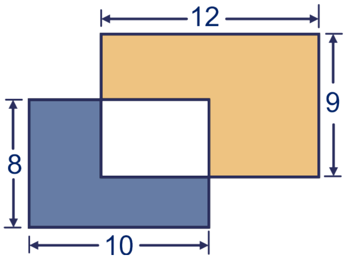


Hint 23.

4 Een vierkant terras van 6 bij 6 meter is betegeld met rechthoekige tegels. Er liggen 8 rijen van elk 12 tegels.
Wat is de oppervlakte van één tegel?

5 Twee rechthoeken, één van 8 bij 10 en één van 9 bij 12, liggen voor een deel over elkaar.
Het blauwe gebied heeft oppervlakte 37.
Wat is de oppervlakte van het oker gekleurde gebied?

Hint 24.

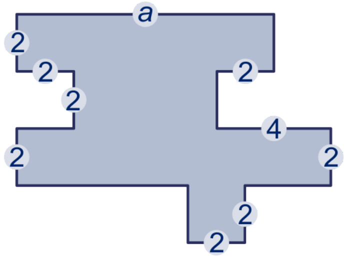


Figuren verknippen

6 Je ziet hier de plattegrond van een kamer. Alle hoeken zijn recht. Enkele afmetingen van de kamer zijn gegeven.

a Kun je de figuur zó verknippen dat je met de stukken een eenvoudiger figuur kunt leggen?

b Wat is de oppervlakte van de kamer, uitgedrukt in a?

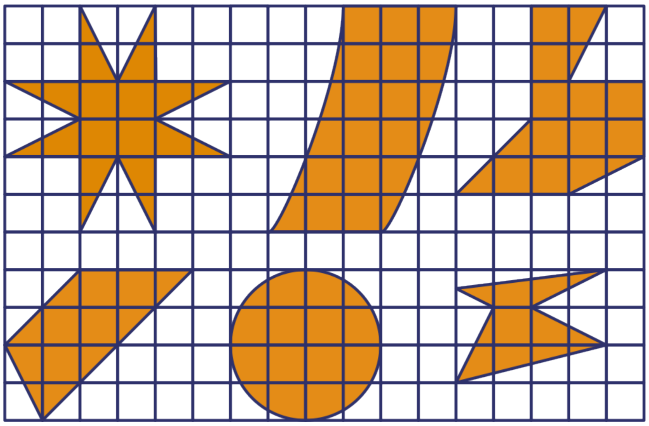


7 Drie halve cirkelbogen met straal 1 cm. De bovenste loopt tussen de hoogste punten van de andere twee halve cirkels.
Bereken de oppervlakte van het donkerblauw gekleurde gebied.

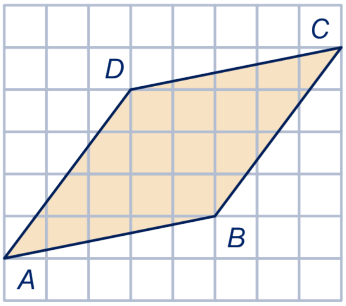
Hint 25.

Oppervlakte van parallellogram en driehoek

8 In het rooster zijn zes figuren getekend. We nemen een hokje van het rooster als eenheid van oppervlakte.
Hoeveel hokjes is elk van de figuren groot?
Als je wilt, kun je het werkblad gebruiken.



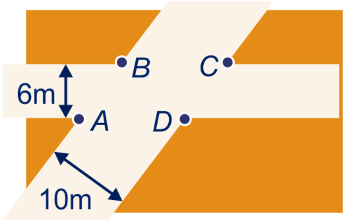
9 In het rooster is parallellogram $ABCD$ getekend.



a Bereken de oppervlakte van het parallellogram met hokjes tellen.

b Als je BC als basis van parallellogram $ABCD$ neemt, hoe groot is dan de bijbehorende hoogte?

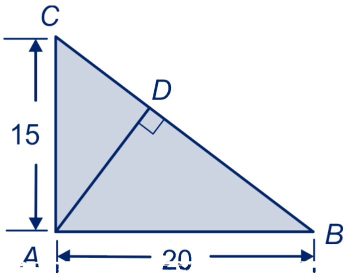
10 We bekijken een kruising van twee wegen. De wegen zijn 6 en 10 meter breed.
Op de hoeken staan vier lantaarnpalen: A, B, C en D.
A en B staan $7{,}5$ meter van elkaar af.



a Wat is de oppervlakte van het kruispunt $ABCD$?

b Hoever staan B en C van elkaar af?

