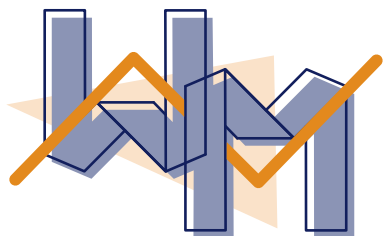


**vwo 6 wiskunde A deel 2**

# **de Wageningse Methode**



<b>Copyright</b>	© 2017 Stichting de Wageningse Methode
<b>Auteurs</b>	Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
<b>Homepage</b>	<a href="http://www.wageningse-methode.nl">www.wageningse-methode.nl</a>
<b>ISBN</b>	978-90-5225-052-6
<b>Illustraties</b>	Wilson Design Uden
<b>Distributie</b>	Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Niets uit deze uitgave mag verveelvuldigd en/of openbaar gemaakt worden door middel van druk, fotokopie, microfilm of op elke andere wijze ook, zonder voorafgaande toestemming van de houder van het copyright.

# Inhoudsopgave

<b>14</b>	<b>Periodieke functies</b>	<b>5</b>
14.1	Intro	6
14.2	Periodieke verschijnselen	7
14.3	De sinusfunctie	16
14.4	Schuiven en rekken	21
14.5	Vergelijkingen en meer	33
14.6	Gemengde opgaven	42
14.7	Eindpunt	47
14.8	Extra opgaven	51
<b>15</b>	<b>Examentraining</b>	<b>59</b>
15.1	Combinatoriek	60
15.2	Exponenten, logaritmen, vergelijkingen	66
15.3	Differentiëren	79
15.4	Discrete analyse	84
15.5	Periodieke functies	89
15.6	Extra opgaven	95
<b>Antwoorden</b>		<b>147</b>
14	Periodieke functies	147
15	Examentraining	166
<b>Hints</b>		<b>189</b>
14	Periodieke functies	189
15	Examentraining	189
<b>Index</b>		<b>190</b>





Dit boek bevat de laatste twee hoofdstukken wiskunde a voor het vwo:

**Periodieke funties en Examentraining .**

In dit laatste hoofdstuk krijg je per paragraaf een overzicht van de diverse onderwerpen die op het Centraal examen aan de orde kunne komen, Het zijn meestal eenvoudige vragen.

In de afsluitende paragraaf **6 Extra opgaven** vind je training op examenniveau.

In de bovenbouw maak je gebruik maken van een grafische rekenmachine.

Als je een nieuwe optie van je grafische rekenmachine kunt gebruiken, is dit gemarkeerd door nevenstaand mannetje.

Op de website van de Wageningse Methode staan verwijzingen naar bronnen met informatie over het gebruik en de belangrijkste opties van de grafische rekenmachine. Maar je mag natuurlijk ook je docent om hulp vragen.



In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

**Met dank aan . . .**

Voor het schrijven van dit boek is gebruikt gemaakt van hoofdstukken uit eerdere versies van de Wageningse Methode en het lesmateriaal dat mede door schrijvers van de Wageningse Methode voor de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) is ontwikkeld.

**Tot slot . . .**

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.



Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

## Overzicht iconen . . .



### Theorie

Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.



### Voorbeeld

In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.



### Opmerking

Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoeft je niet te leren.



### Historie

Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.



### Werkblad

Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site [www.wageningse-methode.nl](http://www.wageningse-methode.nl).



### Computer

Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.



### Echt, moet kunnen

Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.



### Puzzelen

Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.



### Pittig

Deze opgaven zijn wat moeilijker.



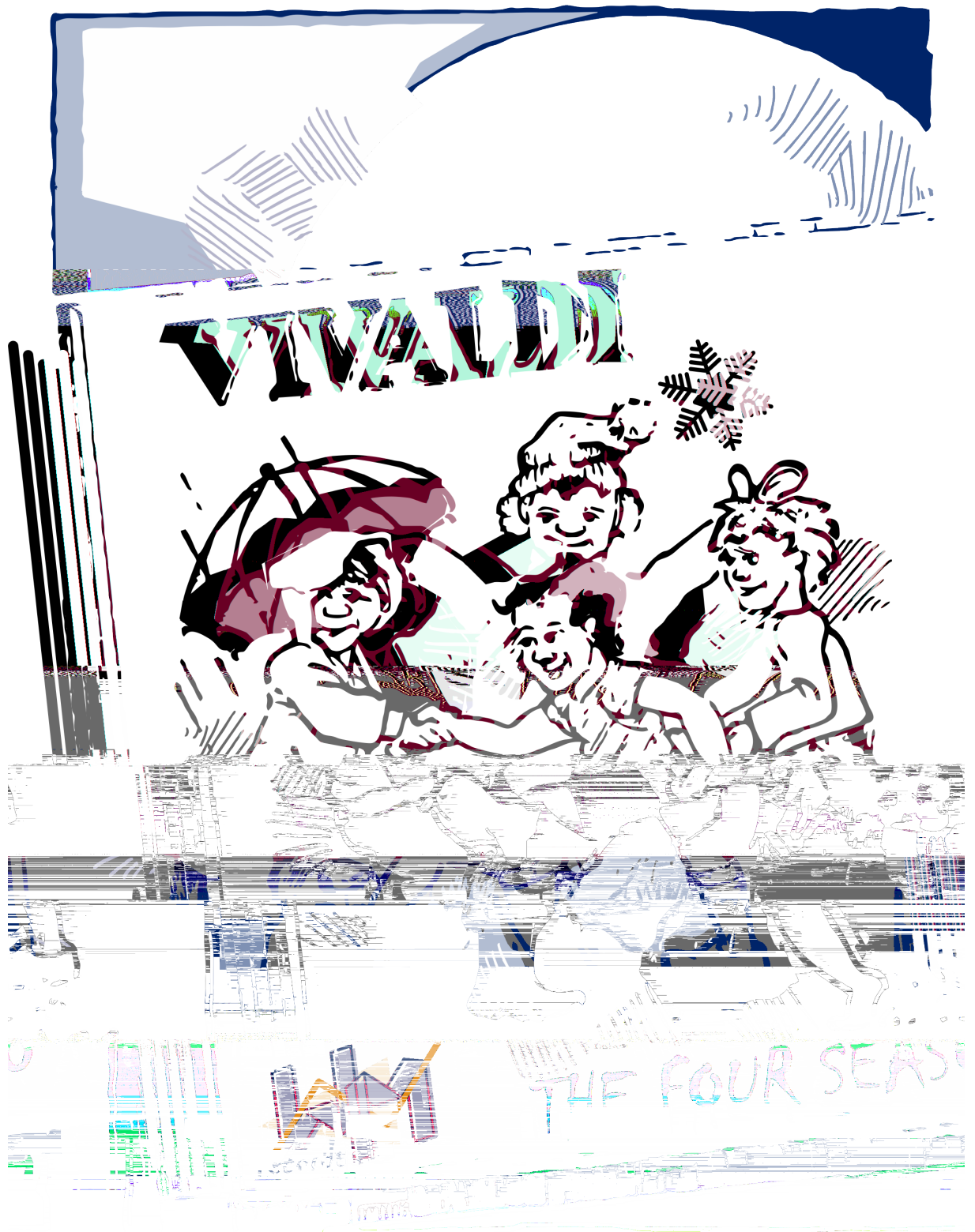
### Hint

Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.



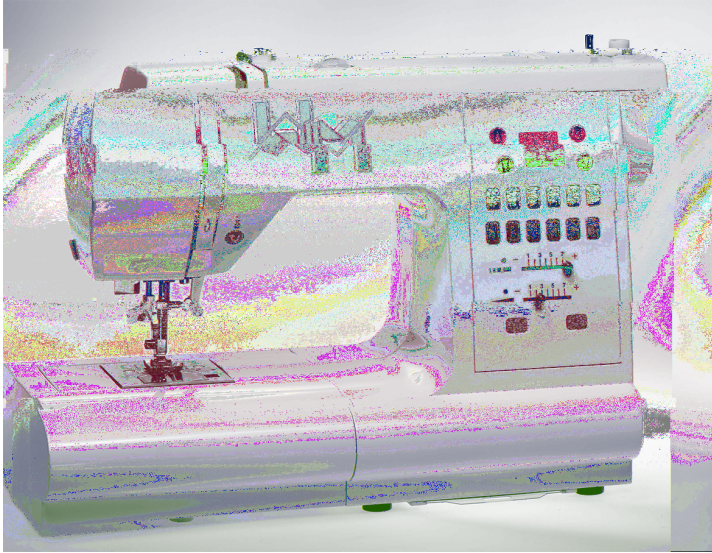
### Facultatief

Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.



## Naaisteken

De naald van een elektrische naaimachine gaat op en neer, terwijl hij ook nog een zijwaartse beweging maakt. Hoe ver de naald vanuit het midden naar links of rechts beweegt, kun je instellen op de naaimachine. Ondertussen schuift de stof onder de naald door. Zodoende ontstaat er een “steek”. Hieronder staan vier voorbeelden.



rechte steek



zigzag steek



blindsteek



siersteek



Het patroon van zo'n steek kan zich in principe eendeloos herhalen. We bekijken twee aspecten van een steek: de hoogte en de lengte.

- Heb je enig idee wat onder de hoogte en lengte van een steek verstaan wordt?
- Teken een zigzagsteek met lengte 5 mm en hoogte 4 mm (dat is de maximale hoogte die je kunt instellen). Teken hem op schaal 4 : 1 (de afmetingen 4 keer zo groot als in werkelijkheid).

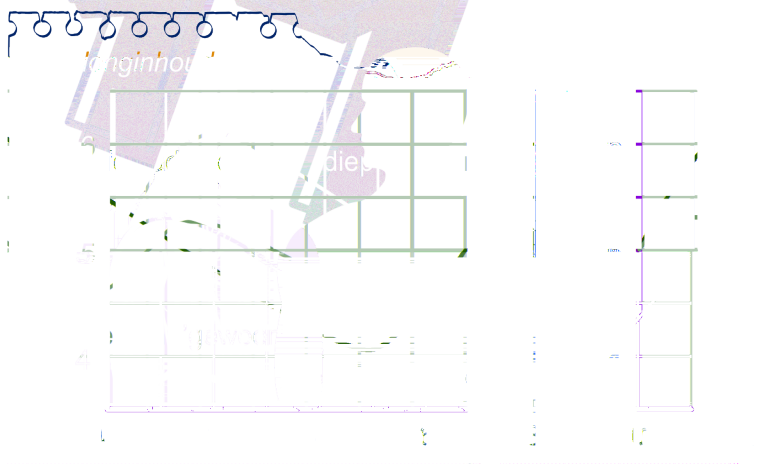
## 14.2 Periodieke verschijnselen

2



### Ademen

Als je gewoon, zonder erop te letten, ademhaalt, doe je dat ongeveer 12 keer per minuut. Elke keer adem je ongeveer 'n halve liter lucht in en uit.



- a Kloppen deze gegevens met de grafiek hierboven (de longinhoud in liters, de tijd in seconden)?
- b Teken er op het werkblad nog een ademhalingscyclus bij.

Hierboven en op het werkblad staat één cyclus van de grafiek bij diep ademen.

- c Teken hem op het werkblad verder.

Als een stuk grafiek zich steeds weer precies herhaalt, spreken we van een **periodieke** grafiek. De tijdsduur van het zich herhalende stuk heet de **periode**. Een periodieke grafiek verandert dus niet als je hem horizontaal over één periode verschuift, naar links of naar rechts.

- d Hoe lang is de periode bij gewoon ademen? En bij diep ademen?

De gemiddelde longinhoud is 5 liter.

- e Welk percentage wordt daarvan per ademhaling ververst bij gewoon ademen? En bij diep ademen?

Een vlinderslagzwemster zwemt in 36 seconden een 50-meter bassin over. Haar trainer telt het aantal slagen: 24. Elke twee slagen haalt de zwemster diep adem.

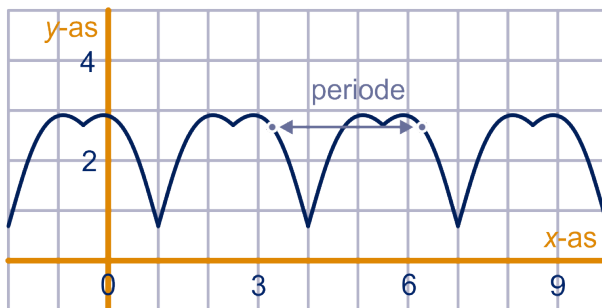
- f Wat is de periode van de bijbehorende ademhalingsgrafiek?  
Maak op het werkblad een schets van de grafiek.

## 14.2 Periodieke verschijnselen

Het ademen in opgave 2 is periodiek. Het aantal minuten dat het basispatroon duurt, is de periode van het ademen. De grafiek van het ademen kun je opbouwen door steeds weer het basispatroon te herhalen.



Als een stuk van de grafiek van een functie zich steeds weer precies herhaalt, spreken we van een **periodieke** functie. De lengte van het kleinste zich herhalende stuk (op de  $x$ -as) heet de **periode**. De grafiek van een periodieke grafiek verandert dus niet als je hem horizontaal over één periode verschuift, naar links of naar rechts.



De naaipatronen van opgave 1 zijn ook periodiek.

3

### Een kabelbaan

Van het grondstation  $G$  loopt een kabelbaan naar de top  $T$ . Voortdurend pendelt er een gondel heen en weer. Een enkele reis duurt 10 minuten; de wachttijden in  $G$  en  $T$  bedragen elk 5 minuten.  $G$  ligt op 100 meter boven de zeespiegel;  $T$  ligt op een hoogte van 500 meter.

De hoogte rekenen we in meters boven de zeespiegel, de tijd in minuten.

- Teken de tijd-hoogte-grafiek. Neem aan dat de gondel op tijdstip 0 uit  $G$  vertrekt en gelijkmatig stijgt en daalt.
- Wat is de periode van de beweging?
- Geef de eerste vijf tijdstippen na 0, waarop de hoogte 400 meter is.
- Hoe hoog is de gondel op tijdstip 1000?

De hoogte na  $t$  minuten noemen we  $H(t)$  (meter). De functie  $H$  ken je helemaal als je hem voor de tijdsduur van één periode kent. Een periode valt uiteen in vier stukken: 10 minuten stijgen, 5 minuten in  $T$  wachten, 10 minuten dalen, 5 minuten in  $G$  wachten.

- Geef een formule voor  $H(t)$ 
  - als  $0 \leq t \leq 10$ ;
  - als  $10 \leq t \leq 15$ ;





## 14.2 Periodieke verschijnselen

- als  $15 \leq t \leq 25$ ;
- als  $25 \leq t \leq 30$ .

4

Er is nog een tweede gondel, met dezelfde reis- en wachttijden. Als de eerste gondel uit  $G$  vertrekt, vertrekt de tweede gondel uit  $T$ .

- a Teken in de figuur van opgave 3a de tijd-hoogte-grafiek van deze tweede gondel.

De tweede gondel maakt precies dezelfde beweging als de eerste, maar dan een vaste tijdsduur later.

- b Hoeveel minuten later?

$H_2(t)$  is de hoogte van de tweede gondel op tijdstip  $t$ .

- c Vul in:  $H_2(t) = H(\dots)$ .

Er is een eenvoudige manier om de hoogte van de tweede gondel op een tijdstip uit te rekenen als je de hoogte van de eerste gondel op dat tijdstip kent.

- d
- Wat is  $H_2(t)$  als  $H(t) = 100$ ?
  - Wat is  $H_2(t)$  als  $H(t) = 133$ ?
  - Wat is  $H_2(t)$  als  $H(t) = 499$ ?

Als je de hoogte  $H(t)$  voor een zeker tijdstip kent, ken je de hoogte  $H_2(t)$  voor datzelfde tijdstip ook.

- e Hoe dan?



Een beweging heet **periodiek** met periode 30 minuten als:

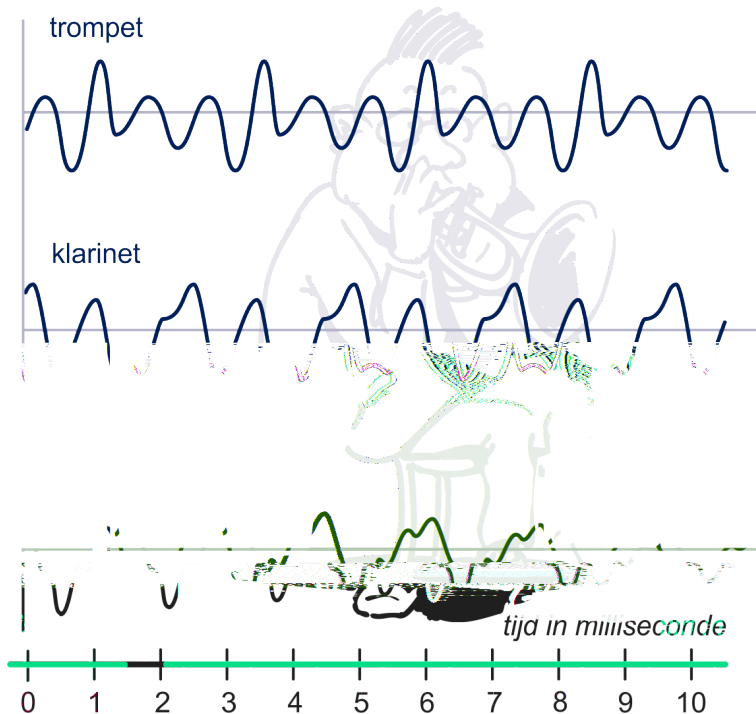
- de situatie op elk moment precies dezelfde is als 30 minuten daarvoor,
- er geen kleinere positieve tijdsduur is dan 30 minuten met deze eigenschap.

5

Als een voorwerp trilt, brengt het geluid voort. De toonhoogte wordt bepaald door het aantal trillingen per seconde: de frequentie. Voor het menselijk oor zijn trillingen waarneembaar met frequenties van ca. 20 trillingen per seconde (dat klinkt heel laag) tot ca. 20.000 trillingen per seconde (dat klinkt heel hoog). Geluidstrillingen kunnen als golven op een oscilloscoop zichtbaar gemaakt worden. De fijnere schommelingen binnen een trilling bepalen de klank. De hoogte van de golven bepaalt het volume.

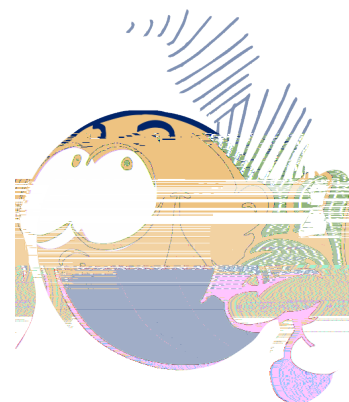
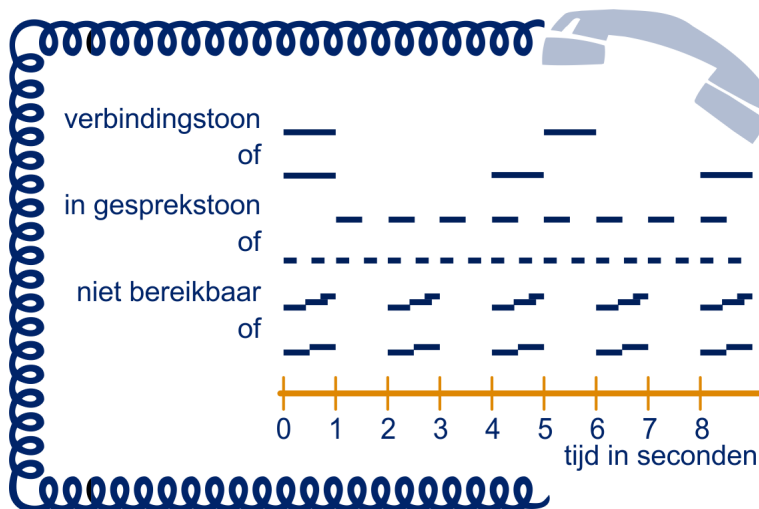
De trompet en de klarinet spelen dezelfde noot (dat is de toonhoogte).

## 14.2 Periodieke verschijnselen



- Waarom zie je dat? Wat is de frequentie ongeveer?
- Klinkt de viool hoger of lager? Waarom?

In het telefoonboek van 1985 zijn de zes telefoontonen grafisch weergegeven. Van de eerste verbindingston is de periode 5 seconden.



Wat is de periode van elk van de andere tonen?

6





## 14.2 Periodieke verschijnselen

7

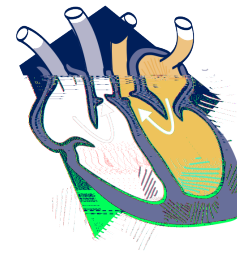


- a Geef de periode van de volgende periodieke "bewegingen". Sommige periodes moet je schatten.
- De beweging van de aarde om de zon.
  - De menstruatiecyclus van de vrouw.
  - De hartslag van een gezonde mens in rust.
  - Het draaien van de grote wijzer van de klok.
  - Het draaien van de kleine wijzer van de klok.
  - De getijdebewegingen van zeeën en oceanen.
- b Weet je nog andere periodieke bewegingen? Denk bijvoorbeeld aan sport, verkeer, ziektes, klimaat, seizoenen. De periodes mogen best een beetje onzeker zijn.

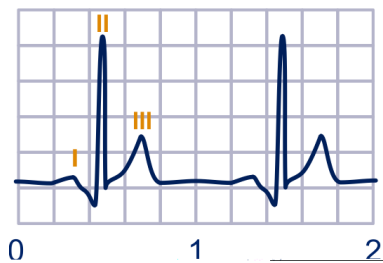


8

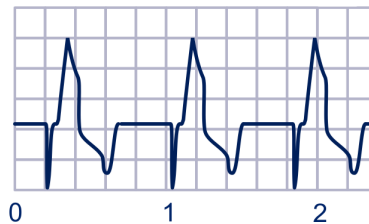
In ons hart bevinden zich twee pompen: één voor zuurstofarm bloed dat naar de longen gepompt wordt, en één voor zuurstofrijk bloed dat naar alle delen van het lichaam gaat. Elke pomp bestaat uit twee delen die beurtelings samentrekken: de boezem en de kamer. Dit samentrekken gaat gepaard met elektrische ontladingen van de hartspier. Een elektrocardiogram (ECG) geeft de elektrische activiteit van het hart weer. Deze wordt op verschillende plaatsen van het lichaam gemeten.



Er zijn drie fasen te onderscheiden: de prikkeling van de boezem (I), de prikkeling van de kamer (II) en de ontspanning van de kamer (III). In figuur 1 zie je een cardiogram. De tijd is er in seconden bij aangegeven.



figuur 1



figuur 2

- a Bereken de hartslag (het aantal slagen per minuut) bij dit cardiogram.

In figuur 2 staat het cardiogram van een patiënt met een pacemaker

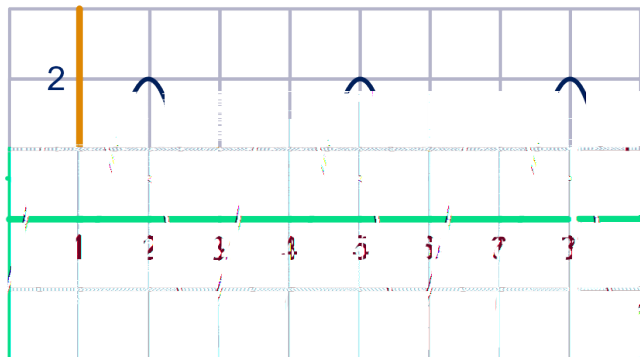
- b Bereken de hartslag bij het cardiogram.

## 14.2 Periodieke verschijnselen

9



Hieronder en op het werkblad is de grafiek van een functie getekend. De grafiek bestaat uit een stuk dat zich steeds weer herhaalt.



- Kleur een zo kort mogelijk stuk van de grafiek dat zichzelf herhaalt. Het begin mag je zelf kiezen.
- Kleur nog een echt ander zichzelf herhalend stuk, zo kort mogelijk.
- Wat is de periode van de functie in deze opgave?

Als  $f$  een periodieke functie is met periode 3, dan geldt voor elke  $x$ :

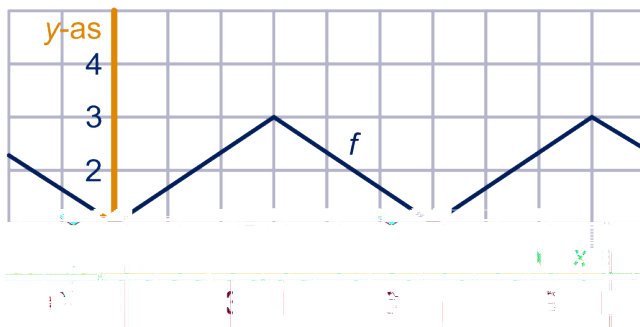
$$\dots = f(x - 3) = f(x) = f(x + 3) = f(x + 6) = \dots$$



10

### Zaagtand

Hieronder is een "zaagtand"-grafiek getekend, die naar links en naar rechts oneindig ver door loopt. De bijbehorende functie noemen we  $f$ .



- Wat is de periode van  $f$ ?

De grafiek van  $f$  heeft twee typen symmetrie-assen.

- Teken van elk type één symmetrie-as.

Er geldt:  $f(1) = 1\frac{2}{3}$  en  $f(2) = 2\frac{1}{3}$ .

## 14.2 Periodieke verschijnselen

- c Gebruik dit samen met de symmetrie en de periodicititeit van de functie om het volgende te berekenen:  $f(4)$ ,  $f(5)$ ,  $f(19)$ ,  $f(20)$ ,  $f(22)$  en  $f(23)$ .

Er geldt:  $f\left(1\frac{1}{2}\right) = 2$ .

- d Geef de eerste coördinaat  $x$  van de punten op de stijgende stukken van de grafiek met:  $f(x) = 2$  en  $-3 < x < 11$ .  
Geef ook de eerste coördinaat  $x$  van de punten op de dalende stukken van de grafiek met:  $f(x) = 2$  en  $-3 < x < 11$ .

- e Voor welke  $x$  tussen 57 en 71 geldt:  $f(x) = 2$ ?

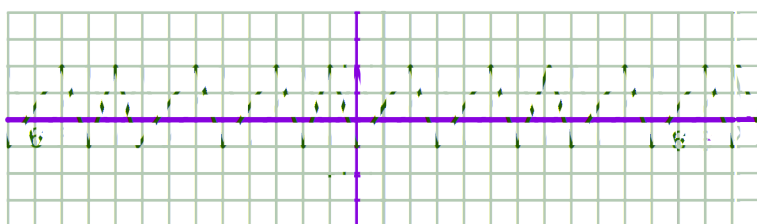
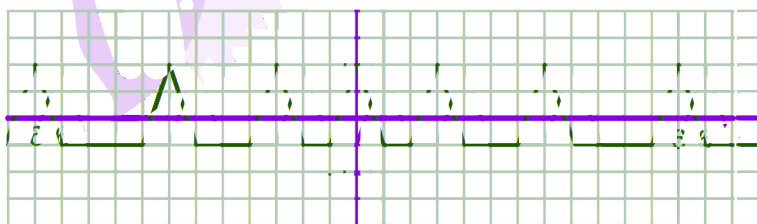
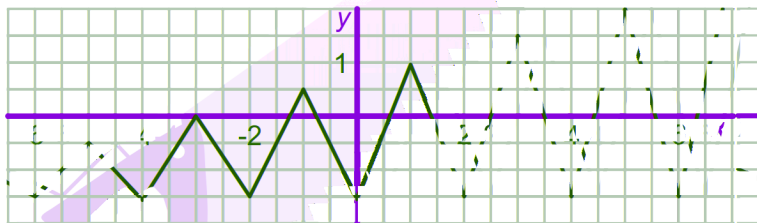
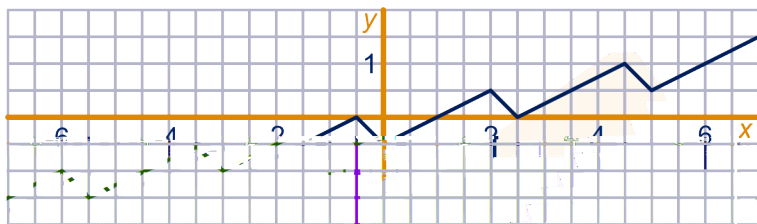
- f Voor welke  $x$  tussen 57 en 71 geldt:  $f(x) = 1$ ?

- g Voor welke  $x$  tussen -3 en 11 geldt:  $f(x) = f(x+2)$ ?

11

De regelmaat van de vier grafieken hieronder zet zich naar beide kanten voort.

Zijn de bijbehorende functies periodiek?



## 14.2 Periodieke verschijnselen

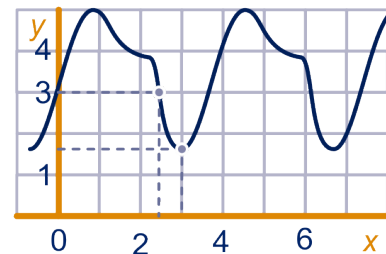
12

$g$  is een periodieke functie met periode  $3\frac{1}{2}$ . Hiernaast zie je (een deel van) de grafiek van  $g$ . Gegeven is:  $g(0) = 3$  en  $g(2\frac{1}{2}) = 3$ .

a Voor welke  $x$  met  $-10 \leq x \leq 10$  geldt:  $g(x) = 3$ ?

Verder is gegeven:  $g(3) = 1\frac{1}{2}$  (de minimale waarde van de functie).

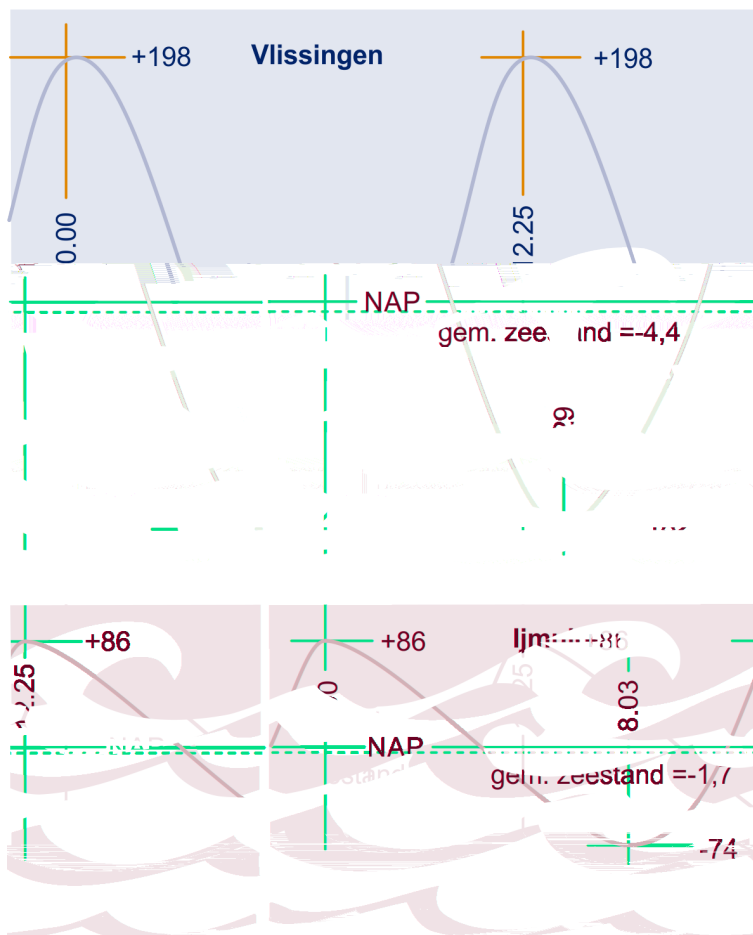
b Voor welke  $x$  met  $-10 \leq x \leq 10$  geldt:  $g(x) = 1\frac{1}{2}$ ?



13

Hieronder zie je de gemiddelde getijkromme te Vlissingen (boven) en IJmuiden (naar het boekje ).

De waterstand is vermeld in cm boven NAP, de tijd in uren (6.29 uur = 6 uur en 29 minuten).



a Wat is de periode van de getijdebeweging van de zee?

b Noem een paar verschillen tussen de twee getijkrommen.

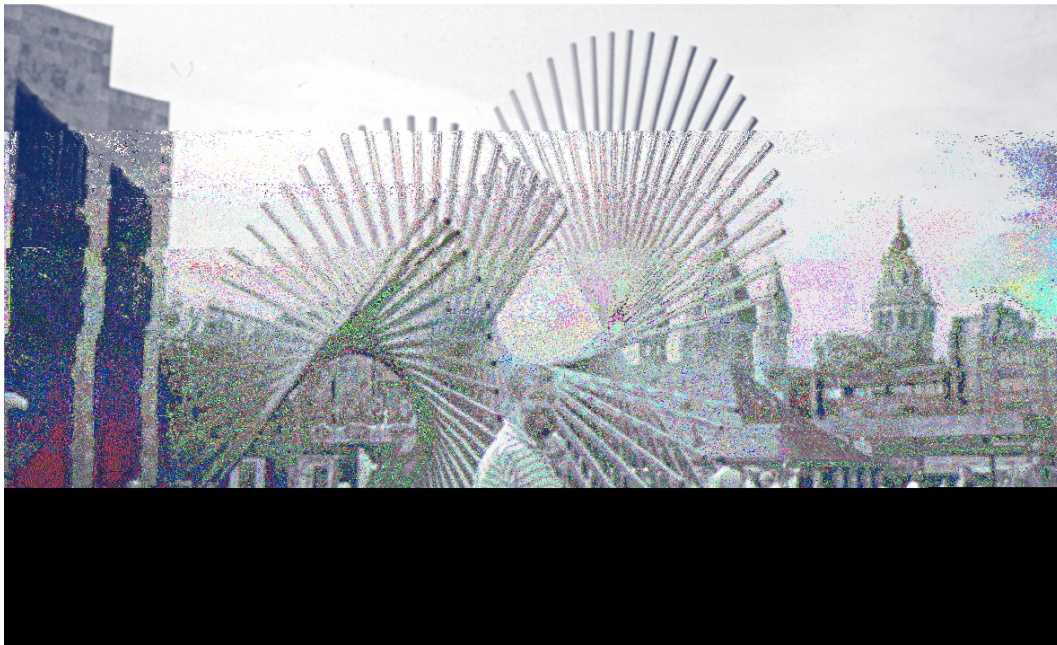
De grafieken "golven" regelmatig om de gemiddelde zeestand. Toch hebben de golven iets onregelmatigs.

## 14.2 Periodieke verschijnselen

c Noem een onregelmatigheid.

Op 7 februari 1985 was het om precies 3.00 uur 's ochtends hoogwater te Vlissingen.

d Hoe laat zal het hoogwater geweest zijn te Vlissingen op 8 februari 1985? (Twee tijdstippen.)



Kunstwerk op de Platz am Rathaus te Mainz

## 14.3 De sinusfunctie

14

Op de kermis staat een reuzenrad. Als het goed op gang is, draait het regelmatig één keer per minuut rond (linksom). We volgen punt  $A$  om de omtrek van het rad (zie figuur). De hoogte van  $A$  boven de grond varieert van 1 tot 11 meter. Op een zeker ogenblik is  $A$  6 meter hoog; dat is  $t = 0$ . Het punt  $A$  gaat dan omhoog. Zijn hoogte  $t$  seconden later noemen we  $H(t)$ .

We nemen  $0 \leq t \leq 120$ .

- Teken de cirkelvormige baan die het punt  $A$  maakt op schaal 1 : 100.
- Voor welke  $t$  geldt:  $H(t) = 1$ ?
- Wat is de gemiddelde hoogte van  $A$ ?  
Op welke tijdstippen wordt die bereikt?
- Maak een schets van de grafiek van  $H$ .  
Wat is de periode?

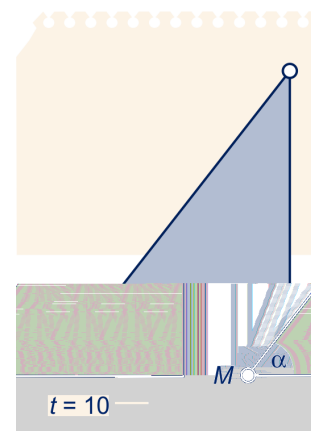


Het is mogelijk heel precies te berekenen hoe hoog  $A$  is op een gegeven tijdstip. Hiervoor heb je wat **goniometrie** nodig, dat wil zeggen berekeningen met  $\sin$ ,  $\cos$  en/of  $\tan$ . Hiernaast staat een rechthoekige driehoek met  $A$  op de plaats als  $t = 10$ ,  $M$  is het middelpunt van het rad.

- Bereken hoek  $\alpha$  en vervolgens  $h(10)$  in drie decimalen.  
Bereken ook  $h(35)$  in drie decimalen.

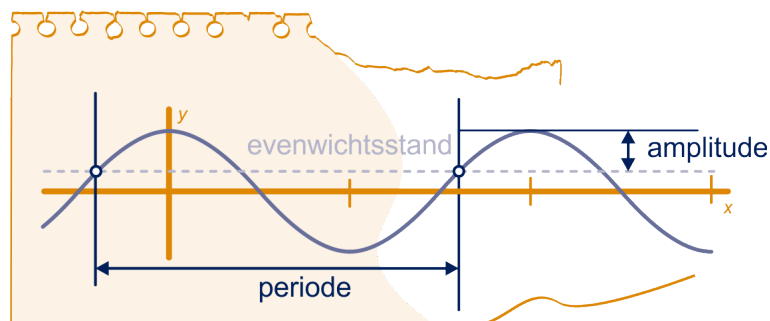
De grafiek van  $H$  is een **sinusoïde**. De gemiddelde hoogte van de golf noemen we de **evenwichtswaarde**, het verschil tussen de maximale en gemiddelde hoogte noemen we de **amplitude**.

- Geef de evenwichtswaarde en de amplitude van  $H$ .



figuur 2

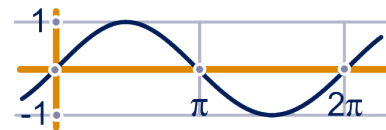
Hieronder is een regelmatige golf getekend. De gemiddelde hoogte van de golf noemen we de **evenwichtswaarde** of de **evenwichtsstand**; het verschil tussen de maximale hoogte en de evenwichtswaarde noemen we de **amplitude** van de golf.



## 14.3 De sinusfunctie

15

Wat is de amplitude, de evenwichtsstand en de periode van de golf hiernaast?

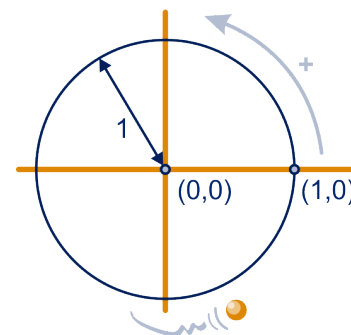


De getijkrommen in de laatste opgave van de vorige paragraaf vertonen onregelmatigheden. In het volgende bekijken we hoe je zuiver regelmatige golven, zogenaamde sinusöiden, krijgt.

Een kogeltje draait in een cirkelvormige baan, als volgt:

- de straal van de baan is 1 cm;
- het middelpunt is (0,0);
- het kogeltje draait in positieve richting (de 'tegenklokrichting', ofwel linksom);
- de snelheid is 1 cm/s: het kogeltje legt elke seconde een afstand van 1 cm af langs de cirkel;
- op tijdstip 0 is het kogeltje in (1,0).

Deze beweging is de **standaard cirkelbeweging**. De bijbehorende baan is de **eenheidscirkel**.

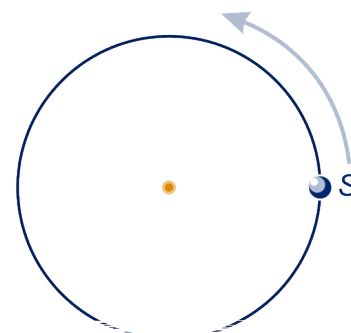


16



Een kogeltje maakt de standaard cirkelbeweging. De straal van de cirkel is 1 (cm). Op tijdstip 0 is het op plaats  $S$ .

- Hoe lang doet het kogeltje over één omwenteling (exact)?
- Geef op het werkblad de plaats aan van het kogeltje op de tijdstippen  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $\pi$ ,  $1\frac{1}{2}\pi$  en  $2\pi$ .



