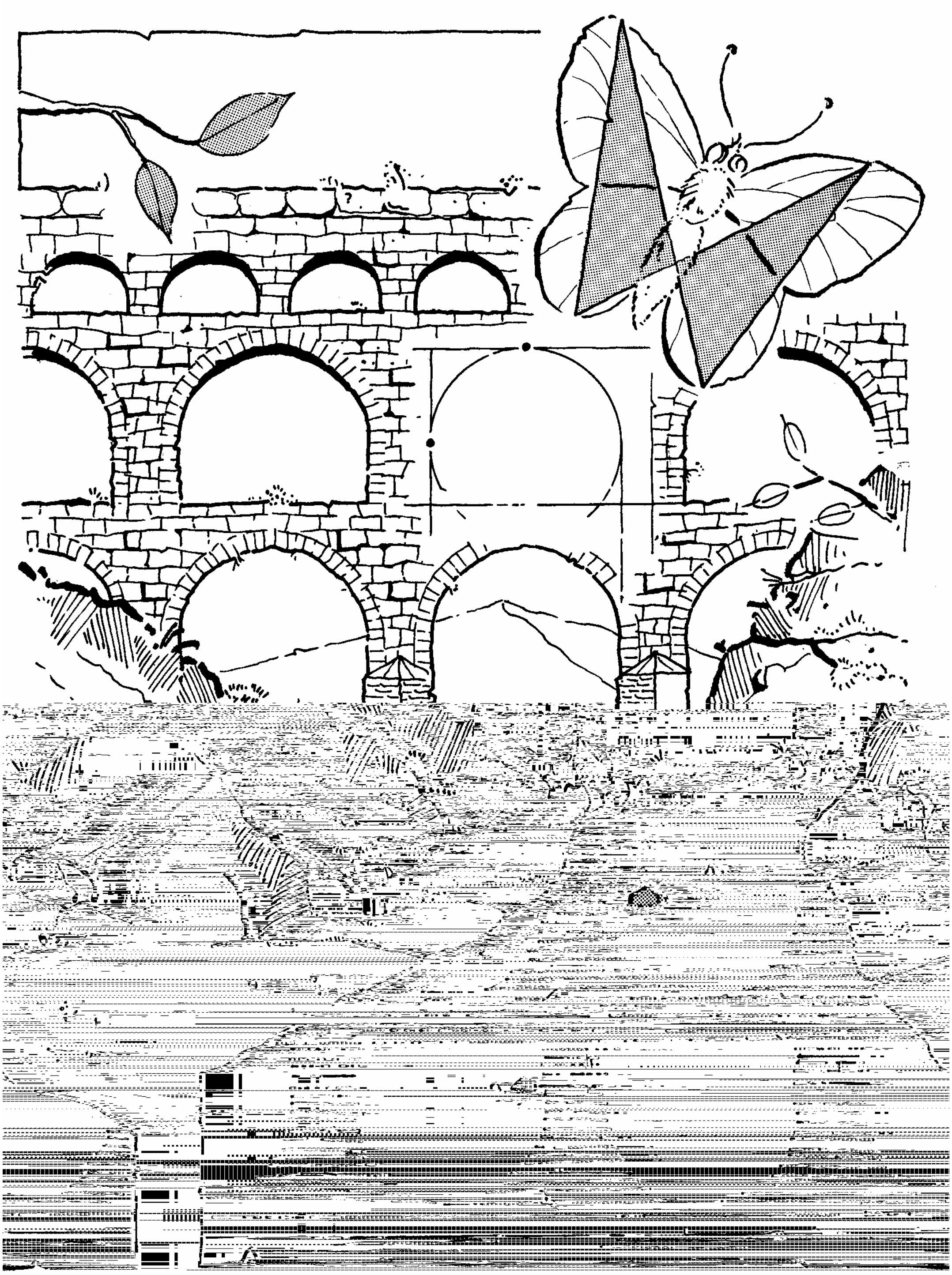
VWO Wiskunde D 2015

# 4a Hoeken en bogen



Wageningse Methode

# 4a Hoeken en bogen

## Inhoudsopgave



Bij opgaven gemarkeerd met dit symbool hoort een werkblad

Opgaven gemarkeerd met dit symbool kunnen worden overgeslagen


**Colofon**

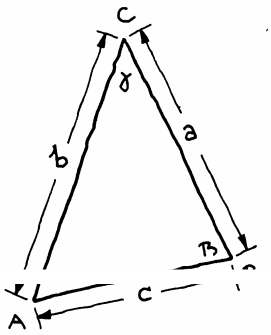
©  2016  Stichting De Wageningse Methode

Auteurs  Leon van den Broek†, Ton Geurtz,  Maris van Haandel,
Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen

Illustraties  Wilson Design, Uden

Homepage  www.wageningse-methode.nl

# 1 Over hoeken

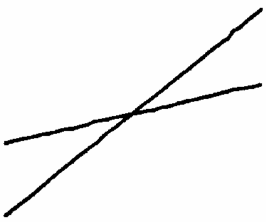



**Notatie**

Als de hoekpunten van een driehoek $A$, $B$ en $C$ heten, noemen we de (grootte van de) hoeken achtereenvolgens $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$. De (lengte van de) zijden *tegenover* die hoekpunten noemen we achtereenvolgens $a$, $b$ en $c$.

We weten:

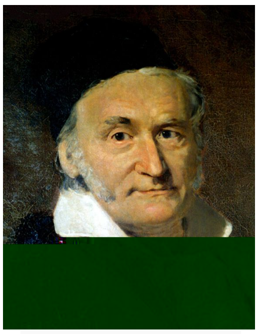
- een gestrekte hoek is 180°;
- een rechte hoek is de helft daarvan, dus 90°;
- de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk.



**1 Overstaande hoeken**

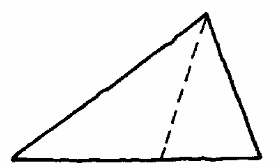
Twee lijnen snijden elkaar. Ze maken bij het snijpunt vier hoeken. Beredeneer dat de overstaande hoeken (de hoeken die tegenover elkaar liggen) gelijk zijn.

**Overstaande hoeken** zijn gelijk.

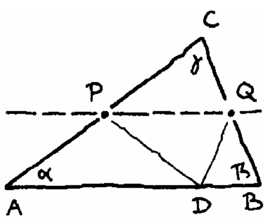

Carl Friedrich Gauss
1777-1855

Uit de onderbouw weet je ook dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.

In de wiskundewereld is tot in de negentiende eeuw aan de juistheid hiervan getwijfeld. Zo heeft de grote geleerde C. F. Gauss zeer nauwkeurig de hoeken gemeten van de driehoek tussen drie toppen in het Harzgebergte (Duitsland); hij vond geen significante afwijking van 180°. Gauss en anderen ontdekten later dat er ook andere soorten meetkunden bestaan (bijvoorbeeld op de bol) waarbij de hoekensom van een driehoek geen 180° is.



**2** Veronderstel dat we weten dat de hoekensom van elke driehoek hetzelfde aantal graden is - noem dat $s$ - maar dat we (nog) niet weten dat $s$ = 180.
Beredeneer met behulp van nevenstaand plaatje dat moet gelden: $s$ = 180.
Tip: in het plaatje zie je *drie* driehoeken.



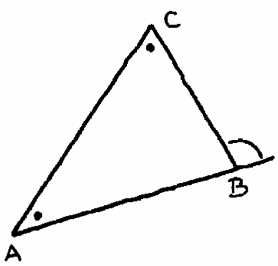

**3** Nog een andere manier om ervan overtuigd te raken dat de hoekensom 180° is.
We trekken een lijn door de middens $P$ en $Q$ van twee zijden van driehoek $ABC$. We spiegelen het bovenste stuk $PQC$ in deze lijn; het spiegelbeeld $D$ van $C$ komt dan op $AB$ te liggen.

**a.** Waarom geldt: $|AP| = |DP|$ en $|BQ| = |DQ|$?

**b.** Leg uit dat de drie hoeken met hoekpunt $D$ zijn: $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$, en dat dus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

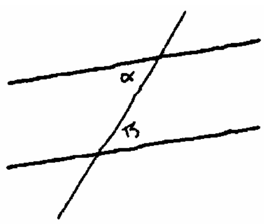
De **hoekensom** van een driehoek is 180°.

**4 Gelijkzijdige driehoek**
Beredeneer dat de hoeken van een gelijkzijdige driehoek (alle drie de zijden zijn even lang) 60° zijn.



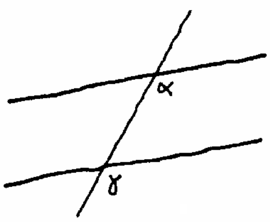

**5 Buitenhoek**
In het plaatje hiernaast is de zogenaamde buitenhoek bij hoekpunt *B* aangegeven.
Beredeneer dat een buitenhoek van een driehoek gelijk is aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken (dat zijn de hoeken met een stip).

**Definitie**
Twee lijnen heten **evenwijdig** als ze geen punt gemeenschappelijk hebben.




**6 Z-hoeken**
Hiernaast worden twee lijnen gesneden door een derde lijn. In het plaatje zijn twee hoeken aangegeven: $\alpha$ en $\beta$.
Gegeven is dat $\alpha = \beta$.
Beredeneer dat hieruit volgt dat de twee lijnen evenwijdig zijn.
Tip. Begin zo: *als de lijnen niet evenwijdig zouden zijn, dan zouden ze elkaar snijden.*

Het omgekeerde geldt ook: Als de lijnen evenwijdig zijn, dan zijn de hoeken $\alpha$ en $\beta$ gelijk.




**7 F-hoeken**
Hiernaast worden twee lijnen gesneden door een derde lijn. In het plaatje zijn twee hoeken aangegeven: $\alpha$ en $\gamma$.
Gegeven is dat $\alpha = \gamma$.
Beredeneer dat hieruit volgt dat de twee lijnen evenwijdig zijn.
Tip. Gebruik opgave **1** en **6**.

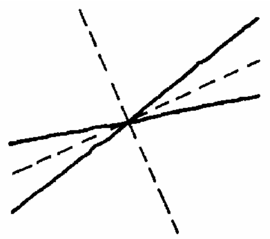
Het omgekeerde geldt ook: als de twee lijnen evenwijdig zijn, dan zijn de hoeken $\alpha$ en $\gamma$ gelijk.

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk (F-hoeken, Z-hoeken).

Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig (F-hoeken, Z-hoeken).

**8 Hoekensom van een vierhoek**
Beredeneer - uitgaande van de hoekensom van een driehoek - dat de hoekensom van een vierhoek 360° is.

**9 a.** Hoe groot is de hoekensom van een *n*-hoek? ($n \geq 3$)
**b.** Van een *regelmatige n*-hoek zijn de hoeken allemaal even groot.
Hoe groot is één hoek van een regelmatige *n*-hoek?

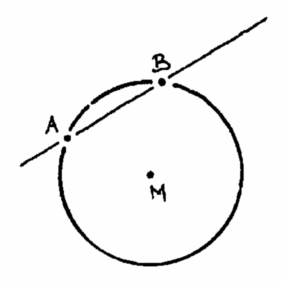


**10** Twee lijnen snijden elkaar. Ze maken in het snijpunt vier hoeken. Van elk van die hoeken tekenen we de bissectrice (dat is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt).
**a.** Toon aan dat de bissectrices van de scherpe hoeken in elkaars verlengde liggen (dus eigenlijk één lijn vormen). (Dat geldt ook voor de bissectrices van de twee stompe hoeken.)
**b.** Toon aan dat deze twee lijnen loodrecht op elkaar staan.

***Terugblik***
*We hebben enkele uitgangspunten gekozen. Van daaruit hebben we nieuwe feiten gevonden. In sommige redeneringen maakten we gebruik van feiten die we al eerder beredeneerd hadden. De feiten zijn niet zo schokkend: eigenlijk ligt de waarheid ervan erg voor de hand. Op deze manier maken we een bouwwerk: straks kunnen we ook feiten beredeneren die helemaal niet zo vanzelfsprekend zijn.*
*De kracht van het bouwwerk is dat je feiten die eenmaal bewezen zijn (en dus in het bouwwerk zijn opgenomen) nooit meer opnieuw hoeft te bewijzen: die kan je in het vervolg direct gebruiken. Belangrijke bouwstenen die we tot nu toe hebben, zijn:*
- *de stelling van Pythagoras (zie 4vb deel 1, hoofdstuk 2 Meetkunde en algebra)*
- *de hoekensom van een driehoek (en vierhoek);*
- *Z- en F-hoeken;*
- *overstaande hoeken;*
- *de stelling van de buitenhoek.*

In het vervolg zul je je redeneringen (bewijzen) moeten baseren op deze uitgangspunten en op zaken die je daaruit al eerder hebt afgeleid.

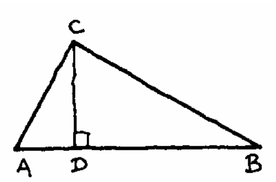
**Definitie**
Een lijn is **raaklijn** aan een cirkel als hij precies één punt met de cirkel gemeenschappelijk heeft.




**11** Een cirkel met middelpunt *M* wordt door een lijn gesneden in de punten *A* en *B*.
Beredeneer dat de stralen *MA* en *MB* *niet* loodrecht op de lijn staan.

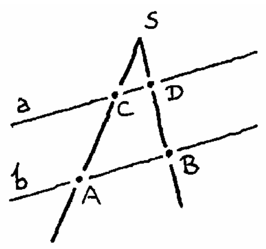
**12 a.** Een lijn gaat door punt *A* van een cirkel met middelpunt M. De lijn staat loodrecht op de straal *MA*.
Bewijs dat de lijn raaklijn is aan de cirkel.
**b.** Een lijn is raaklijn aan een cirkel met middelpunt *M*. Het raakpunt is *A*.
Bewijs dat de lijn loodrecht staat op de straal *MA*.

> Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal (dat is de verbindingslijn van het middelpunt en het raakpunt).

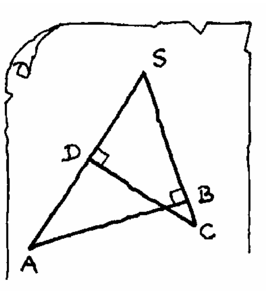



**13** In een rechthoekige driehoek *ABC* ($\angle C$ = 90°) tekenen we de hoogtelijn *CD*. Zodoende zijn er drie rechthoekige driehoeken.
Beredeneer dat deze drie driehoeken gelijke hoeken hebben.

> Driehoeken met gelijke hoeken zijn **gelijkvormig**.



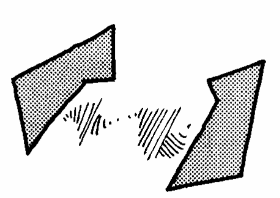

**14** De lijnen *a* en *b* zijn evenwijdig. Het punt *S* ligt niet op *a* of op *b*. Zie voor de overige gegevens de figuur.
Bewijs dat de driehoeken *ABS* en *CDS* gelijkvormig zijn.




**15** D ligt op de lijn *AS* en *B* ligt op de lijn *CS*, zo dat $\angle ABS$ = 90° en $\angle CDS$ = 90°.
Bewijs dat de driehoeken *ABS* en *CDS* gelijkvormig zijn.

**16** Zijn twee vierhoeken met gelijke hoeken gelijkvormig?

## 2 Door één punt



**Definitie**
Twee figuren heten **congruent** als de ene figuur zo verplaatst kan worden dat hij de andere precies bedekt. Daarbij mag gespiegeld worden.

**17** Zijn de volgende figuren congruent?
- Twee cirkels met dezelfde straal.
- Twee rechthoeken met dezelfde oppervlakte.
- Twee gelijkbenige driehoeken met dezelfde omtrek.
- Twee lijnstukken van dezelfde lengte.
- Twee rechte hoeken.

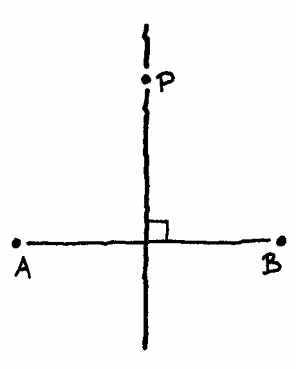
**Opmerking**
In plaats van *congruent* wordt ook wel de term *gelijk* gebruikt. Twee congruente figuren zijn weliswaar verschillend (het zijn tenslotte *twee* figuren), maar de figuren zijn verder in alle opzichten gelijk: dezelfde zijden, dezelfde hoeken, dus ook gelijke oppervlakte, enzovoort.
Van Dale: [Fr. of Lat. *congruens*] 1 overeenstemmend; 2 (wisk.) (van figuren) gelijk en gelijkvormig.

**18 a.** Waar of niet waar?
**ZZZ** Twee driehoeken met gelijke zijden zijn congruent.
**HZH** Twee driehoeken met twee gelijke hoeken en gelijke ingesloten zijde zijn congruent (de *ingesloten* zijde ligt tussen de hoeken).
**HHZ** Twee driehoeken met twee gelijke hoeken en een gelijke niet-ingesloten zijde zijn congruent.
**ZHZ** Twee driehoeken met twee gelijke zijden en gelijke ingesloten hoek zijn congruent (de *ingesloten* hoek ligt tussen de gelijke zijden).
**ZZH** Twee driehoeken met twee gelijke zijden en een gelijke niet-ingesloten hoek zijn congruent.
**HHH** Twee driehoeken met drie gelijke hoeken zijn congruent.

In vier van de zes gevallen bij vraag **a** was er sprake van congruentie.
**b.** Geval HHH is eigenlijk HH. Waarom?
En dat is een kenmerk voor gelijkvormigheid.
**c.** Geval HHZ en HZH komen eigenlijk op hetzelfde neer. Waarom?
**d.** Geval ZZH is verraderlijk. Teken - als je dat nog niet gedaan hebt - een voorbeeld van twee niet-congruente driehoeken. Bijvoorbeeld beide met een hoek van 30°, een zijde van 5 cm grenzend aan deze hoek en een zijde van 3 cm tegenover deze hoek.
**e.** Ga na dat wel geldt:
**ZZR** Twee driehoeken met twee gelijke zijden een niet-ingesloten *rechte* hoek zijn congruent.

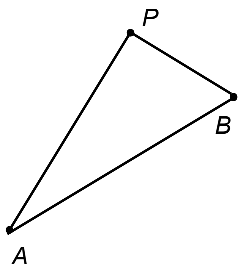
Er zijn vier echt verschillende congruentiekenmerken: ZZZ , ZHZ , HZH en ZZR.

**Definitie**
De **middelloodlijn** van een lijnstuk is de lijn die door het midden van dat lijnstuk gaat en er loodrecht op staat.

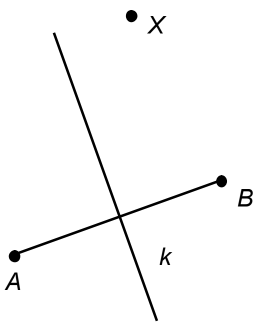



**19** Toon met congruentie aan dat punten op de middelloodlijn van lijnstuk *AB* gelijke afstand hebben tot *A* en *B*.

*Een ander uitgangspunt van ons zal de zogenaamde **driehoeksongelijkheid** zijn.*




**Driehoeksongelijkheid**
Als *P* niet op lijnstuk *AB* ligt, dan:
$|AP|+|BP|>|AB|$.




**20** In de figuur is *k* de middelloodlijn van lijnstuk *AB*. Verder is *X* een punt aan de kant van *B* van lijnstuk *AB*.
Toon aan: $|AX|>|BX|$.
Tip. Het snijpunt van lijn *AX* met *k* noemen we *P*. Pas de driehoeksongelijkheid toe.

*Uit de vorige twee opgaven volgt:*

Op de middelloodlijn van lijnstuk *AB* liggen precies alle punten die even ver van *A* als van *B* liggen.

**21** We gaan bewijzen dat de middelloodlijnen van de zijden van een driehoek door één punt gaan. (Dit heb je ook al in de brugklas gedaan.)

Het bewijs hieronder is niet af. Maak het af.

**Bewijs**
Gegeven is een driehoek *ABC.*
Noem het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden *AB* en *BC*: *S*.
We gaan bewijzen dat *S* ook op de derde middelloodlijn ligt.

|*AS*| = |*BS*| , want *S* ligt op de middelloodlijn van *AB*.
|*BS*| = |*CS*| , want ... .
Hieruit volgt dat |*AS*| = | ... |.
Dus *S* ligt op ....
Dus gaan de middelloodlijnen van *AB* , *BC* en *CA* door één punt (namelijk door het punt *S*).

**Stelling**

De middelloodlijnen van de zijden van een driehoek gaan door één punt.

**22** Leg uit hoe uit het voorgaande volgt dat elke driehoek een **omgeschreven cirkel** heeft, dat is de cirkel die gaat door de hoekpunten van de driehoek.

**23** Teken een scherphoekige en een stomphoekige driehoek.
Bepaal van beide de omgeschreven cirkel.

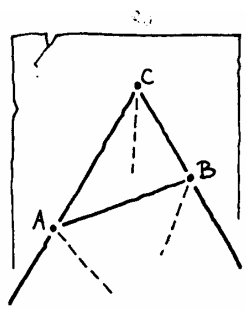
**Stelling**

De bissectrices van de hoeken van een driehoek gaan door één punt.

**24** Bewijs deze stelling door nauwkeurig de bewijsgang van opgave **21** te volgen.

**25** Leg uit hoe uit het voorgaande volgt dat elke driehoek een **ingeschreven cirkel** heeft, dat is de cirkel die raakt aan de zijden van de driehoek.

**26** Teken een driehoek.
Bepaal de ingeschreven cirkel.




**27** Van driehoek *ABC* zijn de zijden *CA* en *CB* aan de kanten van *A* en *B* verlengd. De **buitenbissectrice** van hoek *A* is de bissectrice van de buitenhoek bij *A*.
Bewijs dat de buitenbissectrice van hoek *A*, de buitenbissectrice van hoek B en de binnenbissectrice van hoek *C* door één punt gaan.

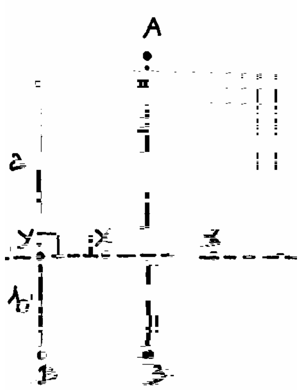
Er is een cirkel die raakt aan *AB* en aan de verlengden van *CA* en *CB*. We noemen deze een **aangeschreven cirkel** van driehoek *ABC*.

**28** Teken een driehoek.
Bepaal de drie aangeschreven cirkels.

**Stelling**

De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

*We gaan deze stelling in de volgende twee opgaven bewijzen.*



**29** $AB$ is een lijnstuk. $Y$ ligt op $AB$; zeg dat $|YA| = a$ en $|YB|$ = b. Het punt $X$ ligt op de lijn door $Y$, loodrecht op $AB$.
**a.** Bewijs dat $|AX|^2 - |BX|^2 = a^2 - b^2$.

Voor de punten $X$ boven die lijn is $|AX|^2 - |BX|^2 < a^2 - b^2$;
voor de punten $X$ onder die lijn is $|AX|^2 - |BX|^2 > a^2 - b^2$.

Teken een lijnstuk $AB$ van lengte 4 met daarop het punt $Y$ op afstand 3 van $A$ en op afstand 1 van $B$. Er geldt: $|AY|^2 - |BY|^2 = 8$.
**b.** Teken alle punten X, waarvoor geldt: $|AX|^2 - |BX|^2 = 8$.

Het resultaat van de vorige opgave is:
Gegeven is een lijnstuk $AB$. $P$ en $Q$ zijn twee punten.

- Als $PQ$ loodrecht staat op $AB$, dan geldt: $|AP|^2 - |BP|^2 = |AQ|^2 - |BQ|^2$.
- Als $|AP|^2 - |BP|^2 = |AQ|^2 - |BQ|^2$, dan staat $PQ$ loodrecht op $AB$.

**30** Maak het bewijs van de stelling over de hoogtelijnen hieronder af.

**Bewijs**
Gegeven is een driehoek $ABC$. $AD$ en $BE$ zijn hoogtelijnen in driehoek $ABC$ ($D$ op $BC$ en $E$ op $AC$).
Noem het snijpunt van deze hoogtelijnen: H.
$|HB|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ , want de lijn $AH$ staat loodrecht op $BC$.
$|HA|^2 - |HC|^2 = \ldots$ , want ...
Hieruit volgt dat $|HB|^2 - |HA|^2 = \ldots$ .
Dus staat de lijn ... loodrecht op ... en dus is lijn $CH$ ook hoogtelijn in driehoek $ABC$.
Dus gaan de hoogtelijnen door één punt (namelijk door het punt $H$).

**Stelling**

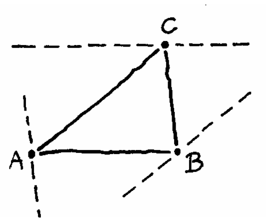
De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.

Het bewijs van deze stelling moeten we uitstellen.
Een stukje uit een artikel **Drie eerlijke lijnen snijden elkaar in één punt** van H. Brandt Corstius in *NRC Handelsblad* van 25 januari 1996

*Ik lag in mijn bedje en dacht. Natuurlijk wilde ik de hoogtelijnenstelling bewijzen. Maar vooral wilde ik begrijpen hoe de drie stellingen over steeds drie lijnen in een driehoek die door één punt gaan, verwant*

*waren. Wat hadden bissectrices, zwaartelijnen en hoogtelijnen gemeen? Dat ze steeds door een hoekpunt gingen, maar ook dat ze geen voorkeur hadden voor een van de andere twee hoekpunten. In hun definitie kwamen de andere twee hoekpunten op gelijke wijze voor. Ik vond de bissectrices, zwaartelijnen en hoogtelijnen eerlijke lijnen. Een lijn door hoekpunt A is een eerlijke lijn als hij weliswaar gedefinieerd is met behulp van B en C, maar zo dat er, als je B en C verwisselt, dezelfde lijn uitkomt.*
*Het bewijs van de hoogtelijnenstelling kon even wachten. Ik wilde iets veel mooiers bewijzen, namelijk: "In een driehoek snijden de drie eerlijke lijnen door de drie hoekpunten elkaar in één punt". Een hoogtelijn was een eerlijke lijn, dus dan had ik de hoogtelijnenstelling ook bewezen. Een aangename hitte verwarmde mijn hersenpan. Ik had alleen nog maar een stelling, maar ik was ervan overtuigd dat hij waar was.*
*Het zou mooi zijn als ik nog andere eerlijke lijnen bedacht dan de drie die het meetkundeboek me had gegeven. Ik vond ze niet en een halve eeuw later weet ik er nog geen.*

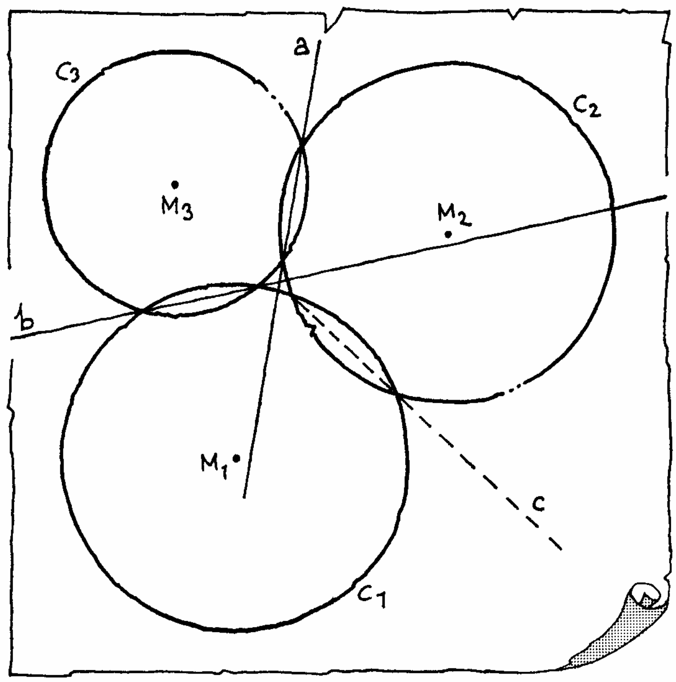
Verderop beschrijft H. Brandt Corstius dat hij het volgende voorbeeld ontdekte: de lijnen door een hoekpunt, evenwijdig aan de overstaande zijde. Hij vervolgt:




*Maar ik besefte dat ik mijn Eerlijke-Lijnen-stelling wel kon vergeten. Want de drie evenwijdige lijnen door de drie hoekpunten A, B en C waren ongetwijfeld drie eerlijke lijnen, en toch gingen ze niet door één punt. Misschien had ik het begrip eerlijkheid moeten inperken door alleen over lijnen binnen de driehoek te spreken, maar voor mij was de lol er af. Mijn stelling was niet waar. Maar het gloeien van opwinding over zo'n stelling ben ik nooit vergeten.*

Tot slot van deze paragraaf een echte uitsmijter.