11 Driehoek ABC is rechthoekig in A.



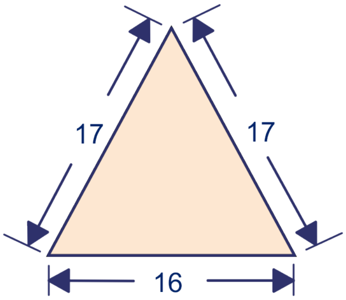
a Bereken BC.

b Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

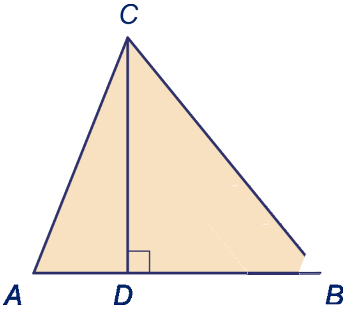
De lijnen AD en BC staan loodrecht op elkaar.

c Bereken AD met behulp van de oppervlakte van driehoek ABC.

12 Bereken de oppervlakte van de driehoek met zijden 16, 17 en 17.



13 $AB = 14$, $BC = 15$ en de oppervlakte van driehoek ABC is 84.



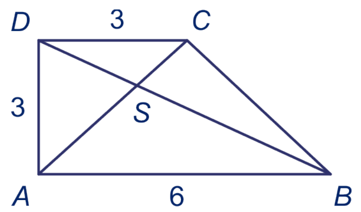
a Bereken CD.

b Bereken BD en AD.

c Bereken AC.

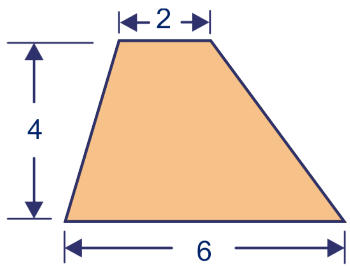
Allerlei figuren

14 Het trapezium $ABCD$ heeft twee rechte hoeken. $AD = DC = 3$ en $AB = 6$.
S is het snijpunt van de diagonalen. Door de diagonalen wordt het trapezium in vier driehoeken verdeeld.



a Waarom zijn de driehoeken ABS en CDS gelijkvormig?
b Wat zijn de hoogtes van deze driehoeken?
c Wat zijn de oppervlaktes van deze driehoeken?
d Bereken de oppervlaktes van de driehoeken ADS en BCS.

15 Het trapezium in de tekening heeft hoogte 4. De evenwijdige zijden zijn 2 en 6 lang.

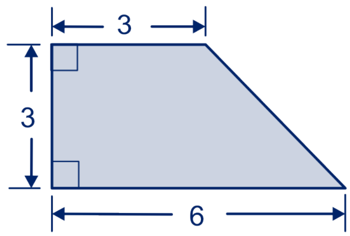


a Bereken de oppervlakte door het in een parallellogram en een driehoek te verdelen.
b Bereken de oppervlakte van het trapezium ook door het in twee driehoeken te verdelen.

Het kan nog anders. Je kunt naast het trapezium net zo'n trapezium tekenen, maar dan op zijn kop, zo dat ze samen een parallellogram vormen.

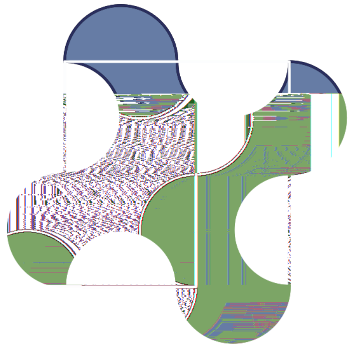
c Bereken de oppervlakte van het trapezium ook op deze manier.

16 Het trapezium heeft twee rechte hoeken. Van drie zijden is de lengte gegeven.
Bepaal de oppervlakte van het trapezium.



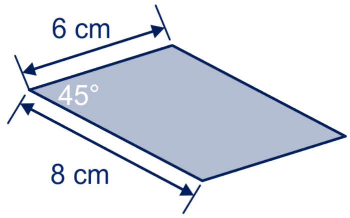
Cirkels en speciale driehoeken

17 De rand van de figuur bestaat uit halve cirkels, met straal 1 cm.
a Wat is de omtrek van de figuur?
b Wat is de oppervlakte van de figuur?