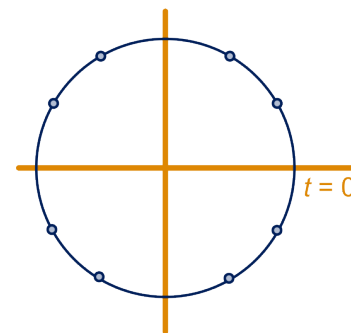
Een kogeltje maakt de standaard-cirkelbeweging. De hoogte (ten opzichte van de  $x$ -as) en de breedte (ten opzichte van de  $y$ -as) van de plaats van het kogeltje hangt af van  $t$ . Deze noemen we  $H(t)$  en  $W(t)$ . We gaan de grafieken van  $H$  en  $W$  bekijken.

17



We verdelen de eenheidscirkel met behulp van de assen en acht verdeelpunten in twaalf even lange stukken.

- Welke tijdstippen (tussen 0 en  $2\pi$ ) horen bij de verdeelpunten? Vul die tijdstippen in op het werkblad.
- Teken op het werkblad de punten van de grafiek van  $H$  die corresponderen met de verdeelpunten. Teken vervolgens de grafiek van  $H$ .
- Teken op dezelfde manier de grafiek van  $W$ .
- Wat zijn de amplitude en de evenwichtswaarde van de functies  $H$  en  $W$ ?



De rekenmachine geeft de uitvoerwaarden van  $H$  en  $W$  heel nauwkeurig. Hoe, bekijken we in de volgende opgaven.



## 14.3 De sinusfunctie

18

We gaan  $H(t)$  en  $W(t)$  met het rekenapparaat benaderen voor  $t = \frac{2}{5}\pi$  en voor  $t = \frac{7}{10}\pi$  in drie decimalen. Het startpunt van de standaardcirkelbeweging noemen we  $S$ , het punt waar het kogeltje is op  $t = \frac{2}{5}\pi$  noemen we  $P$ .

a Hoe groot is hoek  $SOP$ ?

Er geldt:  $H\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \sin(72^\circ)$ .

b Ga dat na en benader  $H\left(\frac{2}{5}\pi\right)$  in in drie decimalen.

c Benader  $W\left(\frac{2}{5}\pi\right)$  in drie decimalen.

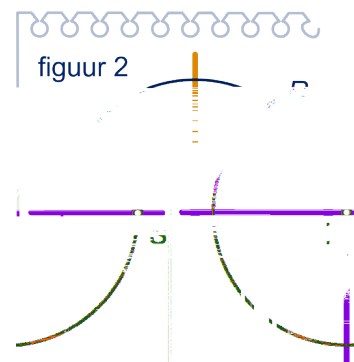
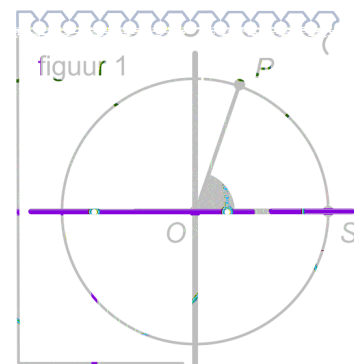
d Benader  $H\left(\frac{7}{10}\pi\right)$  en  $W\left(\frac{7}{10}\pi\right)$  in drie decimalen.

We gaan  $H(1)$  en  $W(1)$  benaderen. Het punt waar het kogeltje is op  $t = 1$  noemen we  $R$ .

e Hoe groot is hoek  $SOR$  in graden? Geef het antwoord in vijf decimalen.

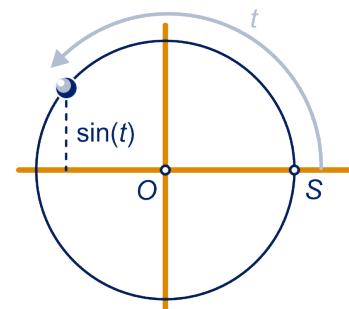
f Benader nu  $H(1)$  en  $W(1)$  in drie decimalen.

In opgave 18 hebben we de grafieken van twee nieuwe functies getekend:  $H$  en  $W$ ; deze noemen we in het vervolg **sinus** en **cosinus**.



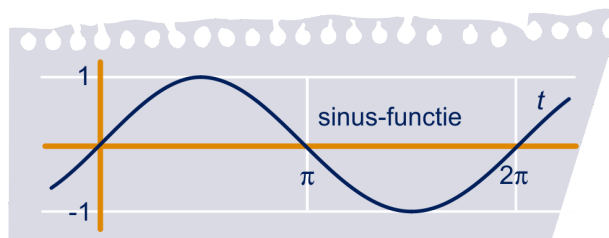
### De sinus-functie

Een kogeltje maakt de standaardcirkelbeweging. De hoogte van het kogeltje op tijdstip  $t$  noemen we  $\sin(t)$ .



### Opmerking

- $\sin(t)$  spreek je uit als sinus  $t$ .
- De cosinus-functie komt verder niet aan bod.



De grafiek van de sinusfunctie staat hierboven. Je hebt hem in opgave 17 geschetst. Bekijk ook de applet 'sin en cos in de eenheidscirkel'.

De sinus-functie is voor ons de standaard-sinusoïde. Elke sinusoïde ontstaat uit de sinusfunctie door (herhaald) schuiven en rekken. Hoe dat gaat, zien we in de volgende paragraaf.



## 14.3 De sinusfunctie

19



- a Wat is de periode, de evenwichtswaarde en de amplitude van de sinusfunctie?

Omdat de functie  $y = \sin(t)$  periodiek is, kun je hem ook wel tekenen als  $99\pi \leq t \leq 102\pi$ .

- b Geef op het werkblad de stippen van de grafiek van de sinusfunctie aan bij de grootste, de kleinste en de gemiddelde uitvoerwaarden.

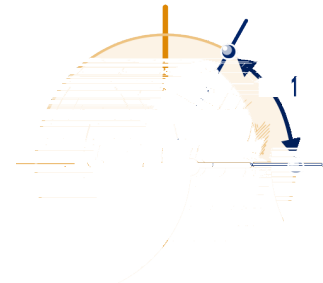
Teken de grafiek van  $y = \sin(t)$  als  $99\pi \leq t \leq 102\pi$ . Gebruik de GR alleen achteraf, ter controle.



Een kogeltje dat de standaard-cirkelbeweging maakt, bevindt zich op tijdstip  $t$  dus in een punt waarvan de eerste coördinaat  $\cos(t)$  is en de tweede  $\sin(t)$ . In opgave 18 heb je  $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$  en  $\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)$  benaderd. Wat je daar met tussenstappen gedaan hebt kan ook in een keer. De MODE van de GR moet dan wel in de stand Radian staan. Door  $\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)$  dan in te toetsen, vind je de waarde hiervan.



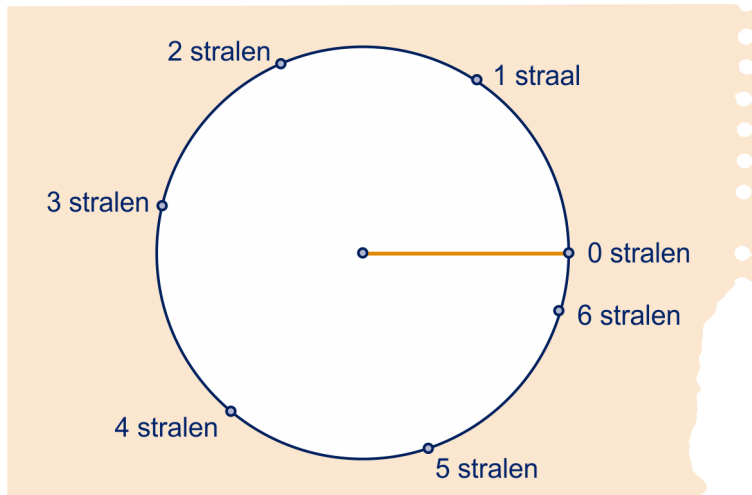
Een Engelsman geeft zijn lengte in inch, een Nederlander in centimeter. Een hoek kan ook in verschillende maten gemeten worden. De hoekmaat die we meestal gebruiken hebben is de graad. Als je hiermee werkt, zet je de GR in de stand Degree. Je gebruikt je geodriehoek om een hoek in graden te meten. Een andere maat voor de grootte van een hoek is de lengte van de boog die de benen van de hoek van de eenheidscirkel afsnijden als je het hoekpunt in het middelpunt legt. Deze booglengte geven is de hoek in radialen meten. De hoek in de figuur is 1 radiaal.



Als we in het vervolg over  $\sin(6)$  spreken, bedoelen we de hoogte van een kogeltje dat de standaard-cirkelbeweging maakt op tijdstip 6. Je vindt de waarde van  $\sin(6)$  dus met de GR in stand Radian.

Om een hoek in radialen te meten moet je eigenlijk een meetlat langs de eenheidscirkel buigen. Zie de animatie 'lijn oprollen'.

## 14.3 De sinusfunctie



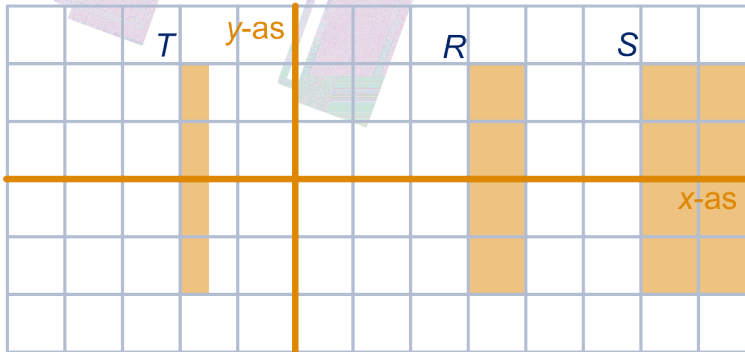
Een hoek van bijvoorbeeld  $90^\circ$  snijdt een kwart van een totale cirkelboog af en komt dus overeen met een hoek van  $\frac{1}{2}\pi$  radialen.

## 14.4 Schuiven en rekken

Een sinusöïde is een golf die uit de grafiek van de sinusfunctie ontstaat door (herhaald) horizontaal en verticaal te schuiven en te vermenigvuldigen (rekken).

In deze paragraaf bekijken we hoe de formule van een functie verandert bij schuiven en rekken.

### Horizontaal en verticaal vermenigvuldigen



In het plaatje hierboven wordt rechthoek **R** **horizontaal vermenigvuldigd** met factor 2. Dat wil zeggen: de afstand van elk punt van de rechthoek tot de  $y$ -as wordt verdubbeld (en de afstand tot de  $x$ -as blijft gelijk). Het **beeld** bij deze vermenigvuldiging is rechthoek **S**.

Als je rechthoek **R** horizontaal met factor  $-\frac{1}{2}$  vermenigvuldigt, krijg je rechthoek **T**.

Verticaal vermenigvuldigen gaat op soortgelijke wijze.

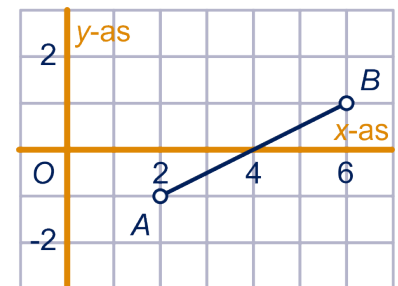
20

Lijnstuk **AB** wordt achtereenvolgens vermenigvuldigd

- verticaal met 2, het beeldlijnstuk is **CD**;
  - verticaal met -1, het beeldlijnstuk is **EF**;
  - horizontaal met  $\frac{1}{2}$ , het beeldlijnstuk is **PQ**;
  - horizontaal met  $-\frac{1}{2}$ , het beeldlijnstuk is **RS**.
- a Teken de vier beeldlijnstukken in een assenstelsel.

Verticaal vermenigvuldigen met -1 hebben we eerder gedaan onder een andere naam.

b Welke?



## 14.4 Schuiven en rekken

21

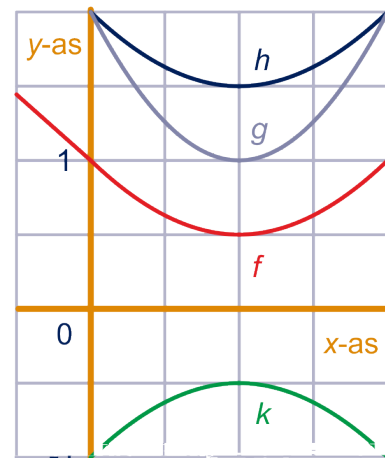
Hiernaast zijn getekend de grafieken van de functies  $f$ ,  $g$ ,  $h$  en  $k$ .

De grafieken van  $g$ ,  $h$  en  $k$  ontstaan uit die van  $f$  door een verticale vermenigvuldiging of verschuiving.

- a Zeg van elk van de drie welke vermenigvuldiging of verschuiving.

Er geldt:  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ .

- b Geef met behulp hiervan formules voor  $g(x)$ ,  $h(x)$  en  $k(x)$ .



### Verticaal verschuiven en vermenigvuldigen

Gegeven is een functie  $f$  en een getal  $a$ .

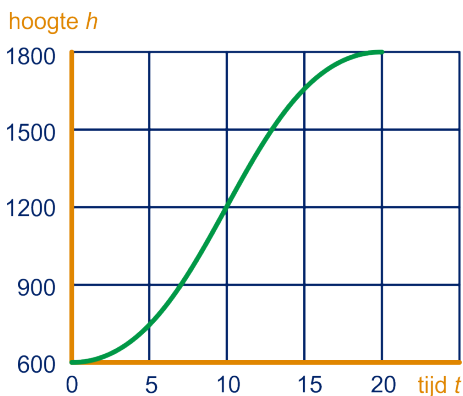
Als de grafiek van  $g$  uit die van  $f$  ontstaat door verticaal  $a$  eenheden te verschuiven, dan geldt:  $g(x) = f(x) + a$ .

Als de grafiek van  $h$  uit die van  $f$  ontstaat door verticaal met  $a$  te vermenigvuldigen, dan geldt:  $h(x) = a \cdot f(x)$ .

In het volgende kijken we hoe je de formule van een functie aan moet passen bij horizontaal vermenigvuldigen en verschuiven. Dat is wat minder eenvoudig.

22

Gondels brengt wandelaars in 20 minuten van 600 tot 1800 meter hoog. De lift beweegt gelijkmatig, zonder stoppen. Op tijdstip 0 stapt Hans in. Zijn hoogte op tijdstip  $t$  noemen we  $h(t)$ . We rekenen de tijd in minuten en de hoogte in meter. Hieronder is de grafiek getekend.



Wim stapt 5 minuten later in de volgende gondel. Zijn hoogte op tijdstip  $t$  noemen we  $w(t)$  met  $5 \leq t \leq 25$ .

- a Neem over en vul in:

$$w(5) = h(\dots)$$

$$w(7) = h(\dots)$$

$$w(t) = h(\dots)$$

- b Teken de grafiek van  $w$ . Hoe ontstaat die uit de grafiek van  $h$ ?

10 minuten voor Hans was Ans ingestapt. Haar hoogte op tijdstip  $t$  noemen we  $a(t)$  met  $-10 \leq t \leq 10$ .

## 14.4 Schuiven en rekken

23

c Vul in:  $a(t) = h(\dots)$ .

d Hoe ontstaat de grafiek van  $a$  uit die van  $h$ ?

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = 0,1x^2 + 1$ .

a Teken de grafiek van  $f$  in GeoGebra (of op de GR).

b Kijk wat er gebeurt als je in de invoerregel invult:  $f(x - 3)$ .  
En ook  $f(x + 4)$ .

c Kies zelf een functie  $f$  en kijk wat er gebeurt als je  $g(x + 3)$  en  $g(x - 4)$  invoert.

24



Voer in GeoGebra (of de GR) een functie  $f$  in, bijvoorbeeld

$$f(x) = 0,1x^2 + 1.$$

Kijk wat er gebeurt als je in de invoerregel invult:  $f(x - 3)$ .

En ook  $f(x + 4)$ .



Gegeven een functie  $f$ .

- De grafiek van de functie  $f$  wordt 3 eenheden naar rechts geschoven. Je krijgt de grafiek van een functie  $g$ .  
Er geldt:  $g(x) = f(x - 3)$ .
- De grafiek van de functie  $f$  wordt 4 eenheden naar links geschoven. Je krijgt de grafiek van een functie  $h$ .  
Er geldt:  $h(x) = f(x + 4)$ .

25

Hiernaast zijn de grafieken van  $f$ ,  $g$  en  $h$  getekend.

Er geldt:  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

De grafiek van  $g$  ontstaat uit die van  $f$  door deze 2 eenheden naar rechts te schuiven.

a Geef een formule voor  $g(x)$ .

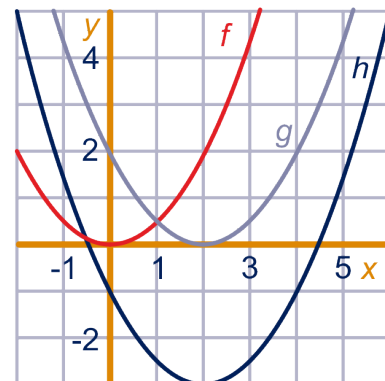
De grafiek van  $h$  ontstaat uit die van  $g$  door deze 3 eenheden omlaag te schuiven.

b Geef een formule voor  $h(x)$ .



In opgave 25 heb je weer een voorbeeld gezien van iets dat je in 3Vwo H29 hebt gehad.

De parabool met vergelijking  $y = p(x - a)^2 + b$  heeft top  $(a, b)$ .



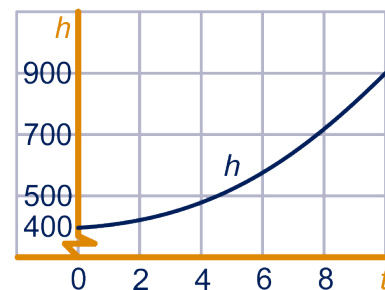
26



Een gondel brengt je in 10 minuten van hoogte 400 naar hoogte 900 meter. Hiernaast staat de grafiek van de hoogte  $h(t)$  (meter) van de gondel  $t$  minuten na de start.

Als het hard waait, gaat de gondel (uit veiligheidsoverwegingen) half zo snel en doet hij er dus 20 minuten over om van 400 naar 900 meter te komen. De hoogte van de gondel  $t$  minuten na de start bij harde wind noemen we  $w(t)$ .

Neem over en vul passende getallen in.



## 14.4 Schuiven en rekken

- a  $w(20) = h(\dots)$ ;  $w(12) = h(\dots)$ ;  $w(t) = h(\dots)$ .  
 b Teken de grafiek van de functie  $w$  op het werkblad.

Volgend jaar wordt er een nieuwe gondel in gebruik genomen. Die is twee keer zo snel als de huidige. Zijn hoogte  $t$  minuten na de start noemen we  $n(t)$ . Dus  $n(5) = 900$ .

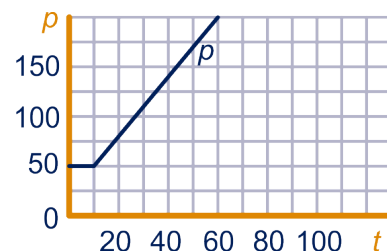
Neem over en vul in.

- c  $n(4) = h(\dots)$ ;  $n(2) = h(\dots)$ ;  $n(t) = h(\dots)$ .  
 d Teken de grafiek van de functie  $n$  op het werkblad.

27

In stad  $P$  is het parkeertarief voor  $t$  minuten parkeren  $p(t)$  eurocent. Hiernaast staat de grafiek van  $p$ .

De eerste 10 minuten betaal je 50 eurocent, daarna voor elke minuut 3 eurocent.



In stad  $Q$  is het veel voordeliger parkeren. Voor hetzelfde geld parkeer je daar drie keer zo lang. Het parkeertarief voor  $t$  minuten parkeren in  $Q$  is  $q(t)$  eurocent.

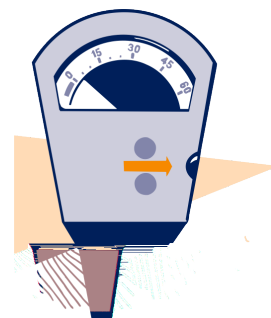
- a Neem over en vul in:  
 $q(30) = p(\dots)$        $q(84) = p(\dots)$        $q(t) = p(\dots)$   
 b Neem de grafiek van  $p$  over op roosterpapier en teken er de grafiek van  $q$  bij.  
 c Hoe ontstaat de grafiek van  $q$  uit die van  $p$ ?

28

In stad  $R$  is het parkeren 2 keer zo duur als in stad  $P$  van de vorige opgave.

Het parkeertarief daar voor  $t$  minuten parkeren is  $r(t)$  eurocent.

- a Neem over en vul in:  $r(t) = \dots \cdot p(t)$ .  
 b Teken de grafiek van  $r$  in het rooster van onderdeel b.  
 c Hoe ontstaat de grafiek van  $r$  uit die van  $p$ ?



29



Neem een functie  $f$ , bijvoorbeeld met  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Teken met GeoGebra (of de GR) de grafieken van de functies  $g$ ,  $h$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $m$  en  $n$  met:

$$\begin{array}{ll} g(x) = f(x - 2) & h(x) = f(x + 2) \\ j(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right) & k(x) = f(-2x) \\ m(x) = f(x) + 3 & n(x) = -2 \cdot f(x) \end{array}$$

Kijk hoe de grafiek van  $f$  verschoven of gerekt wordt.

Gegeven een functie  $f$ .

- Neem aan:  $g(x) = f(ax)$  met  $a \neq 0$ .  
 De grafiek van  $g$  krijg je dan door de grafiek van  $f$



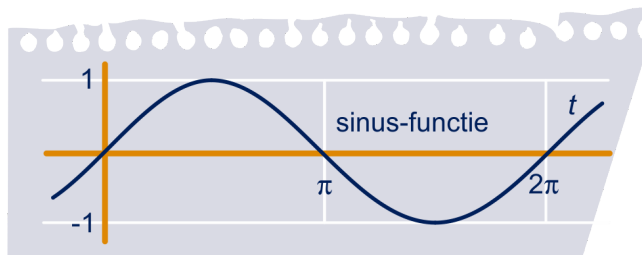
## 14.4 Schuiven en rekken

**horizontaal** met  $\frac{1}{a}$  te **vermenigvuldigen**.

- Neem aan:  $g(x) = a \cdot f(x)$ .  
De grafiek van  $g$  krijg je dan door de grafiek van  $f$  **verticaal** met  $a$  te **vermenigvuldigen**.
- Neem aan:  $g(x) = f(x + a)$  met  $a > 0$ .  
Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **links te schuiven**.  
Neem aan:  $g(x) = f(x - a)$  met  $a > 0$ .  
Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **rechts te schuiven**.
- Neem aan:  $g(x) = f(x) + a$  met  $a > 0$ . Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **boven te schuiven**.  
Neem aan:  $g(x) = f(x) - a$  met  $a > 0$ . Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **beneden te schuiven**.

Zoals bekend heeft de sinusfunctie periode  $2\pi$ , amplitude 1 en evenwichtswaarde 0.

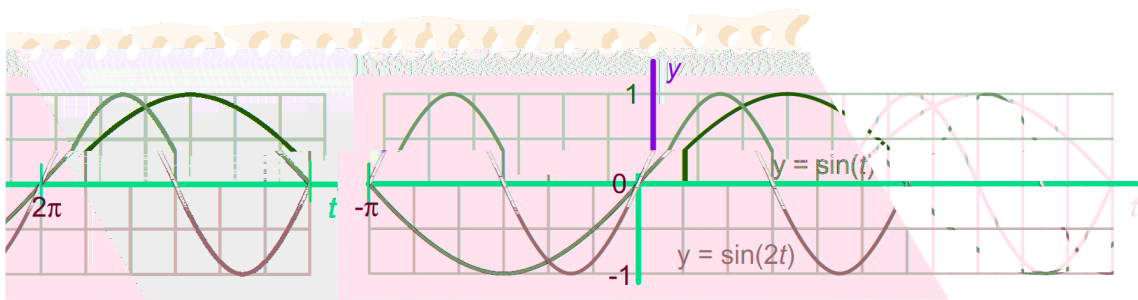
Hieronder is de grafiek nog eens getekend.



We gaan de grafiek van de sinusfunctie vervormen, door vermenigvuldigen en verschuiven.

We beginnen met het veranderen van de periode. Bekijk daarvoor de applet 'cirkel en grafiek'.

Hieronder staan in één figuur de grafieken van  $y = \sin(t)$  en  $y = \sin(2t)$ . De grafiek van de tweede ontstaat uit de eerste door een horizontale vermenigvuldiging met factor  $\frac{1}{2}$ .



## 14.4 Schuiven en rekken

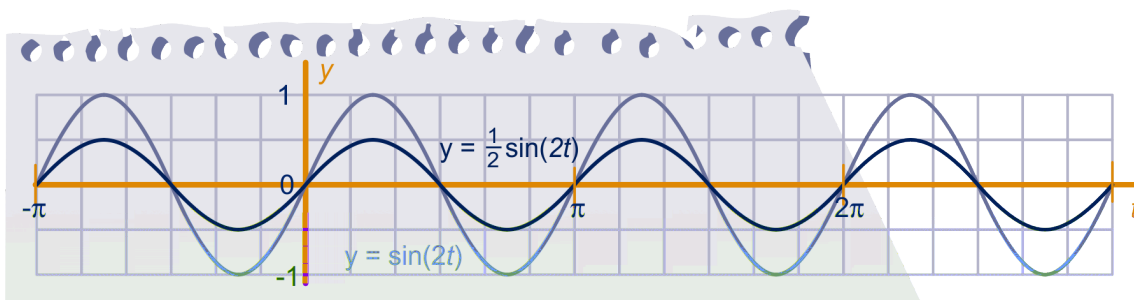
- a Wat is de periode van de functie  $y = \sin(2t)$ ?
- b Wat is de periode van de functies  $y = \sin(5t)$  en  $y = \sin(at)$  met  $a \neq 0$ ?
- c Wat is de periode van de functie  $y = \sin\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$  met  $p \neq 0$ ?

De functie  $y = \sin\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$  heeft periode  $p$ ,  $p \neq 0$ .

We gaan de amplitude veranderen. Je kunt hiervoor weer de applet 'cirkel en grafiek' bekijken door het kogeltje over een grotere cirkel te laten lopen.

31

Hieronder zijn in één figuur getekend de grafieken van de functies  $y = \sin(2t)$  en  $y = \frac{1}{2}\sin(2t)$



De grafiek van  $y = \frac{1}{2}\sin(2t)$  ontstaat uit die van  $y = \sin(2t)$  door verticaal te vermenigvuldigen met  $\frac{1}{2}$ , dus de amplitude wordt  $\frac{1}{2}$ .

- a Wat is de amplitude van de functie  $y = 3\sin(2t)$  en van de functie  $y = 4\sin(3t)$ ?
- b Wat is de amplitude van de functie  $y = -3\sin(2t)$  en van de functie  $y = -4\sin(3t)$ ?
- c Wat is de amplitude van de functie  $y = b \cdot \sin(at)$ , met  $b > 0$  en  $a \neq 0$ ?

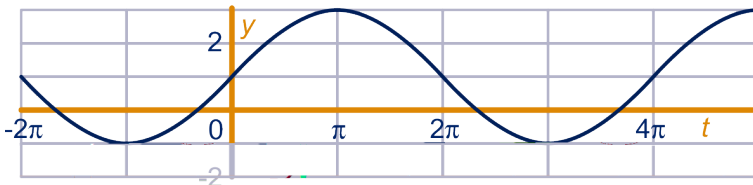
Gegeven is de functie  $y = b \cdot \sin(at) + 1$ , met  $b > 0$  en  $a \neq 0$ .

- d Wat is de evenwichtswaarde van deze functie?

De functie  $y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right) + c$  met  $A > 0$  en  $p \neq 0$  heeft amplitude  $A$ , periode  $p$  en evenwichtswaarde  $c$ .

### Voorbeeld

Gevraagd wordt naar een formule voor onderstaande golf.





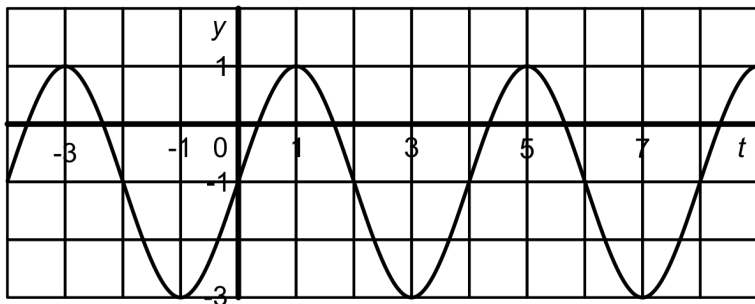
## 14.4 Schuiven en rekken

Uit de figuur lees je af: de amplitude  $A = 2$ , de periode  $p = \pi$  en de evenwichtswaarde  $c = 1$ .

Een formule is dus:  $y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + 1$ .

### Voorbeeld

Een formule voor de golf hieronder vind je op soortgelijke wijze.



Uit de figuur lees je af: de amplitude  $A = 2$ , de periode  $p = 4$  en de evenwichtswaarde  $c = -1$ .

Een formule is dus:  $y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) - 1$ .

### Voorbeeld

Gegeven is de functie  $y = 2 + 4 \sin(2t)$ .

Gevraagd wordt exact de maximale en de minimale waarden van de functie te bepalen en voor welke waarden van  $t$  die bereikt worden.

Om die vraag te beantwoorden maken we een schets van de grafiek over één periode.

De periode is  $\pi$ , de evenwichtswaarde 2 en de amplitude 4.

De maximale waarde is  $2 + 4 = 6$  en de minimale waarde  $2 - 4 = -2$ . Een waarde van  $t$  waarvoor  $y(t)$  maximaal is, is  $\frac{1}{4}\pi$

en een waarde van  $t$  waarvoor  $y(t)$  minimaal is, is  $\frac{3}{4}\pi$ .

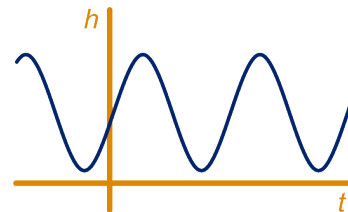
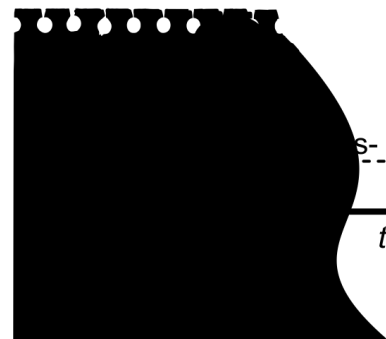
De maximale en minimale waarde wordt precies één keer per periode bereikt, dus de maximale waarde krijg je voor

$t = \dots, -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi, 2\frac{1}{4}\pi, \dots$  en de minimale voor  $t =$

$\dots, -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi, 2\frac{3}{4}\pi, \dots$

We houden de hoogte boven de grond van een gondel aan een reuzenrad in de gaten. Hiernaast is de grafiek van de hoogte  $h$  (in m) als functie van de tijd  $t$  (in minuten) getekend. De bijbehorende formule is:  $h(t) = 6 + 5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$ .

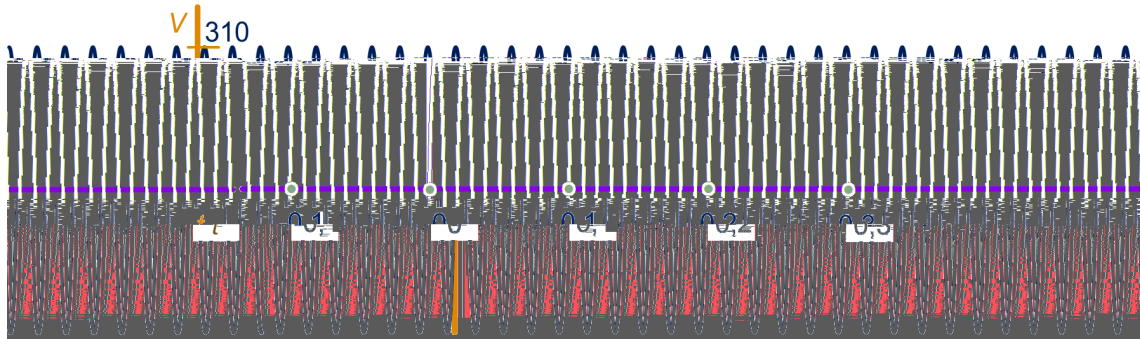
- Teken de grafiek ook op de GR.
- Bepaal algebraïsch de grootste en de kleinste hoogte die bereikt wordt.
- Geef langs algebraïsche weg de eerste drie tijdstippen na 0 waarop de grootste en de kleinste hoogte bereikt worden.



## 14.4 Schuiven en rekken

33

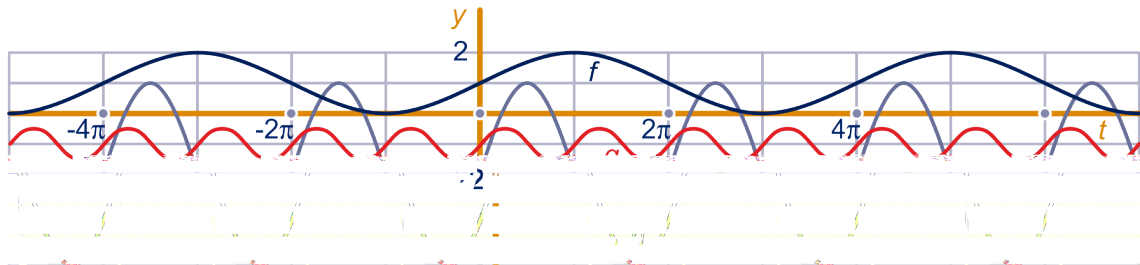
Op het stopcontact staat een wisselspanning van  $V$  volt. De formule hiervoor is:  $V = 310 \cdot \sin(100\pi t)$ . De grafiek van  $V$  als functie van  $t$  (in sec) is hieronder getekend.



- a Wat is het aantal periodes per seconde? (Dit noemt men de frequentie.)
- b Wat is het eerste tijdstip na 0 waarop de spanning maximaal is?

34

Hieronder staan drie sinusoiden met formules van de vorm  $y = a \cdot \sin(bt) + c$ .



Geef van elk een juiste formule.

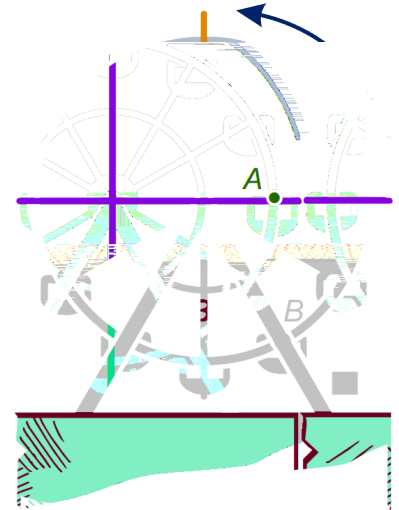
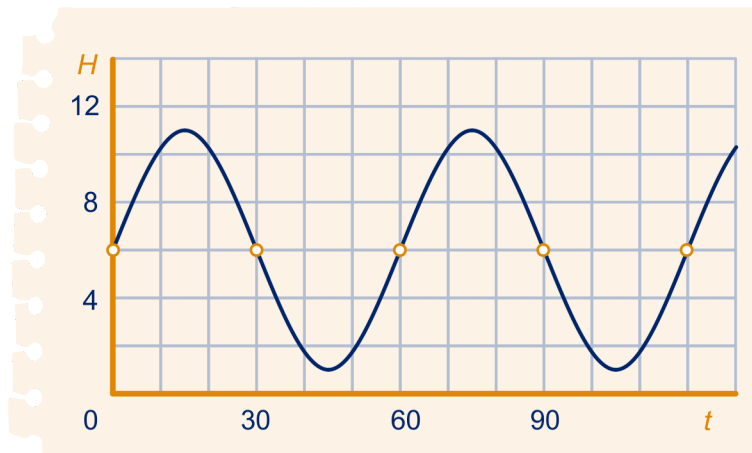
## 14.4 Schuiven en rekken

35

We komen terug op het reuzenrad van opgave 14.

Het punt  $A$  draait over een cirkel met straal 5. Het middelpunt van de cirkel ligt op hoogte 6. De hoogte van  $A$  na  $t$  minuten is  $h(t)$  meter.

De grafiek van  $h$  al functie van  $t$  staat hieronder.



- a Geef een formule voor  $h(t)$  in de vorm:

$$h(t) = \dots \cdot \sin(\dots t) + \dots$$

In opgave 14 heb je  $h(10)$  en  $h(35)$  in drie decimalen berekend.

- b Doe dat nog eens met behulp van de formule die je gevonden hebt en vergelijk je resultaten nu met je eerdere uitkomsten.

De verticale lijn  $t = 15$  is symmetrie-as van de grafiek. Verder geldt:  $h(10) = 10,330$ .

- c Gebruik de symmetrie en de periodicititeit om de eerste vier tijdstippen na 0 te bepalen waarop  $h(t) = 10,330$ .

Er geldt:  $h(35) = 5,5$ .

- d Gebruik de symmetrie en de periodicititeit om de eerste vier tijdstippen na 0 te bepalen waarop  $h(t) = 5,5$ .

36

We gaan verder met opgave 35.

Punt  $B$  ligt ook op de omtrek van het rad, zie figuur. Punt  $A$  is op tijdstip 0 op hoogte 6 rechts en op tijdstip 15 boven.

- a Op welke tijdstippen is punt  $B$  daar?  
Geef de eerste tijdstippen na 0.

## 14.4 Schuiven en rekken

De hoogte van punt  $B$  op tijdstip  $t$  noemen we  $b(t)$ .

- b Hoe krijg je de grafiek van  $b$  uit die van  $h$ ?
- c Neem over en vul passende getallen in:  $b(10) = h(\dots)$ ,  
 $b(25) = h(\dots)$ ,  $b(t) = h(\dots)$ .

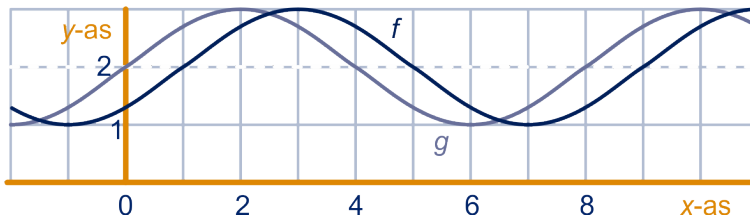
Er geldt:  $b(t) = h(t - 10)$ .

Een formule voor  $b(t)$  is dus:  $b(t) = 6 + 5 \cdot \sin\left(\frac{1}{30}\pi(t - 10)\right)$ .



### Voorbeeld

We zoeken een formule voor  $f(x)$  van de functie  $f$  die hieronder getekend is.



De functies  $f$  en  $g$  hebben dezelfde periode, amplitude en evenwichtswaarde. De periode is 4, de amplitude 1 en de evenwichtswaarde 2.

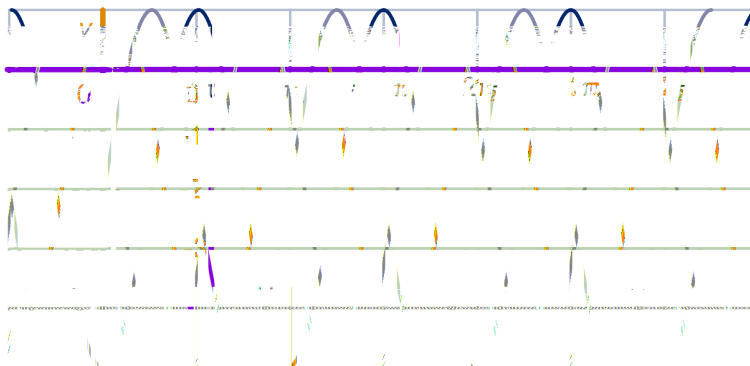
Een formule voor  $g(x)$  is:  $g(x) = 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot x\right) + 2$ .

De grafiek van  $f$  ontstaat uit die van  $g$  door deze 1 eenheid naar rechts te schuiven.

Dus:  $g(x) = f(x - 1) = \sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot (x - 1)\right) + 2$ .

### Voorbeeld

We zoeken weer een formule voor  $f(x)$  van de functie  $f$  die hieronder getekend is.



De functies  $f$  en  $g$  hebben dezelfde periode, amplitude en evenwichtswaarde. De periode is  $\pi$ , de amplitude 3 en de evenwichtswaarde -2.

## 14.4 Schuiven en rekken

Een formule voor  $g(x)$  is:  $g(x) = 3 \cdot \sin(2x) - 2$ . De grafiek van  $f$  ontstaat uit die van  $g$  door deze  $0,25\pi$  eenheden naar rechts te schuiven.