**31** Drie cirkels $C_1$, $C_2$ en $C_3$ met stralen $r_1$, $r_2$ en $r_3$ en middelpunten $M_1$, $M_2$ en $M_3$ snijden elkaar twee aan twee.




We gaan bewijzen dat de drie lijnen *a*, *b* en *c* door de snijpunten door één punt gaan.

Duidelijk is dat lijn $a$ loodrecht staat op $M_2M_3$, $b$ loodrecht staat op $M_1M_3$ en $c$ loodrecht staat op $M_1M_2$. We zullen dit in paragraaf 7 nog precies bewijzen.

Maak het volgende bewijs af.

**Bewijs**
Noem het snijpunt van $a$ en $b$: $S$.
$|SM_2|^2 - |SM_3|^2 = r_2^2 - r_3^2$, want $S$ ligt op $a$ en $a$ staat loodrecht op $M_2M_3$.
$|SM_1|^2 - |SM_3|^2 = ...$ , want ...
Hieruit volgt dat $|SM_2|^2 - |SM_1|^2 = ...$
$|XM_2|^2 - |XM_1|^2 = r_2^2 - r_1^2$ geldt alleen voor punten $X$ op $c$.
Dus ligt $S$ ook op $c$.
Dus gaan $a$, $b$ en $c$ door één punt (namelijk het punt $S$).

**32** De bewijzen in deze paragraaf zijn van een speciaal type. Probeer het gemeenschappelijke in de structuur van de bewijzen onder woorden te brengen.

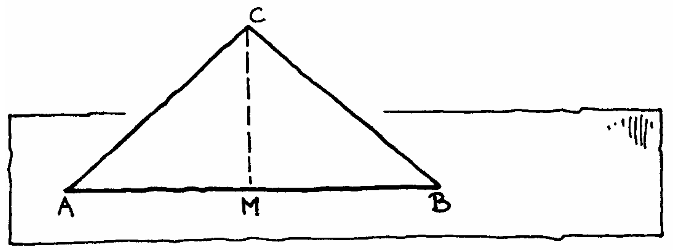
# 3 Redeneren

Als uitgangspunt van onze redeneringen nemen we de congruentiegevallen in de vorige paragraaf. Als we van twee driehoeken weten dat ze gelijke zijden hebben, dan kunnen we met behulp van ZZZ concluderen dat ze congruent zijn en dus hebben de driehoeken ook gelijke hoeken. Op een dergelijke manier maken we gebruik van de congruentiekenmerken om te redeneren in de meetkunde.

Het eerste bewijs doen we als voorbeeld.

**Stelling**
Een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken.

Eerst tekenen we een plaatje waarin we de hoekpunten namen geven.




Noem het midden van de basis AB: M en teken in het plaatje lijnstuk CM.

**Gegeven**
|AC| = |*BC*| , |*AM*| = |*BM*|

**Te bewijzen**
$\angle A = \angle B$.

**Bewijs**

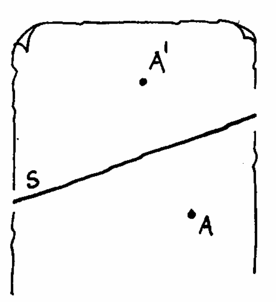
| | |
|---|---|
| 1. $\|AC\| = \|BC\|$ | *gegeven* |
| 2. $\|AM\| = \|BM\|$ | *gegeven* |
| 3. $\|CM\| = \|CM\|$ | |
| 4. Driehoek *AMC* = driehoek *BMC* | *volgt uit 1, 2, 3 ; ZZZ* |
| 5. $\angle A = \angle B$ | *volgt uit 4* |

Misschien vind je het overdreven dat hierboven alles zo netjes is opgeschreven. Dat doen we om twee redenen.

- Het is verstandig je rekenschap te geven wat je uitgangspunten zijn (het gegeven) en wat je daaruit wilt afleiden (hetgeen je wilt bewijzen).
- Je moet in je bewijs elke stap verantwoorden: of met een gegeven, of het is triviaal (bijvoorbeeld stap 3 in het voorgaande bewijs), of met een eerder bewezen stelling of congruentiekenmerk.

Andere argumenten die je ter beschikking staan, heb je in paragraaf 1 ontmoet: F-hoeken, Z-hoeken, de hoekensom van een driehoek, de stelling van de buitenhoek en de stelling van Pythagoras.

**33** Bewijs de volgende stellingen.
**a.** Als in een driehoek de zwaartelijn en de hoogtelijn uit een hoek hetzelfde zijn, dan is de driehoek gelijkbenig.
**b.** Als in een driehoek twee hoogtelijnen even lang zijn, dan is de driehoek gelijkbenig.




**34** Bewijs de volgende stelling.
Als *A* en *A*' elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn *s* en punt *P* ligt op *s*, dan zijn *AP* en *A'P* even lang en maken *AP* en *A'P* gelijke hoeken met *s.*

**35** Bewijs de volgende stelling.
Als in een driehoek een zwaartelijn uit een hoek half zo lang is als de overstaande zijde van die hoek, dan is die hoek recht.
Tip: Hierbij kun je de stelling uit het voorbeeld goed gebruiken.

**Definitie**
Een **parallellogram** is een vierhoek met evenwijdige overstaande zijden.

**36** Bewijs de volgende stellingen over een parallellogram.
**a.** In een parallellogram zijn de overstaande hoeken gelijk.
**b.** In een parallellogram zijn de overstaande zijden gelijk.
**c.** In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.

**37** Bewijs de volgende stellingen.
**a.** Als in een vierhoek de overstaande hoeken gelijk zijn, is het een parallellogram.
**b.** Als in een vierhoek de overstaande zijden gelijk zijn, is het een parallellogram.
**c.** Als in een vierhoek de diagonalen elkaar midden door delen, is het een parallellogram.

*Over ruiten en rechthoeken kun je ook een heleboel stellingen formuleren. In opgave* ***38*** *en* ***39*** *staan er enkele. Als je de bewijzen eenvoudig vindt, hoef je die niet te geven.*

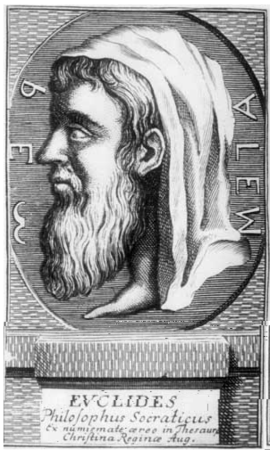
**Definitie**
Een **rechthoek** is een vierhoek met vier rechte hoeken.

**38** Bewijs de volgende stellingen over rechthoeken.
**a.** Een rechthoek is een parallellogram.
**b.** In een rechthoek zijn de diagonalen even lang.
**c.** Als in een parallellogram de diagonalen even lang zijn, is het parallellogram een rechthoek.

**Definitie**
Een **ruit** is een vierhoek met vier gelijke zijden.

**39** Bewijs de volgende stellingen over ruiten.
**a.** Een ruit is een parallellogram.
**b.** In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar.
**c.** Als in een parallellogram de diagonalen loodrecht op elkaar staan, is het parallellogram een ruit.

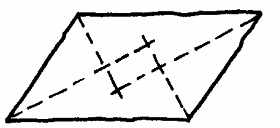
**De Elementen**
Rond 300 voor Chr. leefde de Griekse wiskundige Euclides in Alexandrië; hij was daar leraar aan het Museon, het wetenschappelijke centrum. Verder is er niets met zekerheid over de persoon Euclides te zeggen. In dertien boeken, *de Elementen*, zette hij de wiskundige kennis van die tijd uiteen. Vanuit enkele voor iedereen acceptabele uitgangspunten leidde hij een heel bouwwerk van stellingen af. Hij gaat daarbij uiterst zorgvuldig te werk. Elke stap was onweerlegbaar. Hij bewijst flauwe stellingen zoals de driehoeksongelijkheid; iets wat voor iedereen duidelijk is. Maar ook veel moeilijkere stellingen; daarvan zullen we nog voorbeelden zien.
Tot de jaren vijftig heeft zijn werk het wiskunde-onderwijs beheerst. Na de Bijbel is dit het meest bestudeerde boek. Na de uitvinding van de boekdrukkunst zijn er meer dan duizend drukken van *de Elementen* verschenen.




Zie bijvoorbeeld de internetsite
http://www.pandd.demon.nl/elementen.htm

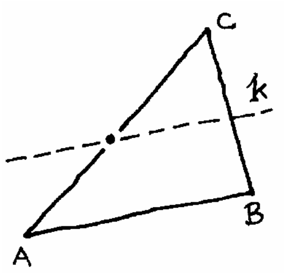
**40** Twee cirkels snijden elkaar.
Bewijs dat de verbindingslijn van de snijpunten loodrecht staat op de verbindingslijn van de middelpunten.

**41** Twee raaklijnen aan een cirkel snijden elkaar in het punt S. De raakpunten zijn $A$ en $B$.
Bewijs dat $|AS| = |BS|$.



**42** Bewijs dat de bissectrices van de hoeken van een parallellogram een rechthoek insluiten.

[Als er tenminste sprake is van een rechthoek. Het is ook mogelijk dat de diagonalen een lijnstuk of zelfs een punt insluiten.]




**43** Gegeven is driehoek *ABC*. Lijn k is evenwijdig aan *AB*.

**a.** Bewijs dat geldt:
Als k door het midden van *AC* gaat, dan gaat *k* ook door het midden van *BC*.
Tip: Gebruik als hulplijn de lijn door het midden van *AC* die evenwijdig is aan *BC*.

**b.** Ga na dat hieruit volgt:
De lijn door de middens van *AC* en *BC* is evenwijdig aan *AB*.
Deze lijn heet daarom wel een **middenparallel** van driehoek *ABC.*

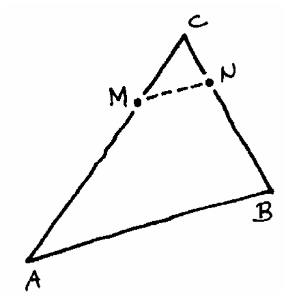
**44** Ga na dat uit het bewijs van **43a** onmiddellijk volgt:
Een middenparallel van een driehoek is half zo lang als de zijde waaraan hij evenwijdig is.

**45** Gegeven is driehoek *ABC*. Punt *M* ligt op *AC,* zo dat $|AM| = 3 \cdot |MC|$ en punt *N* ligt op *BC*, zo dat $|BN| = 3 \cdot |NC|$.

**a.** Bewijs dat *MN* evenwijdig is aan *AB*.
Tip: gebruik opgave **43b**.

**b.** Bewijs dat $|AB| = 4 \cdot |MN|$.

Je kunt zo verder redeneren voor andere gelijke verhoudingen $|AM| : |MC|$ en $|BN| : |NC|$. Dat is een heel gedoe. Euclides doet dat zorgvuldig en heeft daarmee bewezen:

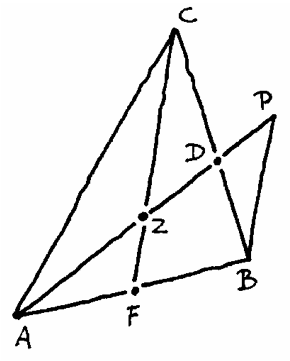



> Gegeven is driehoek *ABC*. *M* ligt op *AC* en *N* ligt op *BC*, zo dat $|AM| : |MC| = |BN| : |NC|$.
> Dan is *MN* evenwijdig aan *AB*.

**Opmerking**
Dit resultaat ken je al uit de onderbouw. Als volgt.
Als $|AM| : |MC| = |BN| : |NC|$, dan zijn de driehoeken *ABC* en *MNC* gelijkvormig, dus dan $\angle BAC = \angle NMC$, dus zijn *MN* en *AB* evenwijdig (F-hoeken).

Met behulp van de middenparallel (opgave **43** en **44**) kunnen we bewijzen dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan. Maar dat is bepaald niet eenvoudig. Je moet daarvoor een geschikte hulplijn trekken.

**46** *ABCD* is een willekeurige vierhoek. De middens van de zijden noemen we achtereenvolgens *P*, *Q* , *R* en *S*.
Bewijs dat PQRS een parallellogram is.




**47** Van driehoek *ABC* zijn *AD* en *CF* zwaartelijnen. Het snijpunt van *AD* en *CF* noemen we *Z*.
Trek de lijn door *B*, evenwijdig aan *CF*; zijn snijpunt met het verlengde van *AD* noemen we *P*.

**a.** Bewijs dat $|BP| = |CZ|$. Tip: Gebruik congruentie.

**b.** Bewijs dat $|BP| = 2 \cdot |FZ|$.

Uit **a** en **b** volgt dat $|CZ| = 2 \cdot |FZ|$. Kennelijk snijdt zwaartelijn *AD* de zwaartelijn *CF* in een punt op $\frac{2}{3}$ van *C*.
Op dezelfde manier snijdt zwaartelijn *BE* de zwaartelijn *CF* in een punt op $\frac{2}{3}$ van *C*.

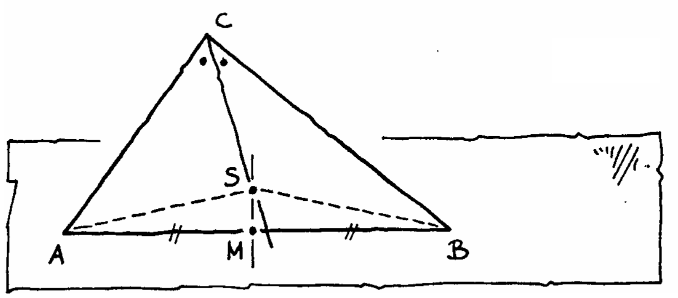
**c.** Ga na dat hieruit volgt dat de drie zwaartelijnen door één punt gaan.

We hebben en passant nog een extra resultaat:

De zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1 : 2.

**48** In deze opgave bewijzen we dat alle driehoeken gelijkbenig zijn.
Waar zit de fout?

In driehoek *ABC* trekken we de bissectrice uit hoek *C* en de middelloodlijn van *AB*. *S* is het snijpunt van deze twee lijnen.




**Gegeven**
*MS* is middelloodlijn van *AB*.
*CS* is bissectrice van hoek *C*.

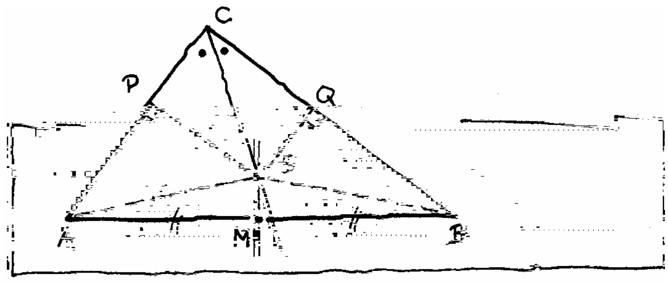
**Te bewijzen**
$|AC| = |BC|$

**Bewijs**

| | |
|---|---|
| 1. $\|AS\| = \|BS\|$ | *S ligt op de middelloodlijn van AB (gegeven)* |
| 2. $\angle ACS = \angle BCS$ | *S ligt op de bissectrice van hoek C (gegeven)* |
| 3. $\|CS\| = \|CS\|$ | |
| 4. driehoek *ACS* is gelijk aan driehoek *BCS* | *volgt uit 1, 2 en 3* |
| 5. $\|AC\| = \|BC\|$ | *volgt uit 4* |

**49** Je trapte natuurlijk niet in het bedrog bij opgave **48**. Laten we zorgvuldiger te werk gaan. Nu wel een echt bewijs dat alle driehoeken gelijkbenig zijn. Waar zit de fout?

Dezelfde situatie als in opgave **48**. Trek de loodlijnen *SP* en *SQ* op *AC* en *BC*.




**Gegeven**
*MS* is middelloodlijn van *AB*.
*CS* is bissectrice van hoek *C*.

**Te bewijzen**
$|AC| = |BC|$

**Bewijs**

| | |
|---|---|
| 1. $\|AS\| = \|BS\|$ | *S ligt op de middelloodlijn van AB (gegeven)* |
| 2. $\|SP\| = \|SQ\|$ | *S ligt op de bissectrice van hoek C (gegeven)* |
| 3. $\angle SPC = \angle SQC$ | *beide zijn 90°* |
| 4. driehoek *APS* is gelijk aan driehoek *BQS* | *volgt uit 1, 2 en 3 (ZZR)* |
| 5. $\angle SAP = \angle SBQ$ | *volgt uit 4* |
| 6. $\angle SAB = \angle SBA$ | *volgt uit 1; gelijkbenige driehoek* |
| 7. $\angle BAC = \angle ABC$ | *volgt uit 5 en 6* |
| 8. $\|AC\| = \|BC\|$ | *volgt uit 7; gelijke basishoeken* |

# 4 De stand van zaken

*In deze paragraaf wordt je gevraagd wat je weet van de zijden, hoeken en diagonalen van verschillende soorten vierhoeken. En omgekeerd, wat voor speciaal type vierhoek het is als je iets gegeven hebt over de zijden, hoeken of diagonalen. Enkele van deze zaken heb je al bewezen. Nu kun je volstaan met de antwoorden en mag je de bewijzen achterwege laten.*
*Er zijn veel en gevarieerde opgaven om het redeneren te oefenen en om routine op te doen.. Het is wellicht niet nodig alle opgaven te maken. Er zijn vaak verschillende voor de hand liggende oplossingen.*

**Voorbeeld**

| | |
|---|---|
| *Vraag* | Wat weet je van de zijden van een parallellogram? |
| *Antwoord* | De overstaande zijden zijn evenwijdig en even lang. |

**50** **a.** Wat weet je van de hoeken van een parallellogram?
Wat weet je van de diagonalen van een parallellogram?
**b.** Wat weet je van de zijden van een ruit?
Wat weet je van de diagonalen van een ruit?
**c.** Wat weet je van de hoeken van een rechthoek?
Wat weet je van de diagonalen van een rechthoek?

**Voorbeeld**

| | |
|---|---|
| *Gegeven* | Van een vierhoek zijn de overstaande zijden even lang. |
| *Vraag* | Wat voor soort vierhoek is dat? |
| *Antwoord* | Het is een parallellogram. |

**51** **a.** Van een vierhoek is gegeven dat de overstaande hoeken even groot zijn.
Wat voor soort vierhoek is dat?
**b.** Van een vierhoek is gegeven dat de vier hoeken recht zijn.
Wat voor soort vierhoek is dat?

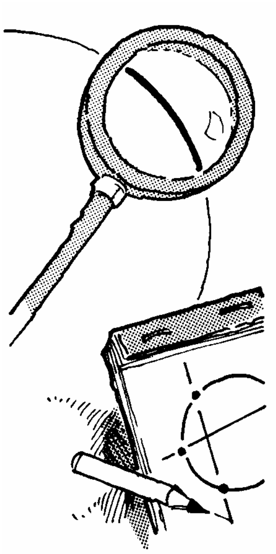
**52** **a.** Van een parallellogram is gegeven dat het een rechte hoek heeft.
Wat voor soort vierhoek is dat?
**b.** Van een ruit is gegeven dat hij een rechte hoek heeft.
Wat voor soort vierhoek is dat?

**53** **a.** Van een vierhoek is gegeven dat de diagonalen even lang zijn.

Kun je hieruit concluderen dat de vierhoek een rechthoek is?
**b.** Van een parallellogram is gegeven dat de diagonalen even lang zijn.
Kun je hieruit concluderen dat de vierhoek een rechthoek is?

**54 a.** Van een vierhoek is gegeven dat de diagonalen loodrecht op elkaar staan.
Kun je hieruit concluderen dat de vierhoek een ruit is?
**b.** Van een parallellogram is gegeven dat de diagonalen loodrecht op elkaar staan.
Kun je hieruit concluderen dat de vierhoek een ruit is?

Op de volgende bladzijden staan onze uitgangspunten en de resultaten die we daaruit bewezen hebben bij elkaar. Deze mag je zonder verdere toelichting opnemen in redeneringen en bewijzen. Wel moet je dan de naam gebruikte stelling vermelden; die staat cursief achter de stelling.



Het is handig de stellingen paraat te hebben.

- Lees daarom de zaken aandachtig door en leer wat je niet zo bekend was.
- Maak zo mogelijk plaatjes bij de stellingen.

Op bladzijde 21 staan een serie oefenopgaven. Ga bij deze opgaven als volgt te werk.

- Maak een *tekening*. Zet daarin zo veel mogelijk gegevens; gebruik tekens om gelijke zijden en pijltjes om evenwijdigheid aan te geven
- Als je zelf punten of lijnen toevoegt, vermeld dat dan.
- Schrijf het *Gegeven* op.
- Schrijf het *Te bewijzen* op.
- Lever een *bewijs* op grond van *Vlakke meetkunde Uitgangspunten, definities en stellingen* op de volgende twee bladzijden.

# Vlakke meetkunde
## Uitgangspunten, definities en stellingen

De *cursief* gedrukte termen mogen als verwijzingen in een bewijs gebruikt worden.

**Hoeken, lijnen en afstanden**

De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk (*overstaande hoeken*).

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Een rechte hoek is 90° ; een gestrekte hoek is 180°.

De som van de hoeken van een driehoek is 180° (*hoekensom driehoek*).

De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn (*afstand punt tot lijn*).

*Driehoeksongelijkheid*: Als drie punten $A$, $B$, $C$ niet op één lijn liggen, dan geldt: $|AB| + |BC| > |AC|$ .

**Driehoeken**

*Gelijkbenige driehoek*
1. Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk.
2. Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk.

*Stelling van Pythagoras* Als driehoek $ABC$ een rechte hoek in $C$ heeft, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

*Omgekeerde stelling van Pythagoras* Als in driehoek $ABC$ geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is hoek $C$ recht.

*Cosinusregel* In elke driehoek $ABC$ geldt:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ .

*Sinusregel* In elke driehoek $ABC$ geldt: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ .

**Gelijke driehoeken**

Twee driehoeken zijn gelijk (congruent) als ze gelijk hebben:
a. een zijde en twee aanliggende hoeken, (*HZH*)
b. een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek, (*ZHH*)
c. twee zijden en de ingesloten hoek, (*ZHZ*)
d. alle zijden, (*ZZZ*)
e. twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden. (*ZZR*)

**Gelijkvormige driehoeken**

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

a. twee hoeken, (*hh*)
b. een hoek en de verhouding van de omliggende zijden, (*zhz*)
c. de verhouding van de zijden, (*zzz*)
d. een rechte hoek en de verhouding van twee niet-omliggende zijden. (*zzr*)

**Vierhoeken**

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (*hoekensom vierhoek*).

Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram*.

a. Er zijn twee paren evenwijdige zijden.
b. Er zijn twee paren gelijke overstaande zijden.
c. Twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig.
d. De diagonalen delen elkaar middendoor.

Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit*.

a. Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
b. Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
c. Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Equivalente definities en eigenschappen van een r*echthoek*.

a. Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
b. Het is een parallellogram met een rechte hoek.
c. Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

**Puntverzamelingen**

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten $A$ en $B$, is de middelloodlijn van het lijnstuk $AB$ (*middelloodlijn*).

De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek, is de deellijn (bissectrice) van die hoek (*deellijn*).

De verzameling van alle punten die afstand $r$ tot een gegeven punt $M$ hebben, is de cirkel met middelpunt $M$ en straal $r$ (*cirkel*).

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het deellijnenpaar (bissectricepaar) van die twee lijnen (*deellijnenpaar*).

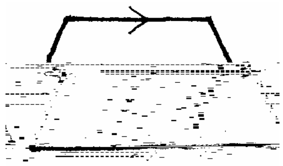
De twee deellijnen van twee elkaar snijdende lijnen snijden elkaar loodrecht in het snijpunt van die twee lijnen (*loodrechte stand deellijnenpaar*).

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar (*middenparallel*).

**Cirkeleigenschappen**

De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor (*loodlijn op koorde).*

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn).*



**55** Beredeneer dat van een gelijkbenig trapezium de diagonalen even lang zijn.
Een gelijkbenig trapezium is een vierhoek met twee evenwijdige zijden en waarvan de andere twee zijden even lang en niet evenwijdig zijn; zie plaatje.

**56** Bewijs dat de buitenbissectrices van een rechthoek een vierkant insluiten.

**57** Als in een vierhoek de diagonalen bissectrices zijn van de hoeken, dan is die vierhoek een ruit.
Bewijs dit.

**58** Als in een vierhoek twee zijden evenwijdig zijn en de andere twee zijden zijn even lang, dan is de vierhoek een parallellogram of een gelijkbenig trapezium.

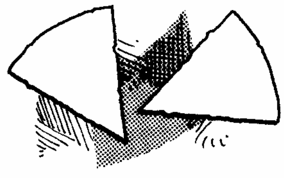
**59** Twee cirkels met middelpunten $M$ en $N$ snijden elkaar in $P$ en $Q$.
Als $\angle PMQ = \angle PNQ$, dan hebben de cirkels gelijke straal.
Bewijs dit.

**60** In een gelijkbenige driehoek liggen het zwaartepunt, het middelpunt van de ingeschreven cirkel en het middelpunt van de omgeschreven cirkel op de hoogtelijn uit de top.
Bewijs dit.

**61** $H$ is het hoogtepunt van een scherphoekige driehoek $ABC$.
Waar ligt het hoogtepunt van driehoek $ABH$?

**62** Een vierhoek zonder inspringende hoeken wordt door zijn diagonalen verdeeld in vier driehoeken.
Bewijs dat de hoogtepunten van deze driehoeken de hoekpunten zijn van een parallellogram.

**63** Driehoek $ABC$ is gelijkzijdig. $D$ ligt op zijde $BC$ en $E$ ligt op zijde $CA$, zo dat $|BD| = |CE|$. $P$ is het snijpunt van $AD$ en $BE$.
**a.** Zoek twee congruente driehoeken in de figuur.
**b.** Bereken $\angle APB$.



*Net als bij driehoeken kunnen we bij cirkelsectoren spreken van congruentie. Er zijn twee congruentie-gevallen:*

Twee cirkelsectoren zijn gelijk (congruent) als:
a. de stralen van de cirkels gelijk zijn en de middelpuntshoeken zijn gelijk,
b. de stralen van de cirkels gelijk zijn en de cirkelbogen zijn gelijk.

**Afspraak**

**64 a.** In een cirkel is een rechthoek *ABCD* getekend.
Hoe groot is bg(*AC*)?
**b.** In een cirkel is een regelmatige vijfhoek *ABCDE* getekend.
Hoe groot zijn bg(*AB*) en bg(*AC*)?

**65** *A* en *B* zijn twee punten op een cirkel met straal 3. Gegeven is dat bg(*AB*) = 129°.
**a.** Bereken |*AB*| en de lengte van boog *AB* in twee decimalen.

*A* en *B* zijn twee punten op een cirkel met straal *r*. Gegeven is dat bg(*AB*) = α°.
**b.** Druk |*AB*| en de lengte van boog *AB* uit in *r* en α.

**66** De punten *A*, *B*, *C* en *D* liggen op een cirkel met middelpunt *M*. We vergelijken de sectoren *AMB* en *CMD*.
Bewijs dat geldt:
bg(*AB*) = bg(*CD*) ⇔ |*AB*| = |*CD*|.