21.9 Extra opgaven

18 Bekijk het parallellogram met zijden van 6 en 8 cm. De hoek tussen die zijden is $45°$.



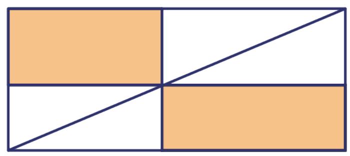
a Kies een basis, bereken de bijbehorende hoogte en bereken de oppervlakte van het parallellogram.

b Teken een parallellogram met zijden 6 en 8 cm en hoek tussen die zijden van 60°.

c Bereken de oppervlakte van dat parallellogram.

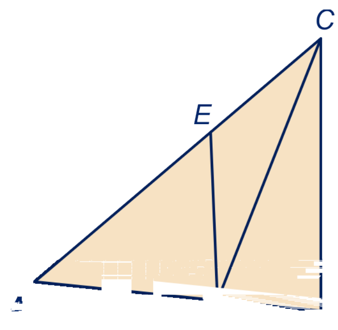
Gemengde opgaven

19 De twee oker gekleurde rechthoeken binnen de grote rechthoek hebben dezelfde oppervlakte.
Leg dat uit.



Hint 26.

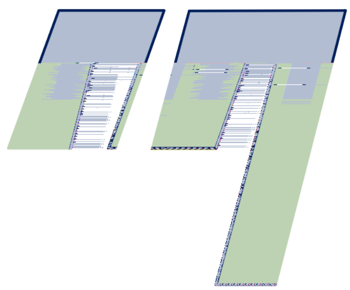
20 $AD : DB = 2 : 1$ en $AE : EC = 4 : 3$. De oppervlakte van driehoek DBC is 21.



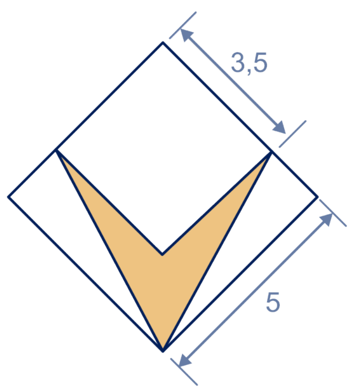
a Wat is de oppervlakte van driehoek ADC?

b Wat is de oppervlakte van driehoek DCE?

21 In de tekening staan twee parallellogrammen. Het rechter parallellogram is $1\frac{1}{2}$ keer zo breed als het linker en twee keer zo hoog.
We kennen de afmetingen van de parallellogrammen niet.
Wat weet je van de verhouding van de oppervlaktes van de parallellogrammen?



22 Het kleine vierkant heeft zijde $3{,}5$ cm, het hele vierkant heeft zijde 5 cm.
Wat is de oppervlakte van de oker pijlpuntvlieger?



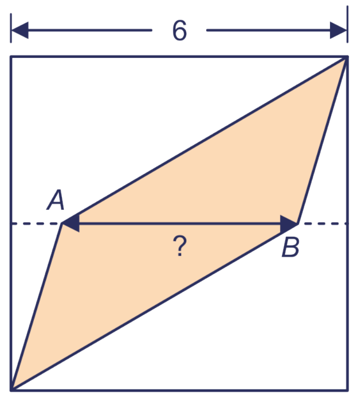
23 Het vierkant heeft zijde 6 cm. Het is verdeeld in drie stukken met gelijke oppervlakte. De onderste twee stukken zijn elkaars spiegelbeeld.

a Laat zien dat de drie stukken even groot zijn als $x + y = 8$.

Een vierkant blaadje van 6 bij 6 cm wordt dubbelgevouwen. De punten A en B liggen op de vouwlijn; ze worden verbonden met twee van de hoeken van het blaadje. Zo ontstaan er drie gebieden met gelijke oppervlakte.

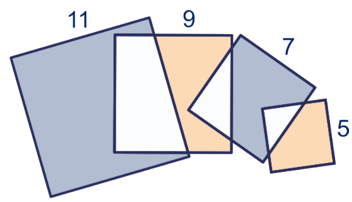
b Hoeveel cm liggen A en B van elkaar?

Kangoeroe 2004, onderbouw hv, vraag 22

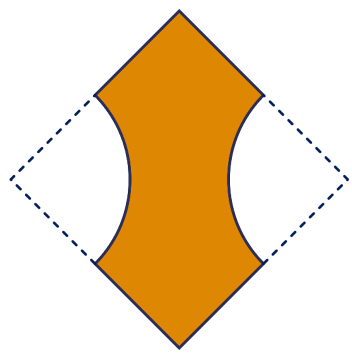


24 De vier overlappende vierkanten hebben achtereenvolgens zijden van 11, 9, 7 en 5 cm.
Hoeveel cm^2 is de totale oppervlakte van de blauwe gebieden groter dan die van de oker gebieden?