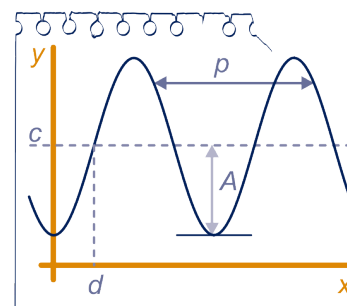
Dus:  $g(x) = f(x - 0,25\pi) = 3 \cdot \sin(2(x - 0,25\pi)) - 2$ .

### Opmerking

Functies met een formule van de vorm  $y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot x\right)$  gaan bij  $x = 0$  stijgend door de evenwichtslijn. Immers de grafiek van  $y = \sin(x)$  is alleen verticaal verschoven en horizontaal en verticaal vermenigvuldigd.

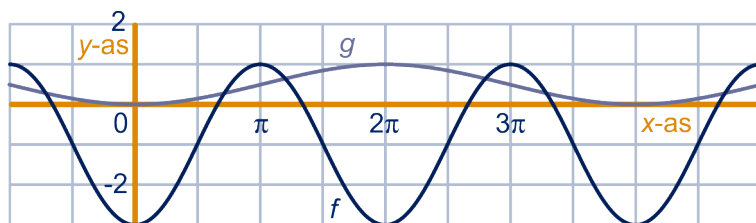
De grafiek van de functie  $y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot (x - d)\right) + c$  met  $A > 0$  en  $p > 0$  heeft amplitude  $A$ , periode  $p$ , evenwichtswaarde  $c$  en gaat bij  $x = d$  stijgend door de evenwichtslijn.

Een functie met een dergelijke formule noemen we een **sinusoïde**.



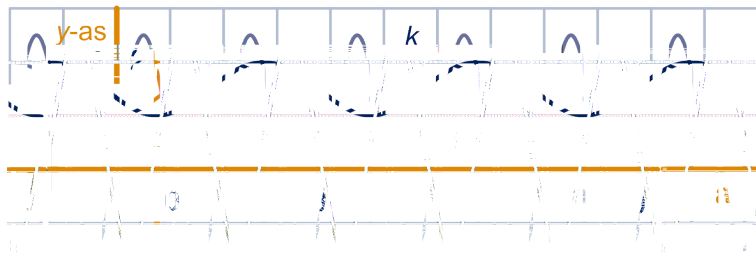
37

Hieronder staan de grafieken van twee functies  $f$  en  $g$ . Het zijn sinusoïden.



- Geef van elke functie de evenwichtswaarde, de amplitude, de periode en een waarde van  $x$  waar de grafiek stijgend door de evenwichtslijn gaat.
- Geef een formule voor  $f(x)$  en  $g(x)$  in de vorm:  
 $\dots \cdot \sin(\dots(x - \dots)) + \dots$

De grafieken van de sinusoïden  $h$  en  $k$  staan hieronder.



- Geef een formule voor  $h(x)$  en  $k(x)$ .

## 14.4 Schuiven en rekken

38

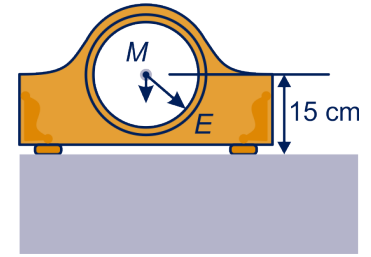
We volgen het eindpunt  $E$  van de grote wijzer van een tafelklok. De wijzer heeft lengte 10 cm; het draaipunt  $M$  ligt 15 cm boven de kast. Op tijdstip  $t = 0$  staat  $E$  op de 'twaalf'.

$h(t)$  is de hoogte van  $E$  boven de kast (in cm) na  $t$  minuten.

a Geef  $h(15)$ ,  $h(30)$  en  $h(45)$ .

De grafiek van  $h$  als functie van  $t$  is een sinusoïde.

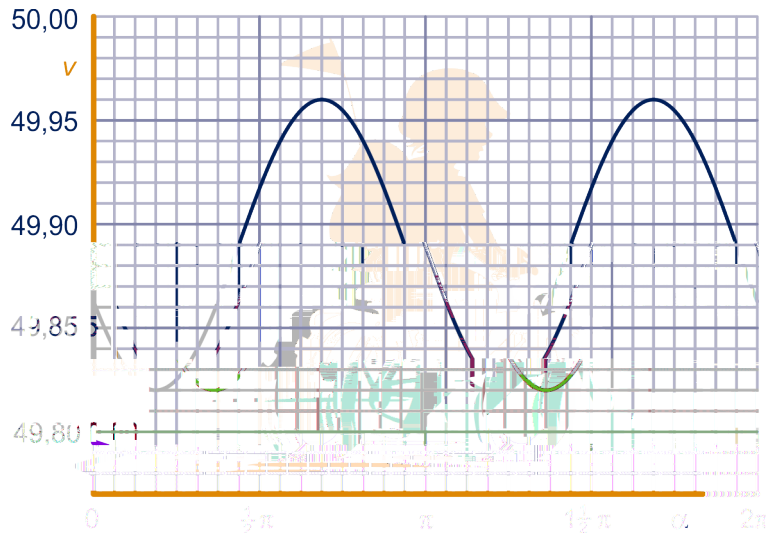
b Geef een formule voor  $h(t)$ .



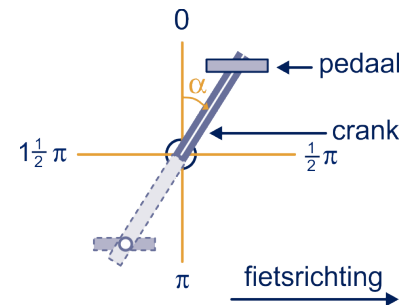
39

Fietsen met een constante snelheid is in de praktijk niet mogelijk omdat de kracht die op de pedalen wordt uitgeoefend, afhangt van de stand van de crank (zie figuur 1). De grootte van de hoek tussen de crank en de verticale richting in radialen noemen we  $\alpha$ . Zie figuur 1.

In figuur 2 is de snelheid  $v$  van een wielrenner in km/uur uitgezet tegen  $\alpha$ .



figuur 2



figuur 1

De grafiek in figuur 1 is te beschrijven met een formule van de vorm  $v = p + q \sin(r(\alpha - s))$ .

Bepaal mogelijke waarden van  $p$ ,  $q$ ,  $r$  en  $s$ .

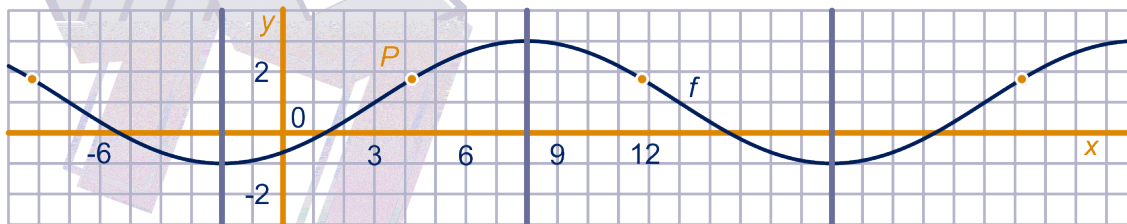
Examen wiskunde B Havo 2010II, gedeeltelijk

## 14.5 Vergelijkingen en meer

40

Hieronder staat de grafiek van de functie  $f$  met

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{10}\pi(x-3)\right) + 1.$$



- a Bepaal de periode en de evenwichtswaarde.

Er zijn drie symmetrie-assen van de grafiek getekend.

- b Geef van elk een vergelijking.  
c Bereken exact de maximale waarde en de minimale waarde van  $f(x)$ .  
d Voor welke waarden van  $x$  tussen 100 en 130 is  $f(x)$  maximaal?

Op de grafiek van  $f$  zijn vier punten op gelijke hoogte getekend. Eén daarvan is  $P$  met eerste coördinaat  $4\frac{1}{2}$ .

- e Bereken de eerste coördinaat van de andere drie punten met behulp van de symmetrie en de periodiciteit van de functie  $f$ .

### Opmerking

In de vorige opgave was sprake van de rij getallen:

..., -32, -12, 8, 28, 48, ..., dus van de rij

...,  $8 - 2 \cdot 20$ ,  $8 - 1 \cdot 20$ ,  $8 + 1 \cdot 20$ ,  $8 + 2 \cdot 20$ , ....

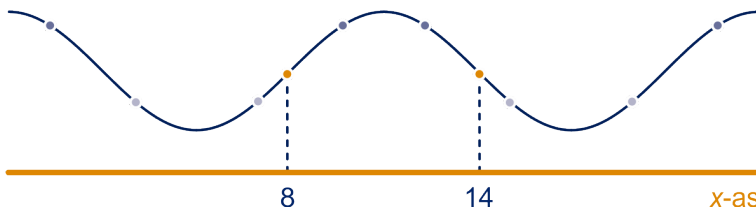
Die kun je ook kort noteren als  $8 + k \cdot 20$ , waarbij  $k$  alle gehele getallen doorloopt.

Merk op dat je die rij ook kunt schrijven als

$28 + k \cdot 20$  of als  $-12 + k \cdot 20$  of als ... met  $k$  geheel.

41

Hieronder is een sinusoïde getekend. De evenwichtslijn gaat door de punten met  $x$ -coördinaat 8 en 14.



Er zijn vier punten op de sinusoïde getekend met gelijke hoogte waarvan er een  $x$ -coördinaat  $9\frac{1}{3}$  heeft.

- a Bereken de  $x$ -coördinaat van de andere drie punten.

## 14.5 Vergelijkingen en meer

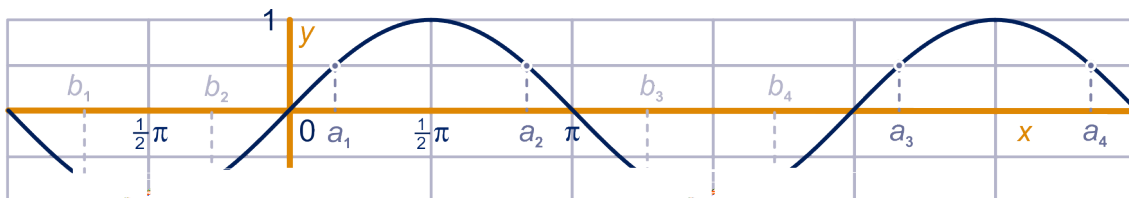
Er zijn vier punten op de sinusoïde getekend met gelijke hoogte waarvan er een  $x$ -coördinaat 7 heeft.

**b** Bereken de  $x$ -coördinaat van de andere drie punten.

### Voorbeeld

We zoeken de oplossingen (in drie decimalen) van de vergelijking  $\sin(x) = 0,5$  met  $-\pi \leq x \leq 2\pi$ .

Hieronder is de grafiek van de sinusfunctie getekend. De getallen die we zoeken zijn  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  en  $a_4$  in de figuur hieronder.



Eén oplossing vinden we met de GR:  $\sin^{-1}(0,5) = 0,2359\dots$  Dat moet het getal  $a_1$  zijn.

Het getal  $a_2$  vind je met behulp van symmetrie:

het gemiddelde van  $a_1$  en  $a_2$  is gelijk aan  $\frac{1}{2}\pi$ , dus:

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}\pi, \text{ dus } a_2 = \pi - a_1 = 2,6179\dots$$

Alle oplossingen van de vergelijking zijn van de vorm:

$a_1 + k \cdot 2\pi$  of  $a_2 + k \cdot 2\pi$  met  $k$  geheel.

De gevraagde oplossingen zijn hier:

$a_1$ ,  $a_1 + 2\pi$ , en  $a_2$ ,  $a_2 + 2\pi$ ,

dus (in drie decimalen): 0,236; 2,618; 6,807 en 8,901.



De oplossingen (in drie decimalen) van de vergelijking

$\sin(x) = -0,75$  met  $-\pi \leq x \leq 2\pi$

zijn de getallen  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  en  $b_4$  in de figuur hierboven.

Eén vind je met de GR:  $\sin^{-1}(-0,75) = -0,8480\dots$  Dat is  $b_2$ .

$b_1$  vind je met behulp van symmetrie:

$b_1$  en  $b_2$  liggen symmetrisch ten opzichte van de lijn  $x = -\frac{1}{2}\pi$ ,

$$\text{dus } \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = -\frac{1}{2}\pi, \text{ dus } b_1 = -\pi - b_2 = -\pi + 0,8480\dots = -2,2935\dots$$

Alle oplossingen van de vergelijking  $\sin(x) = -0,75$  zijn van de vorm:  $b_1 + k \cdot 2\pi$  of  $b_2 + k \cdot 2\pi$ , met  $k$  geheel.

De hier gevraagde oplossingen zijn: -2,293; -0,848; 3,990 en 5,435.



## 14.5 Vergelijkingen en meer

42

Bepaal langs algebraïsche weg in twee decimalen de oplossingen van de volgende vergelijkingen in  $x$  met  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .

$$\sin(x) = 0,6$$

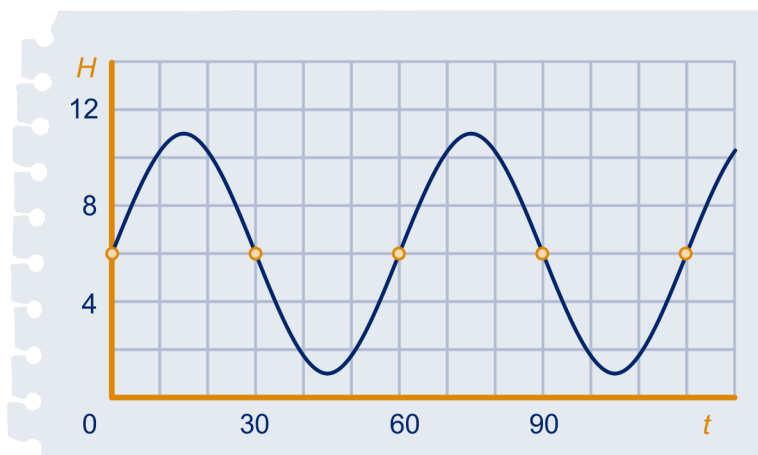
$$\sin(x) = -0,9$$

$$\sin(x) = 2,6$$

$$\sin(x) = -1$$

43

We bekijken het rad van opgave 14 nog eens. De hoogte na  $t$  minuten is  $h(t)$  meter. De grafiek van  $h$  als functie van  $t$  is hieronder nog eens getekend (de punten geven de evenwichtswaarde aan).



Er geldt:  $h(t) = 6 + 5 \sin\left(\frac{1}{30}\pi t\right)$ .

We berekenen de tijdstippen  $t$  met  $0 \leq t \leq 120$  waarvoor  $h(t) = 9$ .

Dan  $\sin\left(\frac{1}{30}\pi t\right) = 0,6$ .

- Ga dat na en bepaal met de GR een waarde van  $t$  waarvoor dit het geval is.
- Bepaal met behulp van symmetrie en periodiciteit in twee decimalen ook de andere waarden van  $t$  tussen 0 en 120 waarvoor  $h(t) = 9$ .
- Bereken in één decimaal hoeveel minuten de gondel gedurende in de tijd tussen 0 en 120 boven de 9 meter is geweest.
- Bereken in twee decimalen de tijdstippen  $t$  tussen 0 en 120 waarvoor  $h(t) = 2$ .

### Voorbeeld

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{10}\pi(x-3)\right) + 1$ .

In opgave 39 hebben we de functie ook bekeken.

De periode  $p$  bereken je als volgt:

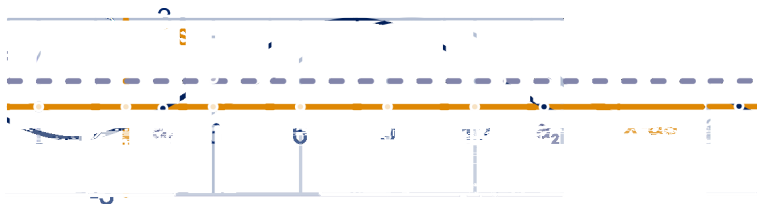
$$\frac{2\pi}{p} = \frac{1}{10}\pi, \text{ dus de periode is } 20.$$



## 14.5 Vergelijkingen en meer

De evenwichtswaarde is 1 en de functie gaat bij  $x = 3$  stijgend door de evenwichtslijn.

Voor het gemak is de grafiek hieronder nog eens getekend.



We berekenen de oplossingen van de vergelijking  $f(x) = 0$ .

Zie figuur:  $a_1$  en  $a_2$  zijn oplossingen van de vergelijking. Als we die berekend hebben kennen we alle oplossingen met behulp van periodicititeit.

$$2 \sin\left(\frac{1}{10}\pi(x-3)\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{10}\pi(x-3)\right) = -\frac{1}{2}.$$

Met de GR vind je:  $\frac{1}{10}\pi(x-3) = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,5235\dots$ , dus  $x-3 = \frac{-0,5235\dots}{\frac{1}{10}\pi} = -1,6667\dots$ , dus  $x = 1,333\dots$ . Dat is  $a_1$ .

Vanwege symmetrie volgt:  $a_2 = 12 + 1,6667\dots = 13,6667\dots$

De oplossingen zijn:  $1,333\dots + k \cdot 20$  en  $13,6667\dots + k \cdot 20$  met  $k$  geheel.

44



Los de volgende vergelijkingen in  $x$  op.

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -0,75 \text{ met } -2\pi \leq x \leq 2\pi,$$

$$\sin(0,4\pi(x-3)) = 0,7 \text{ met } 0 \leq x \leq 10.$$

45

### Het groeiseizoen

De (gemiddelde) temperatuur in Nederland wordt bij benadering gegeven door:  $T = 10 + 9 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(t-4)\right)$ . Hierin is  $T$  de temperatuur in graden Celsius en is  $t$  de tijd in maanden na 1 januari.

- Hoe volgt uit de formule de periode van  $T$ ?  
Wat is de gemiddelde temperatuur in Nederland? Wanneer in het jaar wordt die bereikt?
- Wat is de grootste en wat is de kleinste waarde van de gemiddelde temperatuur? Wanneer wordt die bereikt?

Eind november is het kouder dan begin november.

- Hoeveel graden Celsius daalt de gemiddelde temperatuur gedurende de maand november?  
Geef je antwoord in één decimaal.
- Bereken op welke data de gemiddelde temperatuur in Nederland  $12^\circ\text{C}$  is.



## 14.5 Vergelijkingen en meer

Voor de landbouw is het groeiseizoen van belang, de periode waarin de gemiddelde temperatuur hoger is dan 5°C.

e Hoeveel weken duurt het groeiseizoen?

## Opmerking

Op de GR is het mogelijk snijpunten van de grafieken van twee functies te bepalen met  $\text{solve}$ .

Probeer dit bijvoorbeeld met de functies  $y = x^2$  en  $y = 2x$ .

Hiervan zijn de snijpunten  $(0,0)$  en  $(2,0)$ .

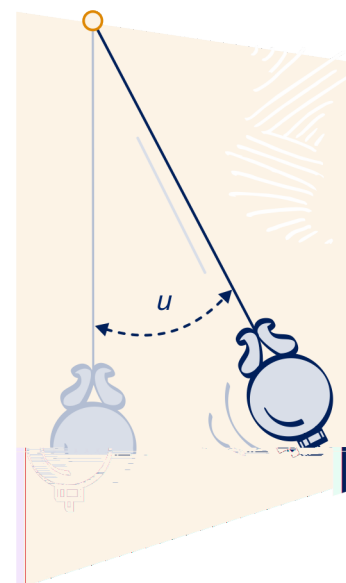


## De slinger

De slinger van een klok maakt een regelmatige beweging.

We bekijken de uitwijking  $u$  als functie van de tijd  $t$  ( $u$  in cm en  $t$  in sec.) De maximale uitwijking is 5 cm, de slingertijd is 4 seconden (zo lang duurt één keer heen en weer). We rekenen de uitwijking naar rechts positief, naar links negatief. De tijd-uitwijking-grafiek is (nagenoeg) een sinusöïde.

- Teken de grafiek en geef een formule van de sinusïde. Neem aan dat de slinger op  $t = 0$  door het laagste punt naar rechts gaat.
- Bereken wanneer tijdens de eerste slingerbeweging de uitwijking 1 cm naar rechts is (gebruik \_\_\_\_\_ als je wilt). Rond af op 3 decimalen.  
En wanneer is dat tijdens de vijfde slingerbeweging?



Van een half zo lange slinger is de slingertijd 0,7 keer zo groot en is de maximale uitwijking 0,5 keer zo groot.

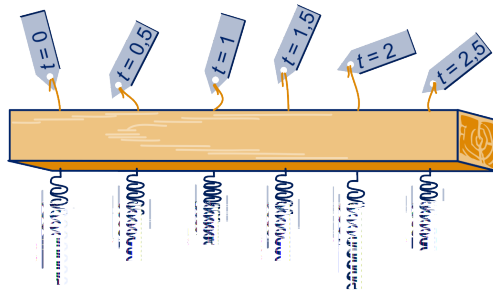
- c Teken in dezelfde figuur de grafiek van deze slinger en geef een formule.

## De verende veer

Een veer is aan een balk opgehangen. Aan de veer hangt een gewicht, 2 meter boven de vloer. Iemand trekt het gewicht omlaag, tot 1,50 meter boven de vloer. Op tijdstip 0 laat hij het gewicht los: dan begint een harmonische beweging. Op de volgende bladzijde is de veer op zes opvolgende tijdstippen getekend, met tussenpozen van 0,5 seconde. De tijd-hoogte-grafiek kan goed benaderd worden door een sinusoïde.



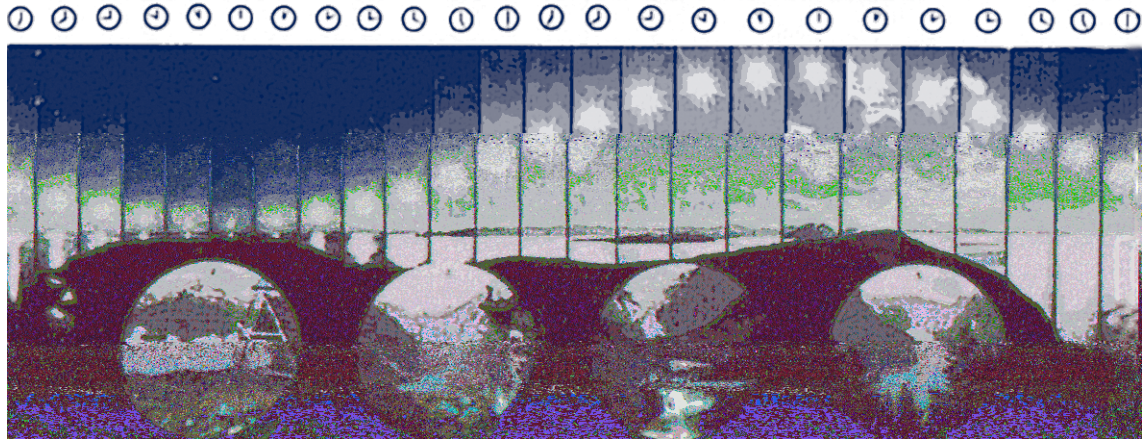
## 14.5 Vergelijkingen en meer



- a Teken de grafiek en geef een formule voor de hoogte  $h$  (in m) boven de vloer als functie van de tijd  $t$  (in seconden). Vermeld de schaal bij de assen.
- b Bereken de verandering in hoogte  $\Delta h$  tussen  $t = 1,39$  en  $t = 1,41$ .  
Bereken hiermee de gemiddelde snelheid tussen deze twee tijdstippen.
- c Bereken algebraïsch, afgerond op 2 decimalen, op welke tijdstippen tussen 1 en 3 het gewicht 2,3 meter boven de vloer is.  
Controleer je antwoorden met de GR met .

48

### Midzomernachtszon



Ten noorden van de poolcirkel ( $66\frac{1}{2}^\circ\text{NB}$ ) gaat de zon hartje zomer niet onder. De ansichtkaart hierboven komt uit Noorwegen. Hij toont in een  $360^\circ$ -panorama de zonnebaan van 21 juni 19.00 uur tot 22 juni 18.00 uur. De foto's zijn genomen op een eilandje voor de Noorse kust, juist boven de poolcirkel. De laagste zonshoogte, om middernacht, is nagenoeg  $0^\circ$ , de hoogste is  $47^\circ$ . De baan kan goed benaderd worden door een sinusöide.

## 14.5 Vergelijkingen en meer

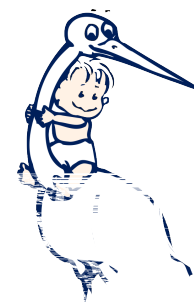
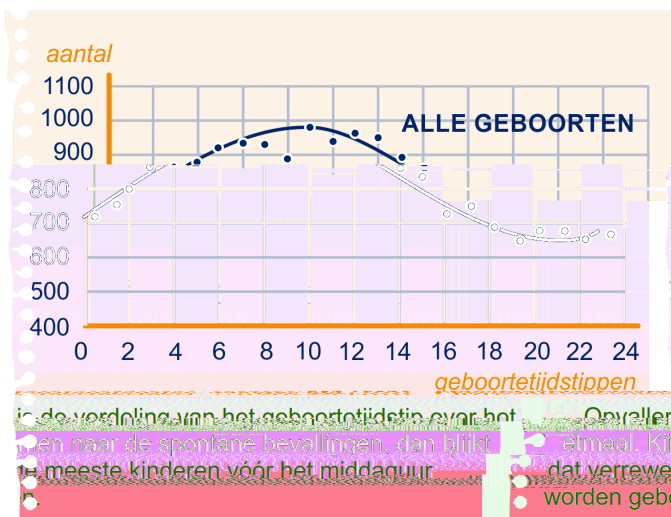
- Stel een formule op voor de zonshoogte  $h$  (in graden) als functie van de tijd  $t$  (in uren). Neem 21 juni middernacht als  $t = 0$ .
- Stel ook een formule op als je 22 juni 6.00 uur als  $t = 0$  neemt.
- Hoe snel klimt de zon gemiddeld aan de hemel tussen 0 uur en 12 uur op 22 juni (in graden/uur)?
- Hoe snel klimt de zon aan de hemel tussen kwart voor 6 en kwart over 6 's ochtends op 22 juni (in graden/uur)?
- Heb je enig idee hoe de zonnebaan er hartje winter op het eiland uitziet?



49

### Geboorten

Er is ooit een onderzoek geweest naar het tijdstip op de dag waarop baby's worden geboren. In een krant stond hierover onderstaande grafiek en tekst.



In het onderzoek waarvan de grafiek het resultaat is, is geteld hoeveel geboortes er plaatsvonden omstreeks 0 uur, hoeveel omstreeks 1 uur, enzovoort. Die aantallen zijn aangegeven met stippen.

- Hoeveel geboortes betrof het onderzoek in totaal?

Anneke denkt dat er voor de middag wel twee keer zo veel kinderen worden geboren als na de middag.

- Hoe komt het dat Anneke zo misleid is?
- Wat is de echte verhouding ongeveer tussen de aantallen geboortes voor en na de middag? (Voor de middag is voor 12 uur.)

## 14.5 Vergelijkingen en meer

Tussen de stippen door is er een lijn getrokken: een sinusoïde. We willen een formule voor die sinusoïde opstellen in de gedaante:  $A = a + b \sin(c(t - d))$ . Hierin is  $t$  het tijdstip (in uren) en  $A$  het aantal geboortes.

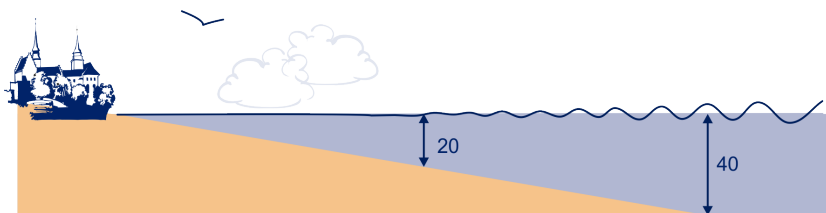
d Stel de formule op.

50



### Golven in ondiep water

Wanneer golven die ontstaan in diep water, langzamerhand in ondiep water terechtkomen, veranderen hun eigenschappen zodra de waterdiepte minder is dan een halve golflengte. Een straffe noordwester bries op de Noordzee zou bijvoorbeeld golven kunnen veroorzaken van twee meter hoogte, tachtig meter lengte en met een periode van acht seconden. Het ondiep-watereffect wordt pas merkbaar als de zee minder dan 40 meter diep is. Dan worden de golven lager, korter en langzamer: de golf zal langzaam uitsterven.



We stellen een formule op voor de ideale uitstervende golf, zoals hierboven beschreven. We nemen het volgende aan.

- De bodem van de zee glooit met een helling van 10%.
- De golflengte is 2 keer zo groot als de diepte.
- De amplitude is  $\frac{1}{4}$  van de diepte.
- Precies 400 meter voor de kust gaat de golf stijgend door de evenwichtsstand.

Het aantal meters uit de kust noemen we  $x$ , de hoogte van de golf  $h$  (ook in meters).

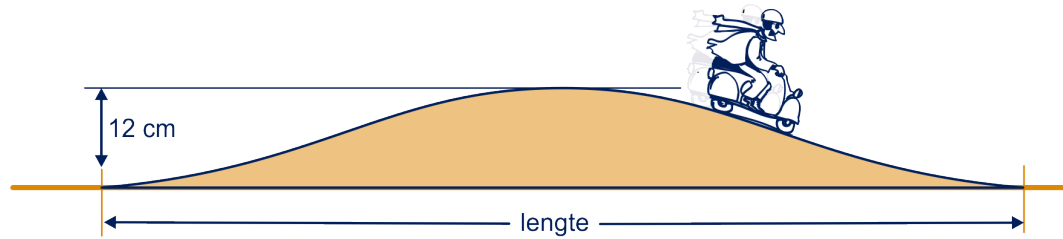
- Hoe diep is de zee  $x$  meter uit de kust?
- Wat is  $x$  meter uit de kust de golflengte en de amplitude?
- Stel een formule op voor  $h$  als functie van  $x$ .

51

De verkeersdrempel in de figuur op de volgende bladzijde hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur en bestaat precies één periode van een sinusoïde. Deze drempel is exact 4 meter lang en 12 cm hoog. Het bijbehorende sinusmodel is

$$h = 0,06 + 0,06 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right) \quad (x \text{ en } h \text{ in meter}).$$

## 14.5 Vergelijkingen en meer



Een verkeersdrempel die behoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is exact 12 meter lang en 14 cm hoog. Bereken algebraïsch in cm nauwkeurig over welke horizontale afstand deze verkeersdrempel meer dan 10 cm hoog is.

WISKUNDE B VWO, Syllabus centraal examen 2018 (bij het nieuwe examenprogramma). Nader vastgesteld Versie juni 2014



## 14.6 Gemengde opgaven

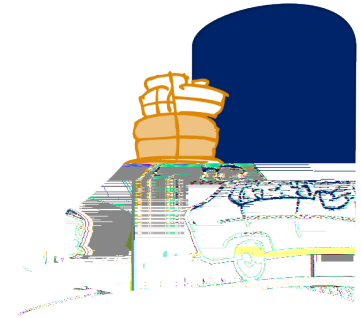
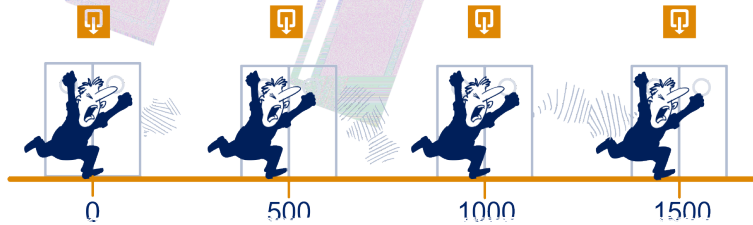
52

Voor tunnels in het Europese wegennet geldt de richtlijn dat de afstand tussen nooduitgangen ten hoogste 500 meter mag bedragen ( ).

In geval van nood hoeft een automobilist dan hoogstens 250 meter te lopen om bij een nooduitgang te komen.

We gaan in deze opgave uit van een rensnelheid van 15 km/u.

Over 250 meter doe je dan dus 60 seconden.



Stel dat een zich bij een automobilist een noodgeval voordoet op plaats  $x$ , dat wil zeggen  $x$  meter vanaf het begin van de tunnel.

(De eerste nooduitgang is dus de ingang van de tunnel.)

Hij rent naar de dichtstbijzijnde nooduitgang.

De benodigde tijd om deze te bereiken noemen we  $T(x)$  (in seconden).

Voorbeeld:  $T(750) = 60$ .

a Bepaal  $T(100)$ ,  $T(300)$ ,  $T(1000)$ ,  $T(1750)$  en  $T(2050)$ .

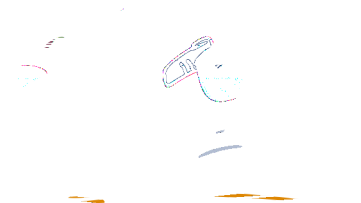
b Teken de grafiek van  $T$  als functie van  $x$ .

Neem hierbij  $0 \leq x \leq 1500$ .

c Wat is de periode van  $T$ ?

d Geef een formule voor  $T(x)$  als  $0 \leq x \leq 250$ .

Ook als  $250 \leq x \leq 500$ . Ook als  $1000 \leq x \leq 1250$ . Ook als  $1250 \leq x \leq 1500$ .



53

### Temperatuurverloop

Het verloop van de temperatuur kan gedurende de 24 uren van een dag nogal grillig zijn. In vereenvoudigde vorm is het temperatuurverloop gedurende een dag redelijk te benaderen door een sinusoïde met een periode van 24 uur.

Het KNMI hanteert voor De Bilt voor de dagen in de maand juni de volgende waarden: de maximumtemperatuur is  $21,0^\circ\text{C}$ , deze wordt bereikt om 3 uur 's middags; de minimumtemperatuur is  $12,2^\circ\text{C}$ .  $T$  is de temperatuur in graden Celsius op een dag in juni en  $u$  het aantal uren na middernacht.

a Teken in een assenstelsel de grafiek van  $T$  als functie van  $u$ .

b Stel een formule op van het verband tussen  $T$  en  $u$ .

Voor een dag in april geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen  $T$  en  $u$ :



## 14.6 Gemengde opgaven

$$T = 7,6 + 4,3 \sin\left(\frac{\pi}{12}(u - 10)\right).$$

- c Bereken hoe lang het volgens deze formule op een dag in april warmer is dan 10 °C. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.

Naar Examen wiskunde B1 havo 2000II

54



De voorband van Annekes fiets is een beetje poreus. Ze moet hem elke week oppompen. Er is een vaste regelmaat ontstaan. 's Maandags 's ochtends pompt ze de band hard op: tot een spanning van 4 atmosfeer. Vooral in het begin van de week verliest de band veel lucht, later in de week minder. Na het weekend is de bandenspanning teruggelopen tot 2 atmosfeer. Anneke pompt de band 's maandags 's ochtends op, en alles begint weer van voren af aan.

- a Verklaar waarom de band meer lucht verliest als hij net is opgepompt dan later in de week.

De bandenspanning noemen we  $P$  (in atmosfeer). De tijd  $t$  rekenen we in dagen.

- b Wat is de periode van  $P$  als functie van  $t$ ?

Hieronder staat de grafiek van  $P$  in de eerste zeven dagen van 2010.

atmosfeer



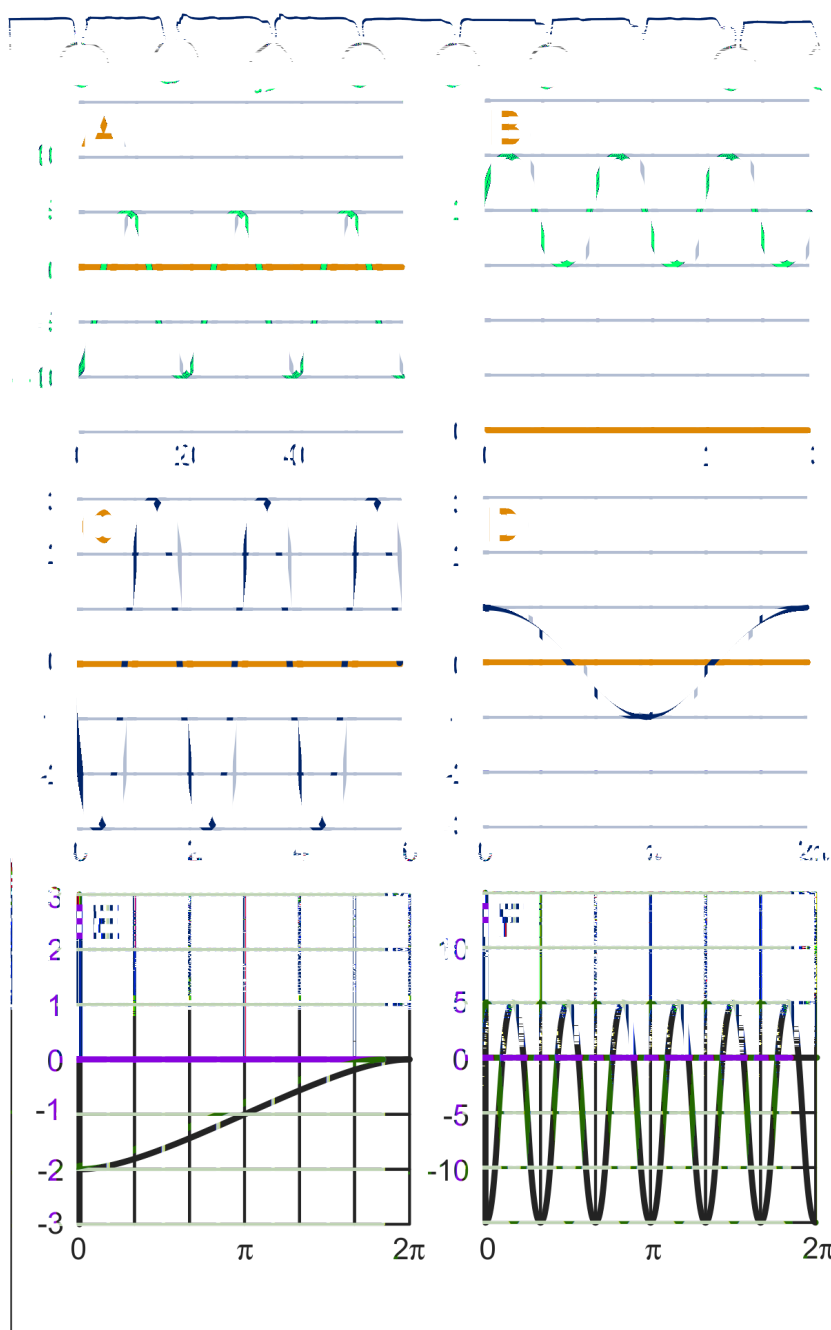
- c Bepaal met behulp van deze grafiek op welke dag het in 2010 nieuwjaar was.
- d Neem de grafiek over en vul de grafiek aan met de twee volgende weken.
- e Wat is de bandenspanning op 12 februari rond het middaguur?
- f Lees uit de grafiek af hoeveel procent van de tijd de bandenspanning hoger is dan 3 atmosfeer.

## 14.6 Gemengde opgaven

55



Geef een formule voor elk van de volgende sinusöiden.



