Zelftoets Discrete dynamische modellen vwo 4 wisD naam:

Opgave 1. Het theater in Epidaurus

Het theater in Epidaurus (Griekenland) is een van de best bewaarde theaters uit de antieke oudheid. Boven elkaar liggen 55 rijen zitplaatsen (a_1 t/m a_{55}) Op de 7^e rij kunnen 132 mensen zitten en op de 13^e rij 168. Het aantal zitplaatsen op de n-de rij noemen we a_n. De getallen a_n vormen een rekenkundige rij.

a. Bereken het aantal zitplaatsen op de eerste rij van het theater.

b. Geef een directe formule voor deze rekenkundige rij.

c. Bereken het aantal zitplaatsen op de laatste rij van het theater.

d. Bereken hoeveel zitplaatsen er in totaal in dit theater zijn.

Opgave 2. Grafische rekenmachines

Fabrikant Casio brengt een nieuwe rekenmachine op de markt, de Casio Apple. De rekenmachine wordt goed ontvangen en het marktaandeel groeit snel. Een onderzoeksbureau heeft een formule opgesteld waarmee het marktaandeel A_t (in procenten) na t weken vanaf 1 januari 2008 benaderd kan worden. De toename gedurende de t^{de} week (tussen de tijdstippen $t-1$ en t) is:

$$\Delta A_t = 0,6A_{t-1} - \tfrac{3}{40}A^2_{t-1}\ .$$

a. Geef een recursieve formule voor A_t.

Het marktaandeel op 1 januari 2008 (=A_0) is 1%.

b. Bereken het marktaandeel van Casio Apple op 1 maart 2008 (ga er vanuit dat er precies 4 weken in een maand zitten). Schrijf ook op hoe je aan je antwoord bent gekomen.

Hiernaast staat de grafiek van de bijbehorende iteratie-functie.

c. Teken vier stappen van de iteratie met $A_0 = 1$.

d. Bepaal de limietwaarde van het marktaandeel. Toelichten.

Wanneer het marktaandeel op $t = 0$ niet 1% maar een grotere waarde zou bedragen, dan zou de limiet-waarde in een kortere tijd worden bereikt.

e. Onderzoek welke waarde A_0 zou moeten bedragen opdat 95% van de limietwaarde pas na 14 weken wordt bereikt. Beschrijf je werkwijze.

Opgave 3. Limieten
Bereken de volgende limieten. Schrijf ook je tussenstappen op.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-3}{\sqrt{n^2+4n}}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{3n}+1}{3^{2n}-1}$

Opgave 4. Spaarhypotheek
Bij een spaarhypotheek wordt er gedurende de gehele looptijd van de hypotheek niet afgelost en moet elke maand rente betaald worden over de gehele schuld. Omdat aan het eind van de looptijd de schuld in een keer moet worden afgelost, wordt elke maand een vast bedrag op een aan de hypotheek gekoppelde spaarrekening gestort.
Edo en Sonja hebben een huis gekocht. Ze hebben hiervoor een spaarhypotheek van € 230.000 afgesloten, met looptijd van 30 jaar. Elke maand betalen ze 0,5% rente over de totale schuld. Bovendien storten ze elke maand € 250 op de spaarrekening om de hypotheek na 30 jaar af te kunnen lossen. Op deze spaarrekening krijgen ze een vaste maandelijkse rente van 0,5%. Het bedrag dat na n maanden op de spaarrekening staat noemen we A_n.

Voor de rij A_n geldt: $A_n = a \cdot A_{n-1} + b$ voor zekere getallen a en b.
a. Bepaal de getallen a en b.

b. Bereken met de GR het bedrag dat na 5 jaar op deze spaarrekening staat.

Een directe formule voor het gespaarde bedrag is $A_n = 50250 \cdot 1{,}005^n - 50000$.
c. Laat zien dat deze formule voldoet aan
$A_n = a \cdot A_{n-1} + b$
voor de in **a** gevonden waarden van a en b.

d. Ga na dat er na 30 jaar genoeg op de spaarrekening staat om de gehele hypotheekschuld mee af te lossen.
Hoeveel houden Edo en Sonja over?