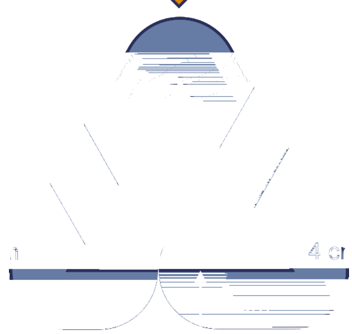
Kangoeroe 2003, onderbouw hv, vraag 25



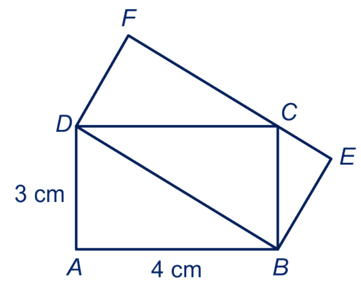
25 Van een vierkant met zijde 4 cm zijn bij twee hoeken kwartcirkels afgeknipt met straal 2 cm.
Wat is de oppervlakte van het oker gebied dat je overhoudt?



26 Om een gelijkzijdige driehoek met zijde 4 cm is een blauwe strook getekend van breedte 1 cm.
Wat is de oppervlakte van die strook?

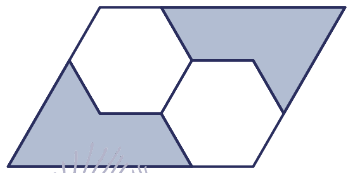


27 In de figuur zijn twee rechthoeken, $ABCD$ en $DBEF$, te zien.
Rechthoek $ABCD$ is 3 bij 4 cm.
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van rechthoek $DBEF$?



Kangoeroe wizBRAIN 2005, vraag 21

28 De twee regelmatige zeshoeken zijn gelijk.
Welk deel van het parallellogram is blauw?



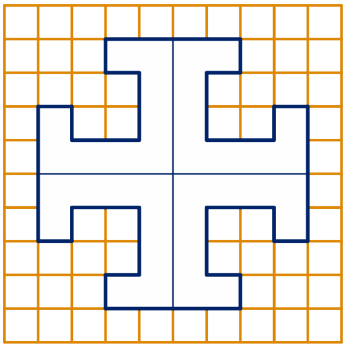
Kangoeroe wizPROF 2008, vraag15

29 Er zit een touw strak om de aarde, zoals een ring om een vinger. Het is een heel lang touw van meer dan 40.000 kilometer. Nu knip je het touw door en doe je er één meter extra touw tussen. Dan til je het touw overal een beetje op, zodat het op elke plek even ver van het aardoppervlak is. In het plaatje hieronder zie je hoe dat er praktisch uit kan zien.

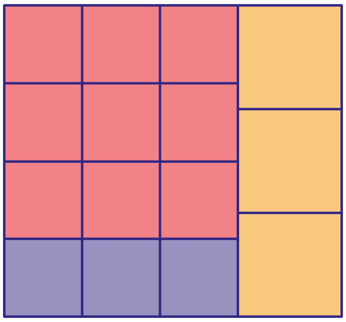
Hoeveel ruimte is er nu tussen het touw en de aarde?
Ongeveer zoveel als een elektron? Een bacterie? Een krant? Een kat? Een olifant?

21 Oppervlakte pilot

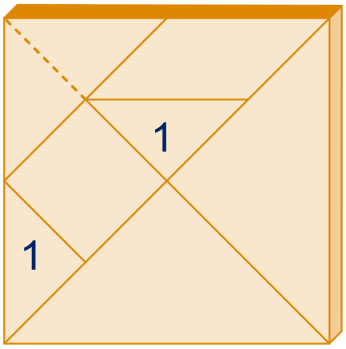
1



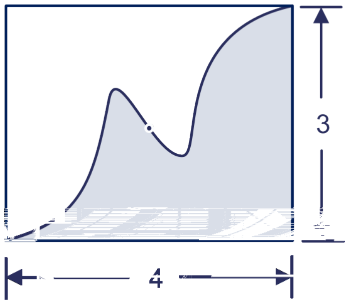
2 De lengte van de lijnen die je knipt tellen dubbel.
3 De rechthoeken hebben verschillende omtrek. Dat zit hem in de verschillende lengtes van de kniplijnen.
4 Let op de eenheden.
5