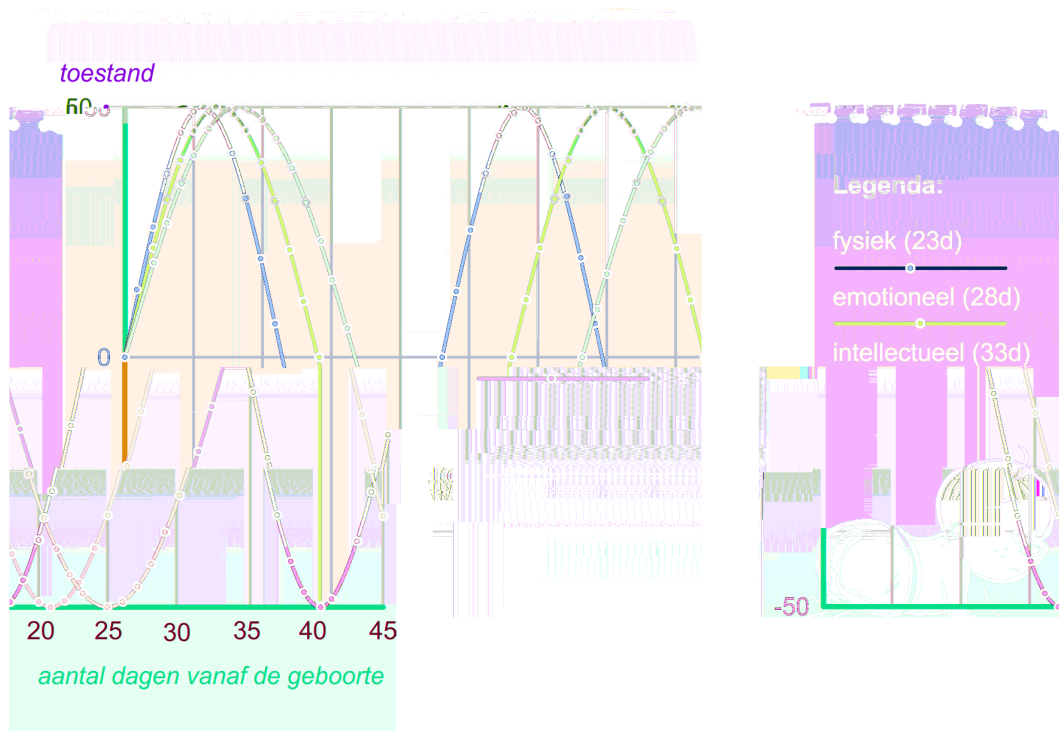
56

### Bioritme

Op een pagina op internet staat te lezen dat ons leven beheerst wordt door een drietal toestanden, namelijk door onze fysieke, onze emotionele en onze intellectuele toestand. Op de ene dag voel je je fysiek (lichamelijk) beter dan op een andere dag. Deze 'fysieke toestand' kunnen we weergeven op een schaal van -50 (fysiek op dieptepunt) tot +50 (fysiek opperbest). Deze

## 14.6 Gemengde opgaven

fysieke toestand varieert in de tijd volgens een sinusoïde. Ook de 'emotionele toestand' en de 'intellectuele toestand' variëren op een schaal van -50 tot +50 volgens een sinusoïde.



Bij de geboorte van een mens zou elke cyclus zich in dezelfde begintoestand bevinden, zoals is weergegeven in de figuur. Tezamen bepalen de drie cycli het zogenaamde bioritme van een mens. Sommigen beweren dat het bioritme volledig vastlegt tot welke prestaties een mens op een bepaald moment in staat is. Zo zou je bijvoorbeeld kunnen uitrekenen op welke dag je het best kunt solliciteren.

Voor de fysieke cyclus is de periode 23 dagen, voor de emotionele cyclus 28 dagen en voor de intellectuele cyclus is de periode 33 dagen. Het bioritme in de figuur betreft een pasgeboren baby.

$E$  is de emotionele toestand van de baby  $t$  dagen na de geboorte. Hierbij hoort een formule van de vorm

$$E = a \cdot \sin(bt).$$

**a** Geef de waarden van  $a$  en  $b$ .

Zodra de emotionele toestand beneden -25 komt, zou het moeilijker worden om de emoties onder controle te houden.

**b** Hoeveel procent van een periode heeft de emotionele toestand een waarde die kleiner is dan -25? Licht je antwoord toe.

## 14.6 Gemengde opgaven

$F$  is de fysieke toestand van de baby.

- c Onderzoek of  $F$  op de eerste verjaardag een dalend of een stijgend verloop heeft.

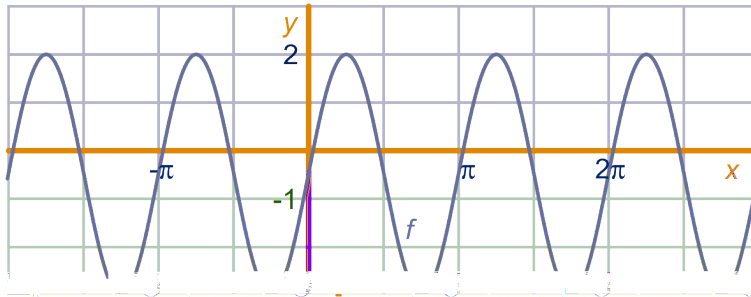
Annelies is op 1 januari 1983 geboren. Op 1 januari 2001 wordt ze dus 18 jaar. Vanaf die dag mag ze rijexamen doen. Ze wil dat doen op een dag waarop zowel haar fysieke als haar intellectuele toestand positief is. (De jaren 1984, 1988, 1992, 1996 en 2000 hebben een dag extra, dus 366 dagen.)

- d Onderzoek welke de eerste drie dagen van januari 2001 zijn die voor het rijexamen in aanmerking komen.

Examen wiskunde B1 havo 2000I

57

De grafiek van de functie  $f$  hieronder is een sinusoïde.



- a Geef een formule voor  $f(x)$ .
- b Bereken op algebraïsche wijze in twee decimalen voor welke  $x$  tussen  $-\pi$  en  $\pi$  geldt:  $f(x) = 1,5$ .
- c Voor welke  $x$  tussen 100 en 105 is  $f(x)$  maximaal? Geef je antwoord in twee decimalen.

De grafiek van  $g$  ontstaat uit die van  $f$  door in de  $x$ -as te spiegelen.

- d Geef een formule voor  $g(x)$ .

De grafiek van  $h$  ontstaat uit die van  $f$  door in de lijn  $y = -\frac{1}{2}$  te spiegelen.

- e Geef een formule voor  $h(x)$ .

## 14.7 Eindpunt

### Periodieke functie

Gegeven is een functie  $y = f(x)$ .

De functie is **periodiek** met periode  $p$  als:

- bij twee  $x$ -waarden die  $p$  verschillen precies dezelfde  $y$ -waarden horen,
- er geen kleiner positief getal dan  $p$  is met deze eigenschap.

Als  $f$  een periodieke functie is met periode  $p$ , dan geldt voor elk getal  $x$ :

$$\dots = f(x - p) = f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = f(x + 3p) = \dots$$

Als je een formule kent om  $f(x)$  te berekenen voor waarden van  $x$  in een zeker interval van lengte  $p$ , dan kun je  $f(x)$  berekenen voor  $\dots$  waarde van  $x$ .

### Standaard cirkelbeweging

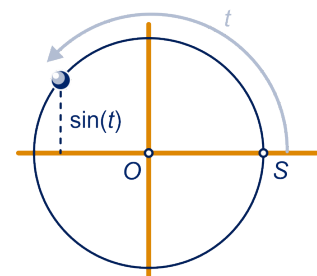
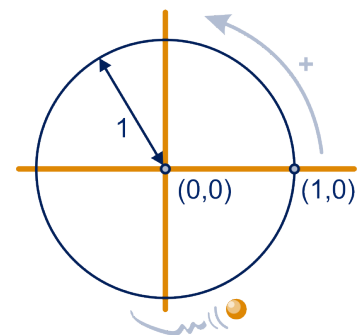
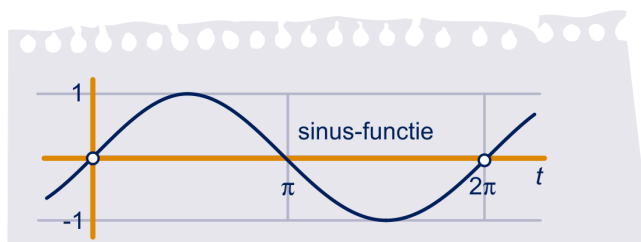
De **standaard cirkelbeweging** ontstaat als een kogeltje als volgt in een cirkelvormige baan draait:

- de straal van de baan is 1 cm;
- het middelpunt is  $(0,0)$ ;
- het kogeltje draait in positieve richting (de 'tegenklokrichting', ofwel linksom);
- de snelheid is 1 cm/s: het kogeltje legt elke seconde een afstand van 1 cm af langs de cirkel;
- op tijdstip 0 is het kogeltje in  $(1,0)$ .

De bijbehorende baan is de **eenheidscirkel**.

De tweede coördinaat van de plaats waar het kogeltje is op tijdstip  $t$  noemen we  $\sin(t)$ .

De grafiek van de sinusfunctie staat hieronder.



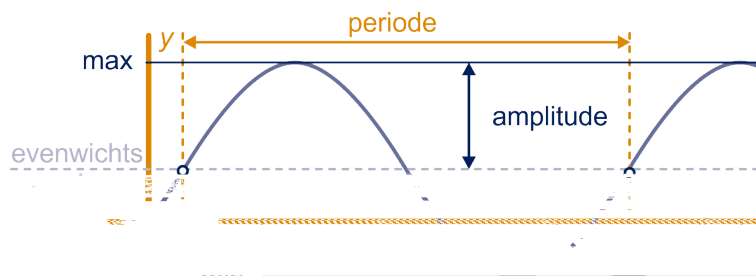
## Schuiven en rekken

Gegeven een functie  $f$ .

- Neem aan:  $g(x) = f(ax)$  met  $a \neq 0$ .  
De grafiek van  $g$  krijg je dan door de grafiek van  $f$  **horizontaal** met  $\frac{1}{a}$  te **vermenigvuldigen**.
- Neem aan:  $g(x) = a \cdot f(x)$ .  
De grafiek van  $g$  krijg je dan door de grafiek van  $f$  **verticaal** met  $a$  te **vermenigvuldigen**.
- Neem aan:  $g(x) = f(x + a)$  met  $a > 0$ .  
Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **links te schuiven**.  
Neem aan:  $g(x) = f(x - a)$  met  $a > 0$ .  
Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **rechts te schuiven**.
- Neem aan:  $g(x) = f(x) + a$  met  $a > 0$ . Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **boven te schuiven**.  
Neem aan:  $g(x) = f(x) - a$  met  $a > 0$ . Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **beneden te schuiven**.

## Sinusoïden

De grafiek van een functie die door (herhaald) schuiven en/of rekken uit de grafiek van de sinus-functie  $y = \sin(x)$  ontstaat noemen we een **sinusoïde**.



De gemiddelde hoogte van de golf noemen we de **evenwichtswaarde**, het verschil tussen de maximale en gemiddelde hoogte noemen we de **amplitude**.

De golf met evenwichtswaarde  $a$ , amplitude  $b$ , periode  $p$  die bij waarde  $c$  stijgend door de evenwichtslijn gaat, heeft formule:  $y = a + b \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p}(x - c)\right)$ .

Merk op: de sinusfunctie heeft **amplitude 1**, **evenwichtswaarde 0** en **periode  $2\pi$** .

Bij  $x = 0$

## 14.7 Eindpunt

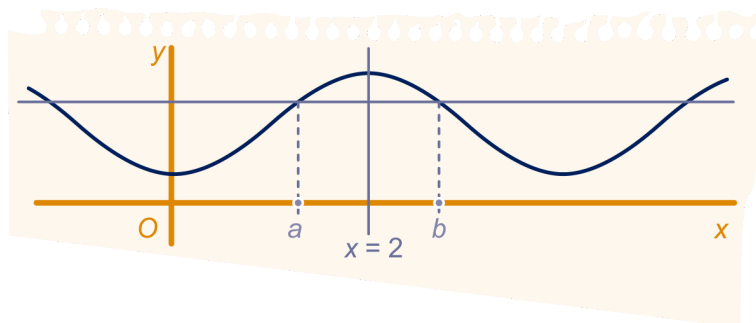
### Vergelijkingen

#### Voorbeeld 1

$f$  is de functie met  $f(x) = 0,8 + 0,5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x-1)\right)$ .

We bepalen langs algebraïsche weg de waarden van  $x$  met  $f(x) = 1$ .

Hieronder staat een schets van de grafiek van  $f$ .



De periode  $p$  van de functie is 4 en bij  $x = 1$  gaat de grafiek stijgend door het de evenwichtslijn. Dus de grafiek heeft de lijn  $x = 1 + \frac{1}{4}p = 2$  als symmetrie-as.

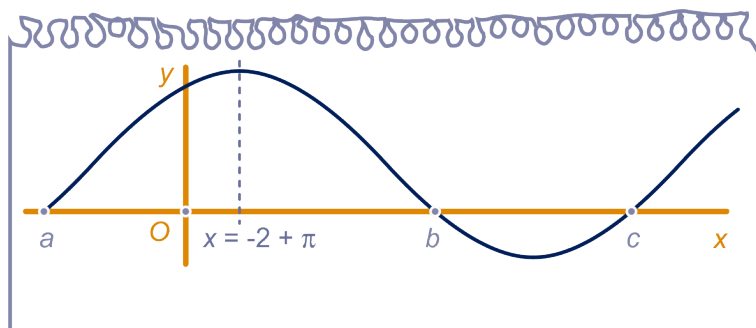
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x-1)\right) = 0,4$ . Met de GR kun je één oplossing  $x$  vinden:

$\frac{1}{2}\pi(x-1) = \sin^{-1}(0,4) = 0,411\dots$ , dus  $x = 1,261\dots$ . Dit is het getal  $a$  in de schets.

Er geldt:  $\frac{1}{2}(a+b) = 2$ , dus  $b = 4 - 1,261\dots = 2,738\dots$

In twee decimalen zijn de oplossingen:  $x = 1,26 + k \cdot 4$  en  $x = 2,74 + k \cdot 4$ , voor alle gehele waarden van  $k$ .

#### Voorbeeld 2



Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = 1 + 2 \sin(0,5x + 1)$ .

Er geldt:  $\sin(0,5x + 1) = \sin(0,5(x + 2))$  -

## 14.7 Eindpunt

We berekenen langs algebraïsche weg de nulpunten  $a$ ,  $b$  en  $c$  van de functie  $f$ , zie figuur op de volgende bladzijde.

Er geldt:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x + 1) = -0,5$ .

Met de GR vind je één oplossing:  $2x + 1 = \sin^{-1}(-0,5) = -0,523\dots$ , dus  $x = -3,047\dots$ . Dat is het nulpunt  $a$  in de schets.

Er geldt:  $\frac{1}{2}(a + b) = \pi - 2$ , dus  $b = 2\pi - 4 - a = 5,330\dots$  en  $c = a + 4\pi = 9,519\dots$

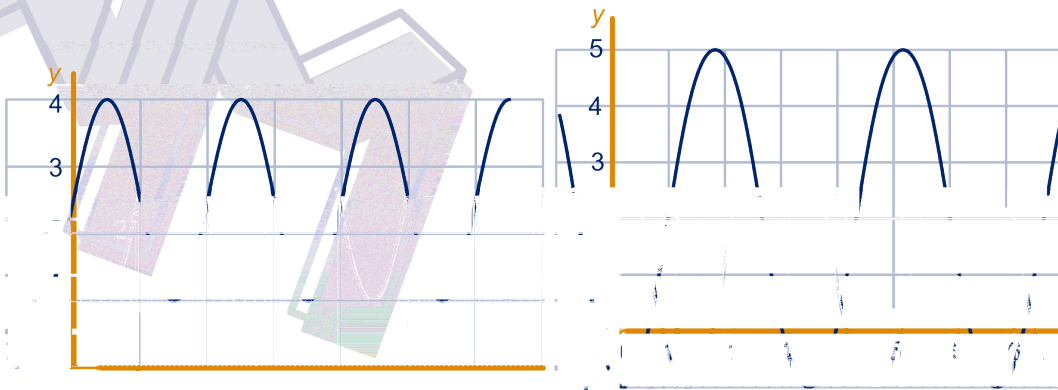


## 14.8 Extra opgaven

1



Hieronder staan de grafieken van twee sinusoiden.



Geef bij beide grafieken een formule in de vorm  $y = a + b \sin(c(x - d))$ . Licht je formule toe.

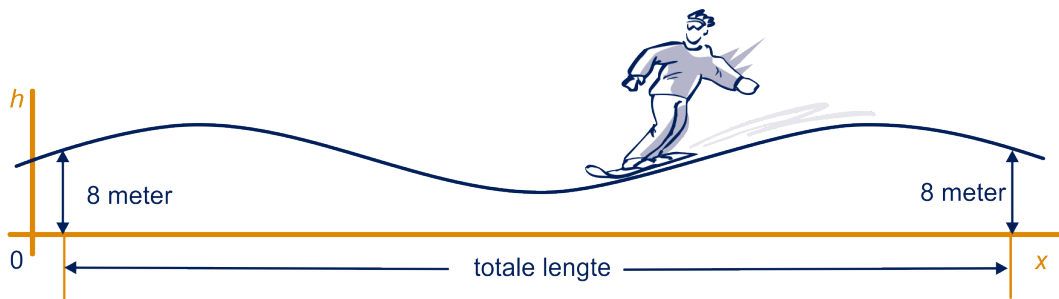
2



Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In de figuur hieronder is een schematisch vooraanzicht getekend. In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule  $h = 3 \sin(0,1 \cdot x) + 7$ .



De hoogte  $h$  en de lengte  $x$  zijn allebei in meter. De lengte  $h$  wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt 0 dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt. Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog.



- Bereken de minimale en de maximale hoogte van het dak.
- Bereken de totale lengte van het gebouw in gehele meters nauwkeurig.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018 gedeeltelijk

## 14.8 Extra opgaven

3



Gegeven is de functie  $y = 0,4 \sin\left(\frac{1}{3}\pi(x+1)\right) + 0,8$

- a Wat is de maximale en de minimale waarde van  $y$ ?
- b Bereken exact voor welke waarden van  $x$  tussen  $-20$  en  $20$   $y$  minimaal is.

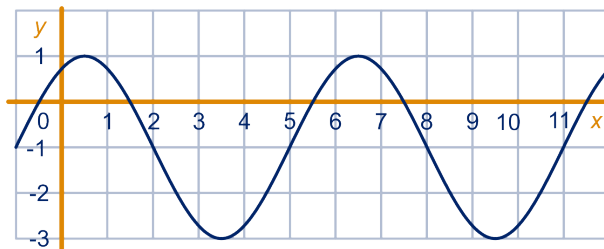
Als  $x = 11\frac{1}{2}$ , dan  $y = 1$  exact. Als  $x$  dan toeneemt, wordt  $y$  eerste groter en dan weer kleiner.

- c Wanneer voor het eerst is  $y$  weer 1?

4



Hieronder staat de grafiek van een sinusoïde.



- a Geef (met toelichting) een formule bij de grafiek.

Deze sinusoïde wordt eerst met 2 eenheden naar boven geschoven en daarna vermenigvuldigd met een factor 2 ten opzichte van de  $x$ -as.

- b Teken de nieuwe grafiek in het rooster op het werkblad.
- c Geef een formule voor de nieuwe sinusoïde.
- d Geef ook een formule voor de grafiek die je krijgt door de volgorde om te draaien, dus eerst ten opzichte van de  $x$ -as te vermenigvuldigen en daarna omhoog te schuiven.

5

### Bezinning

Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezinning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkenloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw van andere gebouwen staan. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. In de tabel hieronder is af te lezen hoeveel dagen elke kalendermaand telt.

maand	aantal dagen	maand	aantal dagen	maand	aantal dagen
januari	31	mei	31	september	30
februari	28	juni	30	oktober	31
maart	31	juli	31	november	30
april	30	augustus	31	december	31

## 14.8 Extra opgaven

Er geldt:  $B = 12,3 + 4,6 \cdot \sin(0,0172(n - 80))$ , waarbij  $B$  het aantal uren zonneshijn bij een altijd wolkenloze hemel is en  $n$  nummer van de dag. Hierbij komt  $n = 1$  overeen met 1 januari.

Op 30 januari komt de zon op om 8:27u.

- Bereken met behulp van de formule het tijdstip waarop de zon op 30 januari onder gaat in minuten nauwkeurig.
- Toon door berekening aan dat 13 april de eerste dag van het jaar is dat de zon langer dan 14 uur schijnt.

Er is een groot verschil tussen het maximale en het minimale dagelijkse aantal uren zonneshijn.

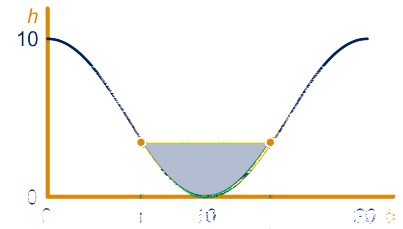
- Bereken aan de hand van de formule voor  $B$  dit verschil in minuten nauwkeurig.

Naar: Bijlage bij de syllabus wiskunde A VWO 2018

6

Hiernaast is de dwarsdoorsnede van een sinusvormige goot getekend. Voor de afmetingen (in cm), zie figuur. De randen op hoogte 10 hebben een horizontale raaklijn.

- Geef een formule voor de hoogte  $h$  als functie van de breedte  $b$ .



De waterspiegel is 8 cm breed.

- Bereken langs algebraïsche weg hoe hoog het water staat in mm nauwkeurig.

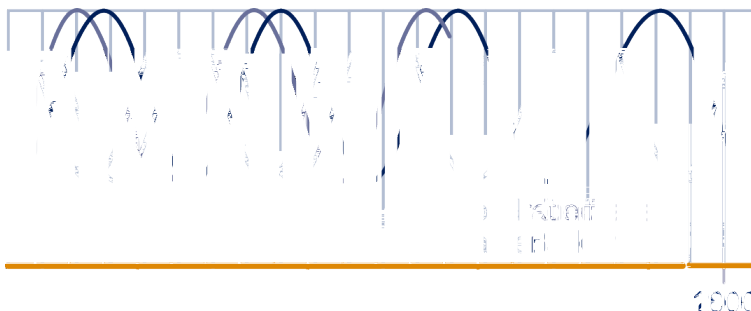
7



### Economische cycli

#### Golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker

In de economie komen vaak golfbewegingen voor: het gaat afwisselend beter en slechter met de economie. Economen proberen deze golfbewegingen te analyseren, onder andere om een volgende economische crisis te kunnen voorspellen. In november 2010 stond hierover een artikel in dagblad Trouw. In de figuur hieronder en op het werkblad, gebaseerd op dit artikel, zijn twee verschillende golfbewegingen te zien.



Nikolai Kondratieff  
1892 - 1938

## 14.8 Extra opgaven

De Russische econoom Kondratieff presenteerde rond 1920 de theorie dat er in de (kapitalistische) wereldeconomie golven of cycli voorkomen met een periode tussen de 50 en 60 jaar: na grote technische vernieuwingen leeft de economie steeds op, om een aantal jaren later weer in een crisis of slechte tijd te belanden.

In de figuur is onder andere de golfbeweging volgens Kondratieff getekend tot 1920. Als je deze golfbeweging met dezelfde vaste periode ook na 1920 voortzet, wordt de crisis van 2009 hiermee niet goed voorspeld.

- a** Laat met een redenering gebaseerd op de figuur zien dat 2009 volgens Kondratieff niet in een periode van economische neergang zit.

De Amerikaanse beursanalist Barker gaat uit van een iets andere golfbeweging. Ook de golfbeweging volgens Barker is in de figuur hierboven getekend. Vanaf het dieptepunt in 1949 heeft de golfbeweging volgens Barker een periode die constant is.

In de figuur is te zien dat de golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker steeds meer van elkaar gaan verschillen. In bepaalde perioden laten de beide grafieken zelfs een tegengestelde beweging van de economie zien: de grafiek volgens Barker stijgt, terwijl die van Kondratieff daalt of andersom.

- b** Onderzoek met behulp van de figuur op het werkblad in welke perioden tussen 1950 en 2050 de grafieken van Kondratieff en Barker een tegengestelde beweging van de economie laten zien.

De golfbeweging volgens Barker kan vanaf het dieptepunt in 1949 benaderd worden met de formule:

$$B = \sin\left(\frac{2\pi}{63}(t - 1965)\right) \text{ met } t \text{ het jaartal.}$$

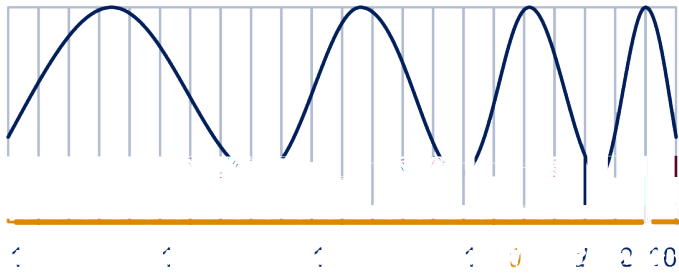
Omdat we hier alleen het stijgen en dalen van de golfbeweging bekijken, doet het er niet toe welke evenwichtsstand en welke amplitude we kiezen. In deze formule is gekozen voor evenwichtsstand 0 en amplitude 1.

Voor de golfbeweging volgens Kondratieff kan een soortgelijke formule opgesteld worden.

- c** Stel een formule voor de golfbeweging volgens Kondratieff op.

## 14.8 Extra opgaven

### Golfbeweging volgens Smihula



In de figuur hierboven is een derde grafiek getekend: de Slowaakse onderzoeker Smihula ging ook uit van golfbewegingen in de economie, maar volgens hem wordt de periode van deze golven steeds korter. Volgens Smihula begint en eindigt een golf bij een dieptepunt. In de figuur hieronder zie je de golf volgens Smihula tussen 1940 en 1985. De periode van deze golf is verdeeld in vier gelijke delen: deze delen worden respectievelijk lente, zomer, herfst en winter genoemd.



De volgende golf volgens Smihula loopt van 1985 tot 2015. De periode van deze golf is tweederde van de periode van de vorige golf. Neem aan dat dit zich na 2015 zo voortzet, dus dat elke nieuwe golf een periode heeft die tweederde is van de vorige.

- d Bereken in welk “seizoen” (lente, zomer, herfst, winter) het jaar 2040 volgens Smihula zal vallen.

Als elke nieuwe golf een periode heeft die tweederde is van de vorige, worden de perioden op den duur erg kort. Het is de vraag of dit realistisch is.

- e Bereken in welk jaar er volgens deze regelmaat voor het eerst een periode begint die korter is dan één jaar.

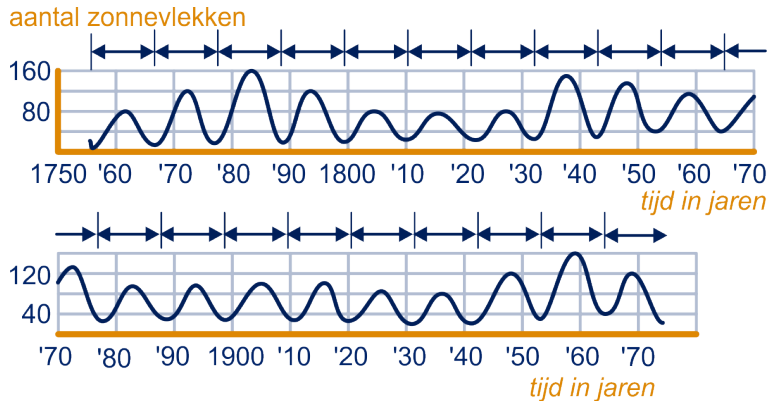
Bijlage bij de syllabus wiskunde A VWO 2018

## 14.8 Extra opgaven

8



Op de zon komen plaatsen voor met een lagere temperatuur dan de omgeving: de zogenaamde zonnevlekken. Het aantal zonnevlekken is niet altijd hetzelfde. Sinds ongeveer 1700 wordt het aantal zonnevlekken met grote regelmaat geteld. De globale grafiek van het aantal zonnevlekken ziet er als volgt uit:

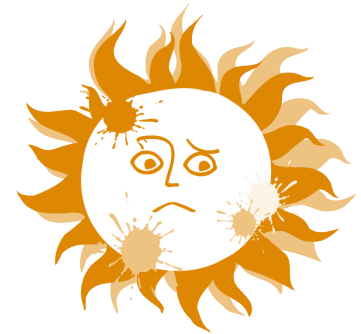


De geleerden zijn het erover eens dat in het voorkomen van zonnevlekken een periodiek verschijnsel is waar te nemen. De hier getekende grafiek vertoont 20 perioden.

- Hoe kun je uit deze grafiek afleiden dat de gemiddelde periode 11 jaar is?
- In welk jaar na 2016 verwacht je voor het eerst weer dat het aantal zonnevlekken een maximum bereikt?

Sommige onderzoekers wijzen ook op het feit dat de cyclussen 1, 2, 3 en 4 grote overeenkomst vertonen met 17, 18, 19 en 20. Men vindt hierin een aanwijzing voor een tweede periode.

- Hoeveel jaar duurt deze tweede periode?
- Hoe groot verwacht je dat het maximum aantal  
z a tafiek t



## 14.8 Extra opgaven

Een ander punt  $Q$  op de omtrek van het rad is op tijdstip  $t = 3$  op het hoogste punt. De hoogte van  $Q$  op tijdstip  $t$  is  $k(t)$ .

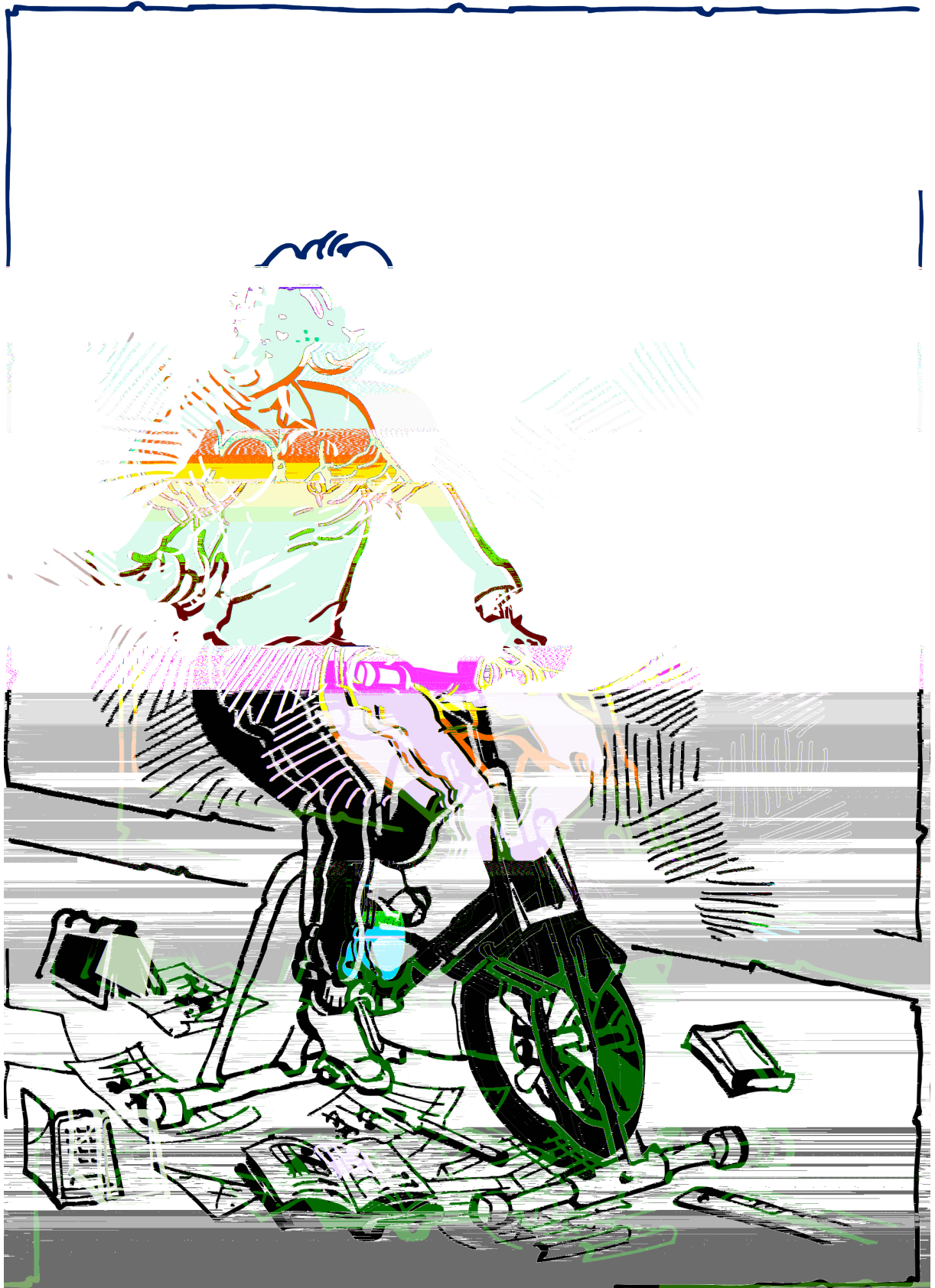
- b** Geef een formule voor  $k(t)$ .
- c** Geef langs algebraïsche weg de eerste vijf tijdstippen na 0 waarop  $P$  en  $Q$  op dezelfde hoogte zijn.



Hint 1.







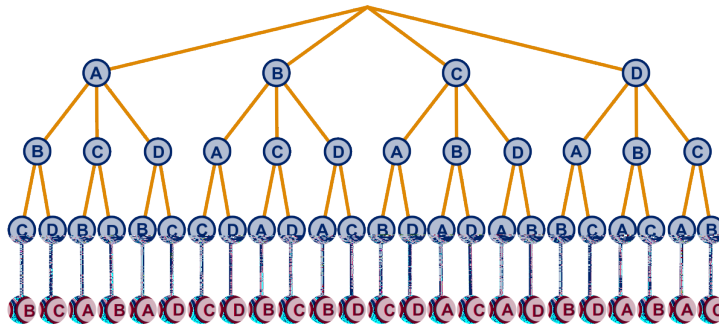
## 15.1 Combinatoriek

In hoofdstuk 3 in Vwo4 **Combinatoriek** heb je geleerd mogelijkheden te tellen. Hieronder volgen enkele 'telmethoden'. Bij veel telproblemen moet je verschillende telmethoden combineren om tot een oplossing te komen.

### Geordende greep zonder herhaling

Aan een wedstrijd doen vier deelnemers mee (zeg: A, B, C en D). De deelnemers kunnen in verschillende volgorde de finish passeren. Eén mogelijke einduitslag is BCAD. Zo'n rijtje-van-vier waarbij de volgorde van belang is, noem je een **permutatie** (ook wel **geordende greep zonder herhaling** genoemd). Het aantal mogelijke einduitslagen (permutaties) kun je op verschillende manieren vinden.

- Door de mogelijkheden **systematisch uit te schrijven**.
- Door een **boomdiagram** te tekenen.



Vier deelnemers (maar ook: letters, cijfers, kleuren, ...) kun je op  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  manieren in volgorde zetten.

Voor het product  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  bestaat een afkorting:  $4!$ .

Dit spreek je uit als 4 **faculteit**.

Er geldt:  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

$4!$  kun je ook met de optie  $x!$  op je rekenmachine berekenen.

We bekijken ook nog een wedstrijd waar 7 deelnemers aan meedoen (zeg: A, B, C, D, E, F en G). Het aantal mogelijke erepodia (zoals BCA, ACB, FAD en FGE) is:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!} = 210.$$

Anders gezegd: Het aantal **permutaties van 3 uit 7** (of **geordende grepen van 3 uit 7 zonder herhaling**) is  $7 \cdot 6 \cdot 5$ .

Het aantal permutaties van 3 uit 7 kun je berekenen met de optie  $nPr$  op je rekenmachine.

## 15.1 Combinatoriek

### Geordende greep met herhaling

Een meerkeuzetoets bestaat uit 5 vragen. Bij iedere vraag staan drie antwoorden, waarvan er één moet worden aangekruist. Er is altijd maar één antwoord goed. We vragen ons af op hoeveel manieren je de toets kunt maken.

Dit telprobleem kun je oplossen door een **wegendiagram** te tekenen.



Het aantal mogelijkheden (of **geordende grepen met herhaling**) is  $3^5 = 243$ .

### Ongeordende greep zonder herhaling

We bekijken drie telproblemen:

- alle rijtjes van lengte 7 met 3 enen en 4 nullen;
- alle kortste routes van (0,0) naar (4,3);
- alle selecties (of combinaties) van 3 dingen uit 7 verschillende dingen. (Bij een combinatie letten we niet op de volgorde.)

Hiernaast zie je van elk van de drie telproblemen een mogelijke uitkomst.

Er zijn evenveel rijtjes als routes als selecties. Immers, je kunt bij alle drie de telproblemen een rijtje maken, bijvoorbeeld:

- 0100011
- RBRRBB
- - B - - - F G

Deze rijtjes komen op hetzelfde neer.

Het aantal routes van (0,0) naar (4,3) noteren we met het **combinatiegetal**  $\binom{7}{3}$ .

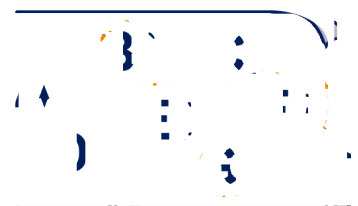
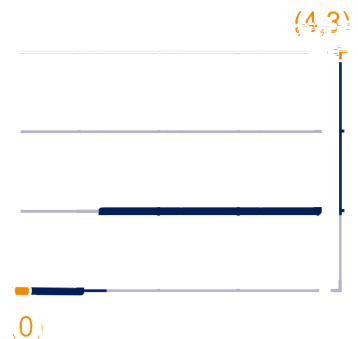
Dus  $\binom{7}{3} = \dots$

... het aantal 0-1-rijtjes van lengte 7 met 3 enen,

... het aantal routes van lengte 7 met 3 stappen naar boven,

... het aantal **combinaties** van 3 elementen uit 7.

0	1	0	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---



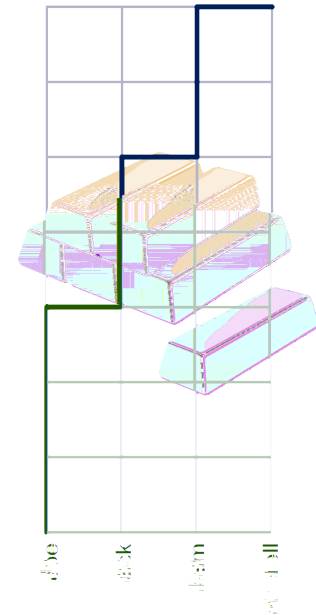
# 15.1 Combinatoriek

Onderstaande 'telmethode' kun je overslaan.

## Ongeordende greep met herhaling

Joe, Jack, William en Averell hebben tijdens een overval zeven goudstaven buit gemaakt. We vragen ons af - net als Lucky Luke - op hoeveel manieren de Daltons de goudstaven onderling kunnen verdelen.

Bij dit telprobleem is alleen het aantal goudstaven per Dalton van belang (en dus de volgorde). Omdat elke Dalton meerdere goudstaven kan bezitten is er sprake van herhaling. Elke mogelijke verdeling kunnen we weergeven als route in nevenstaand rooster. De gekleurde route hoort bij de verdeling: Joe drie goudstaven, Jack en William twee, en Averell nul. Het aantal mogelijkheden (het aantal **herhalingscombinaties**) is  $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$ .



1

In de Verenigde Staten kun je op veel plaatsen het kansspel Keno spelen. De spelregels en de te winnen prijzen zijn niet overal precies hetzelfde. We kijken in deze opgave naar één bepaalde vorm waarin het spel gespeeld kan worden.

Op het lot staan de getallen 1 tot en met 80. Om mee te spelen moet je 10 van deze 80 getallen aankruisen. Dat kan op verschillende manieren. Hiernaast zie je een voorbeeld.

- a Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn om 10 verschillende getallen op het lot te kiezen.

Bij de trekking worden door een trekkingsmachine willekeurig 22 getallen gekozen uit de getallen 1 tot en met 80. Nu gaat het erom, hoeveel van de 10 aangekruiste getallen goed zijn. Dat wil zeggen, hoeveel er bij de 22 getallen uit de trekkingsmachine zitten. Dit aantal bepaalt de prijs die je wint. Bij de variant die wij bekijken, win je bij 0 goed een prijs en bij 2 of 3 goed niet. Blijkbaar zijn er meer mogelijkheden om 2 getallen goed te hebben, dan 0.

- b Bereken beide aantallen mogelijkheden.

Naar CSE wiskunde A 2002II oude stijl

### Select your own numbers

<del>1</del>	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	<del>13</del>	14	15	16	17	<del>18</del>	19	20
21	22	23	<del>24</del>	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

41	<del>42</del>	<del>43</del>	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	<del>54</del>	55	56	57	58	59	<del>60</del>
61	62	63	64	65	66	67	68	69	<del>70</del>
71	72	73	74	75	<del>76</del>	<del>77</del>	78	79	80

## 15.1 Combinatoriek

2

### Intelligentie bij ratten

Bij onderzoek naar intelligentie van ratten wordt soms gebruik gemaakt van een gangenstelsel, een zogenaamd T-labyrint.