Je moet hier twee dingen bewijzen:
- Als de bogen *AB* en *CD* gelijk zijn, dan zijn de lijnstukken *AB* en *CD* ook gelijk,
- Als de lijnstukken *AB* en *CD* gelijk zijn, dan zijn de bogen *AB* en CD ook gelijk.



Đ 0 *AMB* ° € 0 *AB*

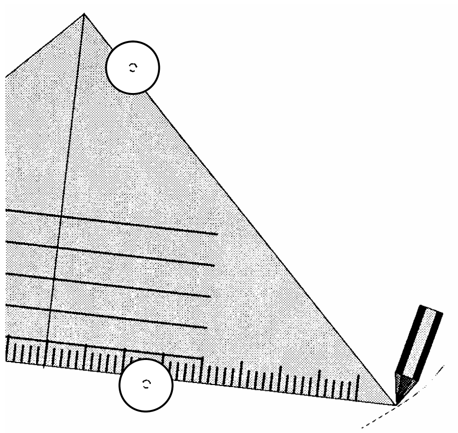
# 5 Hoeken en bogen

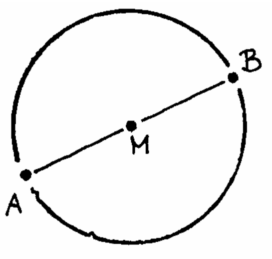
**67 Experiment**

Steek twee punaises door een karton op een afstand van ongeveer 7 cm. Leg het karton op tafel, met de punten van de punaises omhoog.

**a.** Schuif een geodriehoek met de rechte hoek tussen de punaises. Laat de geodriehoek alle mogelijke posities innemen. Let op de baan die het hoekpunt bij de rechte hoek daarbij beschrijft.

**b.** Schuif een geodriehoek met een hoek van 45° tussen de punaises. Laat de geodriehoek weer alle mogelijke posities innemen. Let op de baan die het hoekpunt bij de hoek van 45° daarbij beschrijft.



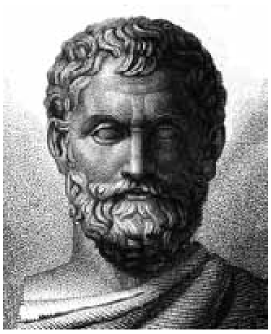



**68 Stelling van Thales**

Van een cirkel met middelpunt $M$ is $AB$ een middellijn. Verder is er een punt C, verschillend van $A$ en $B$.

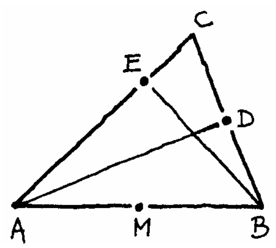
**a.** Als $C$ op de cirkel ligt, dan is $\angle ACB = 90°$.
Bewijs dat.
Tip. De lijn $CM$ verdeelt driehoek $ABC$ in twee gelijkbenige driehoeken.

**b.** Als $\angle ACB = 90°$, dan ligt $C$ op de cirkel.
Bewijs dat.
Analoog als $C$ binnen de cirkel ligt.

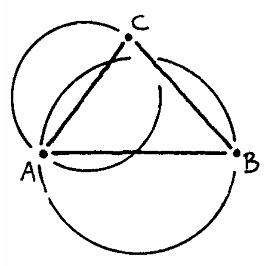


Thales van Milete
ca 624 - 547 v. Chr.

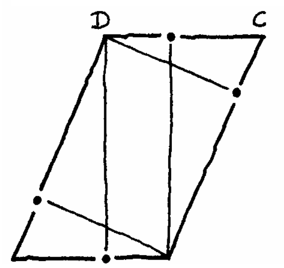
De stelling in opgave **68a** wordt toegeschreven aan Thales van Milete (Milete was in de oudheid een Griekse stad in Klein Azië). Thales is een van de legendarische oude wijzen, een filosoof die als koopman in aanraking kwam met de Egyptische en Babylonische meetkunde van zijn tijd. Bij hem laat men in het algemeen de Griekse wetenschap beginnen. Er zijn allerlei anekdotes over hem in omloop. Zo zou Thales als eerste een zonsverduistering hebben voorspeld. Maar weinig is met zekerheid over hem bekend.



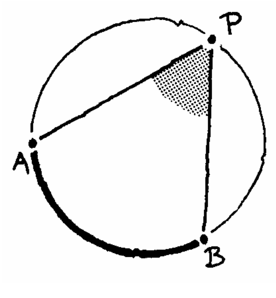

**69** *AD* en *BE* zijn hoogtelijnen in driehoek *ABC*. *M* is het midden van zijde *AB*.
Bewijs dat *D* en *E* even ver van *M* afliggen.




**70** Gegeven is driehoek *ABC*. Bekijk de cirkels met middellijnen *AB* en *AC*. Die snijden elkaar behalve in *A* in nog een tweede punt: *S*.
Bewijs dat *S* op de zijde *BC* ligt.



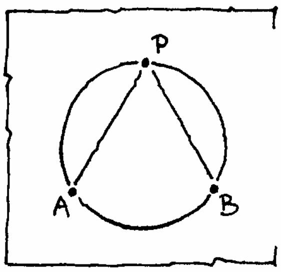

**71** *ABCD* is een parallellogram. Teken de loodlijnen uit *B* op de zijden *DA* en *DC*; teken de loodlijnen uit *D* op de zijden *BA* en *BC*.
Bewijs dat de voetpunten van de loodlijnen de hoekpunten van een rechthoek zijn.
Tip. Bewijs dat het een parallellogram is met even lange diagonalen.

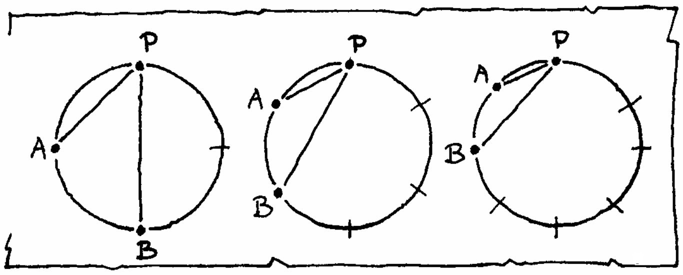



**Terminologie**
*A* en *B* zijn twee punten van een cirkel. Hiernaast is **boog** *AB* vet aangegeven.
Eigenlijk zijn er twee bogen *AB*. Die vullen elkaar aan tot de hele cirkel.
Tegenover boog *AB* is er een punt *P* op de cirkel gekozen. We zeggen dat $\angle APB$ **staat op** de boog *AB*.

**72** Het is duidelijk dat, hoe groter de boog, des te groter de hoek is die op de boog staat. Als de hoek bijna 0° is, is de booglengte ook bijna 0.
**a.** Wat weet je van de boog als de hoek 90° is?
**b.** Hoe zit het als de hoek 180° is?

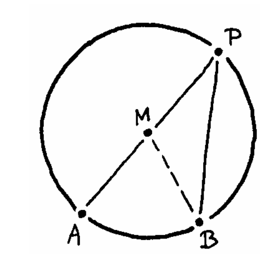
**73** We bekijken enkele speciale gevallen. In de opvolgende plaatjes is de cirkel verdeeld in 3, 4, 6 en 8 even lange bogen.

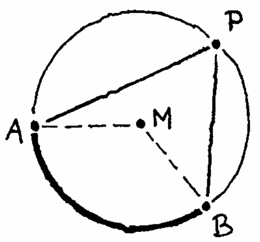


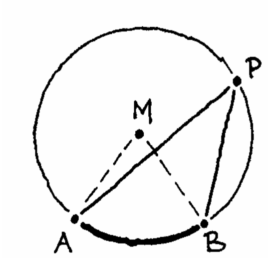




**a.** Hoe groot is bg(AB) in elk van deze gevallen?
**b.** Hoe groot is ∠APB in elk van deze gevallen?

Bij deze speciale gevallen was er iets moois aan de hand: $\angle APB = \frac{1}{2} \cdot \text{bg}(AB)$.
Iets dergelijks geldt algemeen. De grootte van een hoek hangt alleen af van de boog waarop hij staat! Deze stelling is centraal in de theorie over hoeken en bogen. We gaan hem bewijzen.

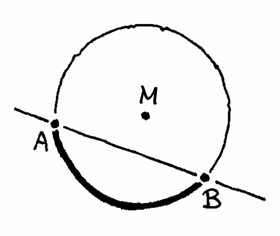



**74 Stelling van de omtrekshoek**
Gegeven is een boog *AB* van een cirkel met middelpunt *M*. *P* is een punt, ongelijk aan *A* en *B*.
*Als P op de cirkel ligt, tegenover boog AB, dan geldt:* $\angle APB = \frac{1}{2} \cdot \angle AMB$.
Om dit te bewijzen, onderscheiden we drie gevallen.
**a.** Bewijs de stelling als *P* zo ligt dat *M* op *AP* ligt.
**b.** Bewijs de stelling als *P* zo ligt dat *M* binnen driehoek *ABP* ligt.
Tip. Trek lijn *PM* door en pas twee keer de stelling van de buitenhoek toe.
**c.** Bewijs de stelling als *P* zo ligt dat *M* buiten driehoek *ABP* ligt.
Dezelfde tip als bij **b**.

## 75 Omkering van de stelling van de omtrekshoek




Gegeven is een boog $AB$ van een cirkel met middelpunt $M$. $P$ is een punt, aan de kant van de lijn $AB$ waar boog $AB$ niet ligt. (Dat is in het plaatje de kant "boven" de lijn $AB$.)

**a.** Stel dat $P$ buiten de cirkel ligt.
Bewijs dat dan $\angle APB < \frac{1}{2} \cdot \text{bg}(AB)$.
Tip. Verbind $P$ met een punt van boog $AB$ (bijvoorbeeld met $A$). De verbindingslijn snijdt de cirkel in punt $Q$. Pas opgave **6** van paragraaf 4 uit **Afstanden** toe.

**b.** Stel dat $P$ binnen de cirkel ligt.
Bewijs dat dan $\angle APB > \frac{1}{2} \cdot \text{bg}(AB)$.
Tip. Hetzelfde als bij **a**.

Hoek $AMB$ noemen we een **middelpuntshoek** op boog $AB$; als $P$ op de cirkel ligt noemen we $\angle APB$ een **omtrekshoek** op boog $AB$. We kunnen het resultaten van opgave **74** en **75** dus zo formuleren:

**Stelling van de omtrekshoek**

Gegeven een cirkel met daarop een boog.

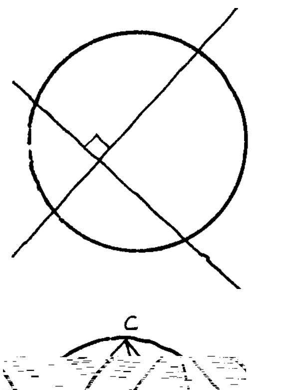
Elke omtrekshoek op die boog is half zo groot als de boog.

Als een hoek die staat op de boog half zo groot is als de boog, dan ligt het hoekpunt op de cirkel.

**76** $ABCDE$ is een regelmatige vijfhoek.
Bewijs dat $\angle EAD = \angle DAC$.

**77** Laat zien dat de stelling van Thales een speciaal geval is van de stelling van de omtrekshoek.

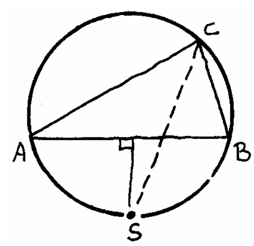
**78** $A$, $B$, $C$ en $D$ liggen op een cirkel zo dat $AB$ // $CD$.
Bewijs dat boog $AD$ en boog $BC$ even lang zijn.



**79** Twee lijnen snijden elkaar loodrecht binnen een cirkel. De snijpunten verdelen de cirkelomtrek in vier stukken.
**a.** Bewijs dat de twee tegenover elkaar liggende stukken samen de helft van de cirkelomtrek zijn.

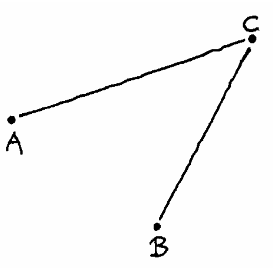
Bekijk het grensgeval dat de lijnen elkaar niet *binnen* de cirkel loodrecht snijden, maar op de cirkelrand.
**b.** Leg uit dat je daarmee opnieuw de (omgekeerde) stelling van Thales hebt bewezen.


**80** $ABC$ is een gelijkbenige driehoek met tophoek $C$. $D$ ligt op boog AB van de omgeschreven cirkel, tegenover C.
Bewijs dat $DC$ bissectrice is van $\angle ADB$.




**81** Gegeven is driehoek $ABC$ met zijn omgeschreven cirkel. De middelloodlijn van $AB$ snijdt de cirkel in het punt $S$, tegenover $C$.
Bewijs dat $CS$ bissectrice is van $\angle ACB$.

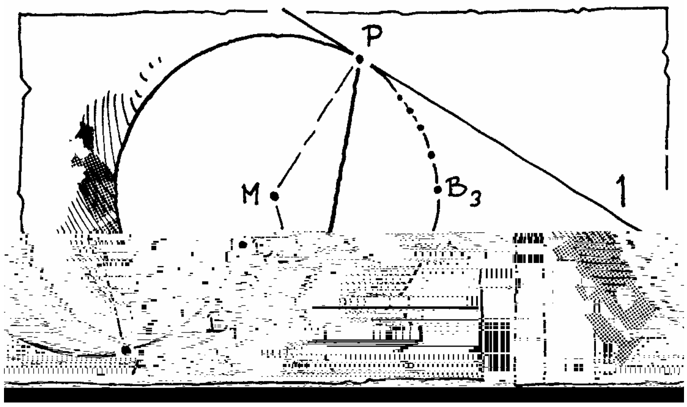
**82** Twee cirkels met gelijke straal snijden elkaar in de punten $P$ en $Q$. Een lijn door $P$ snijdt de ene cirkel ook nog in $A$ en de andere ook nog in $B$.
Bewijs dat $A$ en $B$ even ver van punt $Q$ afliggen.




**83** Gegeven zijn drie punten $A$, $B$ en $C$ die niet op een rechte lijn liggen.
Teken alle punten $P$, zo dat $\angle APB = \angle ACB$.

**84** Gegeven is een cirkel met middelpunt $M$. De lijn $l$ raakt in het punt $P$ aan de cirkel. $A$ is een ander punt van de cirkel. $\angle(l,AP)$ is de hoek die $l$ maakt met de koorde $AP$.
Bewijs dat $\angle AMP = 2 \cdot \angle(l,AP)$.
Tip. Druk beide hoeken uit in $\angle APM$.

Je kunt de situatie in opgave **84** als volgt zien als limietgeval van de stelling van de omtrekshoek.




Benader het punt $P$ met een rij punten $B_n$ op een cirkel. Er geldt:

- $\angle B_nPA$ nadert willekeurig dicht tot $\angle(l,AP)$,
- $\angle B_nMA$ nadert willekeurig dicht tot $\angle PMA$,
- $\angle iB_nMA = 2 \cdot \angle B_nPA$ voor elke $n$.

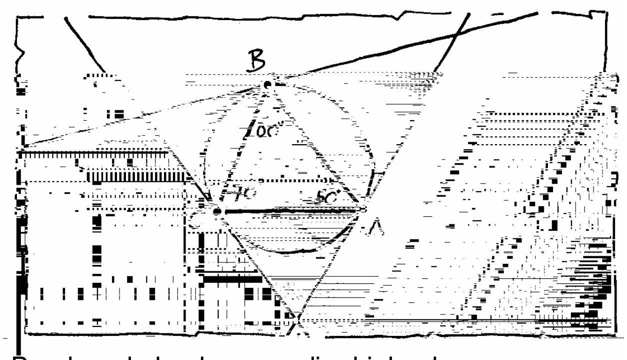
Dus $\angle PMA = 2 \cdot \angle(l,AP)$.

Gegeven een koorde van een cirkel en de raaklijn in een eindpunt van de koorde.

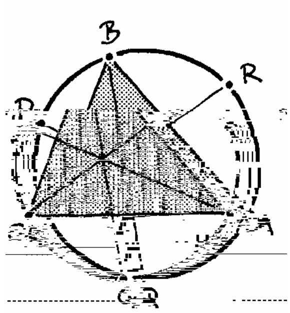
De hoek tussen raaklijn en koorde is de helft van de boog waarop de koorde staat.

We kunnen de hoek tussen de raaklijn in *P* en de koorde *AP* dus beschouwen als een omtrekshoek die staat op de boog *AP*. De stelling van de omtrekshoek geldt dus ook voor deze situatie.

**85** Driehoek *ABC* heeft hoeken van 50°, 60° en 70°. In de hoekpunten worden de raaklijnen aan de omgeschreven cirkel getekend. Die sluiten een driehoek in.

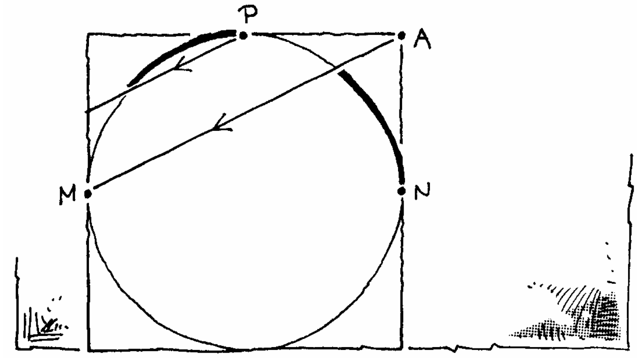



Bereken de hoeken van die driehoek.

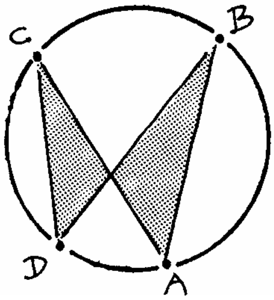



**86** Driehoek *ABC* heeft hoeken van 50°, 60° en 70°. De bissectrices van de hoeken snijden de omgeschreven cirkel in de punten *P*, *Q* en *R*.
Bereken de hoeken van driehoek *PQR*.

**87** Van een vierkant is *A* een hoekpunt en zijn *M*, *N* en *P* middens van zijden. In het vierkant is de ingeschreven cirkel getekend. Er zijn twee lijnen getekend. De ene lijn gaat door *A* en *M*; de andere gaat door *P* en is evenwijdig aan de eerste lijn. De lijnen snijden twee bogen van de cirkel af; die zijn in de figuur dik aangegeven.

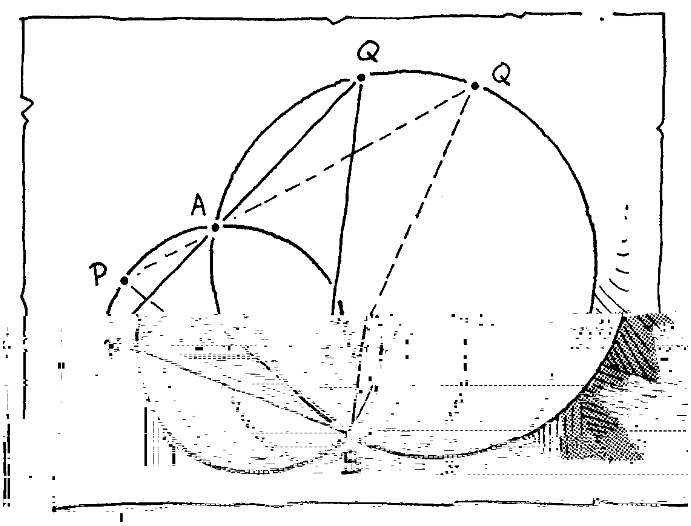



Bewijs dat die bogen even lang zijn.



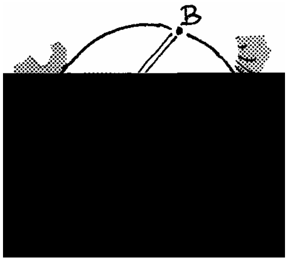

**88 Vlinderstelling**
De vier punten *A*, *B*, *C* en *D* liggen in deze volgorde op een cirkel. Trek de lijnen *AB*, *BD*, *DC* en *CA*. Dan ontstaat een "vlinder"-figuur, bestaande uit twee driehoeken. Bewijs dat deze driehoeken gelijkvormig zijn.

**89** Twee cirkels snijden elkaar in de punten *A* en *B*. Het punt *P* beweegt over de ene cirkel. De lijn door *A* en *P* snijdt de andere cirkel in *Q*. We bekijken de driehoek *PQB*. Hieronder zijn deze driehoeken getekend voor twee verschillende posities van *P*.

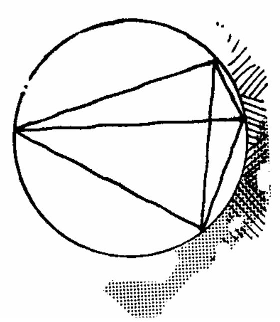



Bewijs dat de driehoeken gelijkvormig zijn.

# 6 Koordenvierhoeken



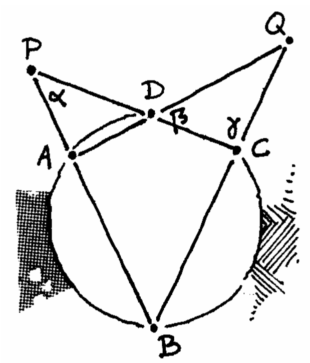

**Definitie**
Een **koorde** is een verbindingslijnstuk van twee punten op een kromme, in het bijzonder op een cirkel.
Een **koordenveelhoek** is een veelhoek waarvan de zijden koorden zijn van een cirkel. Mat andere woorden: een koordenveelhoek heeft een omgeschreven cirkel.



**90** Hiernaast staat een koordenvierhoek met zijn diagonalen. Er zijn acht omtrekshoeken twee aan twee gelijk. Neem de figuur over en schrijf dezelfde tekens in gelijke hoeken.

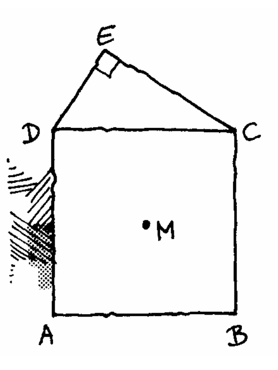
**Koordenvierhoekstelling**
In een koordenvierhoek is de som van de overstaande hoeken 180°.
**Omkering**
Als in een vierhoek de som van de overstaande hoeken 180° is, dan is het een koordenvierhoek.

**91** Bewijs de koordenvierhoekstelling en zijn omkering.

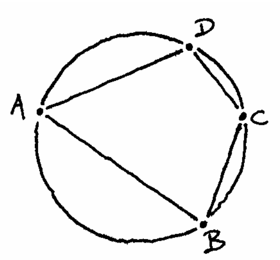



**92** De verlengden van de overstaande zijden van een koordenvierhoek *ABCD* snijden elkaar in *P* en *Q*. In het plaatje zijn drie hoeken aangegeven: $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$.
Bewijs dat $\alpha = \gamma - \beta$.

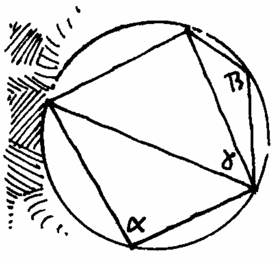
**93 a.** Wat weet je van een vlieger die koordenvierhoek is?
**b.** Wat weet je van een parallellogram dat koordenvierhoek is?




**94** *ABCD* is een vierkant met middelpunt *M*. *DCE* is een rechthoekige driehoek (hoek *E* is recht).
**a.** Bewijs dat *DMCE* een koordenvierhoek is.
**b.** Bewijs dat *EM* bissectrice is van hoek $\angle DEC$.

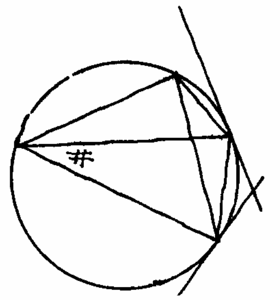



Je kunt de stelling van de koordenvierhoek ook als volgt inzien: Hoek *A* staat op de ene boog *BD* (tegenover *A*) en hoek *C* staat op de andere boog *BD* (tegenover *C*). Samen zijn deze bogen de hele cirkel. De bijbehorende middelpuntshoeken zijn samen 360°. De bijbehorende omtrekshoeken zijn dus samen 180°.

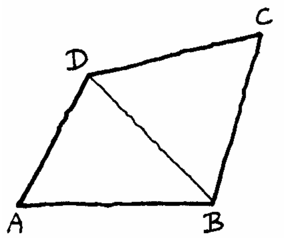



**95** In een koordenvijfhoek zijn twee diagonalen getekend; zie de figuur. Daarin zijn drie hoeken aangegeven: $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$.
Bewijs dat $\alpha + \beta = 180° + \gamma$.

**96** **a.** *ABCDEF* is een koordenzeshoek.
Bewijs dat $\angle A + \angle C + \angle E = 360°$.
**b.** *ABCDEFGH* is een koordenachthoek.
Hoe groot is $\angle A + \angle C + \angle E + \angle G$?

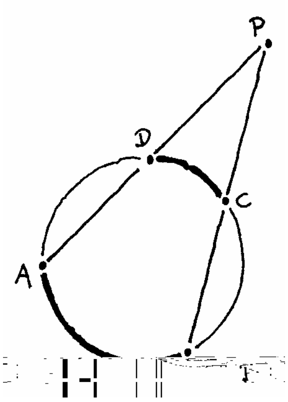



**97** Hiernaast staat een koordenvierhoek met zijn diagonalen en in twee opvolgende hoekpunten de raaklijnen aan de omgeschreven cirkel. In een van de hoeken staat het teken #.
Schrijf dat teken ook in de drie andere hoeken die even groot zijn.



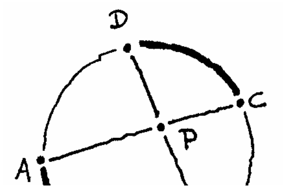

**98** *ABCD* is een vierhoek met $\angle A = \angle C$. Diagonaal *BD* verdeelt de vierhoek in twee stukken.
**a.** Bewijs dat het hoogtepunt van het ene stuk op de omgeschreven cirkel van het andere stuk ligt.
**b.** Ga na dat je het beweerde in **a** kunt toepassen op een vlieger en op een parallellogram.


**99** We komen terug op het experiment van opgave **67** van de vorige paragraaf.
Gegeven zijn twee punten *A* en *B*.
**a.** Bepaal alle punten *P*, zo dat $\angle APB = 45°$.
**b.** Bepaal alle punten *P*, zo dat $\angle APB = 135°$.




Op een cirkel is een boog gegeven. De stelling van de middelpuntshoek gaat over de hoek die staat op de boog *als het hoekpunt op de cirkel ligt* (tegenover die boog). Hoe zit het als het hoekpunt *buiten* of *binnen* die cirkel ligt? Daarover gaan de volgende opgaven.

**100** Gegeven is een cirkel en een punt *P* daar buiten. Twee lijnen door *P* snijden de cirkel in *A*, *B*, *C* en *D*. Zie de figuur.
Bewijs dat $\angle P = \frac{1}{2} \cdot \text{bg}(AB) - \frac{1}{2} \cdot \text{bg}(CD)$.
Tip. Trek hulplijn AC.

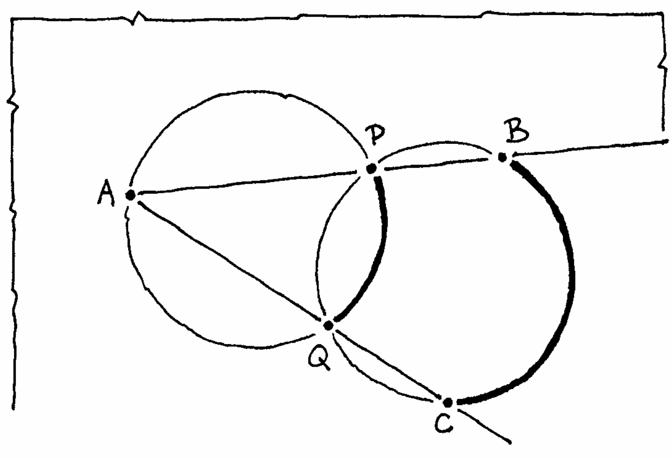



**101** Gegeven is een cirkel en een punt *P* daar binnen. Twee lijnen door *P* snijden de cirkel in *A*, *B*, *C* en *D*. Zie de figuur.
Bewijs dat $\angle APB = \frac{1}{2} \cdot \text{bg}(AB) + \frac{1}{2} \cdot \text{bg}(CD)$.
Tip. trek hulplijn *BC*.