6 Teken zelf nog meer stippellijnen.

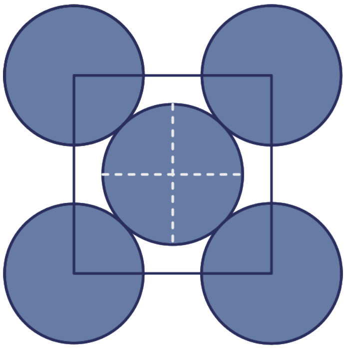


7 Maak eerst een rechthoek, zie figuur.



8 Knip van het midden van een zijde naar een hoekpunt.

9



10 Bereken lijnstuk OC met behulp van de stelling van Pythagoras.

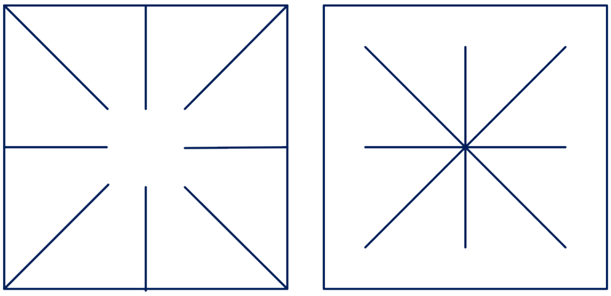
11 De ruit bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken. Kijk naar opgave 29.

12 Verdeel de vierhoek in twee driehoeken.

13 Verdeel het trapezium in twee driehoeken.

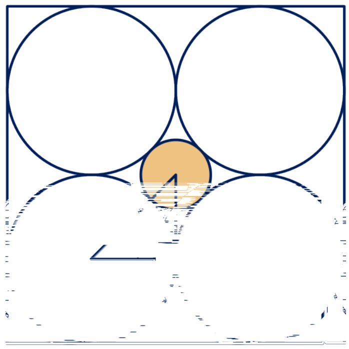
14 Noem de lengte van de zijde boven x dan is de lengte van de zijde onder … en de oppervlakte van het trapezium ….
Schrijf op de stippellijnen uitdrukkingen in x.

15

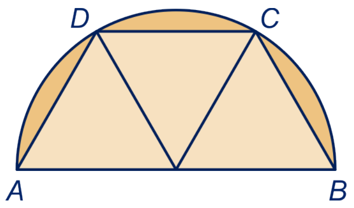


16 Gebruik de speciale 45-45-90-graden driehoek.

17 Bereken eerst de afstand van het midden van het kleinste cirkeltje tot het midden van een groot cirkeltje (zie tekening).



18 Verbind C en D met het middelpunt M van de cirkel.

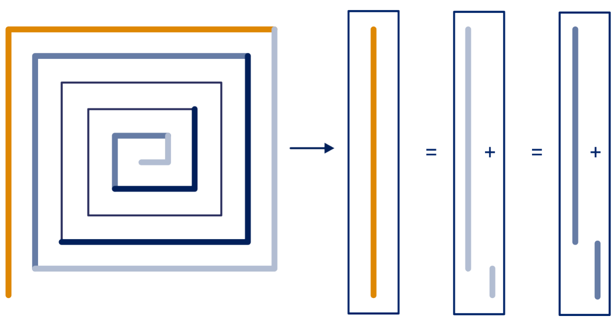


19 Neem voor de zijde van het vierkant $2r$ en druk beide cirkels uit in r.

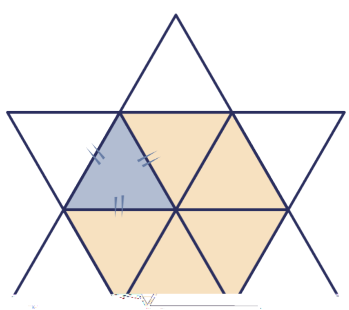
20 Noem voor de diameter van de kleinste halve cirkel x en druk de omtrek van de halve cirkels uit in x.

21 De kortste zijden hebben lengte 1.

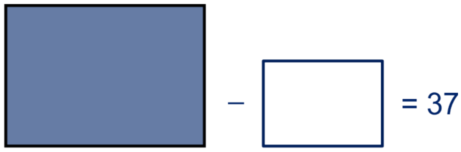
22



23



24 Dus:



25 Je kunt dat gebied tot een rechthoek verknippen.

26 In de figuur zie je zes driehoeken die twee aan twee gelijk zijn.