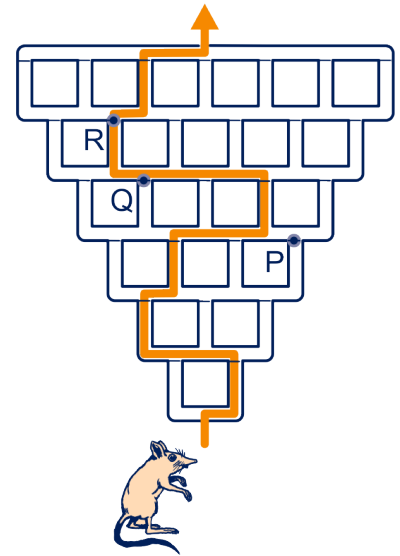
Hiernaast zie je een plattegrond van zo'n T-labyrint.

In elk van de verticaal getekende gangen zit een klapdeurtje, dat slechts in één richting kan worden gepasseerd. Dat verhindert dat een rat terug naar 'beneden' kan lopen. Een rat kan langs een groot aantal 'routes' van ingang naar uitgang lopen. Hiernaast is een voorbeeld van een route getekend. Twee routes van ingang naar uitgang worden als gelijk beschouwd als dezelfde serie klapdeurtjes wordt gepasseerd.

- a Hoeveel verschillende routes zijn er van ingang naar uitgang?

Bij P, Q en R worden de deurtjes vergrendeld waardoor drie doodlopende gangen ontstaan. Loopt de rat een doodlopende gang in, dan wordt dat als een fout geregistreerd. Neem aan dat de rat op willekeurige wijze zijn weg door het T-labyrint kiest en nooit tweemaal dezelfde doodlopende gang ingaat.

- b Toon aan dat het aantal routes zonder fouten precies de helft van het aantal routes uit vraag a is.



3

Jaap heeft een bedrag van 20 eurocent in zijn portemonnee. Op hoeveel manieren kan dat bedrag zijn samengesteld?

4

We vormen rijtjes van lengte 10 met de cijfers 0, 1 en 2.

- a Hoeveel rijtjes kun je maken waarin de 0 niet voorkomt?  
b Hoeveel rijtjes kun je maken waarin de 1 minstens één keer voorkomt?  
c Hoeveel rijtjes kun je maken waarin de 2 precies drie keer voorkomt.  
d Hoeveel rijtjes kun je maken met twee keer 0, drie keer 1 en de rest 2?

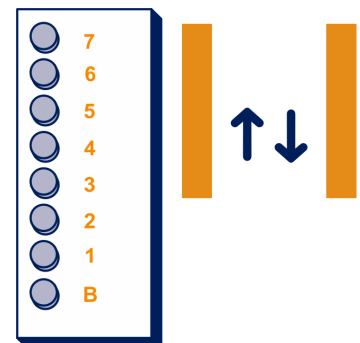
5

### De lift

In een flat met zeven verdiepingen stappen op de begane grond (B) drie mensen *P*, *Q* en *R* in de lift. Onafhankelijk van elkaar drukken ze één van de knopjes 1, 2, 3, 4, 5, 6 of 7 in.

Als *P*, *Q* en *R* achtereenvolgens de knopjes 1, 2 en 1 indrukken is dat anders dan wanneer ze 1, 1 en 2 indrukken.

- a Hoeveel mogelijkheden zijn er?  
b Op hoeveel manieren daarvan komen ze op dezelfde verdieping?  
c Op hoeveel manieren daarvan komen ze alledrie op verschillende verdiepingen?



## 15.1 Combinatoriek

- d Op hoeveel manieren daarvan stopt de lift niet bij de eerste drie verdiepingen?
- e Op hoeveel manieren daarvan stopt de lift op de zevende verdieping?

6

Op een eiland staan acht huizen  $A$  tot en met  $H$ . Op een ander eiland staan zeven huizen 1 tot en met 7. Elk huis op de twee eilanden wordt met elk ander huis verbonden. In de figuur zijn drie voorbeelden getekend.

- a Hoeveel verbindingen zijn mogelijk?
- b Hoeveel van die verbindingen verbinden huizen van het ene eiland met elkaar? En hoeveel verbinden huizen van het andere eiland met elkaar?

Je kunt op twee manieren het aantal verbindingen van huizen op het ene eiland met huizen op het andere eiland berekenen.

- c Doe dat.



7



$m$  en  $n$  zijn positieve gehele getallen.

Er geldt:  $\binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn = \binom{m+n}{2}$ .

Dit heb je in een speciaal geval in opgave 6 gezien.

- a Toon de gelijkheid aan zoals in de voorgaande opgave.

$\binom{n}{2}$  is van de vorm:  $an^2 + bn$ , voor zekere getallen  $a$  en  $b$ .

- b Laat dat zien en bepaal de getallen  $a$  en  $b$ .

 Hint 1.

- c Toon met algebra aan:  $\binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn = \binom{m+n}{2}$ .



8

In de studiezaal zijn de plaatsen genummerd 1 tot en met 50. 25 leerlingen nemen plaats in de zaal. We letten alleen op de bezetting van de stoelen.

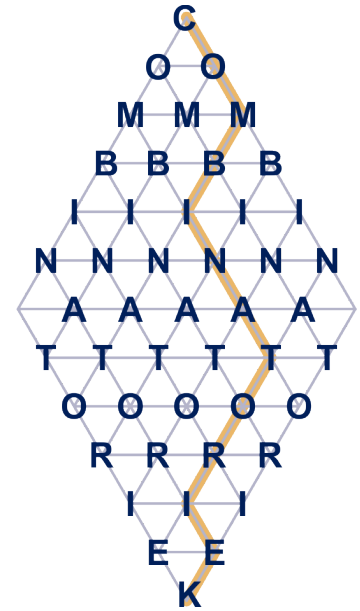
- a Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij de plaatsen met nummers lager dan 10 onbezet blijven?
- b Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij de nummers 1, 2 en 3 wel bezet worden en de nummers 4, 5, 6 en 7 niet?
- c Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij de nummers 1, 2 en 3 wel bezet worden en één van de nummers 4, 5, 6 en 7 niet?

## 15.1 Combinatoriek

9

In de figuur kun je op veel manieren COMBINATORIEK lezen.  
Een van de manieren is in de figuur aangegeven. Van boven  
naar beneden gaand mag je alleen naar de letter er direct links  
of rechts onder.

Hoeveel manieren zijn er? Schrijf je berekening op.



## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

We herhalen de regels voor het rekenen met met exponenten en logaritmen.

### Afspraak

Voor de positieve getallen gehele  $a$ ,  $m$  en  $n$ , waarbij  $m$  en  $n$  geheel zijn spreken we af:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ en } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m.$$

Dan geldt het volgende.

### Regels voor het rekenen met machten

1.  $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2.  $a^p : a^q = a^{p-q}$
3.  $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
4.  $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$  en  $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
5.  $g^{\log(x)} = x$  en  $g^{\log(g^x)} = x$

Deze regels gelden voor alle positieve getallen  $a$ ,  $b$ , en willekeurige getallen  $p$  en  $q$ .

Verder:  $x > 0$  en  $g > 0$ ,  $g \neq 1$ .

### Regels voor het rekenen met logaritmen

1.  $g \log(x) + g \log(y) = g \log(x \cdot y)$
2.  $g \log(x) - g \log(y) = g \log\left(\frac{x}{y}\right)$
3.  $r \cdot g \log(x) = g \log(x^r)$
4.  $g \log(x) = \frac{a \log(x)}{a \log(g)}$  (overstappen op een ander grondtal namelijk van  $g$  op  $a$ )

De regels gelden voor alle positieve getallen  $x$ ,  $y$ ,  $a$ ,  $g$  en willekeurige getallen  $r$ , waarbij  $a$  en  $g$  niet 1 mogen zijn.

### Opmerking

Uit regel 3 voor het rekenen met machten volgt:

$$\text{als } x^{\frac{2}{3}} = 5 \text{ dan } x = 5^{\frac{3}{2}}.$$

Uit regel 5 volgt:

$$\text{als } 2^x = 5, \text{ dan } x = {}^2 \log(5).$$

Op de GR zitten twee logaritme-knoppen: **ln** voor de en **log** voor de logaritme met grondtal 10.





## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

### Exponentiële functies en machtsfuncties

#### Exponentiële groei

Bij een verband van de vorm:  $y = a \cdot g^x$  met  $a$  en  $g$  positief spreken we van **exponentiële groei** met **groefactor**  $g$  en **beginhoeveelheid**  $a$ .

#### Voorbeeld

Een goedje groeit exponentieel. Om te beginnen is er 12 gram. Na 5 minuten is er 18 gram.

Een formule voor het verband tussen de hoeveelheid  $H$  van het goedje  $t$  minuten na begin vind je als volgt.

De groefactor per minuut noemen we  $g$ . De beginhoeveelheid  $a = 12$ . Dan is de groefactor in 5 minuten  $g^5$ , dus

$$g^5 = \frac{18}{12} = 1,5, \text{ dus } g = \sqrt[5]{1,5}.$$

Een formule is dus:  $H = 12 \cdot (\sqrt[5]{1,5})^t$ , dus  $H \approx 12 \cdot (1,084)^t$ .

De tijd die nodig is om de hoeveelheid tot 100 gram te laten groeien vind je als volgt.

Noem die tijd  $t$ . Dan  $(1,084\dots)^t = \frac{100}{12}$ , dus

$$t = \frac{\log(8,333\dots)}{\log(1,084\dots)} = 26,146\dots, \text{ in twee decimalen: } 26,15 \text{ minuten.}$$

#### Opmerking

Als een hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde percentage toeneemt, dan is de groei van de hoeveelheid exponentieel

#### Voorbeeld

Een beleggingsmaatschappij belooft een rendement van 5% per jaar.

Dan is de groefactor per jaar 1,05.

De groefactor in 10 jaar is  $(1,05)^{10} = 1,6288\dots$ , dus het rendement in 10 jaar is 62,9%.

#### Voorbeeld

De beschikbare hoeveelheid van een bepaalde delfstof neemt met 7% per jaar af.

Dan is de groefactor per jaar 0,93.

In 5 jaar is de groefactor  $0,93^5 = 0,695\dots$ , dus in 5 jaar neemt de beschikbare hoeveelheid met ongeveer 30% af.



## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

10

Een goedje groeit exponentieel. Na 2 weken is de hoeveelheid verdubbeld.

- Bereken in twee decimalen met hoeveel procent de hoeveelheid per dag groeit.
- Bereken in drie decimalen in hoeveel weken de hoeveelheid 20 keer zo groot wordt.
- Bereken nu zonder GR met het antwoord op b in drie decimalen in hoeveel weken de hoeveelheid 10 keer zo groot wordt.  
En ook 400 keer zo groot in twee decimalen.



11

Een band loopt leeg. De luchtdruk in de band neemt met 5% per week af. Op tijdstip 0 is de druk 3 bar.

Na  $t$  weken is de druk  $D$  bar.

- Geef een formule voor het verband tussen  $D$  en  $t$ .
- Met hoeveel procent vermindert de druk in de band per dag? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- Na hoeveel dagen is de druk nog 2 bar?

### Voorbeeld

#### Formules met logaritmen herschrijven

De formule  $\log(y) = \frac{1}{2}x + 2$  schrijf je als volgt zonder logaritme.

$$\log(y) = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow 10^{\log(y)} = 10^{\frac{1}{2}x + 2} \Leftrightarrow y = 10^2 \cdot 10^{\frac{1}{2}x}.$$

Eventueel kun je dit nog schrijven als  $y = 100 \cdot \sqrt{10^x}$ .

De formule  $\log(y) = 2 \cdot \log(x) - 1$  schrijf je als volgt zonder logaritmen.

$$\log(y) = 2 \cdot \log(x) - 1 \Leftrightarrow 10^y = 10^{2 \cdot \log(x) - 1}$$

$$\Leftrightarrow y = 10^{-1} \cdot (10^{\log(x)})^2 = \frac{1}{10} \cdot x^2.$$

12

Herschrijf volgende vier verbanden tussen  $x$  en  $y$ , met  $y$  positief, exact in de vorm:  $y = a \cdot b^x$ , dus  $y$  als exponentiële functie van  $x$ .

- |   |                                    |                                     |
|---|------------------------------------|-------------------------------------|
| a | $\log(y) = 2x + 1$                 | $\log(y) = -x + 1$                  |
|   | $\log(y) = \frac{1}{2}x + \log(4)$ | $\log(y) = -\frac{1}{2}x - \log(4)$ |

Herschrijf volgende vier verbanden tussen  $x$  en  $y$ , met  $x$  en  $y$  positief, exact in de vorm:  $y = a \cdot x^b$ , dus  $y$  als machtsfunctie van  $x$ .

- |   |   |  |
|---|---|--|
| b | $\log(y) = 2 \log(x) + 1$                 | $\log(y) = -\log(x) + 1$                   |
|   | $\log(y) = \frac{1}{2} \log(x) + \log(4)$ | $\log(y) = -\frac{1}{2} \log(x) - \log(4)$ |

## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

13

Het gewicht  $G$  (in kg) van een massieve bol is evenredig met de derde macht van de straal  $r$  (in dm). De evenredigheidsconstante  $c$  hangt af van het materiaal waarvan de bol gemaakt is.

Neem  $c = 5,4$ , dus  $G = 5,4 \cdot r^3$  met  $G$  in kg en  $r$  in dm.

a Bereken de straal van een bol van 10 kg in cm nauwkeurig.

Er geldt:  $r = a \cdot G^b$  voor zekere getallen  $a$  en  $b$ .

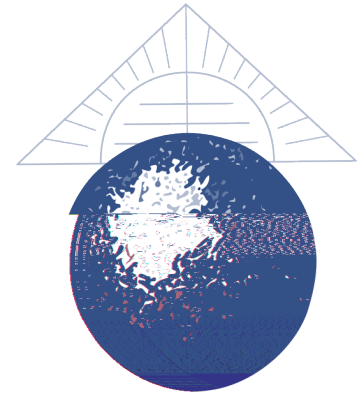
b Bereken  $b$  exact en  $a$  in twee decimalen.

Voor bollen van ander materiaal geldt:  $\log(G) = 3 \cdot \log(r) + 0,1$ .

c Bereken de straal van zo'n bol met gewicht van 11,0 kg in twee decimalen nauwkeurig.

d Herschrijf de formule  $\log(G) = 3 \cdot \log(r) + 0,1$  in de vorm  $G = c \cdot r^3$ , met  $c$  in twee decimalen nauwkeurig.

 Hint 2.



14

Gegeven is de formule  $\log(H) = 1,3 + 1,1 \cdot t$ .

a Bereken  $t$  in twee decimalen als  $H = 40,0$ .

b Bereken  $H$  in twee decimalen als  $t = 1,13$ .

c Laat zien dat:  $H = 10^{1,3} \cdot (10^{1,1})^t$ .

15

In [de afbeelding van 123RF](#), een uitgave van [de afbeelding van 123RF](#), wordt een formule gepresenteerd voor het verband tussen de borstomvang  $d$  in cm van primaten (mensen, apen en halfapen) en hun gewicht  $g$  in kg:  $d = 17,1 \cdot g^{\frac{3}{8}}$ .

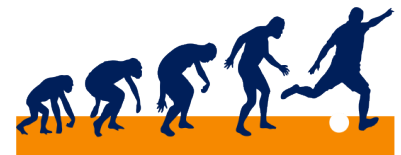
a Wat is volgens deze formule het gewicht van een primate met een borstomvang van 90 cm? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Herschrijf de formule tot een formule van de vorm:  $g = a \cdot d^b$  met  $a$  in vier decimalen en  $b$  exact.

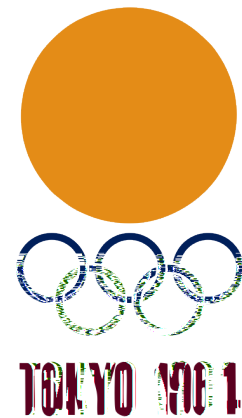
In [de afbeelding van 123RF](#) wordt afgeleid dat het verband tussen de gemiddelde snelheid  $v$  in km/u op een wedstrijd roeien over 2000 meter evenredig is met de 9-de machtswortel van het aantal roeiers  $r$  in de boot.

Tijdens de Olympische spelen van Tokio was de tijd die een boot met 8 roeiers nodig had voor zo'n wedstrijd gemiddeld 5,87 minuten.

c Geef een formule voor het verband tussen  $v$  en  $r$ . Geef de evenredigheidsconstante in twee decimalen.



Evolution of a Soccer Player, afbeelding van 123RF

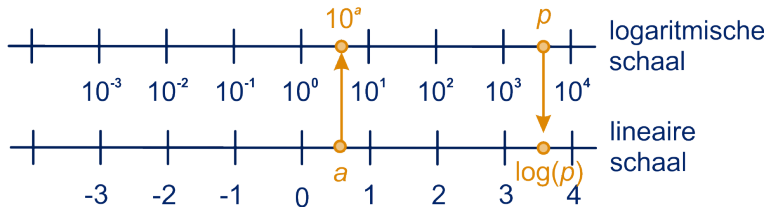


## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

### De logaritmische schaal

Op een lineaire schaal staan de opeenvolgende gehele getallen op gelijke afstand van elkaar.

Op een **logaritmische schaal** staan de opeenvolgende machten van 10 op gelijke afstand van elkaar.



Als je één eenheid naar rechts gaat op een lineaire schaal, wordt het getal één groter.

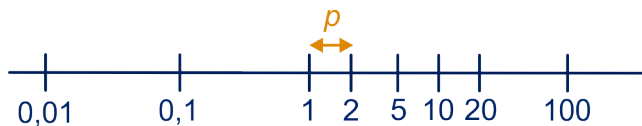
Als je één eenheid naar rechts gaat op een logaritmische schaal, wordt het getal 10 keer zo groot.

#### Voorbeeld

Het getal (160) staat op de logaritmische schaal  $\log 160 \approx 2,20$  eenheden rechts van  $10^0 = 1$ .

Als een getal op de logaritmische schaal 2,3 eenheden rechts van  $10^0 = 1$  staat, dan is dat getal  $10^{2,3} \approx 199,5$ .

Hieronder zijn enkele getallen afgebeeld op een logaritmische schaal.



De afstand van 2 tot 1 noemen we  $p$ , dus  $\log(2) = p$ . De afstand van 20 tot 10 is dan ook gelijk aan  $p$ .

Dat kun je met rekenregels voor logaritmen inzien:

$$\log(20) - \log(10) = \log\left(\frac{20}{10}\right) = \log(2) = p.$$

- a Laat zo ook zien dat de afstand van 5 tot 10 ook  $p$  is.
- b Druk de afstand van 25 tot 10 in  $p$  uit.
- c Toon aan dat getal dat midden tussen 0,01 en 4 ligt gelijk is aan 0,2.



16



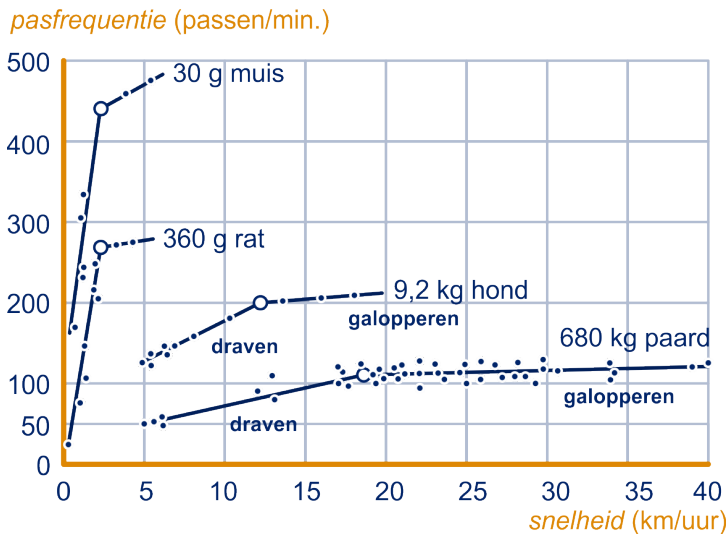
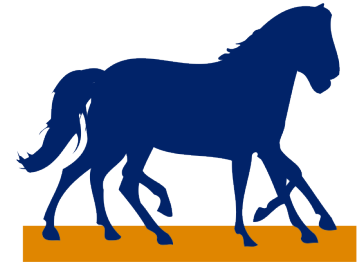
## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

17



### De laagste galopsnelheid

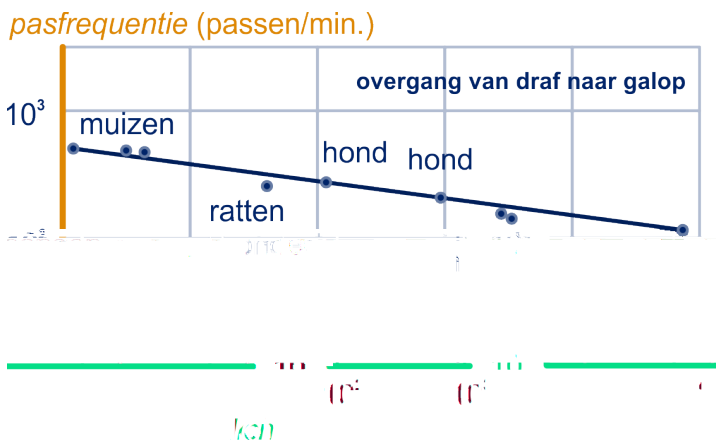
Vierpotige dieren schakelen bij hogere snelheid over van draf naar galop. De snelheid waarbij dit gebeurt, noemen we de laagste galopsnelheid. Die snelheid hangt af van de pasgrootte, pasfrequentie en het lichaamsgewicht van het dier. In de grafieken in deze opgave uit [opgave 15.1](#) is een en ander weergegeven. De grafieken staan ook op het werkblad.



figuur 1

Een van de punten in figuur 1 geeft een dravende hond weer met een snelheid van 7 km/u en een pasfrequentie (het aantal passen per minuut) van 150.

- a Wat is de pasgrootte van die hond in cm?



figuur 2

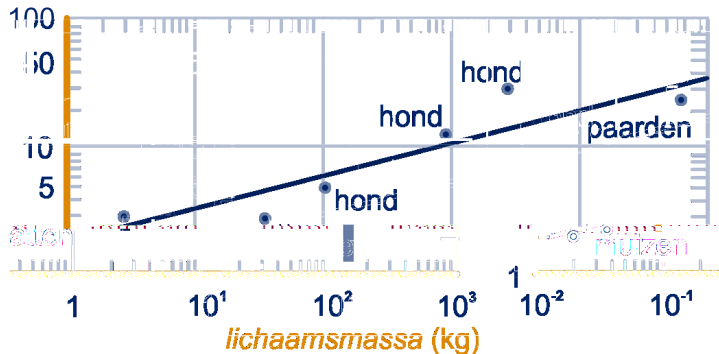
In figuur 2 staat de grafiek (een rechte lijn) van het verband tussen de pasfrequentie  $f$  (aantal passen per minuut) bij

## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

laagste galopsnelheid en de lichaamsmassa  $m$  in kg. Een formule voor het verband tussen  $f$  en  $m$  is van de vorm  $f = a \cdot m^b$ .

- b Bepaal  $a$  door de waarde van  $f$  af te lezen bij  $m = 1$ .  
Bepaal vervolgens het getal  $b$  door nog een ander punt van de grafiek te gebruiken.

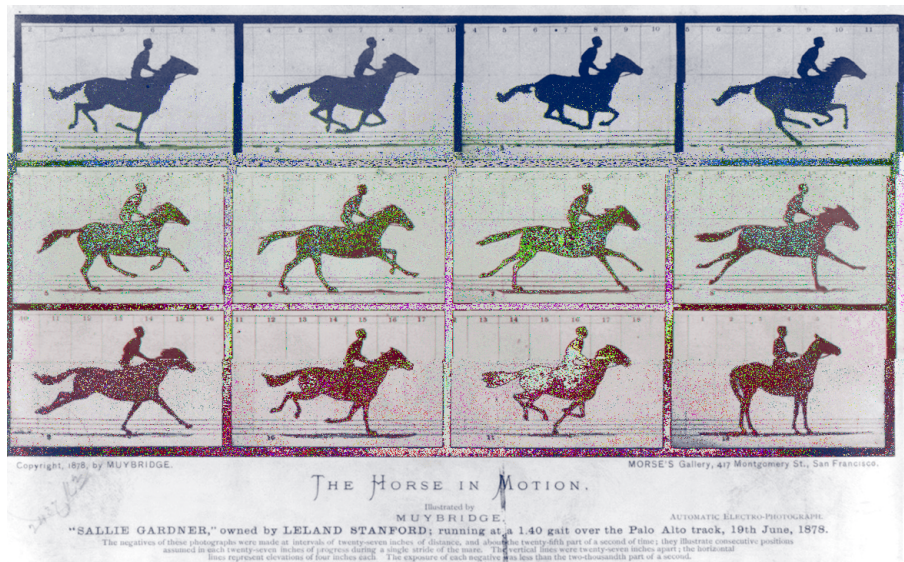
snelheid bij draf-galop-overgang (km/uur)



figuur 3

De lijn in figuur 3 geeft een gemiddelde van het verband tussen  $m$  en de laagste galopsnelheid  $v_G$  in km/u. Een formule voor deze lijn is  $v_G = 5,5m^{0,25}$ .

- c Herschrijf deze formule met behulp van je formule uit c tot een formule voor  $m$  als functie van  $v_G$ .



Onderzoek van Muybridge naar de beweging van paarden

Bron: Wikipedia

## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

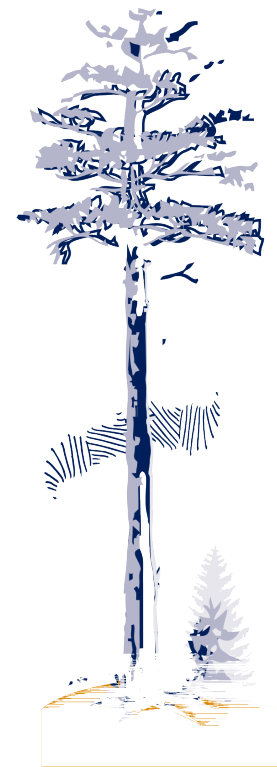
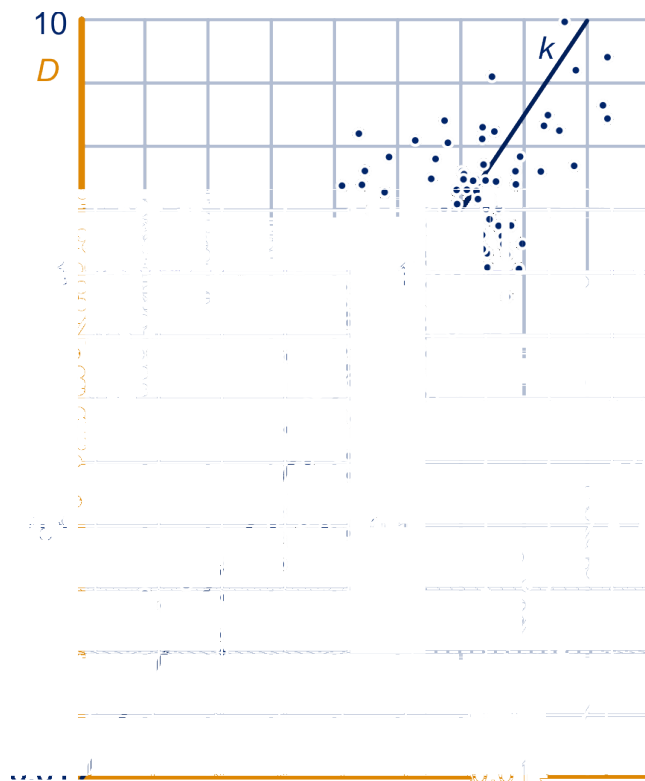
18



### Hoge bomen

In Amerika zijn 576 verschillende soorten bomen onderzocht. Van elke soort is het hoogste exemplaar opgespoord en daarvan is de diameter van de stam op 1 meter boven de grond gemeten. Onderzocht is of er een verband bestaat tussen deze diameter  $D$  (in meters) en de hoogte  $H$  (in meters) van deze bomen. Om van alle bomen de gegevens in één figuur duidelijk te kunnen weergeven is  $D$  uitgezet tegen  $H$ , beide op een logaritmische schaal. Het resultaat is de puntenwolk in de figuur hieronder. Hierin is een rechte lijn  $k$  getekend die goed bij deze puntenwolk past.

De figuur staat ook op het werkblad.



Eén van de exemplaren is in de figuur aangegeven met de letter  $P$ .

- a Hoe groot is de diameter op 1 meter boven de grond van deze boom? Geef je antwoord in meters op één decimaal nauwkeurig en licht je werkwijze toe.

Het verband tussen  $D$  en  $H$  voor bomen in de puntenwolk kan grofweg worden benaderd met een formule die past bij de lijn  $k$ .

## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

Een bijbehorende formule is:  $\log(D) = -2 + 1,5 \cdot \log(H)$ .

Een boom heeft op 1 meter hoogte een diameter van 2,5 meter.

- b** Bereken met behulp van de formule de hoogte van deze boom. Geef je antwoord in gehele meters nauwkeurig.
- c** Herschrijf bovenstaande formule langs algebraïsche weg in de vorm  $D = p \cdot H^q$  en geef de getallen  $p$  en  $q$  in twee decimalen.

Naar Examen HAVO wiskunde B 2000II

19

Een bepaalde diersoort op een verlaten eiland neemt af. Het aantal dieren  $t$  jaar na 2010 is:  $5000 \cdot 0,89^t$ .

- a** Met hoeveel procent per jaar neem het aantal per jaar af? En per 5 jaar (in twee decimalen)?
- b** In welk jaar is het oorspronkelijk aantal dieren gehalveerd?

Het eiland is  $60 \text{ km}^2$  groot. Het aantal  $\text{m}^2$  dat per dier beschikbaar is noemen we  $A$ .

- c** Hoe groot is  $A$  in 2010?

$A$  is een exponentiële functie, dus  $A = a \cdot g^t$  voor zekere waarden van  $a$  en  $g$ .

- d** Toon dat aan en bereken de getallen  $a$  en  $g$ ,  $g$  in drie decimalen.

### Vergelijkingen

Er zijn drie manieren om kwadratische vergelijkingen op te lossen, zie ook Hoofdstuk 10.

- Ontbinden
- Kwadraatafsplitsen
- De  $-$ formule, (wortelformule)

De  $-$ formule werkt als volgt.

Gegeven is de kwadratische vergelijking in  $x$ :  $ax^2 + bx + c = 0$  met  $a \neq 0$ .

De **discriminant**  $D$  van de vergelijking is  $D = b^2 - 4ac$ .

- Als  $D > 0$ , zijn er twee oplossingen:

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

- als  $D = 0$ , is er één oplossing:  $x = \frac{-b}{2a}$ ,
- Als  $D < 0$ , zijn er geen oplossingen.



## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen



### Voorbeeld

Gegeven zijn de volgende vergelijkingen in  $x$ .

1.  $2x^2 - x = 6$
2.  $2x^2 - x + 12 = 0$
3.  $11x - 3x^2 = 6$

Die kun je als volgt met de  $-$ formule oplossen.

1.  $2x^2 - x = 6 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$ .

Met de  $-$ formule:

$a = 2$ ,  $b = -1$  en  $c = -6$ , dus  $D = 49$ , dus de oplossingen

zijn:  $x = \frac{1 + \sqrt{49}}{4} = 2$  en  $x = \frac{1 - \sqrt{49}}{4} = -1$ .

2. Deze vergelijking heeft  $D = -95$ , dus er zijn geen oplossingen.

3.  $11x - 3x^2 = 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0$

$D = 49$ , dus de oplossingen zijn:  $x = \frac{11+7}{6} = 3$  of

$$x = \frac{11-7}{6} = \frac{2}{3}$$

20

Los de volgende vergelijkingen in  $x$  exact op.

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$2x^2 - 3x = 2$$

$$3x - \frac{1}{2}x^2 = 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}x^2 - x + 2 = 0$$

De vergelijking  $x^p = a$  heeft als oplossing  $x = a^{\frac{1}{p}}$ .



### Voorbeeld

Gegeven zijn de volgende vergelijkingen in  $x$ , met  $x > 0$ .

1.  $2x^4 - x = 0$
2.  $2x^2 - x^5\sqrt{2} = 0$
3.  $\frac{2}{x^{2,6}} - x^{-0,3} = 0$

Je kunt ze als volgt oplossen.

1.  $2x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0,5 \Leftrightarrow x = 0,5^{\frac{1}{3}} = 0,79\dots$

2.  $2x^2 - x^5\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}} = 1,12\dots$

3.  $\frac{2}{x^{2,6}} - x^{-0,3} = 0 \Leftrightarrow 2 - x^{2,3} = 0 \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2,3}} = 1,35\dots$

21

Los de volgende vergelijkingen langs algebraïsche weg op.

$$\sqrt{x+2} = 5$$

$$5\sqrt{x} + 2 = 10$$

$$4x^4 = 44$$

$$\frac{1}{4}x^{0,4} = 4,4$$

$$\sqrt[4]{x^3} = 10$$

$$\sqrt[4]{2x^3} = 10$$

## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

22

### De oppervlakte van een bol

Voor de oppervlakte  $O$  (in  $\text{cm}^2$ ) van een bol met straal  $R$  cm geldt  $O = 4\pi R^2$ .

- a Bereken de straal van een bol met een oppervlakte van  $100 \text{ cm}^2$  in mm nauwkeurig.

Er geldt  $R = a\sqrt{O}$ , voor zeker getal  $a$ .

- b Bepaal  $a$  langs algebraïsche weg in twee decimalen.



### Voorbeeld

De vergelijking  $\frac{3}{x-2} + 1 = 2x - 2$  kun je zo oplossen:

$$\frac{3}{x-2} + 1 = 2x - 2 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} = 2x - 3 \Leftrightarrow$$

$$(2x - 3)(x - 2) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0,$$

$$\text{dus } x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 5}{4}, \text{ dus } x = 3 \text{ of } x = \frac{1}{2}.$$

De vergelijking  $\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+2}{x-2}$  kun je oplossen door kruislings te vermenigvuldigen, zie ook hoofdstuk 28, paragraaf 5 van Vwo3:

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+2}{x-2} \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = (x+3)(x-2), \text{ dus}$$

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + x - 6 \Leftrightarrow 3x + 2 = x - 6 \Leftrightarrow 2x = -8,$$

$$\text{dus } x = -4.$$

23

Los de volgende vergelijkingen in  $x$  langs algebraïsche weg op.

$$\frac{8}{x^2 + 1} = 4$$

$$\frac{3}{x+2} = \frac{5}{x}$$

$$\frac{8}{x+2} = 2(x-1)$$

$$10 - \frac{3}{x+2} = 2x + 9$$

Hint 4.

24

Jaap fietst een traject van 24 km heen en weer terug. Zijn gemiddelde snelheid op de heenweg is 24 km/u en op de terugweg 16 km/u.

- a Hoeveel tijd heeft hij voor de weg heen en weer terug nodig?

Wat is dus zijn gemiddelde snelheid over de weg heen en terug?

De gemiddelde snelheid op de heenweg noemen we  $v_h$ , op de terugweg  $v_t$  en heen en terug  $v$ .

$$\text{Dan geldt: } \frac{24}{v_h} + \frac{24}{v_t} = \frac{48}{v}, \text{ dus } \frac{1}{v_h} + \frac{1}{v_t} = \frac{2}{v}.$$

- b Toon dat aan.

- c Als Jaap heen 15 km/u rijdt, hoe hard moet hij terug rijden om een gemiddelde van 20 km/u over de weg heen en terug te fietsen?

## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

25

Een hogesnelheidstraject van 240 km wordt met gemiddeld 120 km/u afgelegd. Met nieuw materieel verwacht men sneller te zijn.

Er is een verband tussen de toename van de gemiddelde snelheid  $\Delta v$  (in km/u) op het traject en de afname van reisduur  $A$  in minuten.

a Bereken  $\Delta v$  als  $A = 6$  (minuten).

Er geldt:  $\Delta v = \frac{2A}{2 - \frac{1}{60}A}$ .

b Toon dat aan.



Hint 5.

26

Vorig jaar heerste een bepaalde ziekte in het land. Het percentage  $P$  van de bevolking  $t$  weken nadat men met de registratie begon, wordt gegeven door de formule

$$P = \frac{10}{2 + 3 \cdot 2^{-t}}.$$

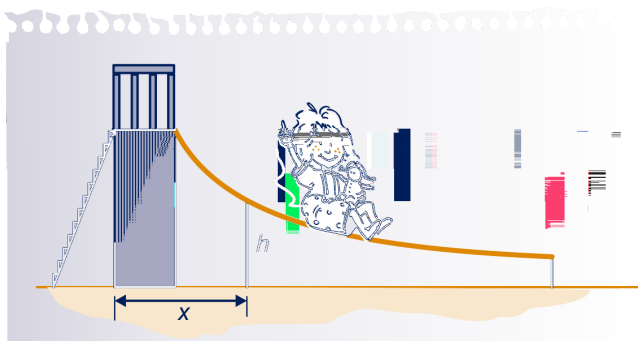
- a Hoeveel procent van de bevolking had de ziekte toen men met de registratie begon?
- b Bereken langs algebraïsche weg in dagen nauwkeurig hoe lang het duurde tot dit percentage was opgelopen tot 4,5%.

Het percentage dat de ziekte op den duur had, nadert een bepaalde grens.

c Bepaal dat percentage langs algebraïsche weg.

27

In de figuur hieronder zie je de doorsnede van een glijbaan met platform. Voor de hoogte  $h$  van de baan op afstand  $x$  meter vanaf een punt links gemeten, geldt:  $h = \frac{10}{3x + 1}$  meter, voor  $1 \leq x \leq 7$ .



- a Bereken langs algebraïsche weg in dm nauwkeurig op welke afstand vanaf links de hoogte 12 dm is.
- b Toon aan dat inderdaad  $a = \frac{30}{9x^2 + 15x + 4}$ .

## 15.2 Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

Als je  $x$  meter vanaf links 1 meter verder naar links gaat, neemt  $h$  af. Die afname noemen we  $a$  meter.

Er geldt:  $a = \frac{30}{9x^2 + 15x + 4}$ .

- c Bereken langs algebraïsche weg voor welke  $x$  geldt:  $a = 1$ .  
Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

## 15.3 Differentiëren

Laat  $P(a, b)$  een punt zijn van de grafiek van functie  $f$ .

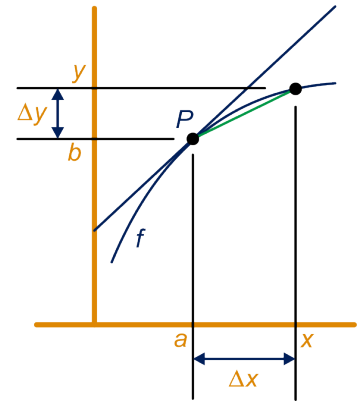
Veronderstel dat de grafiek van  $f$  glad is in  $P$ .

Dan heeft de grafiek een raaklijn in  $P$ . De helling van de grafiek is de richtingscoëfficiënt van die raaklijn; die laat zich benaderen met  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - b}{x - a}$ .

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - b}{x - a}$  is de gemiddelde helling van de grafiek van  $f$  op het interval  $[a, x]$ .

Hoe dichter je  $x$  bij  $a$  kiest, hoe beter je de helling van de grafiek van  $f$  in  $a$  benadert.

De exacte waarde van de helling vind je uiteindelijk door de grenswaarde van  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - b}{x - a}$  te bepalen als  $\Delta x$  steeds dichter bij 0 (en dus  $x$  steeds dichter bij  $a$ ) komt.



$\frac{\Delta y}{\Delta x}$  noemen we een **differentiequotiënt**;

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  is het bijbehorende **differentiaalquotiënt**.

De helling in het punt met eerste coördinaat  $a$  noteren we met  $f'(a)$ .

De functie  $f'$  noemen we de **afgeleide functie**.

Bij een gegeven functies zijn afgeleide bepalen, noemen we de functie **differentiëren**.

Een andere notatie voor de afgeleide functie is  $\frac{df}{dx}$ .

Je kunt de helling in een punt van de grafiek goed benaderen met een . We geven een voorbeeld.

### Voorbeeld

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = 2^x$ . De helling van de grafiek van  $f$  in het punt met eerste coördinaat 3 kun je goed benaderen met de gemiddelde helling op het interval  $[3; 3,01]$ , dus  $\frac{f(3,01) - f(3)}{0,01} = 5,56$ .

### Regels voor differentiëren

#### Somregel

$$(f + g)' = f' + g'$$

#### Veelvoudregel

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

#### Productregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

#### Quotiëntregel

$$\left(\frac{t}{n}\right)' = \frac{t' \cdot n - n' \cdot t}{n^2}$$

## 15.3 Differentiëren

### Kettingregel

Als  $x \rightarrow f(x) = u \rightarrow g(u) = f(g(x)) = y$ ,  
dan  $y'(x) = g'(u) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ .