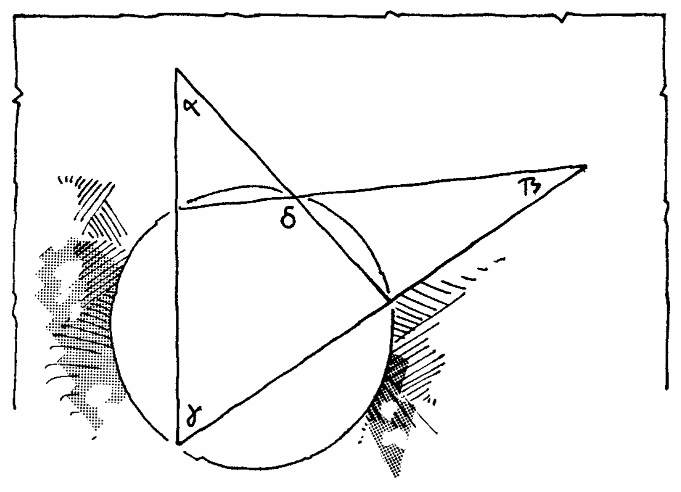
**102** Ga na dat de resultaten van **101** en **102** beide als randgeval de stelling van de omtrekshoek opleveren.

**Samengevat**
Als twee lijnen door punt *P* van een cirkel twee bogen afsnijden, dan geldt:
- als *P* buiten de cirkel ligt, is $\angle P$ het halve verschil van de bogen;
- als *P* binnen de cirkel ligt, is $\angle P$ de halve som van de bogen.

**103** Twee cirkels met dezelfde straal snijden elkaar in *P* en *Q*. *A* ligt op de ene cirkel. Lijn *AP* en lijn *AQ* snijden de andere cirkel in *B* en *C*.
Bewijs dat boog *BC* = 2 · boog *PQ*.



**104** We verlengen de zijden van een koordenvierhoek. Zodoende ontstaat nevenstaande figuur. Hierin zijn vier hoeken aangegeven: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en $\delta$.
Bewijs dat $\delta = \alpha + \beta + \gamma$.

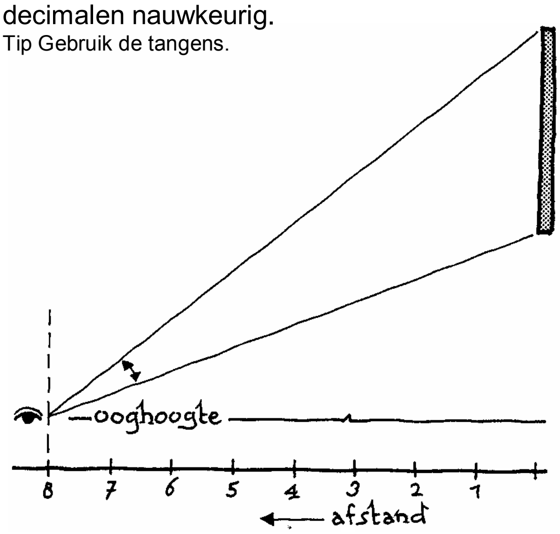


## 7 Iso-hoeklijnen

* **105** Je bent in Neerlands hoofdstad en bewondert het paleis op de Dam. Hoe breed zie je het gebouw? Richt je blik

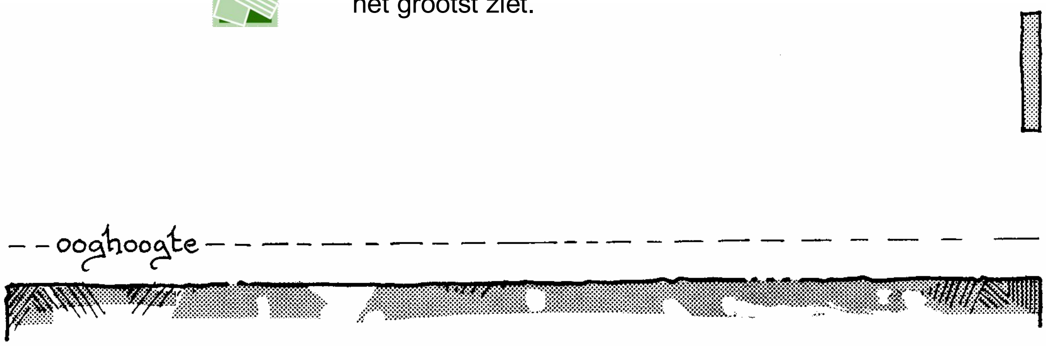

**106** Jan van den Heuy rijdt op de A50. Hij moet naar Arnhem. In de verte ziet hij het bord waarop staat hoe hij moet voorsorteren. Als hij dichterbij komt, lijkt het bord groter te worden. Dat komt omdat de **kijkhoek** waaronder hij het bord ziet groter wordt. Maar als hij vlak bij het bord is, lijkt het weer kleiner.

De onderkant van het bord is 4 meter boven de weg. Het bord is 3,5 meter hoog. Reken met een ooghoogte van de automobilist van 1 meter.
Hieronder is de hoek getekend waaronder hij het bord ziet als de auto nog 8 meter van het bord af is.
**a.** Bereken de hoek waaronder Jan het bord ziet in twee decimalen nauwkeurig.
Tip Gebruik de tangens.




**b.** Als Jan $x$ meter voor het bord is, is de hoek waaronder Jan het bord ziet: $\tan^{-1}\left(\frac{6{,}5}{x}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$.
Toon dat aan.
**c.** Teken de grafiek op de GR.
Bepaal in twee decimalen nauwkeurig voor welke afstanden $x$ de hoek 15,0° graden is.

**107** We gaan meetkundig bepalen op welke plek Jan het bord het grootst ziet.




Vergeet even de ooghoogtelijn. De punten van waar uit je het bord onder een hoek van 30° ziet, liggen op een cirkelboog, de iso-30°-hoeklijn.

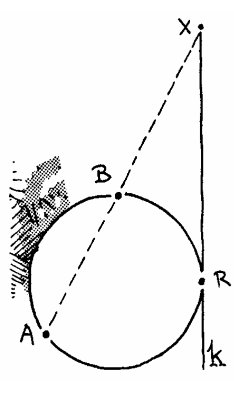
**a.** Teken die op het werkblad.
**b.** Teken ook de iso-hoeklijnen bij de hoeken: 15°, 20°, 25° en 40°.
Nu letten we wel op de ooghoogtelijn. Je ziet dat er twee plekken zijn waar Jan het bord ziet onder een hoek van 20°. Maar er zijn geen plekken waar hij het bord ziet onder een hoek van 25°. Er is één plek waar Jan het bord ziet onder de grootste kijkhoek.
**c.** Wat weet je van de bijbehorende iso-hoeklijn te vertellen? Wat is dus de straal van die cirkel?
**d.** Teken de iso-hoeklijn bij de grootste kijkhoek.

* **108** We keren terug naar opgave **105**.
Iemand steekt schuin de Dam over. Zijn route staat in de plattegrond: de lijn *k*. Er is een plek op *k* van waar uit hij het paleis op de Dam het breedst ziet. Omdat de lijn *k* niet loodrecht staat op de voorgevel van het paleis, is het lastig die plek te vinden. Hieronder volgt een slimme constructie.

- We zoeken een cirkel die door de uiterste punten *A* en *B* van de voorgevel gaat en raakt aan lijn *k*.
- Het middelpunt van die cirkel ligt op de middelloodlijn *m* van *AB*.
- Teken een (kleine) cirkel met middelpunt op *m*, die raakt aan *k*. Noem het middelpunt *M*.
- Noem het snijpunt van *m* met *k*: *S*. Vanuit *S* gaan we de kleine cirkel opblazen, totdat hij door *A* en *B* gaat.
- Trek lijn *AS*. Noem een van de snijpunten met de cirkel: *T*. (Als *AS* de cirkel niet snijdt, doet *BS* dat wel; verwissel dan *A* en *B*.)
- Trek de lijn door *A*, evenwijdig aan *TM*. Noem het snijpunt met lijn *m*: *N*.
- Teken de cirkel met middelpunt *N* die raakt aan *k*.

**a.** Voer deze constructie stap voor stap uit.

We zochten de plek op de route k van waar uit de persoon het paleis het breedst ziet.
**b.** Ga na dat het raakpunt van de cirkel met middelpunt *N* en de lijn *k* het gezochte punt op *k* is.




**109** Een cirkel gaat door de punten *A* en *B* en raakt aan de lijn *k* in het punt *R*. De lijnen *k* en *AB* snijden elkaar in het punt *X*.
**a.** Bewijs dat de driehoeken *ARX* en *RBX* gelijkvormig zijn.
**b.** Laat met verhoudingen zien dat uit **a** volgt:
$|AX|\cdot|BX| = |RX|^2$.

**110** Dezelfde figuur als bij opgave **109**. Noem de straal van de cirkel *r* en het middelpunt *M*. We gaan op twee manieren bewijzen dat

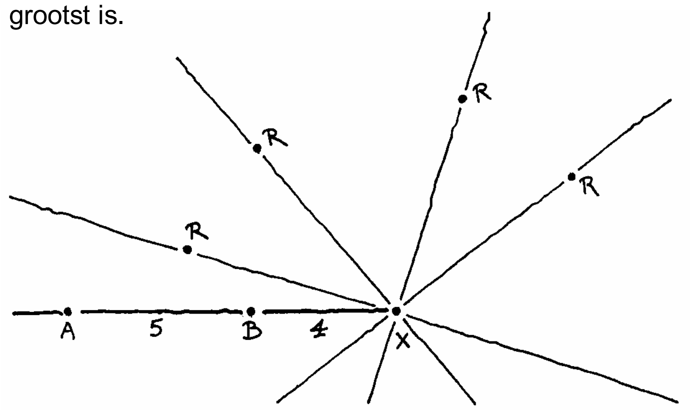
$$\sin \angle ARB = \frac{|AB|}{2r}.$$

**a.** Gebruik dat $\angle ARB = \frac{1}{2} \cdot \angle AMB$.

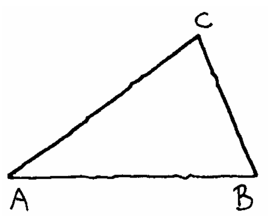
**b.** Verplaats *R* over de cirkel naar een punt *S*, zo dat $\angle ABS = 90°$.

**111** Gegeven is lijnstuk *AB* van lengte 5. Op het verlengde van *AB* aan de kant van *B* ligt het punt *X* op afstand 4 van *B*.

Door *X* zijn vier lijnen getekend. Op elk van die lijnen is dat punt *R* aangegeven, waarbij de kijkhoek *ARB* het grootst is.




Leg uit dat de punten R op één cirkel liggen. Wat is de straal van de cirkel? Tip. Gebruik opgave **109b**.




**112** Gegeven is driehoek *ABC*. Er is een punt binnen de driehoek waar je zijde AB onder 120° ziet en zijde *BC* onder 106°.

**a.** Onder welke hoek zie je in dat punt zijde *AC*?

**b.** Bepaal de plaats van dat punt.

**113** Gegeven is driehoek *ABC*. Er is een punt binnen de cirkel waar je de drie zijden even groot ziet.
Bepaal de plaats van dat punt.

**114** Gegeven is driehoek *ABC*. Er zijn plekken in het platte vlak waar je alle drie de zijden onder een stompe hoek ziet. Er zijn ook plekken waar je twee zijden onder een stompe hoek ziet, er zijn plekken waar je één zijde onder een stompe hoek en er zijn plekken waar je geen van de zijden onder een stompe hoek ziet.
Geef elke van de vier gebieden aan met een kleur.

**115** Het punt $B$ ligt op lijnstuk $AC$ zo dat $|AB| = 2 \cdot |BC|$. Teken zo'n situatie. Neem voor $|BC|$ bijvoorbeeld 4 cm.


**a.** Zoek de punten waar je $AB$ en $BC$ beide onder een hoek van 40° ziet. Ook voor 20°, 60° en 80°.

In **a** heb je acht punten getekend die, als je het goed gedaan hebt, (zo ongeveer) op een cirkel liggen.
We gaan bewijzen dat de punten $P$ waarvoor $\angle APB = \angle CPB$ inderdaad op een cirkel liggen.
**b.** Teken in een nieuwe figuur de punten $A$, $B$ en $C$ zoals hierboven en een punt $P$ zodat $\angle APB = \angle CPB$. Teken ook de cirkels door $A$, $B$ en $P$ en door $B$, $C$ en $P$; noem hun middelpunten achtereenvolgens $M$ en $N$.
Waarom is $\angle AMB = \angle BNC$?
**c.** Waarom is $AM \,//\, BN$?

$D$ is het snijpunt van de lijnen $AC$ en $MN$. Driehoek $DNB$ is gelijkvormig met driehoek $DMA$ en $|BN| : |AM| = 1 : 2$.
**d.** Bewijs dat $|DC| = |BC|$.

De lijn $MN$ snijdt de lijn $AC$ dus voor elke $P$ in hetzelfde punt $D$. Voor elke punt $P$ is $C$ namelijk het midden van $BD$.
**e.** Bewijs dat $P$ het spiegelbeeld is van $B$ in de lijn $MN$.
**f.** Bewijs dat $P$ op de cirkel ligt met $D$ als middelpunt en $|DB|$ als straal.

# 8 Computerpracticum

Er bestaan verschillende meetkunde-computerprogramma's. Daarmee kun je nauwkeurige tekeningen maken op het scherm. Vervolgens kun je een punt verplaatsen en zien hoe de getekende figuur mee verandert. Sommige meetkundige eigenschappen blijven dan gelden.

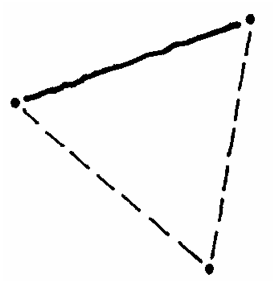
Computerprogramma's zijn:
- CABRI
- PeL (Passer en Liniaal) (freesoftware)
- WinGeometry (freesoftware)
- Geonet (freesoftware)
- GeoGebra, dit is sinds enkele jaren **het** standaardprogramma.

Met zulke programma's kun je het volgende tekenen (uitzonderingen daargelaten):
- een punt, een lijn, een cirkel;
- een lijn door een gegeven punt,
  het lijnstuk met gegeven eindpunten,
  de cirkel met gegeven middelpunt en gegeven punt op de omtrek;
- het midden van een gegeven lijnstuk,
  de middelloodlijn van een gegeven lijnstuk,
  de bissectrice van een gegeven hoek,
  een loodlijn door een gegeven punt op een gegeven lijn;
- snijpunten van twee lijnen, van twee cirkels en van een lijn en een cirkel.

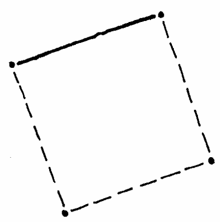
Je kunt ook in een tekening een punt, lijn of cirkel *aanwijzen* en *vastpakken*. Het object kun je vervolgens met de muis verplaatsen. Als je bijvoorbeeld een punt op een al getekende lijn hebt gekozen, zal het punt bij verschuiven op die lijn blijven.

Sommige programma's kunnen nog meer.
- "Labels" aan punten, lijnen en cirkels hangen met hun namen zoals "$A$" en "$m$".
- Verschillende objecten verschillend kleuren.
- Lijnstukken en hoeken opmeten.

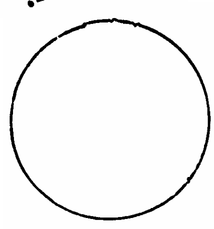
Voorlopig heb je genoeg aan deze basishandelingen. Om te leren hoe dat precies gaat, moet je een (samenvatting van een) handleiding van het betreffende programma raadplegen. Al doende leer je de (on)mogelijkheden van het programma kennen.



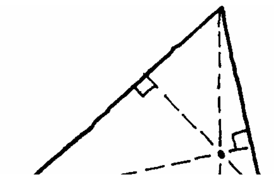
**1** Teken een lijnstuk.
Construeer een gelijkzijdige driehoek met dat lijnstuk als zijde.
Tip: Gebruik een cirkel.
Misschien heeft het programma een optie "Regelmatige veelhoek", maar die moet je nu niet gebruiken.



**2** Teken een lijnstuk.
Construeer een vierkant met dat lijnstuk als zijde.
Niet de optie "Regelmatige veelhoek" gebruiken.

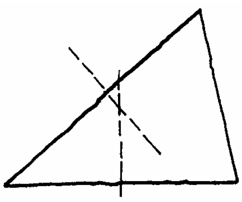


**3** **a.** Teken een (niet te kleine) cirkel op het scherm, zonder het middelpunt te tekenen.
Construeer het middelpunt van de cirkel.

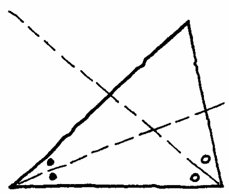


**4** **a.** Teken een driehoek.
Construeer daarin zijn drie hoogtelijnen.
**b.** Pak een hoekpunt vast en verschuif het over het scherm. Blijven de drie hoogtelijnen door één punt gaan?

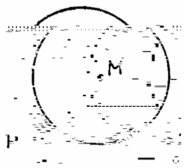
De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt, het zogenaamde **hoogtepunt**.
**c.** Waar ligt het hoogtepunt als de driehoek rechthoekig is? En als hij stomphoekig is?



**5** **a.** Teken een driehoek.
Construeer daarin twee van de middelloodlijnen van de zijden.
Construeer vervolgens de omgeschreven cirkel van de driehoek.
**b.** Pak een hoekpunt vast en verschuif het over het scherm. Blijft de omgeschreven cirkel door de hoekpunten gaan?
**c.** Waar ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel als de driehoek rechthoekig is?
En als hij stomphoekig is?



**6** **a.** Teken een driehoek.
Construeer daarin twee van zijn bissectrices.
Construeer vervolgens de ingeschreven cirkel van de driehoek.
**b.** Pak een hoekpunt vast en verschuif het over het scherm. Blijft de ingeschreven cirkel raken aan de zijden?

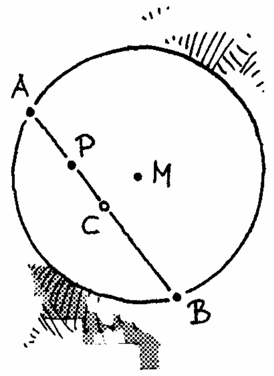



**7** **a.** Teken een punt $M$ en een cirkel met $M$ als middelpunt.
Teken buiten de cirkel nog een punt $P$.
**b.** Construeer de raaklijnen uit $P$ aan de cirkel.
Tip. Gebruik de stelling van Thales.
**c.** Pak het punt $P$ vast en verschuif het over het scherm.
Blijven de raaklijnen raken aan de cirkel?
Wat gebeurt er als $P$ heel dicht bij de cirkel komt?

**8** **a.** Teken een driehoek.
Construeer daarin twee van zijn zwaartelijnen.

Het snijpunt van de zwaartelijnen is het zogenaamde **zwaartepunt**.
**b.** Meet de stukken waarin het zwaartepunt een van de zwaartelijnen verdeelt.
**c.**

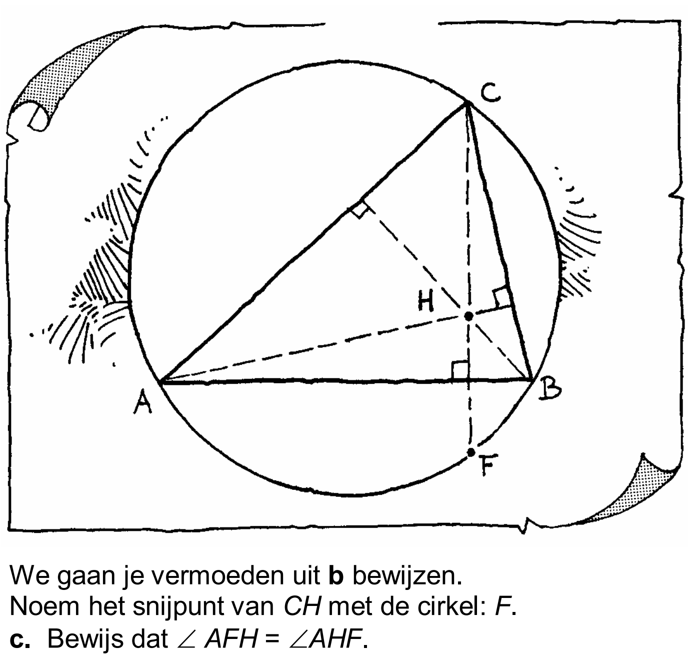
Kun je dat ook bewijzen?
**e.** We keren terug naar de willekeurige vierhoek V. De bissectrices sluiten altijd een koordenvierhoek in.
Controleer dat op het scherm.
Kun je dat bewijzen?
Tip. Twee overstaande hoeken moeten 180° zijn.




**12 a.** Teken een (niet te kleine) cirkel met middelpunt M. Kies een punt P binnen de cirkel. Kies een punt A op de cirkel en bepaal het andere snijpunt B van lijn AP met de cirkel. Geef het midden C van de koorde AB aan.
**b.** Pak punt A vast en beweeg het over de cirkel.
Welke baan beschrijft het punt C dan?
Bewijs dat.

Het computerprogramma GeoGebra heeft ook een optie waarbij de plaatsen die *C* tijdens het bewegen van *A* inneemt op het scherm blijven staan: *C* trekt een *spoor*. Ook kun je in GeoGebra het punt *A* automatisch rond laten draaien.
**c.** Probeer dit uit.

**13 De baan van het hoogtepunt**
**a.** Teken een cirkel met daarin een ingeschreven driehoek *ABC*. Construeer het hoogtepunt *H* van *ABC*.
**b.** Pak punt *C* vast en beweeg het over de cirkel.
Welke baan beschrijft *H* dan zo te zien?

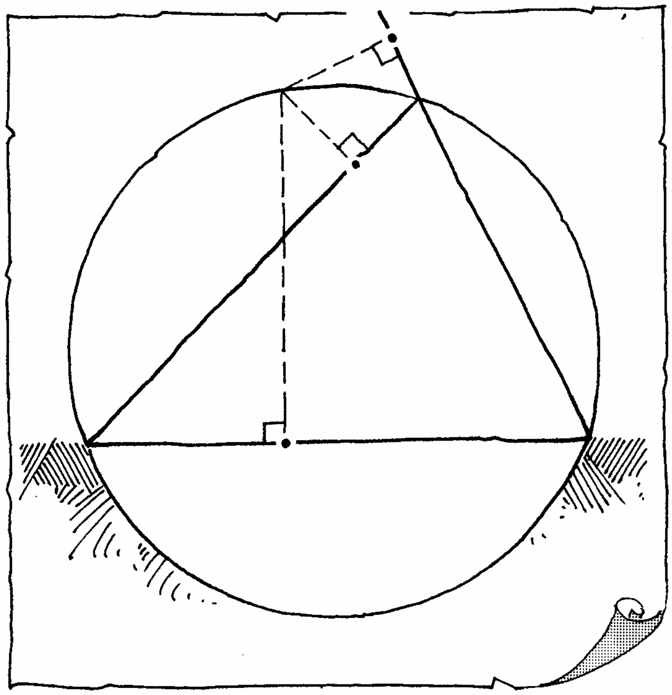



We gaan je vermoeden uit **b** bewijzen.
Noem het snijpunt van *CH* met de cirkel: *F*.
**c.** Bewijs dat $\angle AFH = \angle AHF$.
**d.** Hoe volgt uit **c** dat *H* het spiegelbeeld is van *F* in de lijn *AB*?
**e.** Over welke cirkelboog beweegt *H* dus?

*Om inzicht te krijgen in een meetkundige situatie, kun je goed een computertekening maken. Dat gaat vrij snel, heel nauwkeurig, en je kunt gemakkelijk experimenteren door bijvoorbeeld een punt te bewegen. Zodoende kun je meetkundestellingen ontdekken. Die moeten dan nog wel bewezen worden! In opgave **14** geven we een voorbeeld.*

**14 De rechte van Wallace**

**a.** Teken een driehoek met zijn omgeschreven cirkel. Kies een punt op de cirkel en construeer de voetpunten van de loodlijnen uit dat punt op de (verlengden van de) zijden van de driehoek.

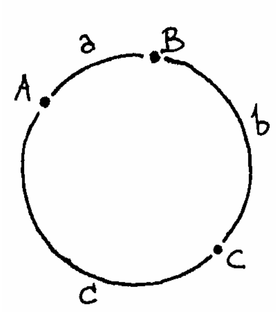


**b.** Pak het punt vast en beweeg het over de cirkel. Wat valt je op aan de ligging van de drie voetpunten?
**c.** Wat gebeurt er als het punt een hoekpunt van de driehoek is?

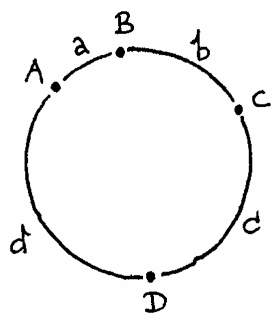
Je hebt ontdekt dat (waarschijnlijk) de drie voetpunten op een rechte lijn liggen, de zogenaamde **rechte van Wallace**. "Waarschijnlijk", omdat een bewijs je pas echt zekerheid verschaft. En een bewijs geeft uitleg waarom het zo is zoals het lijkt. In de paragraaf **Opdrachten** zullen we bewijzen dat de drie voetpunten op één lijn liggen.

In de paragrafen **Extra opgaven** en **Opdrachten** kom je allerlei situaties tegen die je op het computerscherm kunt verkennen. Je kunt natuurlijk ook opgaven uit vorige paragrafen opnieuw bekijken.

## 9 Extra opgaven

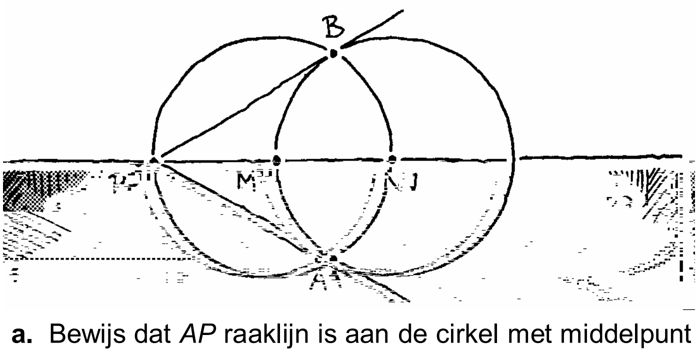



**1 De cirkel verdeeld in drie bogen**
De punten *A*, *B* en *C* verdelen een cirkel in drie bogen. De lengten van de bogen verhouden zich als a : b : c ; zie plaatje.
**a.** Neem $a : b : c = 1 : 2 : 3$.
Hoe groot zijn de hoeken van driehoek *ABC*?
**b.** Neem $a : b : c = 2 : 3 : 4$.
Hoe groot zijn de hoeken van driehoek *ABC*?
Teken een cirkel en teken daarop punten *A*, *B* en *C* die hieraan voldoen. Toelichten.
**c.** Wat weet je van *a*, *b* en *c* als driehoek *ABC* rechthoekig is?

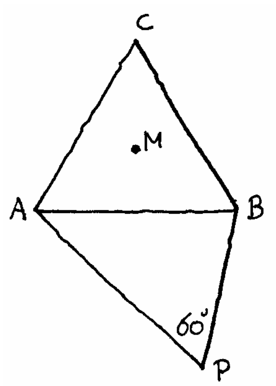



**2 De cirkel verdeeld in vier bogen**
De punten *A*, *B*, *C* en *D* verdelen (in deze volgorde) een cirkel in vier bogen. De lengten van de bogen verhouden zich als $a : b : c : d$ ; zie plaatje.
**a.** Neem $a : b : c : d = 1 : 2 : 3 : 4$.
Hoe groot zijn de hoeken van vierhoek *ABCD*?
Teken een cirkel en teken daarop punten *A*, *B*, *C* en *D* die hieraan voldoen. Toelichten.
**b.** Wat weet je van *a*, *b*, *c* en *d* als *ABCD* een rechthoek is?
**c.** Wat weet je van *a*, *b*, *c* en *d* als de diagonalen *AC* en *BD* loodrecht op elkaar staan?