Anders genoteerd:

gegeven de ketting  $x \rightarrow u \rightarrow y$ , dan  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

$f, g, t$  en  $n$  hierboven zijn functies en  $c$  een getal.

### De afgeleide van standaardfuncties

#### Functie

$$y = x^s$$

$$y = a^x$$

$$y = {}^a \log(x)$$

#### Afgeleide functie

$$y' = s \cdot x^{s-1}, \text{ voor elke } s \text{ uit } \mathbb{Q}.$$

$$y' = a^x \cdot \ln(a), a > 0 \text{ en } a \neq 1$$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}, a > 0, a \neq 1$$

### Opmerking

Bij voorkeur nemen we voor het grondtal van de exponentiële en logaritmische functies het getal  $e$ , dan

$$y = e^x \quad y' = e^x$$

$$y = \ln(x) \quad y' = \frac{1}{x}$$

### Voorbeeld

1. Als  $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ , dan  $f'(x) = 4x + 3$ .

2. Als  $f(x) = x^2 \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , dan  $f(x) = x^{2\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ , dus

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

3. Als  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , dan is de functie  $f$  de ketting

$$x \rightarrow x^2 + 1 = u \rightarrow \sqrt{u}, \text{ dus}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

4. Als  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ , dan  $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,

met de somregel en voorbeeld 3.

5. Als  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ , dan

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

met de productregel en voorbeeld 3

6. Als  $f(x) = x \cdot 2^x$ , dan

$$f'(x) = 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln(2) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln(2)$$



## 15.3 Differentiëren

7. Als  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ , dan  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ , met de quotiëntregel.

8. Als  $f(x) = \log(2x\sqrt{x} + 1)$ , dan is de functie  $f$  de ketting  $x \rightarrow 2x\sqrt{x} + 1 = u \rightarrow \log(u)$ , dus

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u \cdot \ln(10)} \cdot \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{(2x\sqrt{x} + 1) \cdot \ln(10)}.$$

28

Differentieer (van links naar rechts):

$$\begin{array}{ll} y = x + 2x\sqrt{x} & y = 2 \cdot \ln(x^2 + 1) \\ y = 2^{-x+1} & y = \sqrt[3]{3x+1} \\ y = x + \sqrt[3]{3x+1} & y = x \cdot \sqrt[3]{3x+1} \\ y = \frac{x}{x+1} & y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \end{array}$$

29

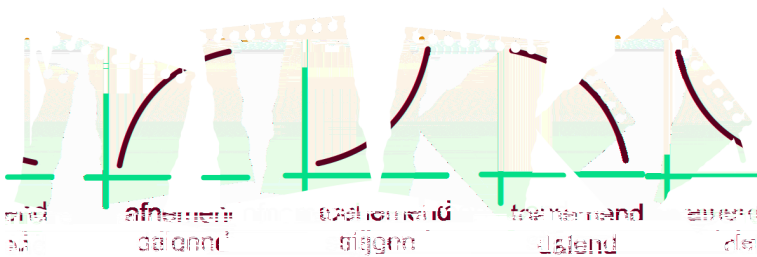
Gegeven is de functie  $y = x \cdot 3^x$ .

- Bereken de gemiddelde helling van de functie op het interval  $[2; 2,01]$  in twee decimalen.
- Geef een formule voor  $\frac{dy}{dx}$ .
- Controleer met je formule uit onderdeel b je antwoord van onderdeel a.



### Soorten groeisnelheid

Als groei niet lineair is, onderscheiden we vier soorten, hieronder in beeld gebracht.



Als de functie  $h$  afnemend dalend is, dan is de helling in elk punt van de grafiek negatief, maar wel steeds minder negatief, dus  $h'$ , de hellingfunctie van  $h$  is stijgend.

30

Bepaal in de andere drie gevallen in de figuur hierboven:

- is  $h'$  positief of negatief;
- is  $h'$  stijgend of dalend.

Licht je antwoord toe.



## 15.3 Differentiëren



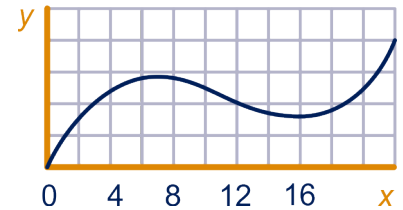
$y$  is een functie van  $x$ , dan geldt:

$y$ afnemend dalend	$y'$ negatief	$y'$ stijgend
$y$ afnemend stijgend	$y'$ positief	$y'$ dalend
$y$ toenemend stijgend	$y'$ positief	$y'$ stijgend
$y$ toenemend dalend	$y'$ negatief	$y'$ dalend

31

Hiernaast staat de grafiek van een functie  $f$ .

- Lees af voor welke  $x$  geldt:  $f'(x)$  positief én  $f'(x)$  stijgend.
- Lees af voor welke  $x$  geldt:  $f'(x)$  negatief én  $f'(x)$  dalend.



32



In een fabriek worden machines geproduceerd. Hiernaast zijn de grafieken van de kosten  $K$ , de opbrengst  $O$  en de winst  $W$  getekend als functie van het aantal stuks  $q$  in honderdtallen.  $K$ ,  $O$  en  $W$  zijn in miljoenen euro's.

$\frac{dK}{dq}$  zijn de marginale kosten.

- Lees de marginale kosten af bij een productie van 250 stuks, in duizenden euro's per stuk. Licht je antwoord toe. Gebruik het werkblad.

Er gelden de volgende formules.

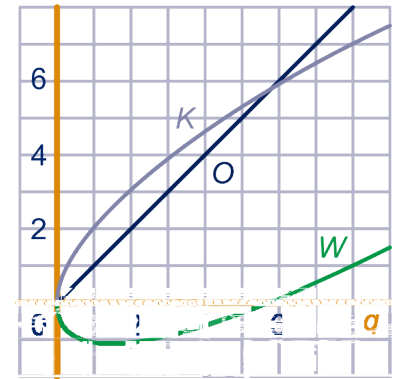
$$K = 2q^{0,6}, O = q \text{ en } W = O - K.$$

- Controleer je antwoord op onderdeel a met behulp van de formule voor  $K$ .

Negatieve winst noemen we verlies.

- Bereken langs algebraïsche weg bij welke productie het bedrijf verlies lijdt.
- Bereken langs algebraïsche weg bij welke productie het bedrijf zijn grootste verlies maakt.

$K, O, W$



33

In een nationaal park is een bepaalde diersoort uitgezet. Het aantal exemplaren  $t$  jaar later noemen we  $A$ .

$$\text{Er geldt: } A = \frac{1200}{1 + 9 \cdot e^{-t}}.$$

- Hoeveel exemplaren zijn er uitgezet?
- Hoe kun je aan de formule voor  $A$  zien dat het aantal exemplaren toeneemt, zonder te differentiëren?

Het aantal exemplaren bereikt op den duur een bepaalde grenswaarde.

- Welke waarde is dat? Leg uit hoe dat uit de formule volgt.



## 15.3 Differentiëren

- d Bereken langs algebraïsche weg in maanden nauwkeurig wanneer er 1000 exemplaren zijn.
- e Geef een formule voor  $\frac{dA}{dt}$  en verklaar hiermee dat  $A$  steeds minder sterk stijgt.

## 15.4 Discrete analyse



We bekijken de kwadratenrij:

$0, 1, 4, 9, 16, \dots$

Je kunt de termen van de rij een naam geven, bijvoorbeeld

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, \dots$

De rij kan beschreven worden met een **directe formule** als volgt:

$a_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$

Het kan ook met een **recursieve formule** ook wel **recurrente betrekking** genoemd:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bij een recursieve formule bouw je rij term voor term op, bij een directe formule kun je een term uit de rij direct berekenen, zonder zijn voorgangers te kennen.

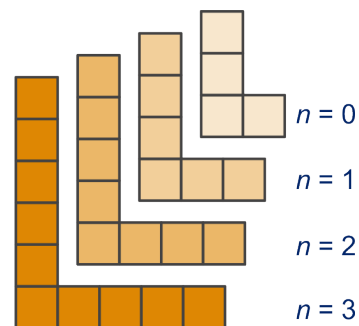
34

Bekijk de rij L-en in de figuur hiernaast. Het aantal blokjes waaruit de L met nummer  $n$  bestaat noemen we  $a_n$  voor  $n = 0, 1, 2, \dots$

a Geef een recursieve formule voor de rij  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{cases} a_0 = \dots \\ a_n = a_{n-1} + \dots \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

b Geef een directe formule voor de rij  $a_n$ .



35

### Rijtes nullen en enen

Hiernaast staat het aantal verschillende rijtjes met nullen en enen van lengte drie.

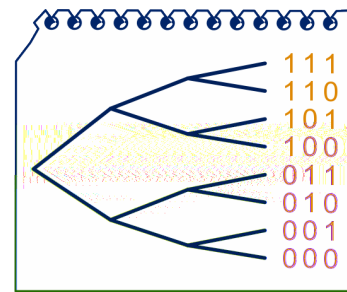
Het aantal verschillende rijtjes met nullen en enen van lengte  $n$  noemen we  $b_n$ . In de figuur zie je:  $b_3 = 8$ .

a Hoe vind je  $b_n$  uit  $b_{n-1}$ ?

Dus een recursieve betrekking voor de rij  $b_n$  is:

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = 2 \cdot b_{n-1} \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

b Geef een directe formule voor de rij  $b_n$ .



### Opmerking

De beginterm van een rij hoort meestal bij  $n = 0$ , zoals in opgave 34 of bij  $n = 1$ , zoals in opgave 35.

De beginterm zou ook nog een andere waarde van  $n$  kunnen horen.

Let op het nummer van de beginterm!

## 15.4 Discrete analyse

36

In plaats van naar rijtjes van nullen en enen van een bepaalde lengte te kijken, kun je ook kijken naar rijtjes die hoogstens een bepaalde lengte hebben.

Het aantal verschillende rijtjes van nullen en enen van lengte hooguit drie is:  $b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 4 + 8 = 14$  ( $b_n$  is als in de vorige opgave).

Het aantal verschillende rijtjes nullen en enen van lengte hooguit  $n$  noemen we  $s_n$ .

Er geldt:  $s_9 = 1022$ .

**a** Bereken hieruit  $s_{10}$ .

**b** Geef een recursieve formule voor de rij  $s_n$ .

Bekijk de rij  $d_n$  met  $d_n = 2^{n+1} - 2, n = 1, 2, 3, \dots$

Dan  $d_1 = 2$ .

**c** Ga na dat  $d_n = d_{n-1} + 2^n$ .

Dus een directe formule voor de rij  $s_n$  is:  $s_n = 2^{n+1} - 2$ .

**d** Leg dat uit.

In de voorgaande opgave hebben de  $s_n$  van de rij  $b_n$  bekeken:

$$s_1 = b_1,$$

$$s_2 = b_1 + b_2,$$

$$s_3 = b_1 + b_2 + b_3, \dots$$

Gegeven is een rij  $b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , dan is de **somrij**  $s_n$  van de rij  $b_n$ :  $s_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ .

Een recursieve betrekking voor de rij  $s_n$  is:

$$\begin{cases} s_1 = b_1 \\ s_n = s_{n-1} + b_n, n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

### Opmerking

Een rij kan ook beginterm met  $n = 0$ , bijvoorbeeld de rij  $a_n$ , met  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  uit opgave 34, dan

$$s_0 = b_0,$$

$$s_1 = b_0 + b_1, s_2 = b_0 + b_1 + b_2, \dots$$

Dan is:  $\begin{cases} s_0 = d_0 \\ s_n = d_{n-1} + c_n \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots$  een recursieve betrekking.

Stelle haalt elke dag een kleinigheid in de supermarkt. De laatste tijd houdt zij bij hoeveel ze elke dag uitgeeft. Het uitgegeven bedrag  $b_n$  op dag  $n$  staat in de volgende tabel.

## 15.4 Discrete analyse

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$b_n$	1,50	2,35	3,50	1,00	1,45	2,15	2,00	

Met  $\sum_{j=1}^3 b_j$  bedoelen we het bedrag dat ze de eerste drie dagen heeft uitgegeven:

$$\sum_{j=1}^3 b_j = b_1 + b_2 + b_3 = 1,50 + 2,35 + 3,50 = 7,35.$$

En  $\sum_{j=4}^7 b_j = b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = 6,60$  het bedrag dat ze de laatste vier dagen in totaal heeft uitgegeven.



### De $\Sigma$ -notatie

Gegeven is een rij  $a_n$  voor  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Dan is  $\sum_{j=3}^7 a_j = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$



### Opmerking

De somrij van de rij  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  kunnen we dus ook

noteren als:  $\sum_{k=0}^n a_k$ .

37

We bekijken de rij  $a_n$  uit opgave met directe formule  $a_n = 2n+4$  voor  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Bereken:  $\sum_{k=1}^3 a_k$  en  $\sum_{k=4}^5 a_k$ .

## Rekenkundige en meetkundige rijen



Een **rekenkundige rij** is een rij waarbij je de volgende term krijgt door bij de voorganger steeds hetzelfde vaste getal op te tellen.

Gegeven is een rekenkundige rij  $a_n$  voor  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Een recursieve betrekking is dan van de vorm:

$$\begin{cases} a_0 = b \\ a_n = a_{n-1} + v, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Hierbij is  $b$  de beginterm en  $v$  het vaste getal dat steeds bij de voorganger opgeteld moet worden om de volgende term te krijgen.

$v$  heet het **verschil** van de rekenkundige rij.

Een directe formule is van de vorm:

## 15.4 Discrete analyse

$$a_n = a \cdot n + b, n = 0, 1, 2, \dots$$

Het verband tussen  $a$  en  $v$  is:  $a = (n - 1) \cdot v$ .

38

Gegeven is de rij  $10, 6, 2, -2, \dots$

We noemen de termen  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  enzovoort.

**a** Geef een recursieve en een directe formule voor de rij  $a_n$ .

Het getal -30 komt voor in de rij.

**b** De hoeveelste term is -30?

**c** Geef een directe formule voor de rij  $b_n$  met

$$\begin{cases} b_0 = -10 \\ b_n = b_{n-1} + 7, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$



Een **meetkundige rij** is een rij waarbij je de volgende term krijgt door de voorganger steeds met hetzelfde vaste getal te vermenigvuldigen.

Gegeven is een meetkundige rij  $a_n$  voor  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Een recursieve betrekking is dan van de vorm:

$$\begin{cases} a_0 = b \\ a_n = r \cdot a_{n-1}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Hierbij is  $b$  de beginterm en  $r$  het vaste getal waarmee de voorganger vermenigvuldigd moet worden om de volgende term te krijgen.

Het getal  $r$  heet de **reden** van de meetkundige rij.

Een directe formule is van de vorm:

$$a_n = b \cdot r^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

39

Een meetkundige rij  $a_n$  heeft beginterm  $a_0 = 16$  en reden

$$r = 1\frac{1}{2}.$$

**a** Geef een recursieve en een directe formule voor de rij.

$121\frac{1}{2}$  is een term in de rij.

**b** Bereken de bijbehorende  $n$ .

Gegeven is een meetkundige rij  $m_n, n = 0, 1, 2, \dots$

$$m_3 = 7 \text{ en } m_9 = 700.$$

**c** Geef een directe formule voor de rij.

Gegeven is de rij  $p_n = 10 \cdot (-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

**d** Bereken zonder rekenmachine  $p_{1000}$  en  $p_{1001}$

**e** Bekijk nog eens de kwadratenrij waarmee we deze paragraaf begonnen zijn.

Is deze rij rekenkundig, meetkundig?

## 15.4 Discrete analyse

### Een formule voor de somrij van een rekenkundige rij

In hoofdstuk 10, paragraaf 5 van deel 2 v5 hebben we de volgende formule afgeleid.

Als  $a_0, a_1, a_2, \dots$  een rekenkundige rij is, dan kan de som van een aantal opvolgende termen bepaald worden met de regel: som van de termen = gemiddelde van begin- en eindterm maal het aantal termen.

In formule:  $\sum_{i=0}^n a_i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) (a_0 + a_n)$ .

#### Voorbeeld

We berekenen de som van alle viervouden, te beginnen bij 100 en eindigend bij 400.

Dus:  $100 + 104 + \dots + 396 + 400$ .

Om de formule te kunnen toepassen, moeten we het aantal termen kennen.

We noemen de rij van die viervouden  $a_0, a_1, \dots$ , dan  $a_n = 100 + 4n$  en  $a_n = 400 \Leftrightarrow n = 75$ , dus het aantal termen is 76 (Let op! De beginterm is  $a_0$ ).

De som is dus:  $76 \cdot \frac{1}{2} (100 + 400) = 19000$ .

40

We bekijken de rij L-en van opgave 34, met  $a_n = 4 + 2n$ , voor  $n = 0, 1, 2, \dots$

a Bereken algebraïsch met de somformule  $\sum_{j=0}^{10} a_j$ .

Twee termen in de rij zijn 30 en 60.

b Bereken met de somformule de som van de termen in de rij van 30 tot en met 60.

$s_n = \sum_{j=0}^n a_j$  is de somrij van de rij  $a_n$ .

c Geef een formule voor  $s_n$ . Schrijf deze zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk.

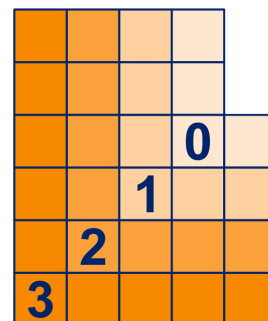
In de figuur hiernaast zijn de eerste vier L-en aan elkaar gelegd.

Zo kun je eenvoudig zien dat  $\sum_{j=0}^3 a_j = 6 \cdot 5 - 2 = 28$ .

d Controleer door aan elkaar leggen je formule van de vorige vraag.



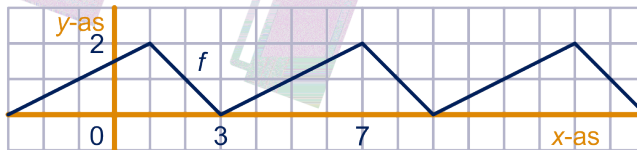
Hint 6.



## 15.5 Periodieke functies

### Wat is een periodieke functie?

Hieronder staat de grafiek van een **periodieke functie**. Een bepaald stuk van de grafiek herhaalt zich steeds.  
Bij de grafiek van de functie  $f$  hieronder heeft het stuk lengte 6.  
We noemen dat de **periode** van de functie.



De vergelijking  $f(x) = 1$  heeft oneindig veel oplossingen.  
Als je de oplossingen op één periode kent, ken je ze allemaal.  
Op het interval  $[0,6]$  zijn de oplossingen 2 en 5.  
Alle oplossingen zijn dan de rijen:  
..., -10, -4, 2, 8, 14, ... en  
..., -7, -1, 5, 11, 17, ...  
Deze rijen zetten zich links en rechts oneindig ver met dezelfde regelmaat voort.  
Wij noteren ze kort als volgt:  $2 + k \cdot 6$  en  $5 + k \cdot 6$  met  $k$  geheel.

### Opmerking

De rijen  $2 + k \cdot 6$ ,  $20 + k \cdot 6$



## 15.5 Periodieke functies



De functie  $y = \sin(x)$  heeft periode  $2\pi$ , de gemiddelde waarde is 0, de maximale waarde 1 voor de waarden  $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$  en de minimale waarde -1 voor de waarden  $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ , met  $k$  geheel.

### Schuiven en rekken

In hoofdstuk 14 hebben we het volgende afgeleid.



Gegeven een functie  $f$ .

- Neem aan:  $g(x) = f(ax)$  met  $a \neq 0$ .  
De grafiek van  $g$  krijg je dan door de grafiek van  $f$  **horizontaal** met  $\frac{1}{a}$  te **vermenigvuldigen**.
- Neem aan:  $g(x) = a \cdot f(x)$ .  
De grafiek van  $g$  krijg je dan door de grafiek van  $f$  **verticaal** met  $a$  te **vermenigvuldigen**.
- Neem aan:  $g(x) = f(x + a)$  met  $a > 0$ .  
Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **links te schuiven**.  
Neem aan:  $g(x) = f(x - a)$  met  $a > 0$ .  
Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **rechts te schuiven**.
- Neem aan:  $g(x) = f(x) + a$  met  $a > 0$ . Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **boven te schuiven**.  
Neem aan:  $g(x) = f(x) - a$  met  $a > 0$ . Je krijgt de grafiek van  $g$  door de grafiek van  $f$   $a$  eenheden naar **beneden te schuiven**.



### Voorbeeld

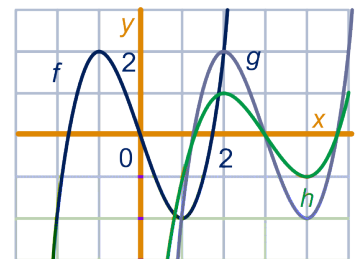
Hiernaast staat de grafiek van de functie  $f$  op domein  $[-2, 2]$  met  $f(x) = x^3 - 3x$ .

Als je de grafiek van  $f$  drie eenheden naar rechts schuift, krijg je de grafiek van  $g$ .

Dan  $g(x) = (x - 3)^3 - 3(x - 3)$ .

Als je de grafiek van  $g$  verticaal met  $\frac{1}{2}$  vermenigvuldigt, krijg je de grafiek van  $h$ .

Dan  $h(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^3 - 1\frac{1}{2}(x - 3)$ .





## 15.5 Periodieke functies

42

De grafiek van de functie  $k$  ontstaat door die van  $f$  uit het voorbeeld horizontaal met 2 te vermenigvuldigen.

a Geef een formule voor  $k(x)$ .

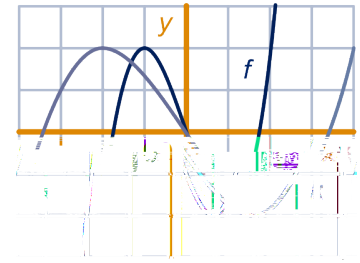
Voor de functie  $m$  geldt:  $m(x) = (x + 1)^3 - 3(x + 1) + 2$ .

De grafiek van  $m$  ontstaat door een horizontale en een verticale verschuiving uit de grafiek van  $f$ .

b Welke?

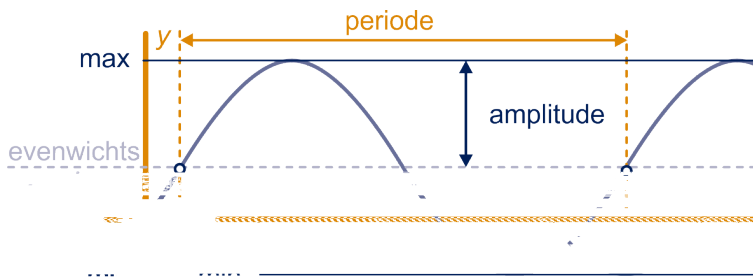
Bekijk nog eens de periodieke functie  $f$  van opgave 41.

c Geef een formule voor  $f(x)$  als  $6 \leq x \leq 10$ .



### Sinusoïden

De grafiek van een functie die door (herhaald) schuiven en/of rekken uit de grafiek van de sinus-functie  $y = \sin(x)$  ontstaat noemen we een **sinusoïde**.



De gemiddelde hoogte van de golf noemen we de **evenwichtswaarde**, het verschil tussen de maximale en gemiddelde hoogte noemen we de **amplitude**.

De golf met evenwichtswaarde  $a$ , amplitude  $b$ , periode  $p$  die bij waarde  $c$  stijgend door de evenwichtslijn gaat, heeft formule:

$$y = a + b \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p}(x - c)\right).$$

Merk op: de sinusfunctie heeft **amplitude 1**,

**evenwichtswaarde 0** en **periode  $2\pi$** .

Bij  $x = 0$  gaat de grafiek stijgend door de evenwichtslijn.

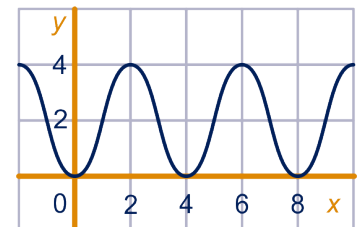
#### Voorbeeld

Hiernaast is een sinusoïde getekend. Een bijpassende formule vind je als volgt.

De evenwichtswaarde en de amplitude is 2. De grafiek gaat bij  $x = 1$  stijgend door het evenwicht en de periode is 4.

Een bijbehorende formule is dus

$$y = 2 + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{4}(x - 1)\right) = 2 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right).$$



## 15.5 Periodieke functies

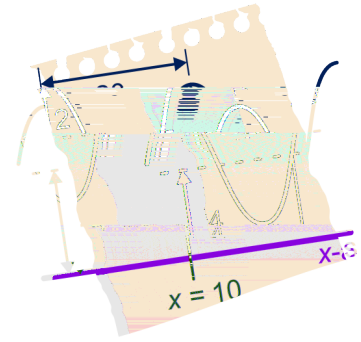
### Voorbeeld

Gegeven is de functie  $y = 3 + 2 \sin(0,1\pi x - \pi)$ . We bepalen zonder GR de maximale en minimale waarde van  $y$  en de bijbehorende waarden van  $x$  waarvoor ze bereikt worden. De evenwichtswaarde is 3 en de amplitude is 2. Om de periode en een waarde van  $x$  te vinden waar de grafiek stijgend door het evenwicht gaat schrijven de formule van het verband anders:  
$$y = 3 + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{20}(x - 10)\right).$$

Dus de grafiek gaat bij  $x = 10$  stijgend door het evenwicht en de periode is 20.

De maximale waarde wordt bereikt voor bijvoorbeeld  $x = 10 + \frac{1}{4} \cdot 20 = 15$  en de minimale waarde voor bijvoorbeeld  $x = 10 + \frac{3}{4} \cdot 20 = 25$ .

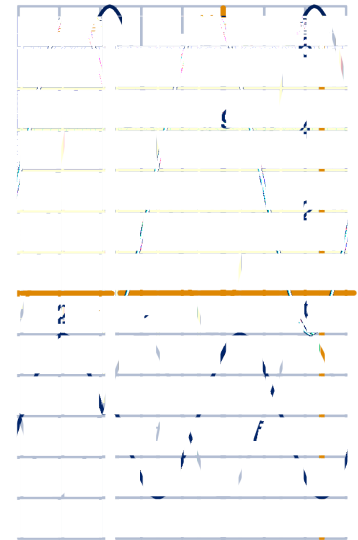
Alle waarden van  $x$  waarbij  $y$  de evenwichtswaarde heeft zijn van de vorm  $x = k \cdot 10$ , de waarden van  $x$  waarbij  $y$  maximaal is zijn van de vorm  $x = 15 + k \cdot 20$  en de waarden van  $x$  waarbij  $y$  minimaal is zijn van de vorm  $x = 25 + k \cdot 20$ , met  $k$  geheel.



43

In de figuur zijn de grafieken van de periodieke functies  $f$  en  $g$  getekend. De maximale waarde van  $f(x)$  wordt bereikt voor  $x = -2$ ; de maximale waarde van  $g(x)$  wordt bereikt voor  $x = -2\frac{1}{2}$ .

- Bereken voor welke waarde van  $x$  tussen 100 en 110  $f(x)$  maximaal is.
- Bereken voor welke waarde van  $x$  tussen 100 en 110  $g(x)$  minimaal is.
- Geef formules voor  $f(x)$  en  $g(x)$ .



## 15.5 Periodieke functies

### Vergelijkingen met sinus

Vergelijkingen met sinus hebben bijna altijd meer dan één oplossing. De GR geeft er meestal maar één. De andere moet je vinden met behulp van symmetrie en periodiciteit.

#### Voorbeeld

Gegeven is het verband  $y = 3 - 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi(x - 2)\right)$ .

#### Vraag

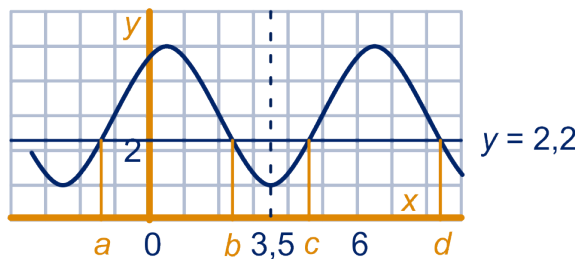
Voor welke  $x$  op  $[-3,9]$  geldt:  $y = 2,2$ ?

Geef de oplossingen langs algebraïsche weg in twee decimalen.

#### Oplossing

Hieronder is de grafiek van het verband getekend met de lijn  $y = 2,2$ .

De grafiek gaat door de evenwichtslijn  $y = 3$  bij  $x = 2$  en de periode is 6. Dus de evenwichtswaarde wordt ook bereikt voor  $x = -1$ ,  $x = 5$  en  $x = 8$ . De lijn  $x = 3,5$  is dus symmetrieas. Die staat ook in de figuur.



De oplossingen zijn de getallen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  in de figuur.

$$3 - 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi(x - 2)\right) = 2,2 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{3}\pi(x - 2)\right) = 0,4$$

. Met de GR vinden we:  $\sin^{-1}(0,4) = 0,4115\dots$ ; er geldt:

$$\frac{1}{3}\pi(x - 2) = 0,4115\dots \Leftrightarrow x = 2 + \frac{0,4115\dots}{\frac{1}{3}\pi} = 2,3929\dots, \text{ dit}$$

is het getal  $b$ . Het gemiddelde van  $b$  en  $c$  is 3,5, dus  $c = 7 - b = 4,6070\dots$

Het getal  $a$  verschilt één periode van  $c$ , dus  $a = -1,3829\dots$

Het getal  $d$  verschilt één periode van  $b$ , dus  $d = 8,3929\dots$

De oplossingen in twee decimalen zijn: -1,38; 2,39; 4,61; 8,39.

Los de volgende vergelijkingen in  $x$  langs algebraïsche weg op in twee decimalen.

- $2 \sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 1,3$  en  $-8 \leq x \leq 8$
- $1 - 3 \sin(\pi(x + 1)) = 2$  en  $-2 \leq x \leq 1$
- $2 + \sin(2x + 1) = 3$  en  $0 \leq x \leq 8$

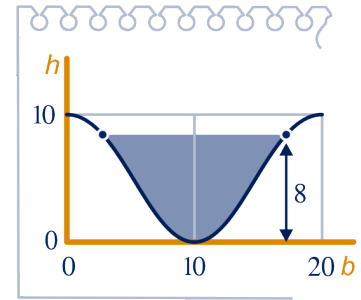
## 15.5 Periodieke functies

45

In extra opgave 9 van hoofdstuk 14 hebben we een goot bekeken.

Een formule voor de hoogte  $h$  van de goot als functie van de breedte  $b$  is  $h = 5 + 5 \sin(0,1\pi(b - 15))$ .

Bereken langs algebraïsche weg de breedte van de waterspiegel in één decimaal als de hoogte 8 is.



## 15.6 Extra opgaven

1

### Fruitvliegjes

Bij een experiment met fruitvliegjes in een afgesloten ruimte heeft men vastgesteld dat het aantal fruitvliegjes per  $\text{m}^3$  bij benadering beschreven kan worden met de volgende formule:

$$F = \frac{3500}{1 + 34 \cdot 0,87^t}.$$

Hierin is  $t$  de tijd in dagen vanaf de start van het experiment en  $F$  het aantal fruitvliegjes per  $\text{m}^3$  op tijdstip  $t$ .

- a Bereken langs algebraïsche weg na hoeveel dagen vanaf het begin van het experiment er voor het eerst meer dan 2500 fruitvliegjes per  $\text{m}^3$  zijn.

Het aantal fruitvliegjes per  $\text{m}^3$  neemt toe tot een grenswaarde.

- b Bepaal deze grenswaarde langs algebraïsche weg.

Als bij het experiment de tijd  $t$  niet gemeten wordt in dagen maar in uren, geldt voor het aantal fruitvliegjes per  $\text{m}^3$  een andere formule.

De tijd in uren vanaf het begin van het experiment is  $T$ .

- c Stel een formule op voor het aantal fruitvliegjes  $F$  op tijdstip  $T$ . Schrijf de formule in de vorm:  $F = \frac{3500}{1 + 34 \cdot b^T}$ , met  $b$  in drie decimalen.

Voor kleine waarden van  $t$  kan het aantal fruitvliegjes per  $\text{m}^3$

gegeven door  $F = \frac{3500}{1 + 34 \cdot 0,87^t}$  benaderd worden met

de formule  $F = \frac{3500}{34 \cdot 0,87^t}$ . Deze laatste formule kan ook geschreven worden in de vorm  $F = b \cdot g^t$ .

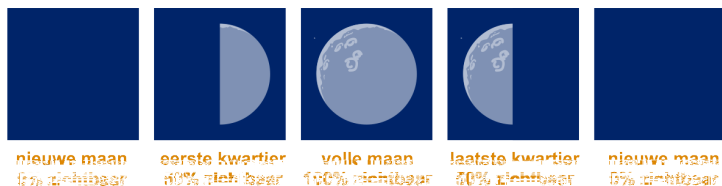
- d Bereken  $b$  en  $g$  langs algebraïsche weg. Rond  $b$  af op een geheel getal en geef  $g$  in tw  $\frac{1}{2}$  in tw  $\frac{1}{2}$



ch L

## 15.6 Extra opgaven

afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.



De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

- b Bereken met behulp van de formule voor  $P$  op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan zal zijn.
- c Onderzoek met behulp van de formule voor  $P$  tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 zal bevinden.

Examen Havo wiskunde B 2016I pilot

3

Een mobiele telefoon werkt op een batterij. Zo'n telefoon kan vrij lang aanstaan als je niet belt. De maximale tijd dat de mobiele telefoon aan kan staan zonder gebruikt te worden, heet de stand-by-tijd. Als je wel belt, verbruikt de telefoon meer energie. De batterij is dan sneller leeg.

Bij een mobiele telefoon van voor de tijd van de smartphone op stand-by-stand wordt het spanningsverloop benaderd door de formule  $V = 3,31 + \frac{21}{t - 148}$ .

Hierin is  $V$  de spanning van de batterij in Volt en  $t$  de tijd in uur.

Op tijdstip  $t = 0$  is de batterij vol.

De tijd die het duurt vanaf het ogenblik waarop de batterij net helemaal is opgeladen totdat de spanning tot 0 is gedaald is de stand-by-tijd.

- a Bereken langs algebraïsche weg in minuten nauwkeurig de stand-by-tijd.
- b Geef een formule voor  $\frac{dV}{dt}$ .

Met behulp van  $\frac{dV}{dt}$  valt na te gaan dat  $V$  afnemend dalend is.

- c Leg uit hoe.

De spanning die de batterij levert, kun je aan de rechterkant van het scherm aflezen. Als de batterij vol is, staan alle vier de blokjes (nummers 1 t/m 4) aan. Bij een volle batterij bedraagt



## 15.6 Extra opgaven

de spanning ongeveer 3,2 Volt. Het aantal zichtbare blokjes wordt bepaald door het percentage van de maximale spanning. Als het percentage minder dan 75% bedraagt, kan er niet meer getelefoneerd worden en zijn alle blokjes uit. Zie de volgende tabel.

blokjes die zichtbaar zijn	1, 2, 3, 4	2, 3, 4	3, 4	4	geen
percentage van de maximale spanning	100-97	97-94	94-88	88-75	75-0

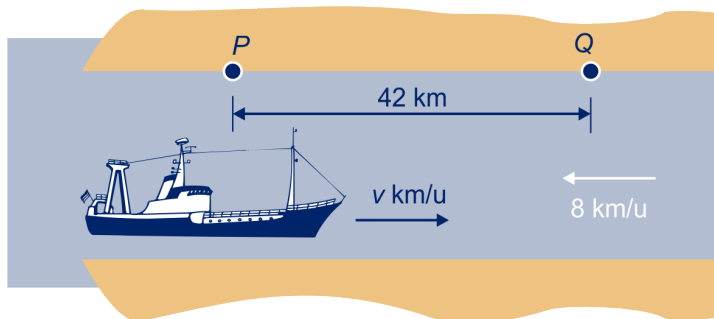
Iemand laadt de batterij helemaal op. Vervolgens legt hij de telefoon in de stand-by-stand weg. De telefoon wordt niet gebruikt. Na verloop van tijd gaat blokje nummer 1 uit. Een tijd nadat blokje nummer 1 is uitgegaan, gaat blokje nummer 2 uit. Juist op dat moment pakt hij de telefoon, ziet blokje nummer 2 uitgaan en denkt dat de telefoon op de helft van zijn stand-by-tijd is. Er zijn dan immers nog twee blokjes (nummers 3 en 4) van de vier zichtbaar.

- d Onderzoek langs algebraïsche weg met behulp van de gegeven formule of de telefoon op het moment dat blokje nummer 2 uitgaat, op de helft van zijn stand-by-tijd is.

Naar examen HAVO wiskunde B1 2007I

4

Een schip maakt een tocht over een rivier van  $P$  naar  $Q$  en terug. De afstand tussen  $P$  en  $Q$  is 42 km. Van  $P$  naar  $Q$  vaart het schip tegen de stroom in (stroomopwaarts); op de terugreis vaart het met de stroom mee (stroomafwaarts). De snelheid van het schip ten opzichte van de wal hangt af van de stroomsnelheid van het water en van de snelheid  $v$  van het schip ten opzichte van het water; hierbij is  $v$  in km/u. De stroomsnelheid van het water is 8 km/u. In de figuur hieronder is de tocht van  $P$  naar  $Q$  weergegeven.



Veronderstel  $v = 20$ .

## 15.6 Extra opgaven

- a Toon aan dat de tocht van  $P$  naar  $Q$  en terug dan 5 uur duurt.

Het brandstofverbruik  $B$  op het deel van de tocht stroomopwaarts hangt af van de vaartijd  $T$  (in uren) en van de snelheid  $v$  (in km/u) van het schip ten opzichte van het water. Er geldt:  $B = T \cdot v^3$ .

Voor het deel van de tocht stroomopwaarts geldt:  $B = \frac{42v^3}{v-8}$ .

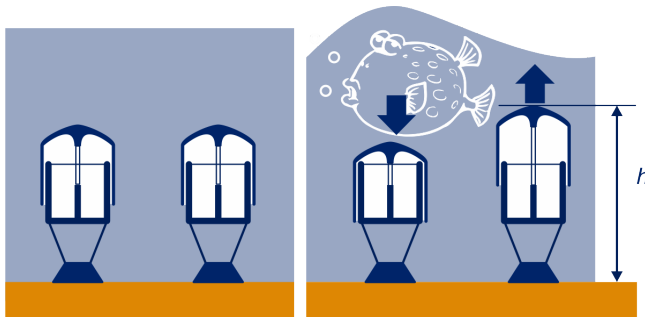
- b Toon deze laatste formule aan.  
c Bereken algebraïsch bij welke waarde van  $v$  het brandstofverbruik minimaal is voor het deel van de tocht stroomopwaarts.

Examen wiskunde B1II, 2004

5

De Archimedes Wave Swing (afgekort AWS) is ontwikkeld om de golfbeweging van de zee te gebruiken om energie op te wekken.

Elke AWS bestaat uit twee halfopen delen. Het onderste deel is verankerd aan de zeebodem. Het bovenste deel, ook wel drijver genoemd, valt over het onderste heen. In de figuur linksonder zie je twee AWS'en onder een vlakke zeespiegel. In de figuur rechts zie je dat de golven er voor zorgen dat de drijvers op en neer bewegen. Deze beweging van de drijver wordt gebruikt om energie op te wekken.



De minimale hoogte van de bovenkant van de drijver ten opzichte van de zeebodem is 30,0 meter. De maximale hoogte is 37,0 meter. De drijver maakt onder invloed van de golven een periodieke beweging met dezelfde periode als de periode van de golfbeweging.

We gaan voor de volgende vraag uit van een situatie waarbij de periode van de golfbeweging 12 seconden is en de hoogte van de bovenkant van de drijver van de AWS varieert van 30,0 meter tot en met 37,0 meter. De hoogte van de bovenkant van



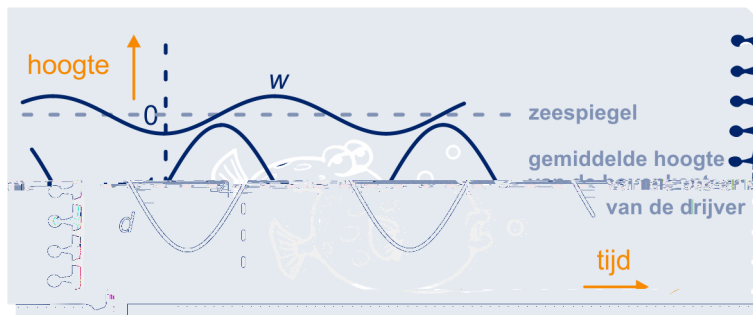
## 15.6 Extra opgaven

de drijver kan dan worden beschreven door een formule van de vorm  $h = a + b \sin(c \cdot t)$ . Hierin is  $h$  de hoogte ten opzichte van de zeebodem in meter en  $t$  de tijd in seconde.