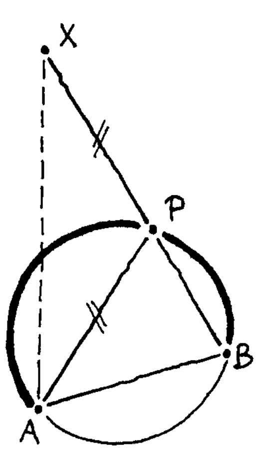
**3** Gegeven zijn twee punten *M* en *N*. We bekijken de cirkel met middelpunt *M* die door *N* gaat en de cirkel met middelpunt *N* die door *M* gaat. De cirkels snijden elkaar in de punten *A* en *B*. De lijn *MN* snijdt de cirkel met middelpunt *M* in het punt *P*.




**a.** Bewijs dat *AP* raaklijn is aan de cirkel met middelpunt *N*.
**b.** Bewijs dat $\angle APB = 60°$.
**c.** Bereken $|PA|$ als de straal van de cirkels 1 is.




**4 Bissectrice**
*ABC* is een gelijkzijdige driehoek met middelpunt *M*.
*P* is een punt buiten de driehoek, zo dat $\angle APB = 60°$.
Zie de figuur.
Bewijs dat *PM* bissectrice is van $\angle APB$.




**5 Een cirkelbeweging**

Gegeven is een cirkel met koorde *AB*. Het punt *P* ligt op de cirkel.
Het punt *X* ligt op het verlengde van *BP* zodanig dat |*AP*| = |*XP*|.
Als *P* de in de figuur dikgetekende boog *AB* doorloopt, beschrijft *X* een baan in het vlak.

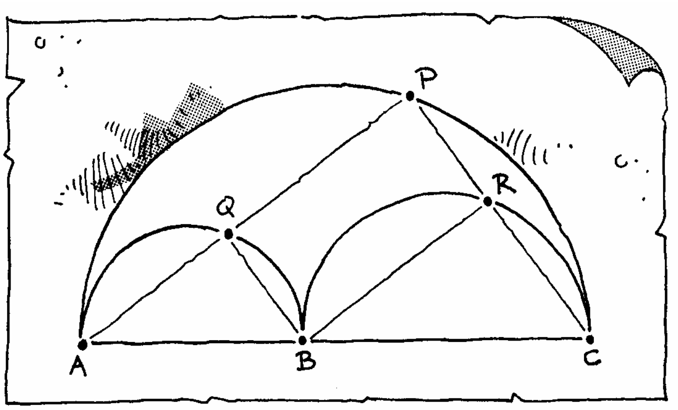
**a.** Bewijs dat die baan een deel van een cirkel is.

**b.** Teken de baan. Toelichten.

**Profi examen wiskunde B 1998, tweede tijdvak**

**6 Rechthoek**

Gegeven zijn drie halve cirkels met middellijnen *AB*, *BC* en *AC*, waarbij *A*, *B* en *C* op één lijn liggen. *P* ligt op de grootste halve cirkel. De lijnen *AP* en *CP* snijden de andere twee halve cirkels in respectievelijk *Q* en *R*.

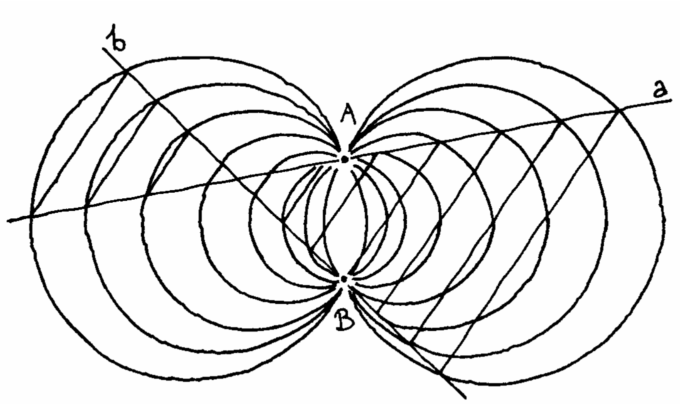



**a.** Bewijs dat *BRPQ* een rechthoek is.

Veronderstel dat |*AB*| = 3 en |*BC*| = 5.

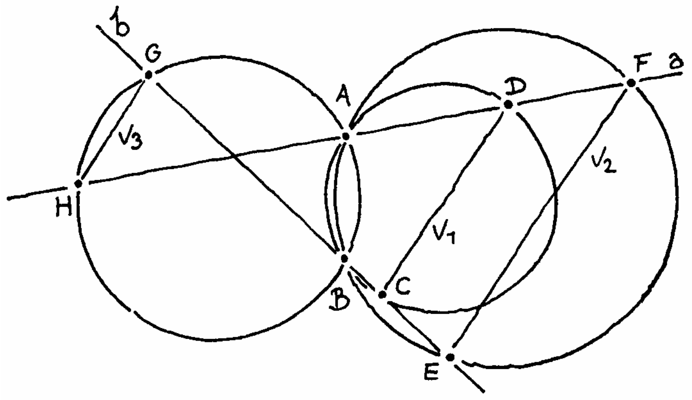
**b.** Waar op de grootste halve cirkel moet je *P* kiezen opdat *Q* en *R* op afstand 4 van elkaar af liggen?

**7 Evenwijdig 1**



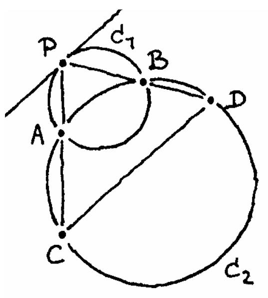

*A* en *B* zijn twee punten. Hierboven zijn elf exemplaren getekend van de bundel cirkels die door *A* en *B* gaan. *a* is een lijn door *A*, *b* is een lijn door *B*. Elk van de cirkels wordt door lijn *a* in nog een ander punt dan *A* gesneden en door lijn $b$ in nog een ander punt dan $B$. Deze snijpunten zijn door koorden verbonden.

In onderstaand plaatje zijn alleen de koorden $v_1$, $v_2$ en $v_3$ getekend met de bijbehorende cirkels.




Bewijs dat $v_1$, $v_2$ en $v_3$ evenwijdig zijn.

**profi examen wiskunde B 1999, eerste tijdvak**




**8 Evenwijdig 2**

Twee cirkels $c_1$ en $c_2$ snijden elkaar in $A$ en $B$. $P$ is een punt op $c_1$. De lijnen $PA$ en $PB$ snijden $c_2$ ook nog in $C$ en $D$.

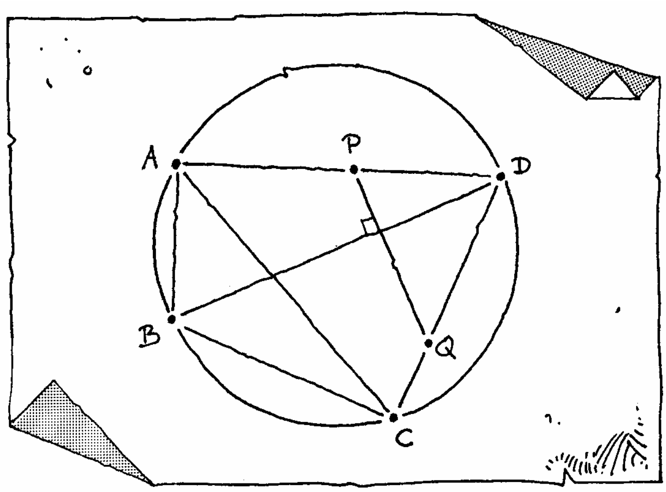
**a.** Bewijs dat de raaklijn in $P$ aan $c_1$ evenwijdig is aan $CD$.

**b.** Bewijs dat de lengte van $CD$ onafhankelijk is van de plaats van punt $P$ op $c_1$.

**9 Koordenvierhoek**

Gegeven is een cirkel met koordenvierhoek $ABCD$, zo dat $BD$ middellijn is van de cirkel.

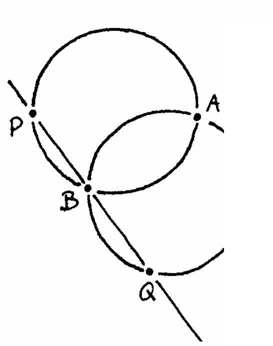
Punt $P$ ligt op de zijde $AD$ en punt $Q$ op de zijde $CD$, zo dat $PQ$ loodrecht staat op $BD$. Zie de figuur.




Bewijs dat $PACQ$ een koordenvierhoek is.

**Profi examen wiskunde B 2000, eerste tijdvak**

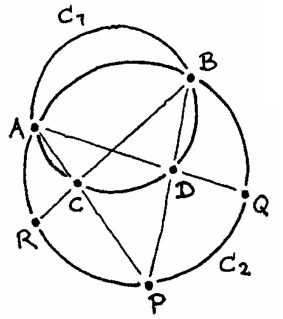
## 10 Even ver 1




Twee cirkels met gelijke straal snijden elkaar in de punten *A* en *B*. Een lijn door *B* snijdt de ene cirkel in *P* en de andere cirkel in *Q*. Zie de figuur.
Bewijs dat de punten *P* en *Q* even ver van *A* af liggen.

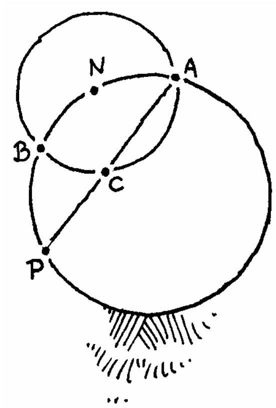
**Profi examen wiskunde B 1999, tweede tijdvak**

## 11 Even ver 2




De cirkels $c_1$ en $c_2$ snijden elkaar in de punten *A* en *B*.
*P* is een punt op $c_2$, *C* en *D* zijn de snijpunten van $c_2$ met respectievelijk *PA* en *PB*. *Q* en *R* zijn de snijpunten met $c_1$ van respectievelijk *AD* en *BC*. Zie de figuur.
Bewijs dat de punten *Q en R* even ver van *P* af liggen.

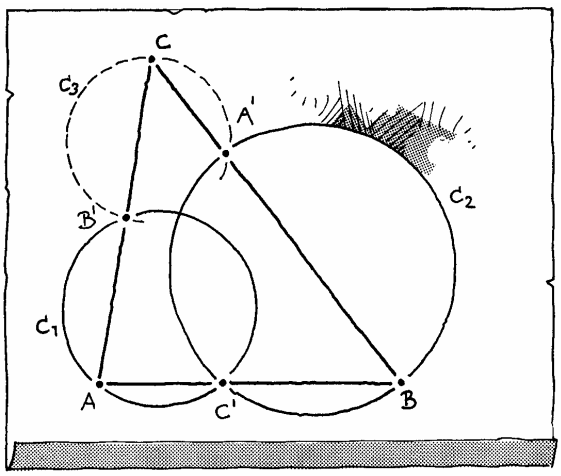
## 12 Even ver 3




Teken een cirkel. Teken een tweede cirkel met middelpunt *N* op de eerste cirkel. Noem de snijpunten van de cirkels *A* en *B*.
Kies op de eerste cirkel nog een punt: *P*. Bepaal het snijpunt *C* van *AP* met de tweede cirkel. Zie de figuur.
Bewijs dat *B* en *C* even ver van *P* af liggen.
Tip. Bewijs eerst dat $|BC| = |NC|$ en dat $\angle APN = \angle BPN$.

## 13 De stelling van Miquel

Gegeven is driehoek *ABC*. De punten *A*', *B*' en *C*' liggen op respectievelijk de zijden *BC*, *AC* en *AB*.
We bekijken drie cirkels: $c_1$ door *A*, *B*' en *C*',
$c_2$ door *B*, *A*' en *C*',
en $c_3$ door *C*, *A*' en *B*'.

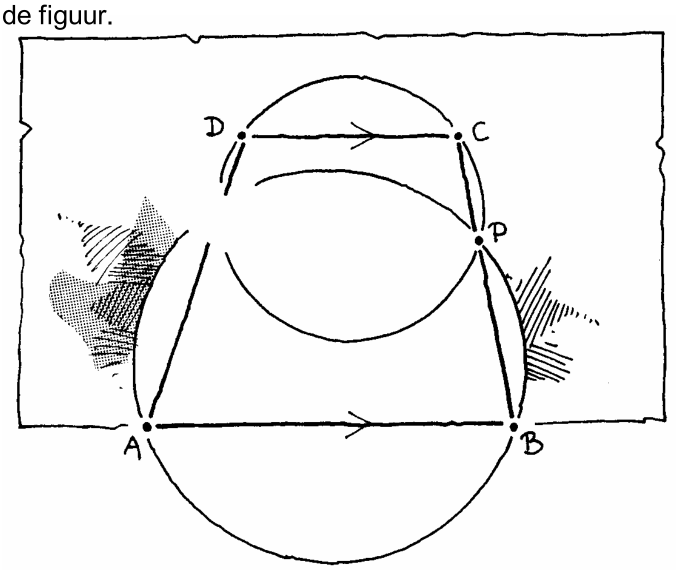



Bewijs dat deze cirkels door één punt gaan.
Tip. Noem het snijpunt van $c_1$ en $c_2$ : *S*. Je moet nu bewijzen dat het punt *S* op $c_3$ ligt.

**Profi examen wiskunde B 1997**

### 14 Op één lijn

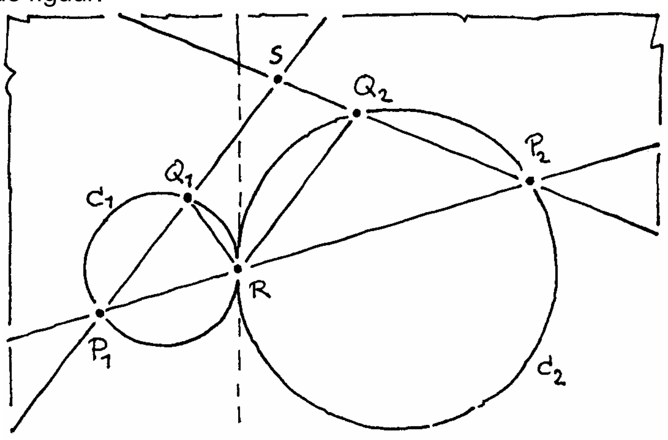
*ABCD* is een trapezium (*AB* // *CD*). *P* is een punt op *BC*. De omgeschreven cirkels van de driehoeken *ABP* en *CDP* snijden elkaar behalve in *P* ook nog in punt *S*. Zie de figuur.




Bewijs dat *S* op de lijn *AD* ligt.
Tip. Bewijs dat $\angle ASP + \angle DSP = 180°$.

### 15 Op één cirkel

Twee cirkels $c_1$ en $c_2$ raken elkaar in het punt *R*; ze hebben dus een gemeenschappelijke raaklijn in *R*.
Een lijn door *R* snijdt $c_1$ in het punt $P_1$ en $c_2$ in $P_2$.
Een lijn door $P_1$ snijdt $c_1$ in het punt $Q_1$. Een lijn door $P_2$ snijdt $c_2$ in het punt $Q_2$.
De lijnen $P_1Q_1$ en $P_2Q_2$ snijden elkaar in het punt *S*. Zie de figuur.

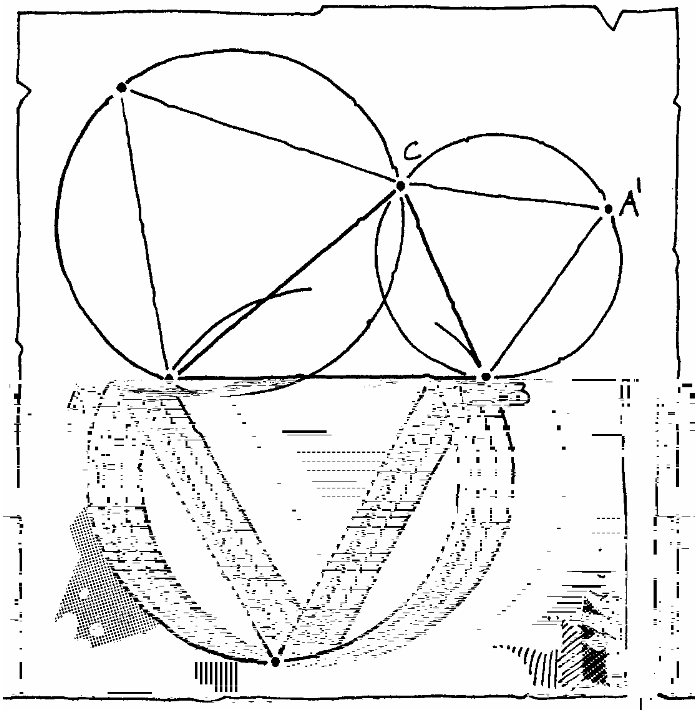



Bewijs dat de punten $Q_1$, $Q_2$, *S* en *R* op één cirkel liggen.

**Profi examen wiskunde B 2000, tweede tijdvak**

### 16 Door één punt

Gegeven is driehoek *ABC*. Op de zijden van de driehoek worden naar buiten gelijkzijdige driehoeken gezet. We bekijken de omgeschreven cirkels van die drie driehoeken.



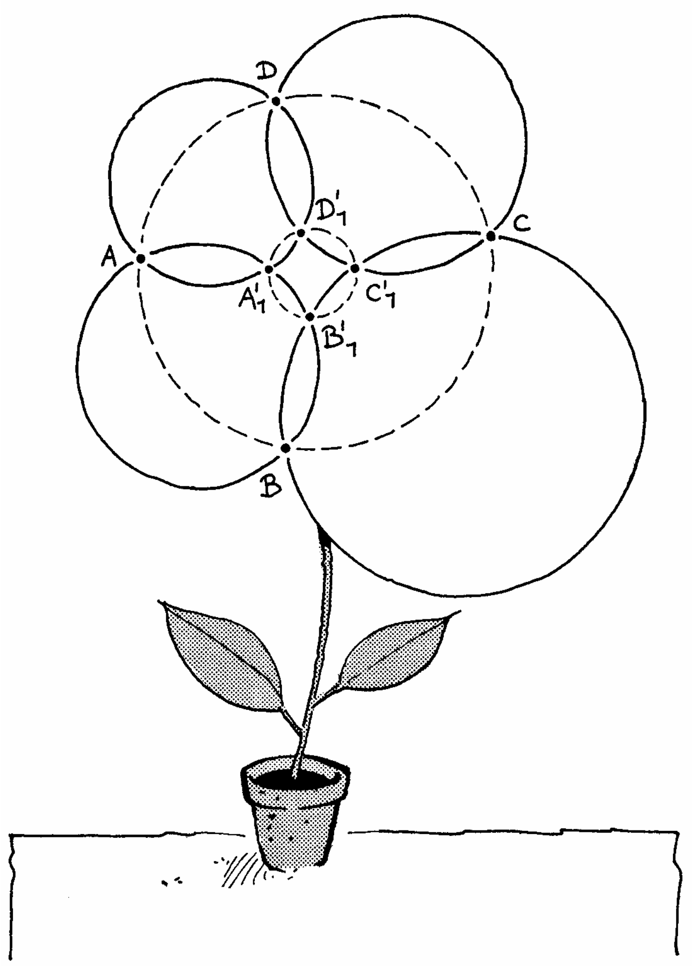

**a.** Bewijs dat deze cirkels door één punt gaan.
Tip. noem het snijpunt van twee van de cirkels *S* en bewijs dat *S* ook op de derde cirkel ligt.

Noem de top van de driehoek die op *BC* staat: *A*'.
**b.** Bewijs dat *A*, *S* en *A*' op één lijn liggen.

Het is niet noodzakelijk dat de driehoek die op de zijden van *ABC* gezet worden gelijkzijdig zijn. We zetten willekeurige driehoeken op de zijden met tophoeken $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ (dat zijn de hoeken tegenover respectievelijk *BC*, *AC* en *AB*).
**c.** Wat weet $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ als de omgeschreven cirkels van deze driehoeken door één punt gaan?

## 17 Op één cirkel

Vier cirkels snijden elkaar twee aan twee in twee punten. De "buitenste" snijpunten zijn *A*, *B*, *C* en *D*, de "binnenste" snijpunten zijn *A*', *B*', *C*' en *D*'. Zie de figuur.




Als *A*, *B*, *C* en *D* op één cirkel liggen, dan liggen *A*', *B*', *C*' en *D*' ook op één cirkel.
Bewijs dat.

Tip. Bewijs dat $\angle D'A'B' = \angle D'DA + \angle B'BA$ .

[redacted]

*In deze paragraaf stellen we vier "klassiekers" uit de meetkunde aan de orde. Zij lenen zich uitstekend om leerlingen een presentatie in de klas te laten geven.*
*Er zijn geen antwoorden bij de opdrachten opgenomen.*

**1 De negenpuntscirkel van Feuerbach**

Gegeven is driehoek *ABC*. *H* is zijn hoogtepunt.
De voetpunten van de hoogtelijnen zijn: *D*, *E* en *F*.
De middens van de zijden zijn: *P*, *Q* en *R*.
De middens van *AH*, *BH* en CH zijn: *U*, *V* en *W*.

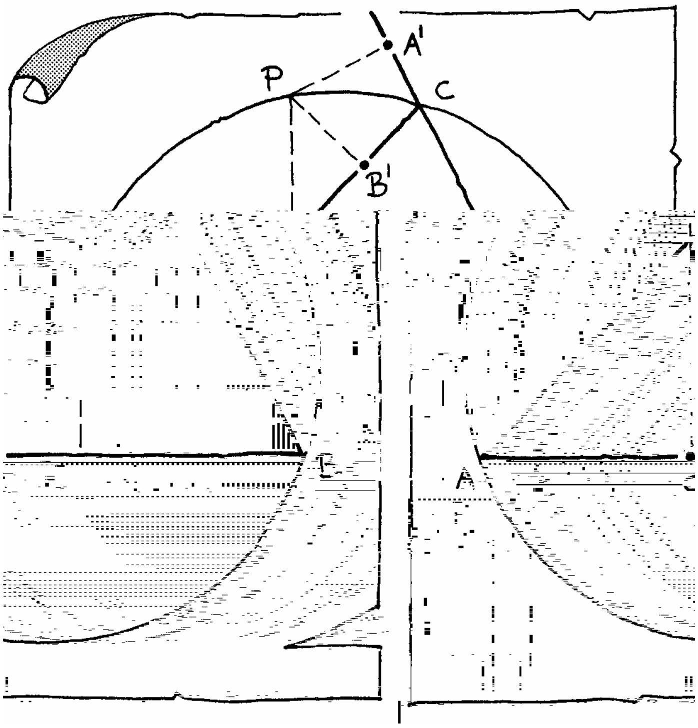
Bewijs dat de negen punten *D*, *E*, *F*, *P*, *Q*, *R*, *U*, *V* en *W* op één cirkel liggen.

Tips.
Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *PQR* noemen we: *N*.
Bewijs dat |*NR*| = |*NF*|.
Bewijs dat *N*

0

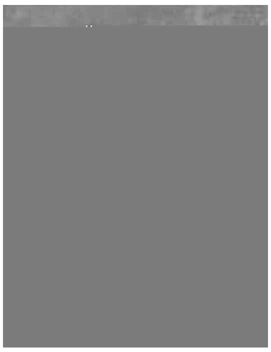
## 2 De rechte van Wallace

Gegeven is driehoek *ABC* met zijn omgeschreven cirkel. *P* is een punt van die omgeschreven cirkel. De voetpunten van de loodlijnen uit *P* op *AB*, *BC* en *CA* noemen we achtereenvolgens *C'*, *A'* en *B'*.




Bewijs dat *A'*, *B'* en *C'* op één lijn liggen.

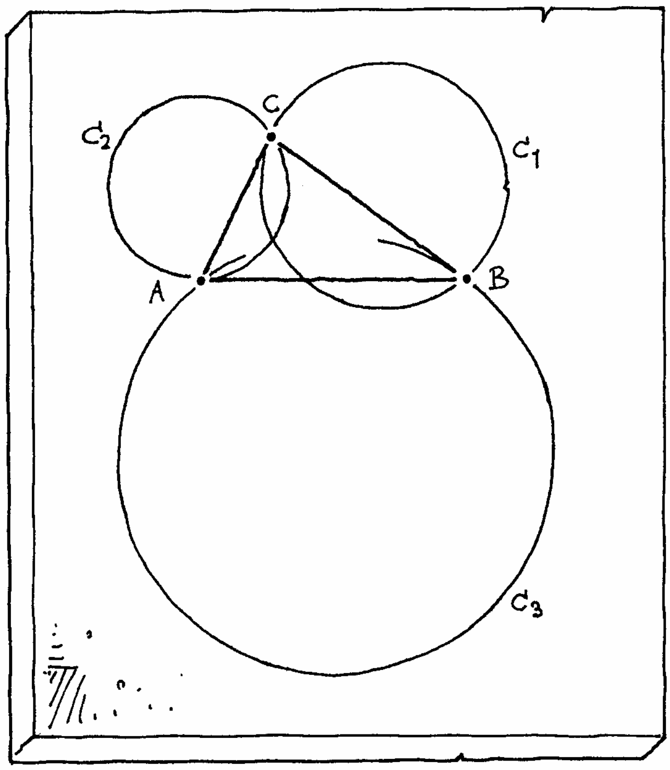
Tips.
Bewijs dat $\angle A'PC = \angle C'PA$ .
Bewijs dat de cirkel door *P*,*C* en *A'* en de cirkel door *P*, *A* en *C'* elkaar snijden in *B'*.
Bewijs dat $\angle A'B'C = \angle A'PC$ en $\angle C'B'A = \angle C'PA$.



William Wallace (1768 - 1843) was een Schots autodidact. Hij was professor in Great Marlow en Edinburgh. Van hem is ook de volgende stelling afkomstig.
*Gegeven zijn vier lijnen waarvan elk drietal een driehoek insluit. Dan hebben de omgeschreven cirkels van deze vier driehoeken een gemeenschappelijk punt.*
Wallace heeft ook de Pantograaf uitgevonden.
(Zie het hoofdstuk Gelijkvormigheid in de tweede klas).

**3 De punten van Brocard**

Gegeven is driehoek *ABC*.
$c_1$ is de cirkel die in *C* aan *CA* raakt en door *B* gaat.
$c_2$ is de cirkel die in *A* aan *AB* raakt en door *C* gaat.
$c_3$ is de cirkel die in *B* aan *BC* raakt en door *A* gaat.



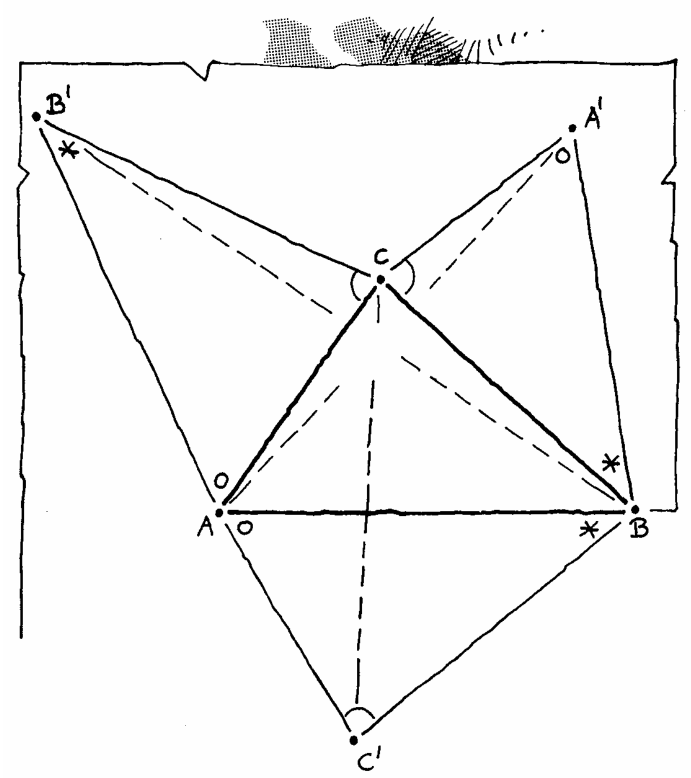

Bewijs dat $c_1$, $c_2$ en $c_3$ door één punt gaan: **een punt van Brocard**.

Er is nòg een punt van Brocard, namelijk het snijpunt van:
de cirkel $d_1$ die in *C* aan *CB* raakt en door *A* gaat,
de cirkel $d_2$ die in *A* aan *AC* raakt en door *B* gaat,
de cirkel $d_3$ die in *B* aan *BA* raakt en door *C* gaat.

Henri Brocard (1845 - 1922) was een Frans legerofficier. Hij was een amateur wiskundige. Over de naar hem genoemde punten is nog veel meer te zeggen. Wel heel fraai is het volgende.
*Drie hondjes A, B en C zitten in de hoekpunten van een driehoek. Op hetzelfde moment beginnen ze met dezelfde snelheid te rennen: A naar B, B naar C en C naar A. Op elk moment is hun looprichting naar de staart van hun voorganger. De hondjes zullen elkaar dan ontmoeten in een van de Brocard-punten van de driehoek. Als de looprichting wordt omgekeerd, eindigen ze in het andere Brocard-punt.*

**4 De stelling van Napoleon**

Gegeven is driehoek *ABC*. Plaats op de zijden drie driehoeken die gelijkvormig zijn, zo dat ze bij *A* met even grote hoeken liggen, ook bij *B* en ook bij C. De tophoeken, tegenover *A*, *B* en *C*, noemen we achtereenvolgens *A'*, *B'* en *C'*. Zie figuur.




**a.** Ga nog eens na dat de omgeschreven cirkels van deze gelijkvormige driehoeken door één punt gaan.

**b.** Bewijs dat de *AA'*, BB' en *CC'* door datzelfde punt gaan.

Of bovenstaande stelling inderdaad van Napoleon Bonaparte (1769 - 1821) afkomstig is, is onzeker. Het is niet onmogelijk, want Napoleon heeft een degelijke wiskundige opleiding genoten. Sommigen schrijven niet bovenstaande stelling aan Napoleon toe, maar de volgende.

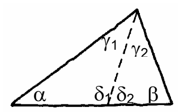
*Gegeven is een driehoek. Plaats op de zijden gelijkzijdige driehoeken, naar buiten of naar binnen. De middelpunten daarvan zijn dan de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.*

Meer soortgelijke opgaven vind je in *Denken in cirkels en lijnen, deel IIB* van het Freudenthal Instituut te Utrecht.

# Antwoorden

## Paragraaf 1 Over hoeken

**1** Noem de opvolgende hoeken $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en $\delta$.
$\alpha + \beta = 180°$ en $\beta + \gamma = 180°$ (want beide zijn een gestrekte hoek). Dus $\alpha = \gamma$.

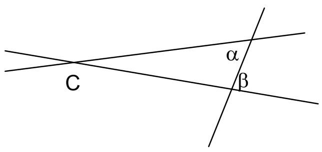



**2** $(\alpha+\gamma_1+\delta_1) + (\beta+\gamma_2+\delta_2) = 2s$ en $\alpha + \beta + \gamma_1+\gamma_2 = s$.
Dus $\delta_1+\delta_2 = s$
Maar $\delta_1+\delta_2$ maken een gestrekte hoek. Dus $s = 180$.

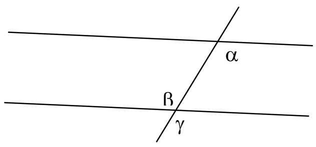
**3** **a.** $|AP| = |PC|$, want $P$ is het midden van $AC$. $|PC| = |PD|$, want $D$ is het spiegelbeeld van C. Dus $|AP| = |PD|$
Op dezelfde manier vind je $|BQ| = |QD|$.
**b.** $\angle PDQ = \gamma$, want $D$ is het spiegelbeeld van $C$,
$\angle PDA = \alpha$, want $|AP| = |PD|$,$\angle QDB = \beta$, want $|BQ| = |QD|$.
Dus $\alpha + \beta + \gamma = \angle PDA + \angle QDB + \angle PDQ = \angle\ ADB = 180°$.

**4** Noem de hoekpunten $A$, $B$ en $C$.
Omdat $|AC| = |BC|$ is $\alpha = \beta$, omdat $|AC| = |AB|$ is $\beta = \gamma$.
Dus $\alpha = \beta = \gamma$. Omdat $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ is, zijn alle drie de hoeken 60°.

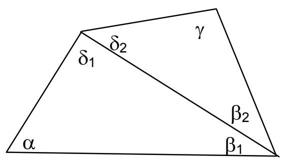
**5** De buitenhoek bij $B = 180° - \beta$ (gestrekte hoek) en $\alpha + \gamma = 180° - \beta$ (hoekensom driehoek).
Dus: de buitenhoek bij $B = \alpha + \gamma$.




**6** Als de lijnen niet evenwijdig zouden zijn, zouden ze elkaar snijden; noem het snijpunt $C$.
$\beta = \angle C + \alpha$ (buitenhoek). Dus $\beta > \alpha$. Tegenspraak.
Dus zijn de lijnen wel evenwijdig.

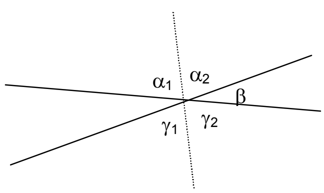



**7** Noem de hoek tegenover $\gamma$ : $\beta$.
$\beta = \gamma$ (opgave 1: overstaande hoeken) en $\alpha = \gamma$ (gegeven). Dus $\alpha = \beta$. Uit opgave 6 Z-hoeken volgt nu dat de lijnen evenwijdig zijn.

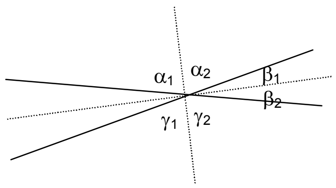



**8** Verdeel de vierhoek in twee driehoeken (dat kan altijd). Zie het plaatje voor de naamgeving van de hoeken.
$\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180°$ (hoekensom driehoek)
$\gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180°$ (hoekensom driehoek)
Dus: $\alpha + (\beta_1+\beta_2) + \gamma + (\delta_1+\delta_2) = 360°$.

**9** **a.** $(n-2) \cdot 180°$
**b.** $\dfrac{n-2}{n} \cdot 180° = 180° - \frac{360}{n}\,°$




**10** **a.** $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha$ en $\gamma_2 = \frac{1}{2}\gamma$ en $\alpha = \gamma$ (overstaande hoeken). Dus $\alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma$.
$\alpha_2 + \beta + \gamma_2 = \frac{1}{2}\gamma + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \beta + \gamma = 180°$ (want $\beta$ en $\gamma$ vormen een gestrekte hoek). Dus vormen $\alpha_2$, $\beta$ en $\gamma_2$ een




gestrekte hoek en liggen de bissectrices van $\alpha$ en $\gamma$ in elkaars verlengde.
**b.** $\alpha_2 = \frac{1}{2}\ \alpha$ en $\beta_1 = \frac{1}{2}\ \beta$ en $\alpha + \beta = 180°$.
Dus $\alpha_2 + \beta_1 = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$ en staan de bissectrices van $\alpha$ en $\beta$ loodrecht op elkaar.

**11** In driehoek *ABM* is $\angle A = \angle B$ (gelijkbenige driehoek).
$\angle A + \angle B = 180° - \angle M < 180°$. Dus $\angle A < 90°$

**12 a.** Stel dat de lijn geen raaklijn is. Dan heeft de lijn nog een tweede punt met de cirkel gemeen, zeg punt *B*. Maar dan staat *MA* niet loodrecht op de lijn (volgens opgave **11**). Tegenspraak met het gegeven.
Dus is de lijn wel een raaklijn.
**b.** Stel dat *MA* niet loodrecht staat op de lijn. De loodrechte projectie van *M* op de lijn is dan een ander punt dan *A*; noem dat *B*.
Spiegel punt *A* in de lijn *BM*. Het beeldpunt *C* ligt op de raaklijn en $|MA| = |MC|$. Dus *C* ligt ook op de cirkel. Dus raaklijn gaat door twee punten van de cirkel en dat kan niet. Dus staat *MA* wel loodrecht op de lijn.

**13** De drie driehoeken hebben alle een rechte hoek.
De drie driehoeken hebben alle een hoek $\alpha$. Van *ADC* en *BCD* is dat duidelijk. In *BCD* geldt: $\angle BCD = 90° - \angle ACD = 90° - (90°-\alpha) = \alpha$.
(De overgebleven hoeken van de drie driehoeken zijn dan automatisch ook gelijk.) De driehoeken hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.

**14** $\angle SCD = \angle SAB$ (F hoeken) en $\angle CSD = \angle ASB$ (en dus automatisch ook $\angle SDC = \angle SBA$).
De driehoeken hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.

**15** $\angle ASB = \angle CSD$ en $\angle ABS = \angle CDS$ (allebei 90°) (en dus automatisch ook $\angle BAS = \angle DCS$).
De driehoeken hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.

**16** Nee. Bijvoorbeeld een rechthoek van 2 bij 1 en een vierkant van 1 bij 1 hebben gelijke hoeken (alle hoeken zijn 90°), maar ze zijn niet gelijkvormig.

### Paragraaf 2 Door één punt

**Opmerking** $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ betekent: driehoek *ABC* is congruent met driehoek *PQR*.

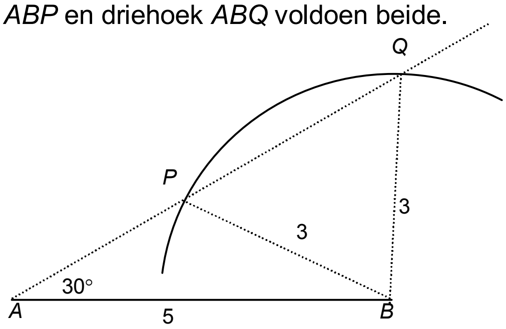
**17** ja
nee
nee
ja
ja

**18 a.** ja
ja
ja
ja
nee
nee

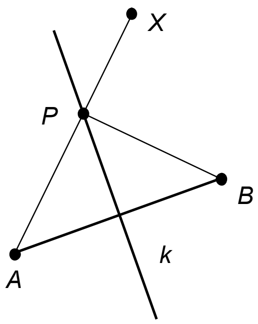
**b.** Als twee hoeken hetzelfde zijn, dan ook de derde, want de hoekensom in een driehoek is 180°.

**c.** Als twee hoeken hetzelfde zijn, dan ook de derde.

**d.** Driehoek *ABP* en driehoek *ABQ* voldoen beide.




**e.** De punten P en Q komen dan symmetrisch ten opzichte van A (de hoek van 90() te liggen.




**19** Het snijpunt van de middelloodlijn met lijnstuk *AB* noemen we *D* . Neem aan dat *P* een punt op de middelloodlijn is. Dan zijn de driehoeken *ADP* en *BDP* congruent (ZZR), dus $|AP| = |BP|$.

**20** Het snijpunt van lijn *AX* met *k* noemen we *P*. Dan: $|AP| = |BP|$ en $|BP| + |PX| > |BX|$ (driehoeksongelijkheid), dus $|AP| + |PX| > |BX|$.

**21** Gegeven is een driehoek *ABC*.
Noem het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden *AB* en *BC*: *S*.
|*AS*| = |*BS*| , want *S* ligt op de middelloodlijn van *AB*.
|*BS*| = |*CS*| , want *S* ligt op de middelloodlijn van *BC*.
Hieruit volgt dat |*AS*| = |*CS*|.
Dus *S* ligt op de middelloodlijn van *AC*.
Dus gaan de middelloodlijnen van *AB* , *BC* en *CA* door één punt (namelijk door het punt *S*).

**22** Het punt *S* ligt even ver van de hoekpunten *A*, *B* en *C*. Noem die gelijke afstand *R*. De punten *A*, *B* en *C* liggen op de cirkel met middelpunt *S* en straal *R*: dat is de omgeschreven cirkel.

**24** Gegeven is een driehoek *ABC*.
Noem het snijpunt van de bissectrices van de hoeken *A* en *B*: *S*.
d(*AC*,*S*) = d(*AB*,*S*), want *S* ligt op de bissectrice van hoek *A*. d(*AB*,*S*) = d(*BC*,*S*), want *S* ligt op de bissectrice van hoek *B*.
Hieruit volgt dat d(*AC*,*S*) = d(*BC*,*S*).

Dus $S$ ligt op de bissectrice van hoek $C$.
Dus gaan de bissectrices van de hoeken $A$, $B$ en $C$ door één punt (namelijk door het punt $S$).

**25** Het punt $S$ ligt even ver van de zijden $AB$, $AC$ en $BC$. Noem die gelijke afstand $r$. De cirkel met middelpunt $S$ en straal r raakt aan de zijden $AB$, $BC$ en $CA$.

**27** Gegeven is een driehoek $ABC$.
Noem het snijpunt van de buitenbissectrices van de hoeken $A$ en $B$: $S$.
$d(AC,S) = d(AB,S)$, want $S$ ligt op de buitenbissectrice van hoek $A$.
$d(AB,S) = d(BC,S)$, want $S$ ligt op de buitenbissectrice van hoek $B$.
Hieruit volgt dat $d(AC,S) = d(BC,S)$.
Dus $S$ ligt op de bissectrice van hoek $C$.
Dus gaan de buitenbissectrices van de hoeken $A$ en $B$ en de bissectrice van hoek $C$ door één punt (namelijk door het punt S).

**29** **a.** $|AX|^2 - |BX|^2 = x^2 + a^2 - (x^2 + b^2) = a^2 - b^2$
**b.** De verzameling punten $X$ waarvoor $|AX|^2 - |BX|^2 = 8$ is de lijn door $Y$, loodrecht op $AB$.

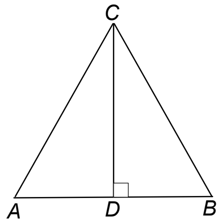
**30** Gegeven is een driehoek $ABC$.
Noem het snijpunt van de hoogtelijnen $AD$ en $BE$: $H$.
$|HB|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ , want de lijn $AH$ staat loodrecht op $BC$ .
$|HA|^2 - |HC|^2 = |BA|^2 - |BC|^2$, want de lijn $BH$ staat loodrecht op $AC$.
Hieruit volgt dat $|HB|^2 - |HA|^2 = |BC|^2 - |AC|^2$.
Dus staat de lijn $CH$ loodrecht op $AB$ en dus is lijn $CH$ ook hoogtelijn in driehoek $ABC$.
Dus gaan de hoogtelijnen door één punt (namelijk door het punt $H$).

**31** Noem het snijpunt van $a$ en $b$: $S$.
$|SM_2|^2 - |SM_3|^2 = r_2^2 - r_3^2$, want $S$ ligt op $a$ en $a$ staat loodrecht op $M_2M_3$.
$|SM_1|^2 - |SM_3|^2 = r_1^2 - r_3^2$ , want $S$ ligt op $b$ en $b$ staat loodrecht op $M_1M_3$.
Hieruit volgt dat $|SM_2|^2 - |SM_1|^2 = r_2^2 - r_1^2$.
$|XM_2|^2 - |XM_1|^2 = r_2^2 - r_1^2$ geldt alleen voor punten $X$ op $c$.
Dus ligt $S$ ook op $c$.
Dus gaan $a$, $b$ en $c$ door één punt (namelijk het punt $S$).

**32** Te bewijzen dat drie lijnen - zeg $a$, $b$ en $c$ - door één punt gaan.
Noem het snijpunt van $a$ en $b$: $S$.
Voor $S$ geldt .... , want $S$ ligt op $a$.
Voor $S$ geldt .... , want $S$ ligt op $b$.
Hieruit volgt (met de twee eigenschappen wordt een berekening uitgevoerd): voor S geldt ....

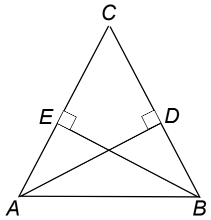
Deze nieuwe eigenschap geldt alleen voor punten die op lijn *c* liggen. Dus ligt *S* ook op *c*.
Dus gaan *a*, *b* en *c* door één punt (namelijk het punt *S*).

**Paragraaf 3 Redeneren**



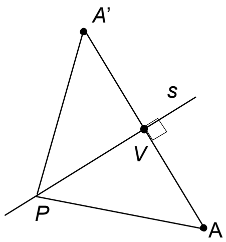

**33 a.** Veronderstel dat *CD* in driehoek *ABC* zowel hoogtelijn als zwaartelijn is, dan:

1. $|CD| = |CD|$
2. $|AD| = |DB|$, *want CD is zwaartelijn*
3. $\angle ADC = \angle BDC$ *want CD is hoogtelijn*
4. **$\Delta ADC \cong \angle BDC$** ***zhz, volgt uit 1, 2 en 3***
5. $|AC| = |BC|$ *volgt uit 4*



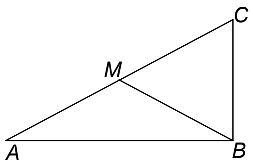

**b.** Veronderstel dat de hoogtelijnen *AD* en *BE* in driehoek *ABC* even lang zijn.

1. $|AB| = |AB|$ *gemeenschappelijk*
2. $|AD| = |BE|$ *gegeven*
3. $\angle BDA = \angle AEB = 90°$ *gegeven*
4. $\Delta BEA \cong \Delta ADB$ *zzr, volgt uit 1, 2 en 3*
5. $\angle ABC = \angle BAC$ *uit 4*
6. $|AC| = |BC|$ *volgt uit 5*



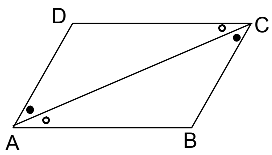

**34** Gegeven: *A'* is het spiegelbeeld van *A* in *s*, dus:

1. $|A'V| = |AV|$
2. de vier hoeken bij *V* zijn recht.
3. $|PV| = |PV|$ *gemeenschappelijk*
4. $|A'V| = |AV|$ *volgt uit 1*
5. $\angle PVA' = \angle PVA$ *volgt uit 2.*
6. $\Delta A'PV \cong \Delta APV$ zhz, *volgt uit 3, 4 en 5*
7. *AP* en *A'P* maken gelijke hoeken met s en zijn even lang. *volgt uit 6*



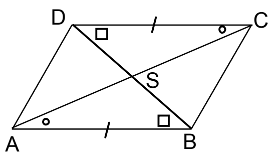

**35** Gegeven: $|AM| = |BM| = |CM|$.

1. $\Delta AMB$ gelijkbenig *gegeven*
2. $\Delta\ BMC$ gelijkbenig *gegeven*
3. $\angle MAB = \angle MBA$ *uit 1*
4. $\angle CBM = \angle BCM$ *uit 2*
5. $\angle MAB + \angle MBA + \angle CBM + \angle BCM = 180°$ (*hoekensom in driehoek ABC*)
6. $\angle ABM + \angle CBM = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. *volgt uit 5*



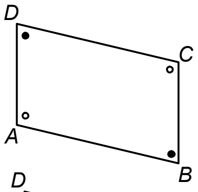

**36** Teken een diagonaal van het parallellogram.

1. $|AC| = |AC|$
2. $\angle BAC = \angle DCA$ *Z-hoeken*
3. $\angle BCA = \angle DCA$ *Z-hoeken*
4. $\Delta ABC \cong \Delta CAD$ *hzh, uit 1, 2 en 3*

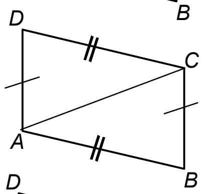



**a.** $\angle ADC = \angle ABC$ (*uit 1*) en op soortgelijke wijze bewijs je dat de andere twee overstaande hoeken even groot zijn.
**b.** $|AB| = |CD|$ en $|AD| = |BC|$ *uit 4.*
**c.**
5. $\angle ABS = \angle CDS$ *Z-hoeken*

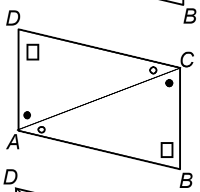
6. $\angle BAS = \angle DCS$ *Z-hoeken*
7. $|AB| = |CD|$ *uit b.*
8. $\Delta ASB \cong \Delta DSC$ *hzh, uit 5, 6 en 7*
9. $|AS| = |CS|$ en $|BS| = |DS|$ *uit 8*

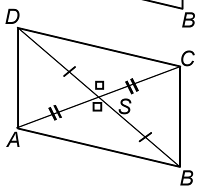



**37 a.** Gegeven: $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$
Te bewijzen: $AB \,//\, CD$.
Dus $\angle A + \angle D = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.
Dus de buitenhoek bij $A$ is gelijk aan $\angle D$.
Dus $AB \,//\, DC$ *F-hoeken*



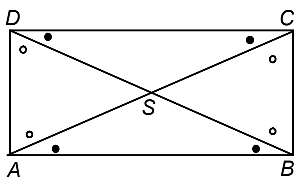

**b.** Gegeven: in vierhoek $ABCD$ zijn $AB$ en $CD$ even lang, evenals $AD$ en $BC$.
Teken een diagonaal.
1. $|AD| = |BC|$ *gegeven*
2. $|AB| = |CD|$ *gegeven*
3. $|AC| = |AC|$
4. $\Delta ADC \cong \Delta\ (CBA$ *(zzz), uit 1, 2 en 3*
5. De hoeken zoals hiernaast aangegeven zijn even groot (*uit 5)*. Dus overstaande hoeken zijn gelijk, dus volgens a is $ABCD$ een parallellogram.



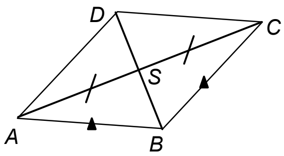

**c.** Gegeven: in vierhoek $ABCD$ hiernaast delen de diagonalen elkaar midden door.
1. $|AS| = |SC|$ *gegeven*
2. $|BS| = |SD|$ *gegeven*
3. $\angle ASB = \angle CSD$ *overstaande hoeken*
4. $\Delta ASB \cong \Delta CSD$ *zhz, volgt uit 1, 2 en 3*
5. $|AB| = |CD|$ *uit 5*

Net zo laat je zien dat AD en BC even lang zijn. Dus volgens b is ABCD een parallellogram.



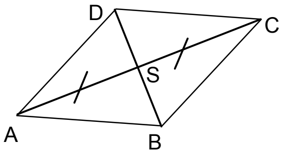

**38 a.** Overstaande hoeken zijn gelijk, dus volgens opgave **37a** is de rechthoek een parallellogram.
**b.** Omdat de overstaande zijden even lang zijn (want de rechthoek is een parallellogram), zijn beide diagonalen schuine zijde van een rechthoekige driehoek waarin de rechthoekszijden even lang zijn. Dus zijn die schuine zijden ook even lang.
**c.** Gegeven: *ABCD* is een parallellogram en *AC* en *BD* zijn even lang.
1. $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$ *uit gegeven en in een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor*
2. $\angle SAB = \angle SBA =$ $\angle SDC = \angle SCD$ *uit 1 en Z-hoeken*
3. $\angle SAD = \angle SDA =$ $\angle SBC = \angle SCB$ *uit 1 en Z-hoeken*
4. De acht hoeken hierboven zijn samen 360°. *hoekensom in een vierhoek*
5. Een hoek met zwarte stip en open stip zijn samen $\frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$. *uit 2, 3 en 4*

**39 a.** De overstaande zijden zijn in een ruit even lang, dus is de ruit volgens **37b** een parallellogram.
**b.** Zie het plaatje hiernaast.



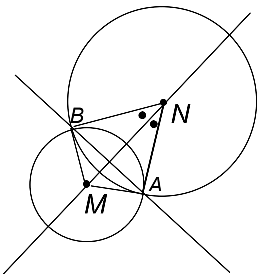

1. $|AB| = |BC|$ — *gegeven*
2. $|AS| = |CS|$ — *uit a. en in een parallellogram delen de diagonalen elkaar midden door*
3. $|SB| = |SB|$
4. $\Delta ASB \cong \Delta CSB$ — *zzz, uit 2, 3 en 4*
5. $\angle ASB = \angle CSB$, — *uit 4*
6. $\angle ASB + \angle CSB = 180°$ — *gestrekte hoek*
7. $\angle ASB = 90°$ — *uit 5 en 6*

**c.** Gegeven: *ABCD* parallellogram en $\angle ASB = 90°$.



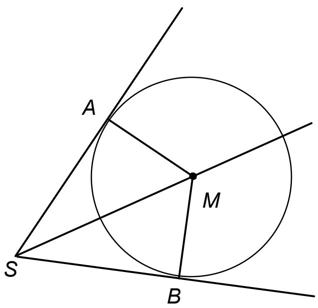

1. $|BS| = |BS|$
2. $|AS| = |CS|$ — *ABCD is parallellogram*
3. $\angle ASB = \angle CSB$ — *gegeven*
4. $\Delta ASB \cong \Delta CSB$ — *zhz, uit 1, 2 en 3*
5. $|AB| = |BC|$ — *uit 4*

Evenzo voor de overige zijden.

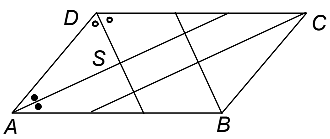



**40** De middelpunten zijn *M* en *N*, de snijpunten zijn *A* en *B*. Het snijpunt van lijn *AB* en lijn *MN* noemen we *S*.

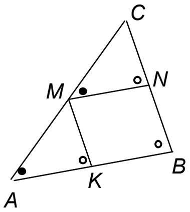
1. $|MA| = |MB|$ — *A en B op cirkel*
2. $|NA| = |NB|$ — *A en B op cirkel*
3. $|NM| = |NM|$
4. $\Delta MBN \cong \Delta MAN$ — *zzz, volgt uit 1, 2 en 3*
5. $\angle BNM = \angle ANM$ — *uit 4*
6. $\angle ABN = \angle BAN$ — *driehoek BAN is gelijkbenig*
7. $\Delta BSN \cong \Delta ASN$ — *hzh, uit 5, 6 en $|NS| = |NS|$*
8. $\angle BSN = \angle ASN$ — *uit 7*
9. $\angle BSN + \angle ASN = 180°$ — *gestrekte hoek*
10. *AB* loodrecht op *MN* — *uit 8 en 9*




41
1. $|MS| = |MS|$
2. $\angle MAS = \angle MBS = 90°$ — *raaklijn staat loodrecht op straal*
3. $|MA| = |MB|$ — *cirkel*
4. $\Delta MAS \cong \Delta MBS$ — *zzr, uit 1, 2 en 3*
5. $|AS| = |BS|$ — *uit 1*




42 De vier hoeken met stip zijn samen 180°, omdat *AB* en *CD* evenwijdig zijn. Dus in $\Delta ASD$ geldt: $\angle A + \angle D = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, dus $\angle S = 90°$… enzovoort.

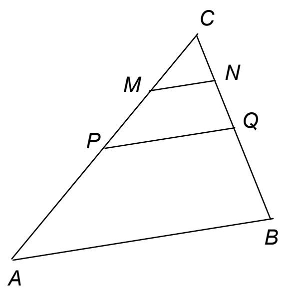



**43 a.** Gegeven: *M* is het midden van *AC*, verder is *KM // BC* en *MN // AB*.

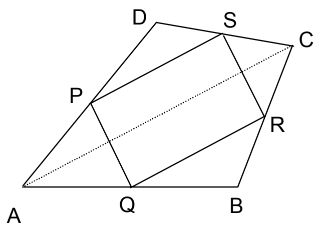
1. *KBNM* parallellogram — *KM // BC en MN // AB*
2. $\angle MAK = \angle CMN$ — *Z-hoeken*
3. $\angle AKM = \angle MNC$ — *Z-hoeken*
4. $|AM| = |MC|$ — *gegeven*
5. $\Delta AKM \cong \Delta MNC$ — *hzh, volgt uit 2, 3 en 4*
6. $|CN| = |MK|$ — *uit 5*
7. $|BN| = |MK|$. — *uit 1*
8. $|CN| = |BN|$ — *uit 6 en 7*

**b.** Dat volgt uit de uniciteit.

**44** $|MN| = |AK|$, want $\Delta AKM \cong \Delta MNC$ (zie vorige som).
$|MN| = |KB|$, want $KBNM$ een parallellogram, zie vorige opgave. Dus $|MN| = |AK| = |KB|$.