- a Bereken de waarden van  $a$ ,  $b$  en  $c$  in deze formule. Licht je antwoord toe.

Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte. Zie de figuur hieronder. De hoogte  $d$  van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt nu beschreven door:  $d = -4,0 + 3,5 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$ , met  $d$  de hoogte in meter en  $t$  de tijd in seconde.

De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule  $w = A \sin\left(\frac{1}{2}(t - 3,14)\right)$ . Hierin is  $w$  de waterhoogte in meter,  $A$  de amplitude van de golven ( $A \geq \frac{1}{2}$ ) in meter en  $t$  de tijd in seconde. In de figuur hieronder zijn grafieken van  $d$  en  $w$  getekend voor een bepaalde waarde van  $A$ .



In de situatie van de figuur hierboven blijft de bovenkant van de drijver altijd onder water. Maar als de amplitude van de golfbeweging verder toeneemt, kan de drijver soms boven het water uitsteken.

- b Onderzoek met de grafische rekenmachine vanaf welke amplitude van de golfbeweging de drijver af en toe boven water verschijnt. Rond je antwoord in meter af op één decimaal.

Examen Havo wiskunde B2010I

## 15.6 Extra opgaven

6

Hiernaast zie je een (deel van) kunstwerk van de Franse “conceptual artist” Daniël Buren. De *la Coureur de la Matière* bestaat uit 1 latjes die deels zijn beschilderd. Stel je voor dat bij een transport de latjes door elkaar zijn geraakt...



Als alle latjes verschillend zijn geeft elke volgorde een andere compositie.

- a Laat zien dat er bijna 500 miljoen composities zijn als alle latjes verschillend zijn.
- b Stel dat drie latjes niet van elkaar te onderscheiden zijn hoeveel verschillende composities zijn er dan mogelijk?
- c Hoeveel composities zijn er mogelijk wanneer er maar twee soorten latjes zijn: zes beschilderde die niet van elkaar te onderscheiden zijn, en zes onbeschilderde die ook allemaal precies gelijk zijn.

De 12 verticale “staven” (in de stijl van ) zijn er in vier kleuren: blauw (4 maal), donkerrood (4 maal), lichtrood (2 maal) en paars (2 maal).

- d Hoeveel verschillende composities zijn er mogelijk met deze 4 blauwe, 4 donkerrode, 2 lichtrode en 2 paarse staven?



Naar CTWO Rekenen met patronen 2.0

7

### KIX

De KIX (KlantIndex) is een streepjescode die gebruikt wordt om post machinaal te sorteren. Steeds meer bedrijven drukken op poststukken onder het adres de KIX af. Deze bedrijven krijgen daarvoor een korting op de verzendkosten. Een adres wordt in Nederland volledig bepaald door de postcode en het huisnummer. De KIX bestaat daarom uit 4 cijfers en 2 letters voor de postcode en daarachter het aantal cijfers dat nodig is voor het huisnummer.

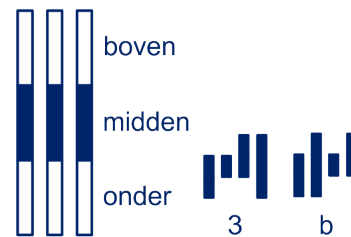
In figuur 1 hiernaast staan als voorbeeld de KIX van postcode 3224 BC met huisnummer 6 en van postcode 3224 BC met huisnummer 108.

In de KIX heeft elk cijfer en elke letter een eigen symbool. Er wordt daarbij geen onderscheid gemaakt tussen hoofdletters en kleine letters. De letters B en b krijgen dus hetzelfde symbool. Elk symbool bestaat uit vier verticale strepen, zie figuur 2.

Het middelste stuk van elke streep is altijd zwart. Boven zijn er vier stukken en onder zijn er vier stukken. Elk van die acht stukken kan wit of zwart zijn. Zo zijn er veel verschillende symbolen te maken waarbij het niet uitmaakt hoeveel van de vier bovenste en de vier onderste stukken zwart zijn gemaakt.



figuur 1



figuur 2

figuur 3

## 15.6 Extra opgaven

- a Bereken het aantal verschillende symbolen dat op die manier is te maken.

Bij een KIX-symbool zijn er van de vier bovenste stukken precies twee zwart. Ook van de vier onderste stukken zijn er precies twee zwart.

In figuur 3 zie je bijvoorbeeld de symbolen van 3 en van B (of b). Zoals je bij de laatste streep van de 3 ziet, mag een streep ook helemaal zwart zijn, als er maar in totaal twee stukken boven en twee stukken onder zwart zijn.

- b Hoeveel verschillende KIX-symbolen zijn er op deze manier te maken? Licht je antwoord toe.

Bij elk adres hoort een huisnummer. Huisnummers beginnen nooit met een 0. Bij sommige adressen komt er na het huisnummer een toevoeging, zoals bij het huisnummer 6A. Soms staat er zelfs een heel woord bij: 73 boven. Bij zo'n toevoeging wordt de KIX na het huisnummer aangevuld met eerst de letter X en daarna de letter(s) en/of cijfer(s) die nodig zijn voor de toevoeging.

De KIX is door het huisnummer (zie figuur 1) en door een eventuele toevoeging niet altijd even lang. We vatten dit samen in onderstaande tabel.

altijd		soms	
postcode	huisnummer	het scheidingsteken	een toevoeging
4 cijfers en 2 letters	maximaal 5 letters	X	maximaal 6 tekens (letters en/of cijfers)
vaste lengte	variabele lengte	vaste lengte	variabele lengte

In de figuur hieronder staan twee voorbeelden van een KIX met 9 symbolen:

bij het adres: Dorsvlegel 108, 3224 BC HELLEVOETSSLUIS  
hoort KIX: 3224BC108  
in symbolen: 

bij het adres: Wethouder Hekkingstraat 9A, 1234 HV JUINFN  
hoort KIX: 1234HV9XA  
in symbolen: 

De postcode 6801 MG vormt het begin van een KIX van 9 symbolen. Er zijn aan de 6 symbolen van de postcode dus nog 3 symbolen toegevoegd.

- c Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om bij postcode 6801 MG een correcte KIX van 9 symbolen te maken? Licht je antwoord toe.

Examen wiskunde A1,2 Havo 2004II

### Dialecten vergelijken

Taalkundigen doen veel onderzoek naar de dialecten in Nederland en Vlaanderen.

Onderzoeker M. Spruit onderzocht in 2008 in hoeverre dialecten op elkaar lijken. De mate waarin twee dialecten verschillen, wilde hij uitdrukken in een getal. Daarom vergeleek hij steeds twee dialecten op een aantal kenmerken en telde hij vervolgens de verschillen. Elk verschil tussen deze twee dialecten leverde een punt op. Het totale aantal punten is de Hammingafstand tussen deze twee dialecten.

Bijvoorbeeld: in Lunteren kan men zeggen: “Jan herinnert zich dat verhaal wel”, maar ook: “Jan herinnert z’n eigen dat verhaal wel”. In Veldhoven zegt men altijd: “Jan herinnert zich dat verhaal wel”. In geen van beide dialecten gebruikt men hier “hem” of “zichzelf” of “hemzelf”, iets dat in andere dialecten wel voorkomt.

Het vergelijken van deze vijf kenmerken levert dus in totaal 1 punt op voor de Hammingafstand. Dat is in de tabel hieronder weergegeven.

	Lunteren	Veldhoven	punten (voor Hammingafstand)
zich	+	+	0
hem	–	–	0
z’n eigen	+	–	1
zichzelf	–	–	0
hemzelf	–	–	0

Stel men vergelijkt dialect X met het dialect van Lunteren. En stel dat vergelijken van de vijf kenmerken uit de tabel in totaal 3 punten oplevert voor de Hammingafstand. In dialect X wordt ook “zich” gebruikt.

- a Schrijf alle mogelijkheden voor deze vijf kenmerken voor dialect X op in een tabel.

De onderzoeker vergeleek niet vijf, maar 507 kenmerken. Het resultaat is een tabel waarin per tweetal dialecten de Hammingafstand te zien is. In volgende tabel zie je hier een gedeelte van.



## 15.6 Extra opgaven

dialect	Lunteren	Bellingwolde	Hollum	Doel	Sint-Truiden	Veldhoven
Lunteren		66	52	122	77	47
Bellingwolde	66		56	134	81	51

Het getal 66 in deze tabel voor het tweetal

Lunteren-Bellingwolde (of Bellingwolde-Lunteren) betekent

dat bij deze twee dialecten 66 van de 66 kenmerken verschillen:  
de Hammingafstand is 66.

In de tabel heeft de onderzoeker dus 15 Hammingafstanden berekend. In totaal stonden er echter geen 6 dialecten, maar 267 dialecten in de tabel. Bij elk tweetal heeft de onderzoeker de Hammingafstand berekend.

- b** Bereken hoeveel Hammingafstanden de onderzoeker in totaal heeft berekend.

De onderzoeker zocht naar een verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand van dialecten. In het kaartje in de figuur op de volgende bladzijde zie je een aantal dialecten met stippen aangegeven. In het assenstelsel is voor elk tweetal dialecten de Hammingafstand (in punten) uitgezet tegen de geografische afstand (in km).

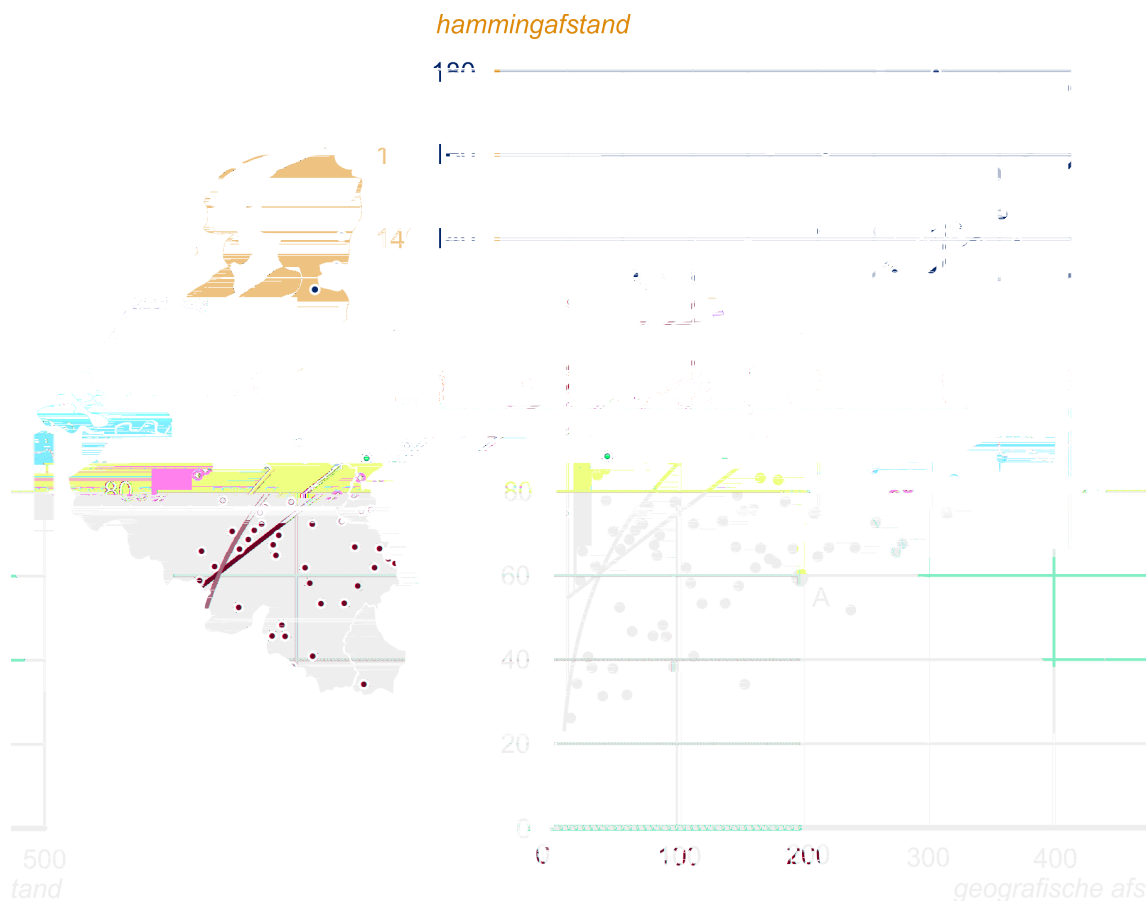
In het assenstelsel kun je zien dat bij punt A de afstand tussen twee plaatsen gelijk is aan 200 km en de Hammingafstand ongeveer gelijk is aan 58.

De onderzoeker heeft op twee manieren geprobeerd het verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand met een wiskundig verband te benaderen. Beide manieren, een lineair verband en een logaritmisch verband, zijn weergegeven in het assenstelsel.

De onderzoeker heeft in het assenstelsel dus ook een grafiek voor een logaritmisch verband getekend. De formule voor dit logaritmische verband is:  $H = -45,88 + 66,44 \log(x)$ .

Hierin is  $H$  de Hammingafstand en  $x$  de geografische afstand in km. Op de getekende rechte lijn liggen de punten (10,55) en (400,145).

- c** Stel met behulp van deze twee punten een formule op voor het lineaire verband in het assenstelsel en bereken met behulp van de formules bij welke geografische afstanden de Hammingafstanden volgens het lineaire en het logaritmische verband gelijk zijn. Rond je antwoord af op gehele kilometers.



De grafiek van het logaritmische verband in het assenstelsel gaat bijvoorbeeld door de punten (50,67), (100,87), (200,107) en (400,127). Hieraan kun je zien dat volgens het logaritmisch verband bij een verdubbeling van de geografische afstand de Hammingafstand steeds met 20 toeneemt. Met behulp van de formule  $H = -45,88 + 66,44 \log(x)$  kun je aantonen dat dit altijd zo is.

- d Toon met behulp van de rekenregels van de logaritmen aan dat  $-45,88 + 66,44 \log(2x)$  ongeveer gelijk is aan  $-45,88 + 66,44 \log(x) + 20$ .

Examen wiskunde A Vwo 2013I

## Energiebronnen

Hout was vroeger de belangrijkste energiebron. In het begin van de negentiende eeuw werd de rol van de belangrijkste energiebron overgenomen door kolen. De laatste jaren is het aandeel van olie en gas in het totale energieverbruik steeds groter geworden. In het boek 'Energie, een economisch perspectief' besteden de schrijvers Th. v.d. Klundert en H. Peer aandacht aan de ontwikkeling van energiebronnen. Zij gebruiken daarbij de variabele  $f$  voor het aandeel van een

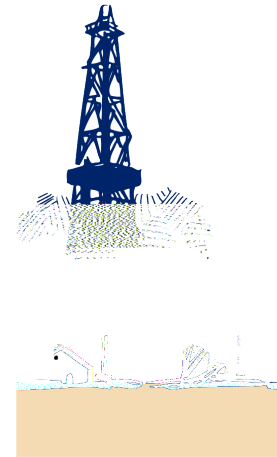
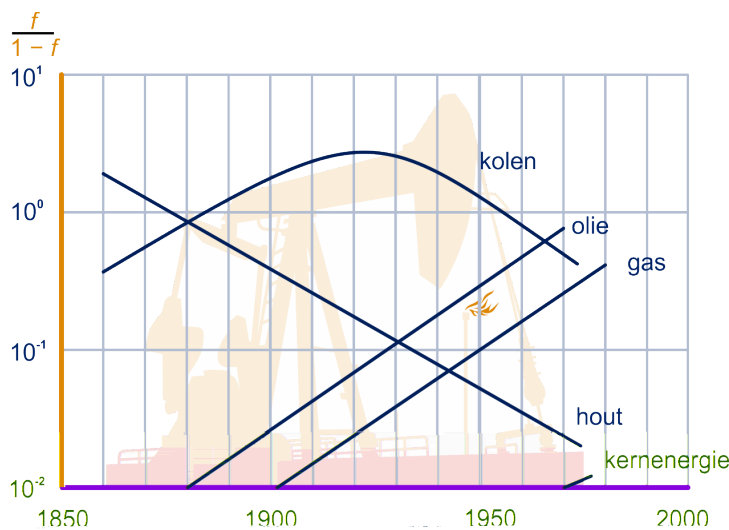


## 15.6 Extra opgaven

energiebron zoals dat zich in de loop van de tijd ontwikkeld heeft ten opzichte van het totale energieverbruik. Dit aandeel  $f$  is een getal waarvoor geldt dat  $0 \leq f \leq 1$ . Hierbij betekent  $f = 0$  dat deze energiebron helemaal niet gebruikt wordt en  $f = 1$  dat uitsluitend van deze energiebron gebruik gemaakt wordt.

In het boek staat een afbeelding zoals in de figuur hieronder.

Door niet  $f$  maar  $\frac{f}{1-f}$  uit te zetten en bovendien op de verticale as een aangepaste schaalverdeling te gebruiken, worden de meeste grafieken rechte lijnen. De figuur hieronder staat ook op het werkblad.



- a** In welk jaar leverde hout 50% van het totale energieverbruik? Licht je antwoord toe.

Met de figuur hierboven hebben de auteurs informatie willen geven over het belang van verschillende energiebronnen door de jaren heen. Opvallend is dat daarbij niet  $f$  maar  $\frac{f}{1-f}$  wordt gebruikt. Dat kan omdat bij elke waarde van  $\frac{f}{1-f}$  precies één waarde van  $f$  hoort. Immers, als  $f$  toeneemt van 0 tot 1, dan stijgt  $\frac{f}{1-f}$  voortdurend.

- b** Toon die laatste bewering aan met behulp van de afgeleide van  $\frac{f}{1-f}$ .

Aan de hand van de figuur kunnen we voor  $f_{\text{hout}}$ , het aandeel van hout in het totale energieverbruik, de volgende formule afleiden:  $\frac{f_{\text{hout}}}{1-f_{\text{hout}}} = 3,03 \cdot 0,96^t$ .

In deze formule is  $t$  in jaren met  $t = 0$  op 1 januari 1850. Het

## 15.6 Extra opgaven

verband tussen  $f_{\text{hout}}$  en  $t$  kan ook in een directe vorm worden weergegeven:  $f_{\text{hout}} = \dots$

c Stel met behulp van de gegeven formule voor hout

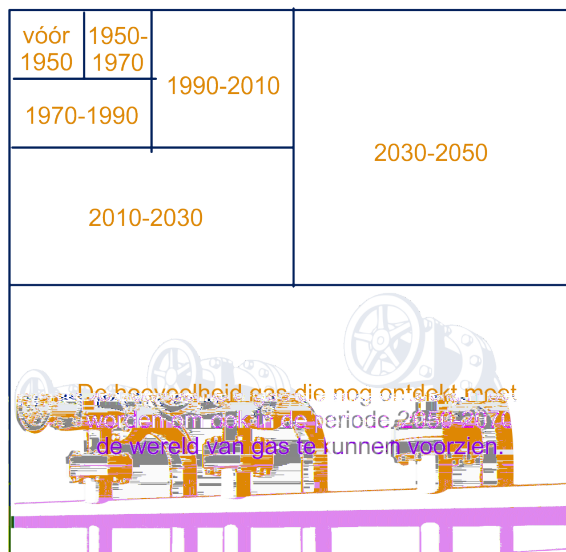
$$\frac{f_{\text{hout}}}{1 - f_{\text{hout}}} = 3,03 \cdot 0,96^t \text{ een formule in een directe vorm voor } f_{\text{hout}} \text{ op.}$$

Dergelijke formules in directe vorm zijn ook op te stellen voor  $f_{\text{olie}}$  en  $f_{\text{gas}}$ , het aandeel van olie respectievelijk van gas in de totale energievoorziening. Deze formules zien er als volgt uit:

$f_{\text{olie}} = \frac{0,0023 \cdot 1,05^t}{1 + 0,0023 \cdot 1,05^t}$   $f_{\text{gas}} = \frac{0,0008 \cdot 1,05^t}{1 + 0,0008 \cdot 1,05^t}$ . Op zeker moment leverden, volgens deze formules, olie en gas samen % van het totale energieverbruik.

d Onderzoek in welk jaar dat het geval is.

De olievoorraden raken uitgeput en het kolenverbruik heeft veel milieuproblemen tot gevolg. Daarom verwacht men dat het gasverbruik in de komende tijd zal blijven toenemen. Al jaren stijgt het gasverbruik jaarlijks met 3,5% en men gaat ervan uit dat dit in de komende tijd niet zal veranderen. Deze stijging betekent dat de huidige gasreserves toereikend zijn tot het jaar 2050. Om er voor te zorgen dat de wereld na 2050 nog voldoende gas kan blijven gebruiken, moeten nieuwe voorraden worden ontdekt. Om een indruk te geven van wat dat laatste betekent, is in het boek 'De grenzen voorbij' de volgende figuur opgenomen.



In deze figuur geeft elk vierkant en elke rechthoek de verbruikte of benodigde hoeveelheid gas voor een bepaalde periode aan.



## 15.6 Extra opgaven

- e Leg met behulp van een berekening uit hoe een jaarlijkse stijging van het gasverbruik met 3,5% in bovenstaande figuur is te herkennen.

Examen Vwo wiskunde A12I

10

Diergemeenschappen in Afrika Er is veel onderzoek gedaan naar de samenstelling van grazende diergemeenschappen in de natuurparken van Afrika. Dergelijke grazende diergemeenschappen worden **gilden** genoemd.

## 15.6 Extra opgaven

gewichtsratio tussen alle elkaar opvolgende soorten constant is.

soort	rangnummer in gewichtsvolgorde	gewicht (kg)
hartebeest	1	1000
kaapse buffel	2	2000
olifant	3	4000

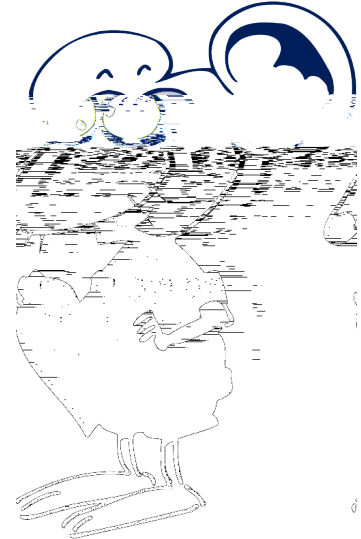
- Bereken de gewichtsratio voor heel Afrika met behulp van de gegevens in de tabel voor hartebeest en Kaapse buffel in twee decimalen nauwkeurig.
- Onderzoek hoeveel soorten in de rangschikking tussen de Kaapse buffel en de olifant sindsdien zijn uitgestorven.

Voor dieren in een natuurpark in Oost-Afrika, het Serengeti park, geldt het volgende verband:  $\log(W) = 0,075N + 0,4$ . Hierin is  $W$  het lichaamsgewicht van een soort in kg en  $N$  is het rangnummer van die soort.

Deze formule kan met behulp van algebra worden omgewerkt tot  $W = b \cdot g^N$ .

- Bereken op deze wijze de waarden van  $b$  en  $g$ . Rond je antwoorden af op één decimaal.

Examen wiskunde B Havo 2009I



11



### Kavelkosten

Een gemeente wil uitbreiden door het bouwen van een nieuwe wijk. De plaats waar de nieuwe wijk gebouwd zal worden, is vastgesteld. Voordat de gemeente het uitbreidingsplan laat uitvoeren, doet de gemeente onderzoek naar de kosten van het plan. Er zijn twee soorten kosten voor de gemeente:

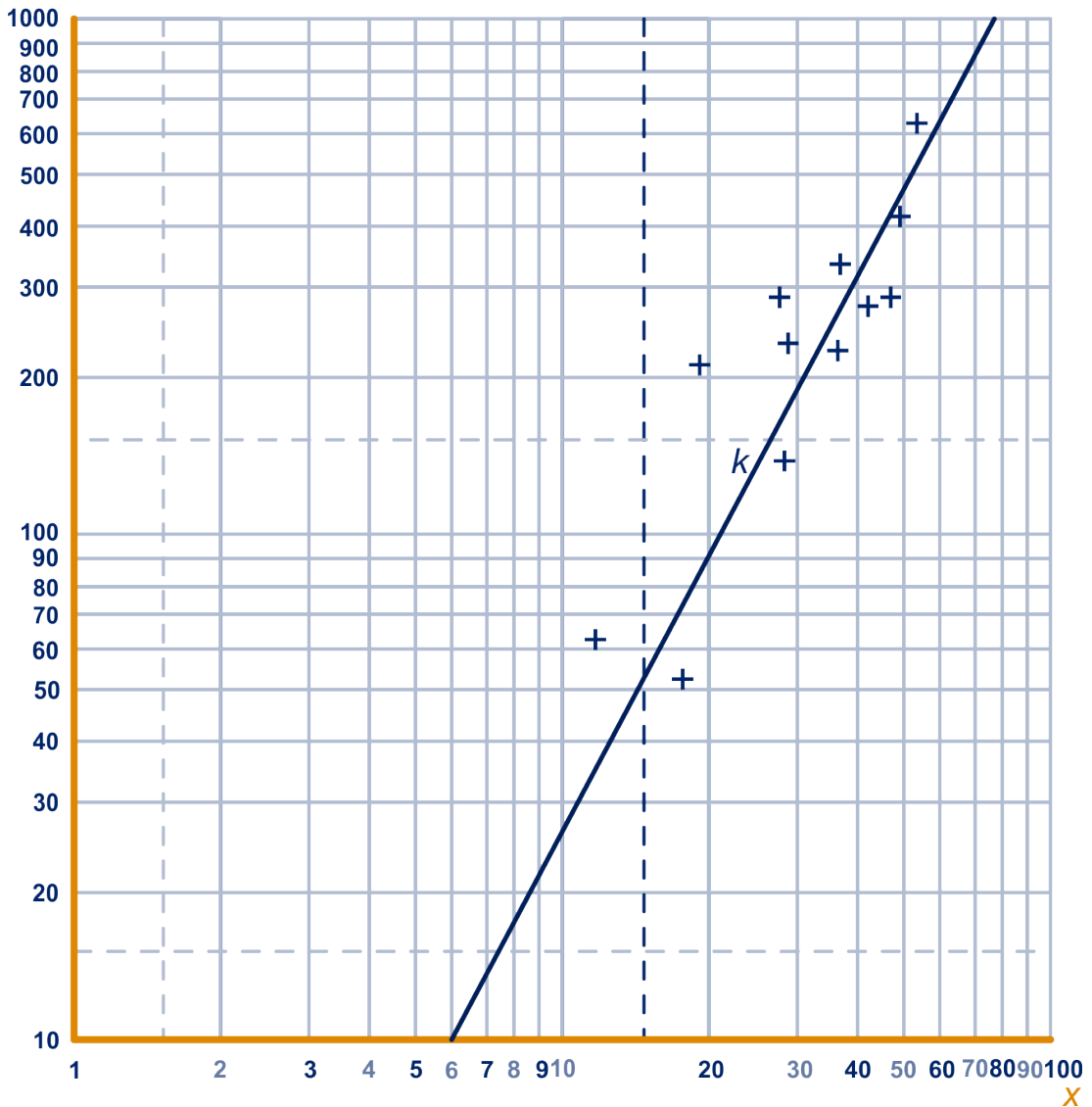
- de kosten van aankoop van de grond. In deze situatie bedragen de kosten 170000 euro per hectare (1 hectare = 10000 m<sup>2</sup>).
- de kosten van het bouwrijp maken. Dit betreft kosten voor de aanleg van bijvoorbeeld wegen, rioleringen en groenvoorzieningen. Deze kosten zijn hoger naarmate het aantal woningen dat per hectare gebouwd zal worden groter is.

In de figuur op de volgende bladzijde zijn kosten van diverse vergelijkbare projecten door middel van plusjes weergegeven. Zowel langs de horizontale als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Hierbij is  $x$  het aantal woningen per hectare.  $B$  stelt voor de kosten per hectare van het bouwrijp maken in duizenden euro. Op grond van de

## 15.6 Extra opgaven

plusjes in de figuur is een grafiek (de lijn  $x$ ) getekend die het verband tussen  $B$  en  $x$  weergeeft. De figuur staat ook op het werkblad.

$b$  (x1000 euro)



De lijn  $k$  beschrijft een theoretisch model waarmee  $B$  kan worden berekend.

De werkelijke kosten bij de onderzochte projecten (de plusjes in de figuur) wijken soms aanzienlijk af van de kosten volgens dit model. Kijk bijvoorbeeld maar naar de kosten van het project dat hoort bij  $x \approx 19$ .

- a Onderzoek of de werkelijke waarde van  $B$  van dit project meer dan 100% afwijkt van de waarde van  $B$  volgens het model.

## 15.6 Extra opgaven

Bij de rechte lijn  $k$ , die door de punten  $(20,90)$  en  $(40,300)$  gaat, hoort een formule van de vorm  $B = p \cdot x^q$ .

**b** Bepaal de getallen  $p$  en  $q$  algebraïsch in twee decimalen.

$$B = 0,4x^{1,8}$$

We gaan er voor het gemak van uit dat alle woningen hetzelfde zullen zijn. De totale kosten per woning voor de gemeente bestaan uit de volgende onderdelen:

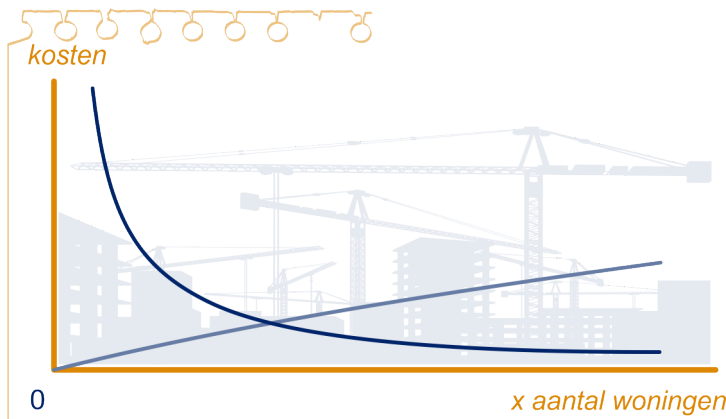
- de aankoopkosten van de grond per woning  $K_A = 170 \cdot x^{-1}$ ,
- de kosten voor het bouwrijp maken van de grond  $K_B = 0,4 \cdot x^{0,8}$ .

In deze formules zijn  $K_A$  en  $K_B$  in duizenden euro.

**c** Laat zien hoe de formules van  $K_A$  en  $K_B$  tot stand zijn gekomen.

In de figuur hieronder zie je een schets van de grafieken van  $K_A$  en  $K_B$ .

Neem aan dat de gemeente er naar zal streven om de totale kosten per woning zo klein mogelijk te maken.



**d** Stel een formule op voor de afgeleide van de functie die de totale kosten per woning weergeeft en onderzoek met behulp daarvan of het minimum van de totale kosten per woning bereikt wordt als  $K_A$  en  $K_B$  even groot zijn.

In de toekomst zal de gemeente nog meer stukken grond aankopen. De grondprijs per ha zal echter in de toekomst kunnen stijgen. Daardoor zal ook het aantal woningen dat per ha gebouwd moet worden om de totale kosten zo klein mogelijk te maken, veranderen. Een ambtenaar onderzoekt dit probleem met zijn grafische rekenmachine. Hij gebruikt daarbij de volgende uitgangspunten:

## 15.6 Extra opgaven

- de grondprijs per ha  $G$  (in duizenden euro) zal tussen 170 en 250 liggen;
- bij iedere grondprijs  $G$  kun je met de formule  $K_T = G \cdot x^{-1} + 0,4x^{0,8}$  berekenen hoe de totale kosten per woning  $K_T = G \cdot x^{-1} + 0,4x^{0,8}$  afhangen van  $x$ , het aantal woningen per ha. Bij iedere waarde van  $G$  is er precies één waarde van  $x$  die de minimale kosten per woning oplevert.

In zijn rapport vermeldt de ambtenaar dat het voor  $G = 230$  het goedkoopst is om 39 woningen per ha te bouwen. Hij heeft daarbij het aantal woningen per ha afgerond op gehelen. Maar er zijn nog meer waarden van  $G$  waarbij de totale kosten per woning minimaal zijn wanneer er (afgerond) 39 woningen per ha gebouwd worden.

- e Onderzoek voor welke waarden van  $G$  dit laatste het geval is. Geef de gevonden waarden van  $G$  in duizenden euro nauwkeurig.

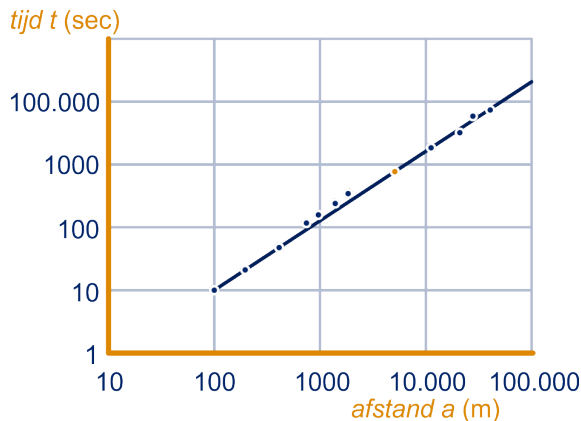
Naar examen Wiskunde Vwo A12 2001II

12



In de figuur hieronder is bij een aantal afstanden de wereldrecordtijd van mannen uitgezet. De schaalverdeling langs beide assen is logaritmisch. De punten liggen vrijwel op een rechte lijn. Deze figuur staat ook op het werkblad.

Een van de punten is gekleurd.



- a Welk record op welke afstand geeft dit weer? Licht je antwoord toe.

Een formule die past bij de getekende grafiek is

$$\log(t) = 1,111 \cdot \log(a) - 1,234.$$

Deze formule is te herschrijven als een formule in de vorm:  $t = p \cdot a^q$ .

## 15.6 Extra opgaven

13

- b** Bepaal de getallen  $p$  en  $q$  in twee decimalen door de formule op algebraïsche wijze te herschrijven.

Bron: Examen wiskunde A12 Havo 2007I

De hoeveelheid water van een regenbui wordt gemeten in inches (1 inch is 2,54 cm). Het regenwater wordt opgevangen in een regenmeter. De hoogte van het water in de regenmeter geeft aan hoeveel regen er gevallen is.

Een onderzoeker heeft voor hevige regenbuien de volgende formule opgesteld:  $R = 16,6 \cdot D^{0,475}$ .

Hierin is  $R$  de hoeveelheid regen in inches en  $D$  de duur van de bui in uren.

De onderzoeker beweert: een hevige bui die 10 keer zolang duurt, geeft 3 keer zoveel regen.

- a** Ga algebraïsch na of dit in zijn algemeenheid waar is.

In verband met overstromingsproblemen (van riolen en dergelijke) is het van belang om ook te letten op de hoeveelheid regen per minuut. Dit wordt de intensiteit  $I$  van een bui genoemd. In formulevorm:  $I = \frac{\text{hoeveelheid regen}}{\text{duur van de bui}}$ . Hierbij is de hoeveelheid regen in inches en de duur van de bui in minuten.

Als de intensiteit  $I$  te hoog is, kunnen er problemen ontstaan met de afvoer van het water. Een intensiteit van 0,1 blijkt in de praktijk al voor grote problemen te kunnen zorgen.

- b** Bereken algebraïsch in twee decimalen hoeveel minuten een hevige bui met  $I = 0,1$  duurt.

Wij willen de formule  $R = 16,6 \cdot D^{0,475}$  omzetten in een verband voor de hoeveelheid regen  $r$  in cm met een duur  $d$  van de bui in minuten.

Zo'n verband is van de vorm  $r = c \cdot d^{0,475}$ , voor een zekere constante  $c$ .

- c** Laat dat op algebraïsche wijze zien en bepaal  $c$  in twee decimalen nauwkeurig.

Bron: Examen Wiskunde A12 Havo 2002II



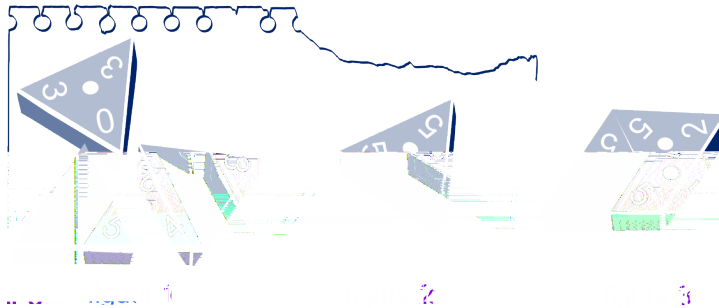
## 15.6 Extra opgaven

14

### Triominos

Het spel Triominos bestaat uit driehoekige stenen. Op elke steen staan drie cijfers, één cijfer bij elke hoek. Dit cijfer kan zijn een 0, 1, 2, 3, 4 of 5. Voor de stenen met drie verschillende cijfers geldt dat met de klok meedraaiend de cijfers in grootte oplopen als je met het kleinste cijfer begint. Zie de steen met de cijfers 2, 4 en 5.

Alle stenen zijn verschillend. Alle mogelijke combinaties van cijfers komen voor.



In figuur 2 zie je een voorbeeld van een steen: de steen 5-5-5. Doel van het spel is zoveel mogelijk stenen passend aan te leggen. Dit betekent dat de cijfers op de twee hoeken die tegen elkaar aan komen te liggen, hetzelfde zijn. In figuur 3 zie je hoe aan de steen 5-5-5 de steen 2-5-5 aangelegd kan worden.

Behalve de steen 2-5-5 zijn er ook andere stenen die je op deze plaats aan de steen 5-5-5 zou kunnen aanleggen.

- Schrijf op welke stenen dit zijn.
- Bereken het aantal stenen in een Trionominosspel.

Naar examen Wiskunde B1 Havo 2008I

15

### Medicijnen

Een huisarts schrijft een patiënt een geneesmiddel voor. De patiënt moet dat geneesmiddel enkele weken achtereen gebruiken. Hij neemt één keer per week op maandagochtend één tablet van 500 mg van het medicijn in. De hoeveelheid medicijn in zijn lichaam neemt exponentieel af. Na precies één week is nog 30% van de oorspronkelijke hoeveelheid medicijn aanwezig in zijn lichaam.

Uit de gegevens is te berekenen dat de groeifactor per 24 uur ongeveer 0,842 is.

- Ga dat algebraïsch na.
- Bereken algebraïsch in hoeveel tijd 40% van het toegediende medicijn in zijn lichaam wordt afgebroken. Rond je antwoord af op een geheel aantal uren.



## 15.6 Extra opgaven

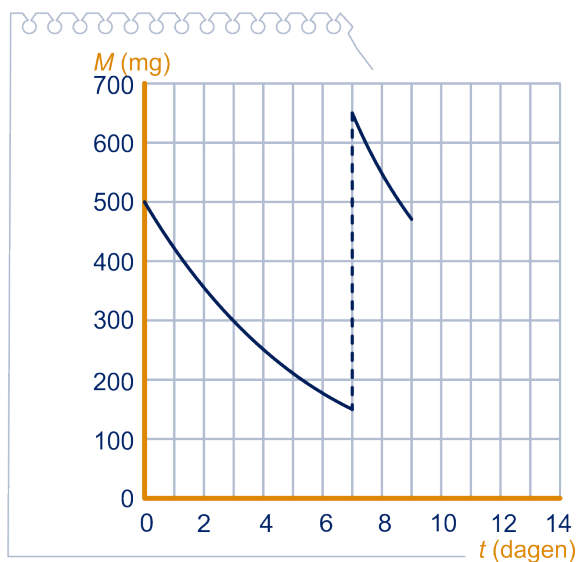
$M(t)$  is de hoeveelheid medicijn in mg in zijn lichaam,  $t$  dagen nadat de eerste tablet is ingenomen.

Er geldt:  $M(t) = 500 \cdot (0,842)^t$ ,  $0 \leq t < 7$ .

Het differentiequotiënt  $\frac{\Delta M}{\Delta t}$  op het tijdsinterval  $[0; 0,01]$  is een benadering van de snelheid waarmee direct na inname van de eerste tablet het medicijn in zijn lichaam wordt afgebroken.