**45** Teken de middenparallel $PQ$ van $\Delta ABC$. Dan is $MN$ de middenparallel van $\Delta CPQ$.
**a.** Dus $MN$ // $PQ$ en $PQ$ // AB *(uit de vorige opgave)*, dus $MN$ // $AB$.
**b.** Dus $|AB| = 2\cdot|PQ| = 2\cdot 2\cdot|MN|$ *(uit de vorige opgave)*.




**46** $P$, $Q$, $R$ en $S$ zijn de middens van de zijden van vierhoek $ABCD$. Dan is $PS$ middenparallel van $\Delta ACD$ en $QR$ is middenparallel van $\Delta ABC$. Dus $PS$ // $AC$ en $QR$ // $AC$. Dus is $PS$ // $QR$. Op soortgelijke wijze kun je laten zien dat $PQ$ // $RS$.

**47 a.**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle CZD = \angle DPB$ | *Z-hoeken* |
| 2. | $\angle DCZ = \angle DBP$ | *Z-hoeken* |
| 3. | $\|DC\| = \|BD\|$ | *AD is zwaartelijn* |
| 4. | $\Delta CZD \cong \Delta BPD$ | *hzh, volgt uit 2, 3 en 4* |
| 5. | $\|BP\| = \|CZ\|$ | *uit 4* |

**b.**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\|FA\| = \|FB\|$ | *CF is zwaartelijn* |
| 2. | lijn $FZ$ // lijn $BP$ | *zo getekend* |
| 3. | $FZ$ middenparallel van $\Delta ABP$ | *volgt uit vorige opgave* is |
| 4. | $\|BP\| = 2\cdot\|FZ\|$ | *uit 3* |
| 5. | $\|CZ\| = 2\cdot\|FZ\|$ | *uit 4 en a* |

**c.** Er is maar één punt op $CF$ dat op $\frac{2}{3}$ van $C$ ligt binnen $\Delta ABC$.

**48** 1, 2 en 3 zijn niet voldoende argument voor congruentie, (*geval zzh*) .

**49** Het snijpunt van de middelloodlijn van $AB$ en de bissectrice van hoek $C$ ligt buiten driehoek $ABC$.

**Paragraaf 4 De stand van zaken**

**50 a.** De overstaande hoeken zijn gelijk; twee aanliggende hoeken zijn samen 180°.
De diagonalen delen elkaar midden door.
**b.** De zijden zijn even lang.
De diagonalen staan loodrecht op elkaar.
**c.** De hoeken zijn 90°.
Die zijn even lang.

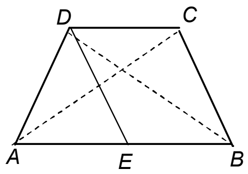
**51 a.** Een parallellogram
**b.** Een rechthoek

**52 a.** Een rechthoek
**b.** Een vierkant

**53 a.** Nee

**b.** Ja

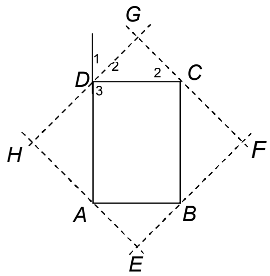
**54 a.** Nee
**b.** Ja




**55** *ABCD* is een gelijkbenig trapezium. Trek lijn *DE* // *CB* (*E* op *AB*).

Gegeven $AB \,//\, CD$ , $|AD| = |BC|$ , $DE \,//\, BC$
Te bewijzen $|AC| = |BD|$
Bewijs

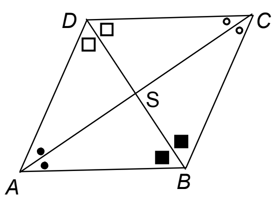
| | |
|---|---|
| 1. *BCDE* is parallellogram | *AC //CD , DE // BC* |
| 2. $\lvert DE\rvert = \lvert BC\rvert$ | *uit 1* |
| 3. $\lvert AD\rvert = \lvert DE\rvert$ | *uit 2 en gegeven* |
| 4. $\angle DAB = \angle DEA$ | *uit 3, gelijkb. driehoek* |
| 5. $\angle DEA = \angle CBA$ | *F-hoeken, DE // BC* |
| 6. $\angle DAB = \angle CBA$ | *uit 4 en 5* |
| 7. $\lvert AD\rvert = \lvert BC\rvert$ | *gegeven* |
| 8. $\lvert AB\rvert = \lvert AB\rvert$ | |
| 9. $\Delta ABD \cong \Delta BAC$ | *uit 6, 7, 8, ZHZ* |
| 10. $\lvert AC\rvert = \lvert BD\rvert$ | *uit 9* |




**56** *ABCD* is een rechthoek. De buitenbissectrices snijden elkaar in *E*, *F*, *G* en *H*.

Gegeven *ABCD* is een rechthoek
$\angle A_1 = \angle A_2$ , $\angle B_1 = \angle B_2$ , $\angle C_1 = \angle C_2$ , $\angle D_1 = \angle D_2$
Te bewijzen *EFGH* is een vierkant
Bewijs

| | |
|---|---|
| 1. $\angle D_3 = 90°$ | *ABCD is een rechthoek* |
| 2. $\angle D_1 + \angle D_2 = 90°$ | *uit 1, gestrekte hoek* |
| 3. $\angle D_2 = 45°$ | *uit 2 en gegeven* |
| 4. $\angle C_2 = 45°$ | *net als 3* |
| 5. $\angle G = 90°$ *3, 4; hoekensom driehoek* | *uit* |
| 6. $\angle E = \angle F = \angle H = 90°$ | *evenzo* |
| 7. *EFGH* is een rechthoek | *uit 6* |
| 8. $\lvert GH\rvert = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\lvert CD\rvert + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\lvert DA\rvert$ | *cos* $\angle CDG = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| 9. $\lvert HE\rvert = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\lvert DA\rvert + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\lvert AB\rvert$ | *evenzo* |
| 10. $\lvert AB\rvert = \lvert CD\rvert$ | *ABCD is een parallellogram* |
| 11. $\lvert GH\rvert = \lvert HE\rvert$ | *uit 7, 8 en 9* |
| 12. *EFGH* is een vierkant | *uit 7 en 10* |



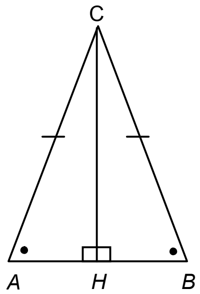

**57** Gegeven *ABCD* is vierhoek en de diagonalen zijn bissectrices van de hoeken.

| | |
|---|---|
| 1. $\angle ACB = \angle ACD$ | *gegeven* |
| 2. $\angle CAB = \angle CAD$ | *gegeven* |
| 3. $\lvert AC\rvert = \lvert AC\rvert$ | |
| 4. $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ | *HZH, volgt uit 1, 2 en 3* |
| 5. $\lvert AB\rvert = \lvert AD\rvert$; $\lvert BC\rvert = \lvert CD\rvert$ | *uit 4* |
| 6. $\Delta BCD \cong \Delta$iBAD | *op soortgelijke wijze* |
| 7. $\lvert AB\rvert = \lvert BC\rvert$ | *uit 6* |
| 8. De zijden van de vierhoek zijn even lang | *uit 5 en 7* |

**58** Gegeven: *AB* en *CD* evenwijdig en $|AD| = |BC|$.
Als *AD* // *BC*, dan is vierhoek ABCD een parallellogram (definitie a).
Als *AD* en *BC* niet evenwijdig zijn, is vierhoek *ABCD* een gelijkbenig trapezium (zie definitie in opgave 6).

**59** Gegeven: $\angle PNQ = \angle PMQ$.

| | |
|---|---|
| 1. $\angle NPQ = \angle NQP$ | *Δ NPQ is gelijkbenig* |
| 2. $\angle MPQ = \angle MQP$ | *Δ MPQ is gelijkbenig* |
| 3. $\angle NPM = \angle NQM$ | *uit 1 en 2* |
| 4. $\angle PMQ = \angle PNQ$ | *gegeven* |
| 5. *PMQN* parallellogram | *uit 3 en 4* |
| 6. $\lvert PN\rvert = \lvert MQ\rvert$ | *uit 5* |



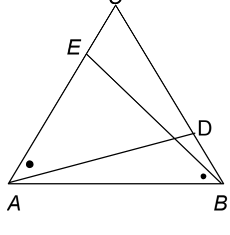

**60** Gegeven: $|AC| = |BC|$ en $\angle AHC = \angle BHC = 90°$.

| | |
|---|---|
| 1. $\angle AHC = \angle BHC$ | *gegeven* |
| 2. $\lvert CH\rvert = \lvert CH\rvert$ | |
| 3. $\angle CAH = \angle CBH$ | *gegeven* |
| 4. $\Delta AHC \cong \Delta BHC$ | *HZH, uit 1, 2 en 3* |
| 5. $\lvert AH\rvert = \lvert BH\rvert$ | *uit 4* |
| 6. *CH* is zwaartelijn | *uit 5* |
| 7. *CH* is middelloodlijn | *uit 5 en gegeven* |

**61** Gegeven: *AD*, *BE* en *CF* hoogtelijnen van driehoek *ABC*.
Dan zijn *BD*, *AE* en *HF* de hoogtelijnen van driehoek *ABH*. Dus *C* is het hoogtepunt van driehoek *ABH*.

**62** Het snijpunt van de diagonalen van de vierhoek *ABCD* is *S*.
Het hoogtepunt van driehoek *ABS* is $H_1$.
Het hoogtepunt van driehoek *BCS* is $H_2$.
Het hoogtepunt van driehoek *CDS* is $H_3$.
Het hoogtepunt van driehoek *DAS* is $H_4$.

| | |
|---|---|
| 1. $H_1H_2 \perp AC$ | |
| 2. $H_3H_4 \perp AC$ | |
| 3. $H_1H_4 \perp BD$ | |
| 4. $H_2H_3 \perp BD$ | |
| 5. $H_1H_2 \parallel H_3H_4$ | *uit 1 en 2* |
| 6. $H_1H_4 \parallel H_2H_3$ | *uit 3 en 4* |
| 7. $H_1H_4H_3H_2$ is parallellogram | *uit 5 en 6* |




**63** Gegeven: driehoek *ABC* is gelijkzijdig, $|AE| = |CD|$.
*P* is het snijpunt van *AD* en *BE*.

| | |
|---|---|
| 1. $\lvert AC\rvert = \lvert AB\rvert$ | *gegeven* |
| 2. $\lvert CD\rvert = \lvert AE\rvert$ | *gegeven* |
| 3. $\angle ACD = \angle BAE$ | *Δ ABC is gelijkzijdig* |
| 4. $\Delta ADC \cong \Delta BEA$ | *ZHZ, volgt uit 1, 2 en 3* |
| 5. $\angle CAD = \angle ABE$ | *uit 4* |
| 6. $\angle ADC = \angle BEA$ | *uit 4* |
| 7. $\angle CAD + \angle ADC = 120°$ | *hoekensom ΔADC* |
| 8. $\angle AEP + \angle EAP = 120°$ | *uit 5, 6 en 7* |
| 9. $\angle APB = 120°$ | *hoek APB buitenhoek van driehoek APE* |

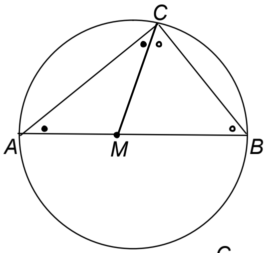
**64 a.** 180°
**b.** 72° en 144°

**65 a.** 5,42 ; 6,75
**b.** $2r \sin \frac{1}{2}\alpha$ ; $\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$

**66** Als bg($AB$) = bg($CD$), dan $\angle AMB = \angle CMD$, dus $\Delta AMB \cong \Delta CMD$ (*ZHZ*), dus $|AB| = |CD|$.
Als $|AB| = |CD|$, dan $\Delta AMB \cong \Delta CMD$ (*ZZZ*), dus $\angle AMB = \angle CMD$, dus bg($AB$) = bg($CD$).

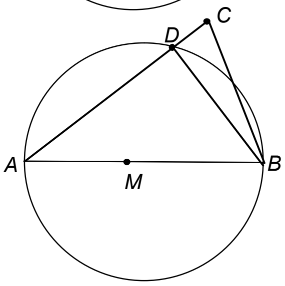
**Paragraaf 5 Hoeken en bogen**

**67 a.** De punten liggen op een halve cirkel met als middellijn de verbindingslijn van de twee punaises.
**b.** De punten liggen weer op een cirkelboog.




**68 a.** De punten $A$, $B$ en $C$ liggen op de cirkel met middelpunt M.

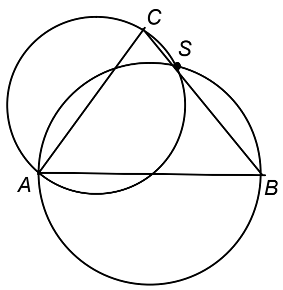
1. $\angle MAC = \angle MCA$ — *|MC| = |MA|*
2. $\angle MBC = \angle MCB$ — *|MC| = |MB|*
3. $\angle MAC + \angle MCA + \angle MBC + \angle MCB = 180°$ — *hoekensom*
4. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$ — *uit 1, 2 en 3*




**b.** Gegeven $\angle ACB = 90°$.
Stel dat $C$ buiten de cirkel ligt. $D$ is het snijpunt van de cirkel met $AC$.

1. $\angle ADB = \angle DCB + \angle CBD$ — *stelling van de buitenhoek*
2. $\angle ADB > \angle DCB$ — *uit 1*
3. $\angle ADB = 90°$ — *uit a*
4. $\angle ACB = 90°$ — *gegeven*

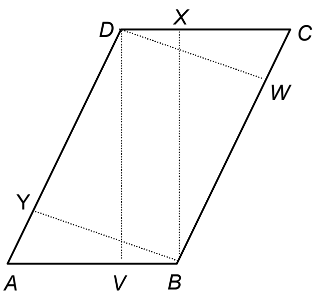
2, 3 en 4 zijn met elkaar in tegenspraak. Dus $C$ op cirkel.
Stel dat $C$ binnen de cirkel ligt. $D$ is het snijpunt van de cirkel met $AC$.
Dan vind je op dezelfde manier dat $\angle ADB < \angle DCB$, wat weer een tegenspraak oplevert. Dus $C$ op cirkel.




**69** Uit opgave **68b** volgt dat $E$ en $D$ op de cirkel met middelpunt $M$ en middellijn $AB$ liggen.

**70** We nemen aan dat $S$ het snijpunt van de cirkel met middellijn $AB$ en lijn $BC$ is. We gaan bewijzen dat $S$ op de cirkel met middellijn $AC$ ligt.

1. $\angle ASB = 90°$ — *S ligt op cirkel met middellijn AB (Thales)*
2. $\angle ASC = 90°$ — *S op lijn BC*
3. $S$ op cirkel met middellijn $AC$ — *omgekeerde van Thales*




**71** De voetpunten van de loodlijnen heten $V$, $W$, $X$ en $Y$.
Te bewijzen: $VWXY$ is een rechthoek.

1. $DWBY$ rechthoek — *4 rechte hoeken gegeven*
2. $VBXD$ rechthoek — *evenzo*
3. $|AD| = |BC|$ — *ABCD parallellogram*
4. $|DY| = |BW|$ — *DWBY rechthoek*
5. $|AY| = |CW|$ — *uit 3 en 4*

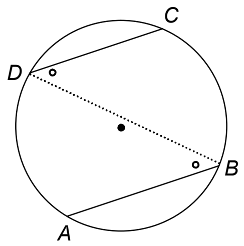
aangehaalde opgave

2. $\angle AQB = \frac{1}{2} \angle AMB$

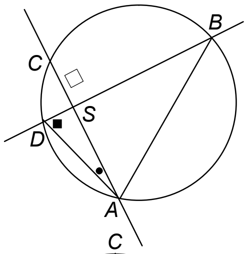
3. $\angle APB = \frac{1}{\ }$

**76** ... staan op

**77** Laat *ABC* een driehoek zijn, waarbij *C* op de cirkel met middellijn *AB* ligt. Volgens de stelling van de omtrekshoek geldt: $\angle ACB = \frac{1}{2}\cdot\angle AMB = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$.



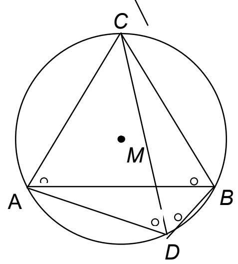

**78** Omdat $AB \,//\, CD$ geldt: $\angle ABD = \angle CDB$ (Z-hoeken). De bogen waarop deze hoeken staan zijn dus even groot.




**79 a.**

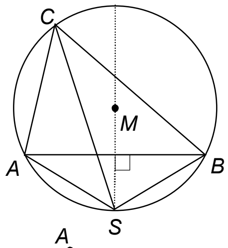
| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle SDA + \angle DAS = 90°$ | *hoekensom in driehoek ASD en $\angle DSA = 90°$* |
| 2. | $\angle SDA = \frac{1}{2}\cdot$boog *AB* | *stelling omtrekshoek* |
| 3. | $\angle DAS = \frac{1}{2}\cdot$boog *CD* | *stelling omtrekshoek* |
| 4. | boog *AB* + boog *CD* = 180° | *uit 1, 2 en 3.* |

**b.** Dan is het ene deel 0° en het andere deel 180°, dus middellijn.



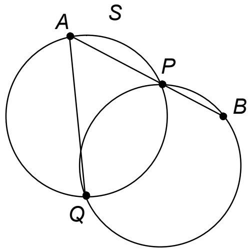

**80** Gegeven zie plaatje en $|AC| = |BC|$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle CAB = \angle CBA$ | *want $|AC| = |BC|$* |
| 2. | $\angle CDB = \angle CAB$ | *staan op dezelfde boog* |
| 3. | $\angle CDA = \angle CBA$ | *staan op dezelfde boog* |
| 4. | *CD* is deellijn van hoek *ADB* | *uit 1, 2 en 3* |

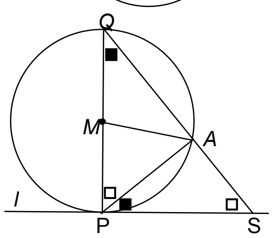



**81** Van driehoek *ABC* is de omgeschreven cirkel getekend met middelpunt *M*. Lijn *MS* is middelloodlijn van *AB*.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\Delta ASB$ is gelijkbenig | *S op middelloodlijn AB* |
| 2. | $\angle SAB = \angle SBA$ | *uit 1* |
| 3. | boog *AS* = boog *BS* | *uit 2 en st. omtrekshoek* |
| 4. | $\angle ACS = \angle BCS$ | *stelling omtrekshoek* |




**82** Hoek *PAQ* en hoek *PBQ* staan beide op boog *PQ*, wel in verschillende cirkels, maar de cirkels hebben dezelfde straal, dus die bogen zijn even groot. De hoeken zijn dan ook even groot (*stelling van de omtrekshoek*).
Dus $\Delta QAB$ is gelijkbenig en $|AQ| = |BQ|$.




**83** Dat zijn de punten op de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* die aan dezelfde kant liggen van lijn *AB* als *C*. (Uit *de stelling van de omtrekshoek.*)

**84**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $|MP| = |MA|$ | |
| 2. | $\angle MAP = \angle MPA$ | *uit 1, gelijkb. driehoek* |
| 3. | $\angle AMP = 180° - 2\cdot\angle MPA$ | *uit 2, hoekensom* |
| 4. | $\angle APS = 90° - \angle MPA$ | *raaklijn* |
| 5. | $\angle APS = \frac{1}{2}\cdot\angle AMP$ | *uit 3 en 4* |

**85** 1. boog $AB = 2\cdot\angle ACB$ — *stelling omtrekshoek*
2. boog $AB = 140°$ — *uit 1 en gegeven*
3. $\angle BAS = \frac{1}{2}\cdot 140° = 70°$ — *uit opgave **18***
4. $\angle ABS = 70°$ — *idem*
5. $\angle BSA = 40°$ — *hoekensom $\triangle BAS$, 3 en 4*

Evenzo vind je de andere hoeken:
$180° - 2\cdot 60° = 60°$ en $180° - 2\cdot 50° = 80°$.

**86** 1. $\angle QBC = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$ — *PB deellijn en gegeven*
2. boog $QC = 2\cdot\angle QBC = 60°$ — *omtrekshoek en 1*
3. boog $CP = 50°$ — *zoals 2*
4. boog $PB = 50°$ — *zoals 2*
5. boog $BR = 70°$ — *zoals 2*
6. boog $RA = 70°$ — *zoals 2*
7. boog $AQ = 60°$ — *zoals 2*
8. $\angle PQR = \frac{1}{2}\cdot$(boog $BR$+boog $PB$) — *omtrekshoek*
9. $\angle PQR = 60°$ — *uit 8, 4 en 5*
10. $\angle PRQ = 55°$ — *zoals 9*
11. $\angle QPR = 65°$ — *zoals 9*

**87** 1. $\angle QPB = \frac{1}{2}\cdot$boog $PQ$ — *stelling na opgave **84***
2. $\angle NMA = \angle MAB$ — *Z-hoeken*
3. $\angle NMA = \angle QPB$ — *F-hoeken*
4. $\angle AMN = \angle QPB$ — *uit 2 en 3*
5. $\angle AMN = \frac{1}{2}\cdot$boog $RN$ — *stelling omtrekshoek*
6. boog $RN$ = boog $PQ$ — *uit 4, 5 en 1*

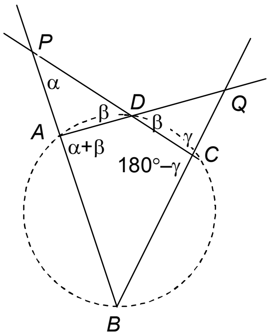
**88** Hoek *C* en hoek *B* zijn even groot, want ze staan op dezelfde boog (*stelling van de omtrekshoek*).
Zo zijn ook hoek *D* en hoek *A* even groot.

**89** Hoeken P en Q blijven op dezelfde boog AB staan.

## Paragraaf 6 Koordenvierhoeken

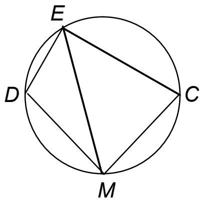
**90** Zie het plaatje hiernaast
Die hoeken zijn even groot omdat ze op dezelfde boog staan.

**91** Zie vorige opgave. In elk paar overstaande hoeken komt elk teken precies één keer voor en alle hoeken tezamen zijn 360° (*hoekensom vierhoek*).
**Omkering**
Teken de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*. De cirkelboog *AC* “onder” lijn *AC* is $2\beta$. De cirkelboog “boven” lijn *AC* is dus $2(180°-\beta)$. Omdat $\delta = 180° - \beta$ ligt *D* op die boog.

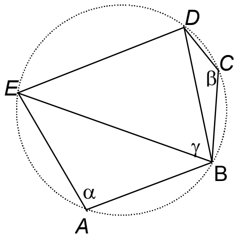



**92** 1. $\angle ADP = \beta$ *overstaande hoeken*
2. $\angle BCD = 180° - \gamma$ *gestrekte hoek*
3. $\angle BAD = \alpha + \beta$ *stelling van de buitenhoek*
4. $\alpha + \beta + 180° - \gamma = 180°$ *ABCD koordenvierhoek*
5. $\alpha + \beta = \gamma$ *uit 2*

**93 a.** Heeft twee rechte hoeken.
**b.** Dat is een rechthoek.

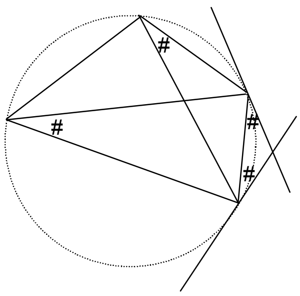



**94 a.** $\angle E + \angle M = 180°$
**b.**
1. $|DM| = |CM|$ *$\Delta$ DMC is gelijkbenig*
2. boog $DM$ = boog $CM$ *uit 1*
3. $\angle DEM = \angle MEC$ *stelling omtrekshoek en 1*

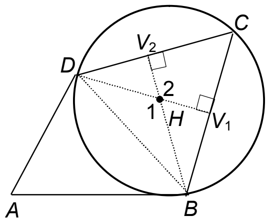



**95** 1. boog $BCDE = 2\alpha$ *stelling omtrekshoek*
2. boog $BAED = 2\beta$ *stelling omtrekshoek*
3. boog $ED = 2\gamma$ *stelling omtrekshoek*
4. $2\alpha + 2\beta = 2\gamma + 360°$ *uit 1, 2 en 3*
5. $\alpha + \beta = \gamma + 180°$ *uit 4*

**96 a.** De drie bogen waarop die hoeken staan zijn samen twee keer de cirkelomtrek.
**b.** De vier bogen waarop die hoeken staan zijn samen drie keer de cirkelomtrek: die hoekensom is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 360°$ $= 540°$.

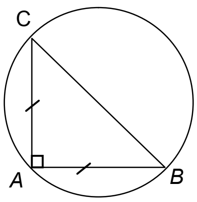



**97** Zie plaatje: volgt uit de stelling van de omtrekshoek (en het limietgeval).



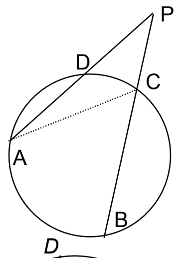

**98 a.** $V_1$ en $V_2$ zijn de voetpunten van de hoogtelijnen uit $B$ en $D$ van driehoek $DBC$. Verder is gegeven: $\angle A = \angle C$.
1. $\angle V_1 + \angle V_2 = 180°$ *gegeven*
2. $\angle H_2 + \angle C = 180°$ *uit 1, hoekensom vierhoek*
3. $\angle H_1 + \angle A = 180°$ *$\angle H_2 = \angle H_1$ , $\angle A = \angle C$ en 2*
4. $ABHD$ koordenvierhoek *uit 3*

**b.** Een vlieger is symmetrisch en heeft dus twee gelijke overstaande hoeken. Ook een parallellogram heeft twee gelijke overstaande hoeken.

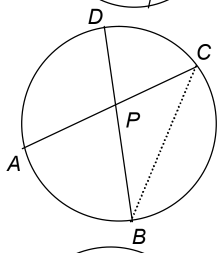



**99 a.** Teken een punt $C$ zó, dat $\angle ACB = 45°$. Teken de omgeschreven cirkel van driehoek $ABC$. De punten $P$ op de cirkel ‘boven’ $AB$ zijn precies de punten met $\angle APB = 45°$.
**b.** De punten $P$ op de cirkel ‘onder‘ $AB$ zijn precies de punten met $\angle APB = 135°$.

**100** 1. $\angle ACB = \frac{1}{2}\cdot$boog $AB$ *stelling omtrekshoek*
2. $\angle CAD = \frac{1}{2}\cdot$boog $CD$ *stelling omtrekshoek*
3. $\angle ACB = \angle CAD + \angle APB$ *stelling buitenhoek*
4. $\frac{1}{2}\cdot\text{bg}(AB) = \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(CD) + \angle APB$ *uit 1, 2 en 3*

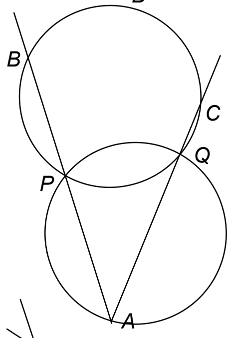



**101** 1. $\angle DPC = \angle DBC + \angle ACB$ *stelling van de buitenhoek*
2. $\angle DBC = \frac{1}{2}\cdot$boog $DC$ *stelling omtrekshoek*
3. $\angle ACB = \frac{1}{2}\cdot$boog $AB$ *stelling omtrekshoek*
4. $\angle DPC =$
$\frac{1}{2}\cdot$boog $DC$ + $\frac{1}{2}\cdot$boog $AB$ *uit 1, 2 en 3*

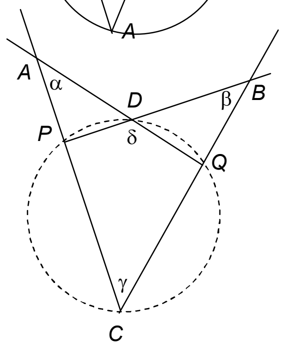



**102** Een boog krijgt lengte 0.

**103** (De tekening is een kwartslag gedraaid.)
1. $\angle A = \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(BC) - \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(PQ)$ *opgave **11** (ten opzichte van bovenste cirkel)*
2. $\angle A = \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(PQ)$ *stelling omtrekshoek*
3. $\text{bg}(BC) = 2\cdot\text{bg}(PQ)$ *uit 1 en 2*

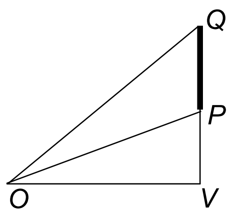



**104** 1. $\alpha = \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(CQ) - \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(PD)$ *opgave **11***
2. $\beta = \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(PC) - \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(QD)$ *opgave **11***
3. $\gamma = \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(QD) + \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(PD)$ *stelling omtrekshoek*
4. $\alpha + \beta + \gamma =$
$\frac{1}{2}\cdot\text{bg}(CQ) + \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(PC)$ *uit 1, 2 en 3*
5. $\delta = \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(CQ) + \frac{1}{2}\cdot\text{bg}(PC)$ *stelling omtrekshoek*
6. $\alpha + \beta + \gamma = \delta$ *uit 4 en 5*

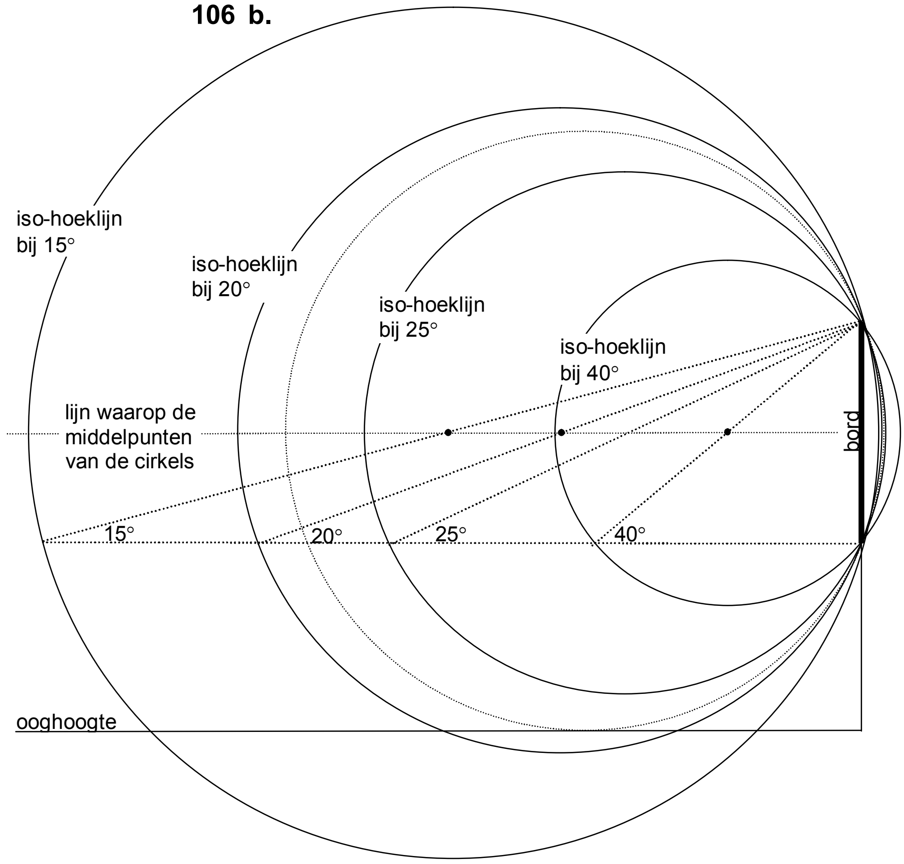



**Paragraaf 7 Iso-hoeklijnen**

**105** **a.** Zie het plaatje hiernaast.
$\tan\angle POV = \frac{PV}{OV} = 0{,}375$; $\tan\angle QOV = \frac{QV}{OV} = 0{,}8125$
$\angle POV$ = 2nd tan 0,8125 – 2nd tan 0,375 ≈ 18,54°
**b.** Zie **a**.
**c.** 1,72 en 11,34

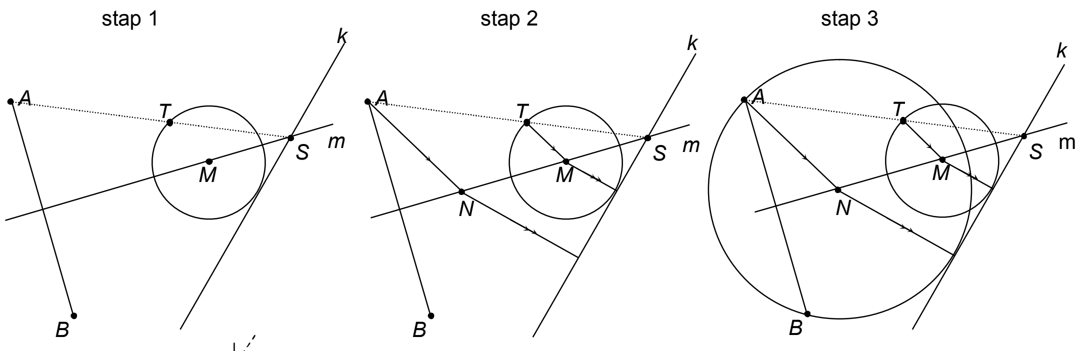


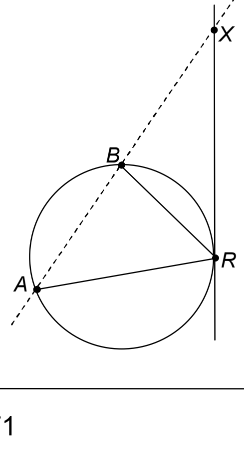
**106 b.**




**c.** Die cirkel gaat door de uiterste punten van het bord en raakt de ooghoogte-lijn. De straal is dus 4,75 meter.

**107**

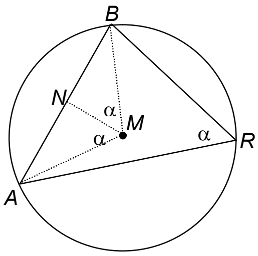



**108 a.**

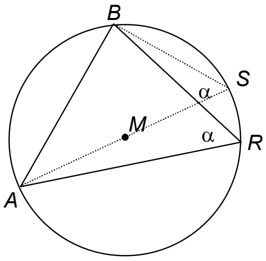
1. $\angle BAR = \frac{1}{2}\cdot$boog $BR$ *stelling omtrekshoek*
2. $\angle BRX = \frac{1}{2}\cdot$boog $BR$ *omtrekshoek, limietgeval*
3. $\angle BAR = \angle BRX$ *uit 1 en 2*
4. $\angle AXR = \angle BXR$
5. $\Delta AXR \sim \Delta RXB$ *uit 2 en 3*

**b.** $|AX| : |RX| = |RX| : |BX|$, dus $|RX|^2 = |AX|\cdot|BX|$




**110 a.** $N$ is het midden van $AB$.

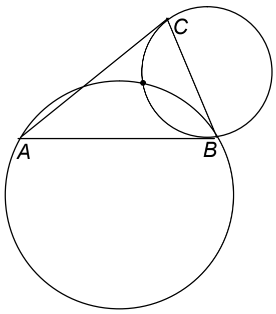
1. $\angle AMB = 2\cdot\angle ARB$ *stelling omtrekshoek*
2. $|AM| = |BM|$ *A en B op de cirkel*
3. $|AN| = |BN|$ *zo getekend*
4. $|NM| = |NM|$
5. $\Delta AMN \cong \Delta BMN$ *ZZZ, volgt uit 2, 3 en 4*
6. $\angle NMA = \alpha$ *uit 1 en 5*
7. $\sin\alpha = \dfrac{|AN|}{|AM|} = \dfrac{\frac{1}{2}|AB|}{r}$ *uit 5*




**b.** Trek lijn $AM$ door: het snijpunt met de cirkel noemen we $S$. Uit de stelling van de omtrekshoek volgt dat hoek $ABS$ recht is en $\angle ASB = \alpha$, dus (in $\Delta$ $ABS$ te zien):

$$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|AB|}{2r}$$

**111** Voor elk van de punten $R$ geldt: $|RX|^2 = |AX|\cdot|BX| = 4\cdot 9 = 36$, dus de afstand van $R$ tot $X$ is 6. Dus $R$ ligt op de cirkel met middelpunt $X$ en straal 6.




**112 a.** Onder $360° - 120° - 106° = 134°$.

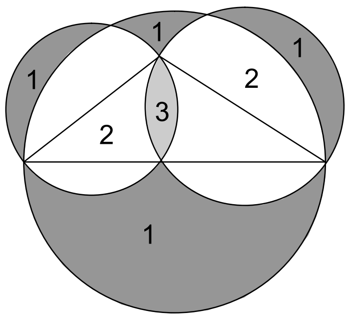
**b.** Zie het plaatje hiernaast. De cirkel door $B$ en $C$ is de iso-106°-hoeklijn van $BC$; de cirkel door $A$ en $B$ is de iso-120°-hoeklijn van $AB$.

De twee cirkels hebben twee snijpunten. Eén ervan is $B$, het andere is het gevraagde punt.

**113** Dat is onder een hoek van $360° : 3 = 120°$.

Teken de iso-120°-hoeklijn van $AB$ en van $BC$. De twee getekende cirkels hebben twee snijpunten. Eén ervan is $B$, het andere is het gevraagde punt.

**114** Teken de cirkels met de zijden als middellijn. In gebied 3 zie je drie zijden onder een stompe hoek. In de gebieden 2 zie je twee zijden onder een stompe hoek. In de gebieden 1 zie je één zijde onder een stompe hoek. Daarbuiten zie je alle zijden onder een scherpe hoek.



**115 b.**

1. $\angle AMB = 2\cdot\angle APB$ — *P op cirkel met middelp. M*
2. $\angle CNB = 2\cdot\angle CPB$ — *P op cirkel met middelp. N*
3. $\angle APB = \angle CPB$ — *gegeven*
4. $\angle AMB = \angle CNB$ — *uit 1, 2 en 3*

**c.**

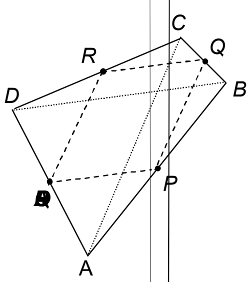
1. $\angle BAM = \frac{1}{2}\cdot(180° - \angle AMB)$ — *hoekensom driehoek*
2. $\angle CBN = \frac{1}{2}\cdot(180° - \angle BNC)$ — *hoekensom driehoek*
3. $\angle BAM = \angle CBN$ — *uit 1, 2 en b*
4. *AM // BN* — *uit 3, F-hoeken*

**d.** Noem $|DC|$: $x$. Dan geldt: $(x+1) : (x+3) = 1 : 2$. Hieruit valt $x$ te berekenen: $x = 1$.

**e.** $\Delta PMN \cong \Delta BMN$ (ZZZ), dus zijn *B* en *P* elkaars spiegel-beeld in *MN*.

**f.** Uit e volgt: $|PD| = |BD|$. *P* ligt dus steeds op 2 eenhe-den van *D*.

**Paragraaf 8 Computerpracticum**




**9 a.** Een parallellogram

1. *RQ // DB* — *RQ middenparallel in ∆DBC*
2. *SP // DB* — *SP middenparallel in ∆DBA*
3. *SP // RQ* — *uit 1 en 2*
4. *RS // QP* — *net zo*
5. *PQRS* parallellogram — *uit 3 en 4*

**b.** Een rechthoek

In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar. Om-dat de zijden van *PQRS* evenwijdig met de diagonalen [illegible]

*elkaar gegev*[illegible]

3. $|RS| = |SP|$ — *uit 2*
4. $|AC| = |DB|$ — $|AC| = 2\cdot|RS|$, $|DB| = 2\cdot|SP|$

**c.** Een vierhoek waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

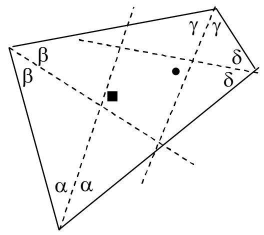
1. *PQRS* parallellogram — *zie opgave 9a*
2. *PQRS* is rechthoek — *diagonalen even lang, gegeven*
3. $AC \perp BD$ — *AC//PQ, BD//RQ en 2*

**11 b.** Een rechthoek, zie opgave **12.**

**c.** Een vierkant.

De driehoeken *ADY*, *XCB*, *PBC* en *ADQ* zijn congruente gelijkbenige rechthoekige driehoeken, dus ook *PWB* en *XWC* en *XYZ* en *PQR*.

Dus $|ZW| = |RW|$.




**d.** Dat wordt een punt omdat in een ruit de diagonalen de hoeken midden door delen.

**e.**

1. $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$ *hoekensom vierhoek*
2. ■ = 180° – ($\alpha+\beta$) *hoekensom driehoek*
3. ● = 180° – ($\gamma+\delta$) *hoekensom driehoek*
4. ●+■ = 180° *uit 1, 2 en 3*

**12 b.** Een cirkel met middellijn *MP*.

1. $\Delta AMB$ is gelijkbenig *A en B op cirkel met middelpunt M*
2. *MC* hoogtelijn in $\Delta AMB$ *MC is zwaartelijn in $\Delta AMB$*
3. $\angle PCM$ is recht.
4. *C* op cirkel met middellijn *PM* *omgekeerde van Thales*

**13 c.**

1. $\angle HAB + \angle ABC = 90°$ *hoekensom driehoek*
2. $\angle ABC = \angle AFH$ *staan op dezelfde boog*
3. $\angle HAB + \angle AHF = 90°$ *hoekensom driehoek*
4. $\angle AFH = \angle AHF$ *uit 1, 2 en 3*

d. Het snijpunt van *HF* met *AB* noemen we *S*.

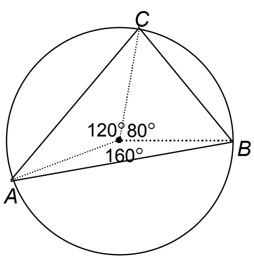
1. $\angle HSA = \angle FSA$ *CS hoogtelijn in $\Delta ABC$*
2. $\angle AFH = \angle AHF$ *zie c*
3. $|AS| = |AS|$
4. $\Delta ASF \cong \Delta AHS$ *HZH, uit 1, 2 en 3*
5. *H* spiegelbeeld van *F* in lijn *AB* *uit 4*

**e.** *H* beweegt dus over het spiegelbeeld van boog *AB* (onder lijn *AB*) in lijn *AB*.

**14 b.** Die liggen op één lijn.

**c.** Dan vallen twee van de drie voetpunten samen met een hoekpunt.

**Paragraaf 10 Extra opgaven**

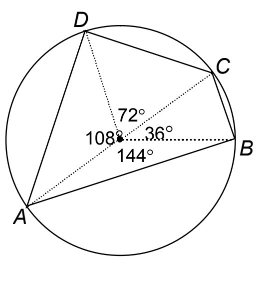



**1 a.** De bogen zijn 60°, 120° en 180°, dus de hoeken: $\frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$, $\frac{1}{2}\cdot 120° = 60°$ en $\frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$.

**b.** 40°, 60° en 80°

Zie plaatje: neem middelpuntshoeken van 80°, 120° en 160°.

**c.** Twee van de getallen samen zijn gelijk aan het derde (volgt uit Thales).




**2 a.** 54°, 90°, 126° en 90°.

**b.** $a = c$ en $b = d$

**c.** $a + c = b + d$

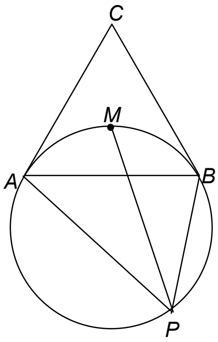
**3 a.** $\angle PAN$ is recht (stelling van Thales). Dus lijn *AP* staat loodrecht op de straal *AN*.

**b.**

1. $|AN| = |NM|$ *A en M op cirkel met middel delpunt N*
2. $|AM| = |NM|$ *A en N op cirkel met middel-punt M*

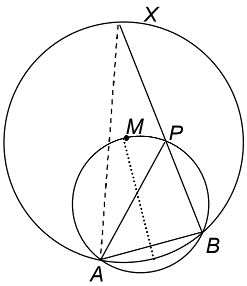
| | | |
|---|---|---|
| 3. | $\Delta$ *ANM* is gelijkzijdig | *uit 1 en 2* |
| 4. | $\angle AMN = 60°$ | *uit 3* |
| 5. | $\angle APN = 30°$ | *stelling omtrekshoek* |
| 6. | $\angle BPN = 30°$ | *evenzo* |
| 7. | $\angle APB = 60°$ | *uit 5 en 6* |

**c.** $\sqrt{3}$ ($\Delta AMP$ is gelijkbenig met twee zijden van lengte 1 en hoeken van 30°, 30° en 120°.)




**4**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA$ | *$\Delta ABC$ symmetrisch* |
| 2. | $\angle AMB = 120°$ | *uit 1* |
| 3. | *APBM* koordenvierhoek | *uit 2* |
| 4. | boog *AM* = boog *BM* | *M op middelloodlijn AB* |
| 5. | $\angle APM = \angle BPM$ | *uit 4 en st. omtrekshoek* |




**5** **a.**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle AXP = \angle PAX$ | *\|XP\| = \|AP\|, gelijkbenige driehoek* |
| 2. | $\angle APB = 2 \cdot \angle AXP$ | *stelling buitenhoek en 1* |
| 3. | Voor elke P is $\angle APB$ even groot | *stelling omtrekshoek* |
| 4. | Voor elke *P* is $\angle AXP$ even groot | *uit 3 en 4* |
| 5. | *X* doorloopt een deel van een cirkel | *uit 4, stelling omtrekshoek* |

**b.** Noem het middelpunt van de cirkel waarvan *X* een deel doorloopt *M*.

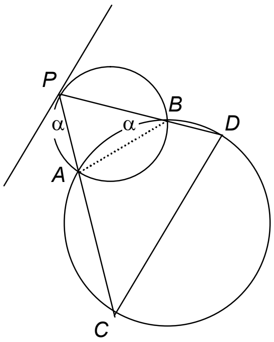
| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle AMB = 2 \cdot \angle AXB$ | *stelling omtrekshoek* |
| 2. | $\angle AMB$ = boog *AB* | *uit a en 1* |
| 3. | *M* ligt op de gegeven cirkel | *stelling omtrekshoek* |
| 4. | *M* ligt op middelloodlijn *AB* | *A en B op gevraagde cirkel* |

Teken de middelloodlijn van *AB*. *M* is het snijpunt van de gegeven cirkel met die middelloodlijn.
Teken de cirkel met middelpunt *M* en straal |*MA*|.
*X* doorloopt de cirkel ‘boven’ *AB*.

**6** **a.** De hoeken *AQB*, *APC*, *BRC* zijn alle 90°, omdat ze op een middellijn van een cirkel staan. De vierde hoek van vierhoek *BRPQ* is dan ook recht (hoekensom vierhoek).
**b.** Noem het midden van *AC*: *M*. Omdat *BRPQ* een rechthoek is, geldt: |*BP*| = |*RQ*| = 4. Ook geldt |*MP*| = 4. Dus driehoek *BPM* is gelijkbenig. Dus *P* ligt recht boven het midden van *BM*.

7 Noem $\angle ADC = \alpha$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle ABC = 180° - \alpha$ | *ABCD koordenvierhoek* |
| 2. | $\angle GBA = \alpha$ | *$\angle ABC + \angle GAB = 180°$* |
| 3. | $\angle GHA = \alpha$ | *$\angle GBA$ en $\angle GHA$ staan op dezelfde boog* |
| 4. | *HG* en *DC* evenwijdig | *Z-hoeken (2 en 3)* |
| 5. | $\angle AFE = \alpha$ | *ABEF koordenvierhoek en 1* |
| 6. | *CD* en *EF* evenwijdig | *F-hoeken* |




**8** **a.** Noem de hoek die de raaklijn met *PC* maakt $\alpha$ (zie plaatje).

| | |
|---|---|
| 1. $\angle PBA = \alpha$ | *limietgeval omtrekshoek* |
| 2. $\angle ABD = 180° - \alpha$ | *$\angle ABD + \angle PBA = 180°$* |
| 3. $\angle ACD = \alpha$ | *ABCD koordenvierhoek* |
| 4. raaklijn//*CD* | *Z-hoeken (1 en 3)* |

b. Het middelpunt van $c_2$ noemen we *M* en $\angle APB = \beta$.

| | |
|---|---|
| 1. $\beta$ onafhankelijk van *P* op $c_1$ | *stelling van de omtrekshoek* |
| 2. $\beta = \frac{1}{2}\cdot(\angle CMD - \angle AMB)$ | *opgave 3.12* |
| 3. $\angle CMD$ onafhankelijk van *P* op $c_1$ | *uit 1 en 2* |
| 4. $\lvert CD\rvert$ onafhankelijk van *P* op $c_1$ | *alle driehoeken CMD zijn congruent (ZHZ)* |

**9** Noem $\angle BAC = \beta$ en $\angle CAD = \alpha$.

| | |
|---|---|
| 1. *BD* is middellijn | *gegeven* |
| 2. $\alpha+\beta = 90°$ | *uit 1 en st. omtrekshoek* |
| 3. $\angle BDC = \beta$ | *stelling omtrekshoek* |
| 4. $\angle PQC = 90°+\beta$ | *buitenhoek van $\Delta PQD$* |
| 5. $\angle PQC + \angle PAC = 180°$ | *uit 1, 2, 3 en 4* |
| *PAQC* koordenvierhoek | *uit 5* |

**10** Het middelpunt van de cirkel met *P* erop noemen we *M* en met *Q* erop *N*.

| | |
|---|---|
| 1. $\Delta AMB \cong \Delta ANB$ (ZZZ) | |
| 2. $\angle AMB = \angle ANB$ | *uit 1* |
| 3. $\angle APB = \frac{1}{2}\cdot\angle AMB$ | *stelling van de omtrekshoek* |
| 4. $\angle AQB = \frac{1}{2}\cdot\angle ANB$ | *stelling van de omtrekshoek* |
| 5. $\Delta$ *APQ* gelijkbenig | *uit 4* |

**11**

| | |
|---|---|
| 1. $\angle CAD = \angle CBD$ | *stelling omtrekshoek op $c_1$* |
| 2. boog *PR* = boog *PQ* | *uit 1, st. omtrekshoek op $c_2$* |
| 3. $\lvert PR\rvert = \lvert PQ\rvert$ | *uit 2* |

**12** Het snijpunt van *BC* en *NP* noemen we *S*.

| | |
|---|---|
| 1. $\angle BNC = 2\cdot\angle BAC$ | *stelling van de omtrekshoek* |
| 2. $\angle BNP = \angle NAP$ | *stelling van de omtrekshoek* |
| 3. $\angle BNP = \angle PNC$ | *uit 1 en 2* |
| 4. $\lvert BN\rvert = \lvert CN\rvert$ | *B en C op de cirkel* |
| 5. $\lvert NS\rvert = \lvert NS\rvert$ | |
| 6. $\Delta BSN \cong \Delta CSN$ (ZHZ) | *uit 3, 4 en 5* |
| 7. $\lvert BS\rvert = \lvert CS\rvert$ | *uit 6* |
| 8. $\angle BSN = \angle CSN$ | *uit 6* |
| 9. $\lvert PS\rvert = \lvert PS\rvert$ | |
| 10. $\Delta PBS \cong \Delta PCS$ | *uit 7, 8 en 9* |
| 11. $\lvert BP\rvert = \lvert PC\rvert$ | *uit 10* |

**13** De hoeken van $\Delta ABC$ noemen we $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ en het snijpunt van $c_1$ en $c_2$ noemen we $S$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle B'SC' = 180° - \alpha$ | *AC'SB' koordenvierhoek* |
| 2. | $\angle A'SC' = 180° - \beta$ | *C'BA'S koordenvierhoek* |
| 3. | $\angle B'SA' + \angle A'SC' + \angle B'SC' = 360°$ | |
| 4. | $\angle B'SA' = 180° - \alpha$ | *uit 1, 2 en 3* |
| 5. | $B'SA'C$ is koordenvierhoek | *uit 4* |
| 6. | $S$ op cirkel door $A'$, $B'$ en $C$ | *uit 5* |

**14** $\angle ABC$ noemen we $\beta$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle ASP = 180° - \beta$ | *ABPS is koordenvierhoek* |
| 2. | $\angle DCP = 180° - \beta$ | *DC // AB* |
| 3. | $\angle DSP = \beta$ | *DSPC koordenvierh. en 2* |
| 4. | $\angle ASP + \angle DSP = 180°$ | *uit 1 en 3* |
| 5. | $S$ op lijn $AD$ | *uit 4* |

**15** $\angle SP_1R$ noemen we $\alpha$ en $\angle SP_2R$ noemen we $\beta$. $T$ is een willekeurig punt op de gemeenschappelijke raaklijn boven lijn $P_1P_2$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle Q_1RT = \alpha$ | *stelling omtrekshoek limiet* |
| 2. | $\angle Q_2RT = \beta$ | *idem* |
| 3. | $\angle Q_1SQ_2 = 180° - \alpha - \beta$ | *hoekensom in $\Delta P_1SP_2$* |
| 4. | $\angle Q_1SQ_2 + \angle Q_1RQ_2 = 180°$ | *uit 1, 2 en 3* |
| 5. | $Q_1RQ_2S$ koordenvierhoek | *uit 4* |

**16 a.** Neem aan dat $S$ het snijpunt van de cirkel door $B$ en $C$ en de cirkel door $A$ en $C$ is.
Dan zijn de hoeken $BSC$ en $ASB$ 120° (stelling van de omtrekshoek). Dus is $\angle ASB = 120°$. Dus ligt $S$ op de cirkel door $A$ en $C$ (koordenvierhoek).

b.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle ASB = 120°$ | *zie a* |
| 2. | $\angle BSA' = \angle BCA' = 60°$ | *stelling van de omtrekshoek* |
| 3. | $\angle ASB + \angle BSA' = 180°$ | *uit 1 en 2* |
| 4. | $A$, $S$ en $A'$ op een lijn | *uit 3* |

c. $\angle BSC = 180° - \alpha$, $\angle ASC = 180° - \beta$ en $\angle ASB = 180° - \gamma$ (koordenvierhoeken).
Dus $\alpha + \beta + \gamma = 180° - \angle BSC + 180° - \angle ASC + 180° - \angle ASB = 180°$, want $\angle BSC + \angle ASC + \angle ASB = 360°$.

**17** 0. Neem aan: $ABCD$ koordenvierhoek.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\angle AA'D = 180° - \angle ADD'$ | *AA'D'D koordenvierhoek* |
| 2. | $\angle ABB' = 180° - \angle AA'B'$ | *ABA'B' koordenvierhoek* |
| 3. | $\angle AA'D + \angle AA'B' + \angle A'B'C' = 360°$ | |
| 4. | $\angle D'A'B' = \angle DD'A + \angle B'BA$ | *uit 1, 2 en 3* |
| 5. | $\angle B'C'D' = \angle D'DC + \angle B'BC$ | *als 4* |
| 6. | $\angle D'A'B' + \angle B'C'D' = 180°$ | *uit 0 en 4 en 5* |
| 7. | $A'B'C'D'$ koordenvierhoek | *uit 6* |