- c Benader met behulp van dit differentiequotiënt de snelheid waarmee direct na inname van de eerste tablet het medicijn in zijn lichaam wordt afgebroken. Geef het antwoord in milligrammen per uur. Rond af op één decimaal.
- d Controleer het antwoord op de vorige vraag met behulp van  $\frac{dM}{dt}$ .

De patiënt neemt elke week een nieuwe tablet van 500 mg in. We nemen aan dat hij dat steeds na precies een week doet. De hoeveelheid medicijn in zijn lichaam neemt na inname weer exponentieel af met groefactor 0,842 per 24 uur. In de figuur hieronder is de grafiek van  $M$  als functie van  $t$  getekend van  $t = 0$  tot  $t = 9$ .



- e Bereken de hoeveelheid medicijn in het lichaam op tijdstip  $t = 10$ . Rond je antwoord af op een geheel aantal milligrammen.
- f Stel een formule op voor  $M(t)$  voor  $14 < t < 21$ .



Hint 7.

Naar examen Wiskunde B1 Havo 2003I



## 15.6 Extra opgaven

16

Floris bouwt met legostenen (alle van hetzelfde formaat) piramides. Hieronder is een piramide met 3 lagen afgebeeld. Neem aan dat de piramides 'hol' zijn. Zo heeft de onderste laag 6 stenen.

Het aantal stenen op de onderste laag van een piramide van  $n$  lagen noemen we  $a_n$ .

Dus  $a_3 = 6$ .



Hint 8.

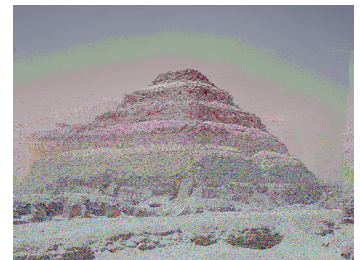
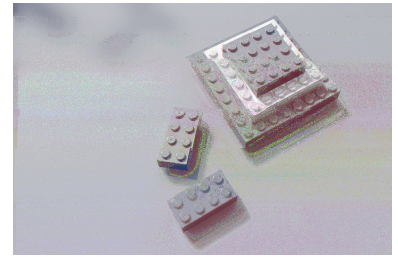
- a Geef een formule voor  $a_n$ .
- b Geef een formule voor het aantal stenen dat nodig is om een piramide van  $n$  lagen te bouwen.

Floris heeft stenen in vijf verschillende kleuren, van elke kleur meer dan genoeg. Hij bouwt piramides met elke laag in één kleur. Elke laag heeft een andere kleur dan de laag er direct boven of direct onder (als die er is).

- c Hoeveel verschillende piramides van vijf lagen kan hij zo maken?
- d Hoeveel verschillende piramides van vijf lagen kan hij maken als de onderste laag ook nog dezelfde kleur als de bovenste laag moet hebben?



Hint 9.

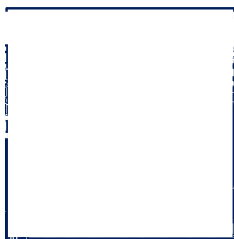
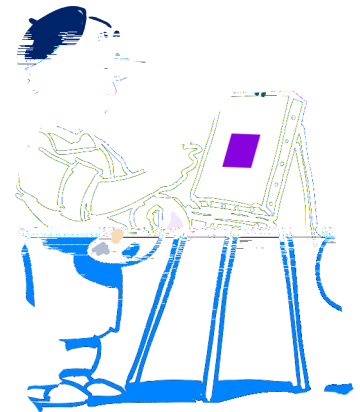


17

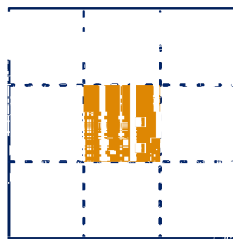
### Kunstwerk

Een kunstenaar maakt een kunstwerk volgens een vastgesteld stappenplan. Hij begint met een geheel wit vierkant doek. Dit is het kunstwerk in fase 0. Hij verdeelt dit doek in 9 vierkanten (zie figuur). Het middelste vierkant geeft hij een andere kleur. Dit is het kunstwerk in fase 1.

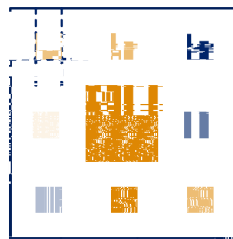
De overige 8 witte vierkanten verdeelt hij ieder opnieuw in 9 kleinere vierkanten en telkens geeft hij het middelste vierkant een door hemzelf gekozen kleur. Nu is het kunstwerk in fase 2. De overgebleven witte vierkanten worden opnieuw in negenen verdeeld en opnieuw worden de middelste vierkantjes gekleurd. Daarmee is het kunstwerk in fase 3.



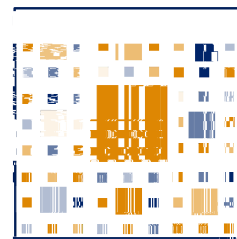
fase 0



fase 1



fase 2



fase 3

## 15.6 Extra opgaven

Het kunstwerk krijgt bij elke fase steeds meer gekleurde vierkantjes. Het aantal vierkantjes dat bij de overgang van fase  $n - 1$  in de nieuwe fase  $n$  gekleurd wordt noemen we  $a_n$ , dus  $a_1 = 1, a_2 = 8, \dots$

**a** Geef een formule voor  $a_n$ .

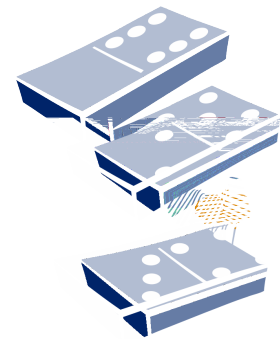
$s_n$  is het totaal aantal gekleurde vierkantjes in fase  $n$ .

**b** Geef een recursieve betrekking voor  $s_n$

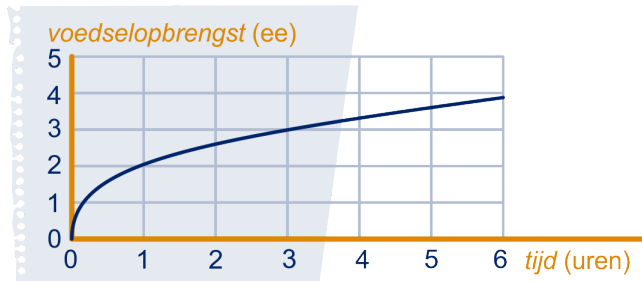
**c** Bereken met de GR het totaal aantal gekleurde vierkantjes van het kunstwerk in fase 10 met behulp van de recursieve formule van het vorige onderdeel. Beschrijf duidelijk je werkwijze.

18

Een dominosteen bestaat uit twee helften, op elke helft staan 0, 1,



## 15.6 Extra opgaven

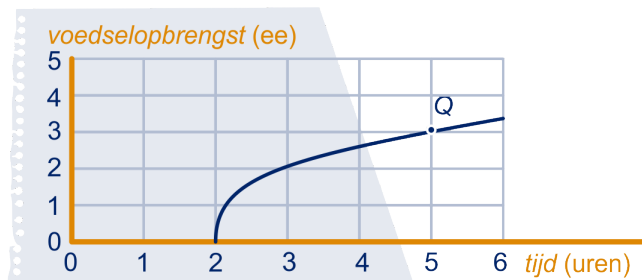


We bekijken een roofdier van soort A. Na 0,5 uur heeft dit roofdier een bepaalde hoeveelheid energie aan voedsel gevangen. Om de dubbele hoeveelheid te vangen is meer dan het dubbele van 0,5 uur nodig.

- a Bepaal met behulp van de figuur hoeveel maal zo groot de daarvoor benodigde tijd is.

Sommige roofdieren leven niet in hetzelfde gebied als hun prooidieren. Zulke roofdieren moeten zich eerst verplaatsen naar hun voedselgebied voordat ze met de jacht kunnen beginnen. De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid voedsel te vangen wordt daardoor uitgebreid met de tijd die nodig is om naar het voedselgebied te gaan. Dit heeft gevolgen voor de gemiddelde opbrengst per uur.

In de figuur hieronder is de grafiek van de opbrengstfunctie van roofdiersoort B getekend. Zoals je in de figuur kunt zien, is een roofdier van deze soort 2 uur onderweg (1 uur heen en 1 uur terug). De figuur staat vergroot op het werkblad.



Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich het punt  $Q$  met coördinaten  $(5,3)$ . Dat wil zeggen dat, als een roofdier van roofdiersoort B 5 uur jaagt (inclusief verplaatsing), dan is zijn voedselopbrengst 3 ee. De gemiddelde voedselopbrengst is dan  $\frac{3}{5} = 0,6$  ee/uur.

- b Bepaal op het werkblad zonder te rekenen nog een punt  $P$  met dezelfde gemiddelde opbrengst als  $Q$ . Licht je werkwijze toe.

## 15.6 Extra opgaven

Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich een punt waarbij de gemiddelde opbrengst per uur voor een roofdier van soort B maximaal is.

- c Bepaal met behulp van de figuur op het werkblad bij welke tijd de gemiddelde opbrengst per uur maximaal is. Licht je antwoord toe.

Naar examen Wiskunde A12 Vwo 2006I

20

### Tandpasta

Drogisterijketen Haarsma verkoopt ‘Hagelwit’ tandpasta. Aan het eind van elke maand koopt Haarsma deze tandpasta in bij de groothandel. Haarsma moet daarvoor elke maand een schatting maken van het aantal tubes dat hij de volgende maand zal verkopen.

In de bedrijfskunde worden verschillende methoden gebruikt om zo’n schatting te maken. Een van die methoden komt in deze opgave aan de orde.



In zeker jaar heeft Haarsma in januari 5200 tubes verkocht en in februari 4000. Een eenvoudig model om de verkoop voor de komende maanden te schatten is het volgende: neem het gemiddelde van de verkoop in de twee voorafgaande maanden.

In een formule:

$$V_{n+2} = \frac{1}{2}V_{n+1} + \frac{1}{2}V_n, \text{ met } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000.$$

Hierbij is  $V_n$  het aantal verkochte tubes tandpasta in maand  $n$ , waarbij  $n = 1$  overeenkomt met januari.

Volgens dit model verwacht Haarsma in maart 4460 tubes te verkopen. Als we aannemen dat de schatting steeds de werkelijke verkoop in die maand is, kunnen we met dit model ook de verkoop van de volgende maanden uitrekenen.

Dat betekent hier dat er in maart inderdaad 4600 tubes tandpasta verkocht worden. En met de getallen 4000 van februari en 4600 van maart kun je met de formule weer de verkoop van april berekenen, enzovoort.

- a Bereken het aantal tubes tandpasta dat volgens dit model in juni wordt verkocht.

Soms besluit men de laatste maand zwaarder te laten meetellen dan de voorlaatste maand. Bij de schatting voor de maand maart telt men bijvoorbeeld februari voor 60% mee en januari voor 40%. De formule wordt dan:

$$V_{n+2} = 0,6V_{n+1} + 0,4V_n, \text{ met } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000.$$

Als met dit model een groot aantal maanden wordt doorgerekend, komen de waarden van  $V$  steeds dichterbij de evenwichtswaarde 4343 te liggen. Dat betekent dat na een

## 15.6 Extra opgaven

aantal maanden de schattingen minder dan 1% van 4343 zullen afwijken.

- b** Bereken in welke maand de schatting voor het eerst minder dan 1% van 4343 afwijkt.

Een algemene vorm van het model ziet er als volgt uit:

$$V_{n+2} = a \cdot V_{n+1} + (1 - a) V_n, \text{ met } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000.$$

Hierbij is  $a$  een getal tussen 0 en 1.

Wanneer we  $a = \frac{1}{2}$  kiezen, krijgen we het model uit het begin van deze opgave.

Als  $a = 0,6$  hebben we het model van de vorige vraag.

De schatting van de verkoop voor de maanden na februari hangt nu af van de waarde van  $a$ . Zo kunnen we bijvoorbeeld  $V_4$ , de schatting voor april, uitdrukken in  $a$ . Dat levert de volgende formule op:

$$V_4 = -1200a^2 + 1200a + 4000.$$

- c** Laat zien hoe deze formule uit de gegevens kan worden afgeleid.
- d** Bereken algebraïsch voor welke waarden van  $a$  de schatting voor april groter is dan 4260.

Examen wiskunde A12 Vwo 2008II, gedeeltelijk

21

### Genius

Genius is een bordspel voor 1 tot en met 4 spelers. Tijdens het spel moeten de spelers tegels op het speelveld plaatsen. Een tegel heeft de vorm van twee zeshoeken die met een zijde aan elkaar vast zitten. Deze tegels zitten in een zak.



Op elke tegel staan twee symbolen. Dat kunnen twee dezelfde symbolen of twee verschillende symbolen zijn. Er zijn zes verschillende symbolen: 12-puntige ster, cirkel, 6-puntige ster, zon, gevulde cirkel en zeshoek. In de figuur hieronder zijn vier tegels afgebeeld.

Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor. Tegel A in de figuur komt dus 5 keer voor. Elke mogelijke

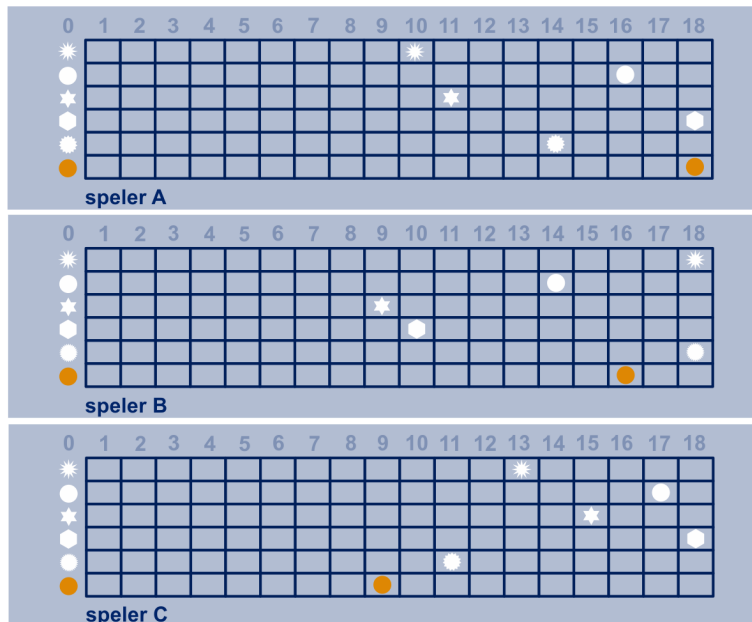
## 15.6 Extra opgaven

tegels met twee verschillende symbolen komt 6 keer voor. Dus bijvoorbeeld de tegel met een cirkel en een 12-puntige ster (tegels B in de figuur) komt 6 keer voor.

- a Bereken het totale aantal tegels dat bij Genius wordt gebruikt.

Elke speler heeft een scorekaart. Daarop wordt voor elk symbool de score, het behaalde aantal punten, bijgehouden. Hoe de punten worden behaald doet hier verder niet ter zake. In de figuur hieronder staan drie scorekaarten.

Bij Genius moet een speler proberen met alle symbolen zo veel mogelijk punten te halen. De eindscore is het aantal punten van het symbool waarmee de speler de minste punten heeft behaald. Winnaar is degene met de hoogste eindscore. Als twee spelers dezelfde eindscore hebben, wordt gekeken naar de op een na laagste score, enzovoort.



In de figuur heeft speler A een eindscore van 10 punten en de spelers B en C ieder 9 punten. Speler A wint dus van de spelers B en C. Speler C wint van speler B omdat de op een na laagste score bij speler C 11 punten is en bij speler B 10.

Op de scorekaarten is ook te zien dat voor elk symbool maximaal 18 punten behaald kunnen worden.

Het spel werd gespeeld door vier spelers. De scorekaart van speler D is niet afgebeeld. Wel weten we dat de gemiddelde score van speler D voor de zes symbolen in dit spel precies 16 punten is.

## 15.6 Extra opgaven

- b** Leg met een getallenvoorbeeld uit dat het mogelijk is dat speler D niet de winnaar is.

Edwin en zijn vrienden zijn helemaal bezeten van dit voor hen nieuwe spel. Zij denken erover om een toernooi te houden. Zij laten daarbij steeds twee spelers tegen elkaar spelen. Aan deze competitie doen 16 spelers mee.

De spelers worden verdeeld over 4 poules van 4 spelers. In elke poule speelt elke speler één keer tegen elke andere speler. Na afloop van de poulewedstrijden gaan de beste twee spelers van elke poule door naar de kwartfinale. In de kwartfinale speelt elke speler maar tegen één andere speler. De winnaars van deze wedstrijden gaan door naar de halve finale.

In deze halve finale speelt weer elke speler één wedstrijd.

De winnaars spelen tenslotte de finale, die ook over één wedstrijd wordt beslist.

- c** Bereken het aantal wedstrijden dat tijdens dit toernooi gespeeld moet worden.

Naar examens wiskunde A12 Vwo 2008II, gedeeltelijk

22

### Al doende leert men

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer zij een handeling vaker verrichten. Bij een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enz.

Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd 12,8 minuten. Dus wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd  $\frac{16+12,8}{2} = 14,4$  minuten. Deze 14,4 minuten zie je in de tabel hieronder. De andere waarden in deze tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.



aantal keren dat handeling A is verricht ( $n$ )	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd in minuten	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7

- a** Bereken met behulp van de tabel hoeveel minuten een werknemer nodig heeft om handeling A voor de 5e keer te verrichten.

We kijken naar de tijd  $T_n$  die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de  $n$ -de keer te verrichten.  $T_n$  kan goed worden benaderd met de volgende formule:

$$T_n = 6 + 10 \cdot 0,68^{n-1}.$$

In deze formule is  $T_n$  in minuten.

## 15.6 Extra opgaven

Aan deze formule kun je zien dat de handelingstijd steeds korter wordt naarmate  $n$  toeneemt. Toch zal er altijd enige tijd nodig blijven om handeling A uit te voeren. Dat betekent dat er op den duur vrijwel geen tijd meer wordt gewonnen.

- b** Bepaal aan de hand van de formule hoeveel minuten de handelingstijd op den duur ongeveer korter zal worden dan de eerste handelingstijd, dus zonder gebruik te maken van GR. Licht je antwoord toe.

De gemiddelde handelingstijd na  $n$  keer noemen we  $H_n$ .

- c** Stel een recursieve formule voor  $H_n$  op en bereken hiermee op de GR  $H_{10}$  in twee decimalen nauwkeurig.

Een directe formule voor  $H_n$  is:  $H_n = 6 + \frac{31,25(1 - 0,68^n)}{n}$ .

We noemen een werknemer ervaren voor handeling A wanneer de gemiddelde handelingstijd minder dan 7 minuten is.

In de industrie wil men graag weten hoe lang het duurt voordat een werknemer zo ver is gekomen.

- d** Bereken hoeveel handelingen een werknemer achter elkaar moet uitvoeren volgens de formule voor  $H_n$  voordat hij ervaren voor handeling A kan worden genoemd.

Naar Examen Wiskunde A12 Vwo 2004II

23

### Grondstofverbruik

Ongeveer dertig jaar geleden verscheen het 'Rapport van de Club van Rome'. Daarin wordt aandacht besteed aan het wereldwijd verbruik van veel grondstoffen. De schrijvers vreesden dat verschillende grondstoffen snel op zouden raken. Bij hun berekeningen hebben zij het begin van het jaar 1970 als uitgangspunt genomen.

Het rapport vermeldt dat begin 1970 de voorraad koper 313 miljoen ton was en dat in 1970 het jaarverbruik van koper 8,7 miljoen ton bedroeg.

De van de voorraad van een grondstof is het aantal jaren vanaf begin 1970 totdat de voorraad van deze grondstof is uitgeput. Daarbij gaan we ervan uit dat er in de tussentijd geen nieuwe voorraden worden ontdekt. Zo is volgens het rapport de levensduur van de voorraad chroom 420 jaar, wanneer je aanneemt dat het jaarlijks verbruik van chroom steeds even groot is als in 1970, namelijk 1,9 miljoen ton.

Als we aannemen dat in de jaren na 1970 ook het jaarlijks verbruik van koper steeds even groot is als dat in 1970, dan is



## 15.6 Extra opgaven

de levensduur van de voorraad chroom veel groter dan die van de voorraad koper.

- a Hoeveel keer zo groot is dan de levensduur van de voorraad chroom, vergeleken met die van de voorraad koper? Licht je antwoord toe met een berekening.

In werkelijkheid was er ook destijds al sprake van een toenemende vraag naar grondstoffen. In het rapport heeft men hier aandacht aan besteed. Zo veronderstelde men dat vanaf 1970 het verbruik van koper jaarlijks zou groeien met 5,8% en het verbruik van chroom jaarlijks met 3,3%.

- b Bereken in dat geval algebraïsch vanaf welk jaar het jaarverbruik van koper minstens 6 keer zo groot is als dat van chroom.

Wanneer het grondstofverbruik niet constant is maar jaarlijks groeit met een vast percentage, wordt de levensduur van de voorraad korter. Deze nieuwe levensduur geven we aan met  $L^*$ . Om  $L^*$  te berekenen gebruikt men de volgende formule:

$$L^* = \frac{230 \cdot \log(L \cdot p + 100) - 460}{p}.$$

In deze formule is  $p$  het percentage waarmee het verbruik jaarlijks groeit en  $L$  de levensduur van de voorraad bij een constant jaarlijks verbruik.

- c Bereken in welk jaar de voorraad chroom is uitgeput indien het verbruik vanaf 1970 jaarlijks met 3,3% groeit.

Over de grondstof aluminium staat in het rapport het volgende te lezen:

$$\begin{array}{r} 1,19 \cdot 10^9 \\ 6,1 \\ , \end{array}$$

- d Bereken algebraïsch in welk jaar de voorraad aluminium uitgeput zou zijn indien het jaarverbruik vanaf 1970 constant was gebleven. Gebruik daarbij de formule voor  $L^*$ .

Zoals hierboven al vermeld, was in 1970 het jaarverbruik van koper 8,7 miljoen ton. Verder ging men ervan uit dat het verbruik van koper vanaf 1970 jaarlijks zou groeien met 5,8%. Het totale verbruik in de eerste  $n$  jaren na 1970 noemen we  $T_n$  (in miljoenen tonnen).

Dan moet gelden:  $T_n - T_{n-1} = 8,7 \cdot 1,058^{n-1}$ , voor  $n \geq 1$ .

- e Leg dat uit.

We definiëren  $S_n = 150 \cdot (1,058)^n - 150$ .

We willen laten zien dat  $S_n = T_n$  voor  $n = 1, 2, \dots$  (dan hebben

## 15.6 Extra opgaven

we ook een directe formule voor  $T_n$ ).

- f Toon algebraïsch aan dat  $S_n$  voldoet aan de gelijkheid  $S_n - S_{n-1} = 8,7 \cdot 1,058^{n-1}$ .

Omdat  $S_1 = 8,7$ , geldt  $S_n = T_n$  voor alle  $n \geq 1$ .

Dus  $T_n = 150 \cdot 1,058^n - 150$  een directe formule voor  $T_n$ .

Naar Examen Wiskunde A12 Vwo 2003I

24

Hiernaast zie je enkele puzzelstukjes van een legpuzzel van Europa. Als je aan een puzzel begint, kan je besluiten om de puzzelstukjes eerst op soort te selecteren: de hoekstukjes, de randstukjes en alle andere stukjes.

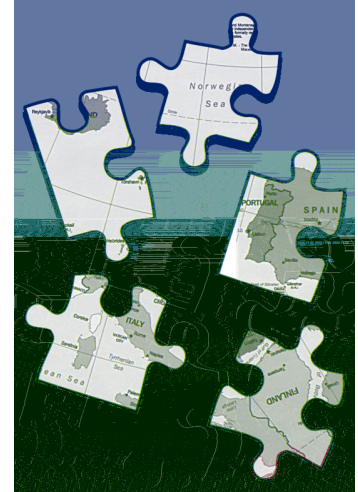
Deze soorten kunnen verschillende vormen hebben.

Om te onderzoeken hoeveel verschillende vormen er eigenlijk zijn, voeren we een aantal regels in.

- We beschouwen de puzzelstukjes als vierkantjes;
- Een zijde kan recht zijn of met een inkeping of met een uitstulping;
- Bij een hoekstukje heb je twee aan elkaar grenzende rechte zijden (zie het stukje rechtsonder op de foto), bij een randstukje is één zijde recht (zie het stukje linksonder op de foto) en bij de overige puzzelstukjes is er geen enkele zijde recht;
- Twee stukjes hebben een gelijke vorm als ze door draaiing (over een kwart-, halve of driekwartslag) in elkaar overgaan. De twee puzzelstukjes linksboven en midden boven op de foto hebben beide twee inkepingen en twee uitstulpingen maar zijn toch verschillend van vorm;
- Stukjes die alleen door op de kop te leggen en niet door draaiing in elkaar over kunnen gaan, noemen we wel verschillend van vorm aangezien er op de achterkant niet de kaart van Europa staat.

Bereken hoeveel verschillende vormen er in het totaal volgens bovenstaande regels zijn.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven



25

### Fruitvliegjes (2)

Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (*Drosophila melanogaster*). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken.

Het aantal fruitvliegjes neemt de eerste weken exponentieel

## 15.6 Extra opgaven

toe. Bij een praktische opdracht tellen leerlingen uit 5vwo na 2 weken 140 fruitvliegjes en na 5 weken 1065 fruitvliegjes. Bij deze gegevens is een exponentiële formule te maken voor het aantal fruitvliegjes  $F$  na  $t$  weken.

- a Geef deze formule. Licht je antwoord toe.

In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Het maximale aantal fruitvliegjes is afhankelijk van de grootte van de kweekruimte. Een ander experiment, dat werd gestart op 10 november 2011, werd in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij het vervolg van deze opgave gaan we uit van de volgende formule die het aantal fruitvliegjes bij dit experiment beschrijft:

$$F = \frac{340}{1 + 54 \cdot e^{-0,24t}}$$

Hierbij is  $t$  de tijd in dagen na 10 november 2011 en  $F$  het aantal fruitvliegjes.

- b Welke aantallen fruitvliegjes zijn volgens bovenstaande formule in de kweekruimte mogelijk? Licht je antwoord toe.
- c Bereken langs algebraïsche weg in één decimaal de waarde van  $t$  waarvoor  $F(t) = 300$ .

Fruitvliegjes zijn met een beetje etherdamp gemakkelijk te verdoven waarna je ze kan tellen en met een loep bestuderen. Op de dag dat er de meeste fruitvliegjes bijkomen wil Boris ze verdoven.

- d Toon aan dat de afgeleide van  $F$  gelijk is aan

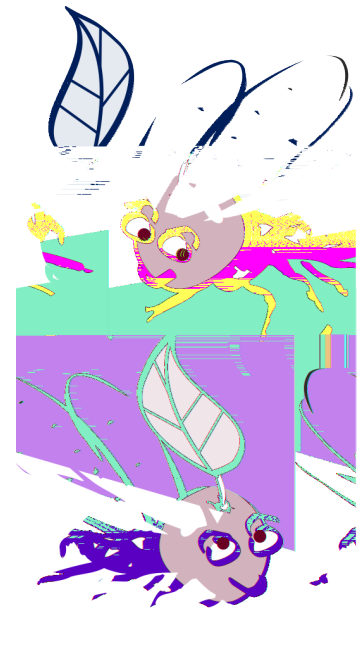
$$F'(t) = \frac{4406,4 \cdot e^{-0,24t}}{(1 + 54 \cdot e^{-0,24t})^2}$$

en bereken met behulp van deze afgeleide op welke datum er de meeste fruitvliegjes bijkomen.

Een andere reden dat vaak gebruik gemaakt wordt van fruitvliegjes is dat een aantal eigenschappen goed zichtbaar zijn: oogkleur (rood/zwart), vleugelvorm (kort/lang) en huidskleur (donker/geel). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: **z-k-g**. Op basis van deze eigenschappen zijn er acht typen mannetjes en acht typen vrouwtjes.

Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:

- De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.



## 15.6 Extra opgaven

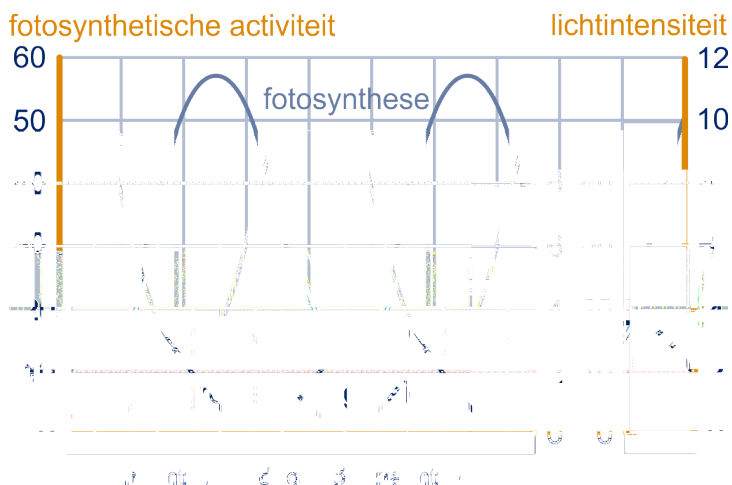
- De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
- e Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

Naar SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

26



Van een bepaald soort ééncellige algen (*Gonyaulax polyedra*) is het dag-ennachtritme onderzocht. De algen werden blootgesteld aan afwisselend 12 uur licht en 12 uur donker. Deze perioden noemen we respectievelijk dag en nacht. In de figuur zijn resultaten van dit onderzoek te zien. De figuur staat ook op het werkblad.



Eén van de gemeten activiteiten is fotosynthese, het opslaan van energie met behulp van (zon)licht. De intensiteit van de fotosynthese is weergegeven op de linker verticale as.

De grafiek voor de fotosynthese  $F$  als functie van de tijd, kan benaderd worden door een formule van de vorm:

$$F = a + b \sin(c(t - 3)).$$

Hierbij is  $t$  de tijd in uren met  $t = 0$  bij het begin van een dag.

a Stel deze formule op. Licht je antwoord toe.

Sommige algen lichten vanzelf op in het donker. Dit verschijnsel, gloeien genaamd, is in de figuur ook met een grafiek weergegeven. De lichtintensiteit  $G$  werd gemeten in eenheden die langs de rechter verticale as zijn uitgezet. Men kan de grafiek van het gloeien benaderen met de formule:

$$G = 2,0 + 1,6 \sin\left(\frac{1}{12}\pi(t - 18)\right).$$

Hierin is  $t$  weer de tijd in uren met  $t$  bij het begin van een dag. Tijdens iedere periode van 24 uur is de lichtintensiteit van het gloeien gedurende een bepaalde tijd groter dan 3 eenheden.

## 15.6 Extra opgaven

- b Bereken met behulp van de formule van  $G$  hoe lang de lichtintensiteit van het gloeien in een periode van 24 uur groter is dan 3 eenheden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

De lichtintensiteit bij gloeien is na een maximum eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

- c Onderzoek met behulp van een raaklijn aan de grafiek op het werkblad met welke snelheid de lichtintensiteit maximaal afneemt bij gloeien.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

27

Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. Iemand die last heeft van hooikoorts, reageert op zogenoemde pollen in de lucht, die afkomstig zijn van bomen en grassen die in bloei staan. De allergische reactie veroorzaakt naast irritatie aan ogen, neus en keel ook hoest- en niesbuien.

PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht.

Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we  $C$ . In de figuur hiernaast zie je een schets van de grafiek van  $C$  (in  $\text{mg}/\text{cm}^3$  als functie van  $t$  in uren). Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit verloop redelijk benadert:

$$C_1(t) = \frac{16t}{190t^2 + 60}.$$

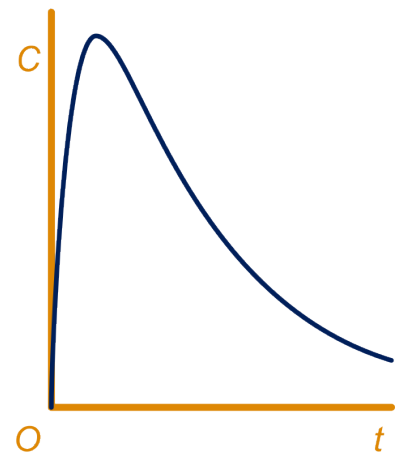
Hierin is  $C_1$  de concentratie werkzame stof in  $\text{mg}/\text{cm}^3$  en  $t$  de tijd in uren na het innemen van de pil.

- a Bereken met behulp van de afgeleide van  $C_1$  na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof:

$$C_2(t) = 0,13 (e^{-0,65t} - e^{-3,9t}).$$

Hierin is  $C_2$  de concentratie werkzame stof in  $\text{mg}/\text{cm}^3$  en  $t$



## 15.6 Extra opgaven

Aan de schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

- b** Beredeneer aan de hand van de formules van  $C_1$  en  $C_2$  dat de werkzame stof volgens **beide** formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen.

Hoewel de grafieken van  $C_1$  en  $C_2$  beide erg op de grafiek in de figuur lijken, verschillen de momenten waarop het maximum bereikt wordt wel van elkaar.

- c** Onderzoek met behulp van de afgeleide  $\frac{dC_2}{dt}$  of het maximum van  $C_1$  eerder of later dan het maximum van  $C_2$  optreedt.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

28

### De gulden snede

In de wiskunde is de volgende rij getallen erg bekend:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Deze rij getallen staat bekend als de rij van Fibonacci (Pisa, 1170-1250). Elk getal in deze rij is te berekenen door de twee voorgaande getallen op te tellen. In formulevorm ziet dit er als volgt uit:  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ , met  $u_1 = u_2 = 1$ .

Je kunt dit eenvoudig narekenen bij het begin van de rij:

$$2 = 1 + 1,$$

$$3 = 2 + 1,$$

$$5 = 3 + 2,$$

$$8 = 5 + 3,$$

enzovoort.

Het is duidelijk dat de getallen in de rij van Fibonacci steeds groter worden.

- a** Bereken hoeveel getallen in de rij van Fibonacci een waarde hebben tussen 100 en 500.

De rij van Fibonacci heeft veel bijzondere eigenschappen. Zo heeft de rij die je krijgt door steeds de verhouding van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci te nemen een grenswaarde  $G$ . Het gaat dan om de rij  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$  enzovoort. De waarde van deze breuken is op den duur ongeveer gelijk aan 1,618. Vanaf een zeker moment ligt deze verhouding tussen 1,6180 en 1,6181. Deze grenswaarde  $G$  is, met name in de kunst, bekend geworden als de gulden snede.

- b** Bereken vanaf welk tweetal opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci de verhouding ligt tussen 1,6180 en 1,6181.





## 15.6 Extra opgaven

In de 19e eeuw deed Fechner onderzoek naar de esthetische waarde die door velen aan de gulden snede wordt toegekend. Hij liet een aantal mensen rechthoeken zien waarvan de verhouding tussen de lengte en de breedte telkens verschillend was. Aan deze mensen werd gevraagd welke rechthoek zij het mooist vonden. Uit het onderzoek bleek dat rechthoeken waarvan de verhouding van de lengte en de breedte ongeveer de gulden snede opleverde, het meest werden uitgekozen. Mede op grond van deze resultaten stelde Petrov een formule op waarmee hij deze voorkeur wilde uitdrukken in een getal. Hij noemde dit de appreciatiewaarde  $A$  van de rechthoek en kwam met de volgende formule:

$$A = \left( \frac{1}{v} - 1 \right) \cdot \log \left( 1 - \frac{1}{v} \right).$$

In deze formule is  $v$  de verhouding tussen de langste zijde en de kortste zijde van de rechthoek, dus

$$v = \frac{\text{verhouding langste zijde}}{\text{verhouding kortste zijde}}.$$



De afmetingen van het schilderij „De Nachtwacht“ van Rembrandt van Rijn zijn 363 cm bij 437 cm. De afmetingen van „Oog“, een litho van M.C. Escher, zijn 141 cm bij 198 cm.

- c Bereken welk van deze twee kunstvoorwerpen de grootste appreciatiewaarde heeft volgens de formule van Petrov.

Het schilderij „Moment“ van Barnett Newman heeft een appreciatiewaarde van 0,1544 en de langste zijde van dit schilderij is 762 cm. Die langste zijde is meer dan 3 meter langer dan de kortste zijde.

- d Bereken de lengte van de kortste zijde van „Moment“.

De formule van Petrov werd oorspronkelijk op een iets andere manier opgeschreven dan hierboven vermeld. Hieronder staan drie verschillende mogelijkheden A, B en C voor die

## 15.6 Extra opgaven

oorspronkelijke schrijfwijze. Slechts één van de drie komt overeen met de formule die hierboven vermeld wordt.

A.  $A = \left( \frac{v-1}{v} \right) \cdot \log \left( \frac{v}{v-1} \right)$

B.  $A = \left( \frac{1-v}{v} \right) \cdot \log \left( \frac{v}{v-1} \right)$

C.  $A = \left( \frac{v}{v-1} \right) \cdot \log \left( \frac{v-1}{v} \right)$ .

- e Welke van deze formules komt overeen met de formule van Petrov? Licht je antwoord toe.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

29

### Tanken

De onderstaande tekst is afkomstig uit een artikel uit een landelijk dagblad van augustus 1997.

... De enige reden waarom de benzine in Nederland niet veel duurder mag zijn dan in België of in Duitsland is het benzinetoerisme. Hoe groter het prijsverschil, hoe meer kilometers mensen afleggen om goedkoop te tanken aan gene zijde. Stel de prijs in Nederland is 5 gulden per liter en die in Duitsland is 2 gulden per liter. Dan levert een volle tank van 50 liter een voordeel op van 150 gulden. Bij een verbruik van 1 op 10 betaalt een benzinetoerist 20 cent per kilometer aan benzine (de Duitse prijs) en kan hij voor het uitgespaarde bedrag 750 kilometer rijden, dat is 375 km heen en weer. Bij een dergelijk prijsverschil zou zelfs iemand uit Den Helder nog in Duitsland kunnen gaan tanken, ware het niet dat hij met een halfvolle tank zou moeten

Om meer inzicht te krijgen in de voor- en nadelen van „tanken in het buitenland“ bekijken we in de vragen a en b een vereenvoudigd voorbeeld:

Jan gebruikt zijn auto voor het doen van boodschappen en voor het afleggen van familiebezoekjes in de directe omgeving. Jan woont op 200 km afstand van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation. Hij maakt een aparte rit als hij in het buitenland gaat tanken. Als hij in Nederland tankt, hoeft hij daar niet extra voor te rijden. Hij rijdt 1 op 10, dat wil zeggen dat zijn auto met 1 liter benzine 10 km rijdt. Als hij tankt, tankt hij altijd precies 50 liter.

Ga uit van de in het artikel genoemde benzineprijzen.

Jan redeneert op de manier van het artikel: „mijn voordeel is 3 gulden per liter; zelfs als ik daar de kosten van het heen en weer rijden van aftrek, heb ik nog voordeel”.

- a Laat met een berekening zien dat het voordeel van Jan per keer dat hij in het buitenland gaat tanken volgens deze redenering 70 gulden bedraagt.

Jan merkt al snel dat er iets mis is met zijn redenering. Hij is meer geld kwijt dan toen hij in Nederland tankte. Om een



## 15.6 Extra opgaven

eerlijke vergelijking te maken tussen tanken in Nederland en tanken in het buitenland moet hij voor beide situaties de kosten berekenen per gebruikskilometer. Een gebruikskilometer is elke afgelegde kilometer die niet gereden wordt om te tanken. In Jans geval is er dus sprake van het afleggen van gebruikskilometers bij bijvoorbeeld familiebezoekjes of boodschappen doen.

- b** Hoe groot is het voordeel per gebruikskilometer bij tanken in Nederland vergeleken met tanken in het buitenland voor Jan? Licht je antwoord toe met een berekening.

We bekijken nu een wat algemenere situatie: de benzineprijs in Nederland noemen we  $N$  (in gulden per liter), de benzineprijs in het buitenland noemen we  $B$  (in gulden per liter) en de afstand tot het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation noemen we  $x$  (in km). Voor het voordeel bij tanken in het buitenland  $V$  (in gulden) per gebruikskilometer geldt dan:

$$V = 0,08N - \frac{25 \cdot B}{312,5 - x}.$$

Hierbij gaan we ervan uit dat:

- autos 1 op 12,5 rijden: elke auto rijdt 12,5 km op 1 liter benzine;
- een eigenaar van een auto bij een tankbeurt altijd 50 liter tankt;
- een eigenaar van een auto altijd een aparte rit maakt om in het buitenland te tanken;
- een eigenaar van een auto niet extra hoeft te rijden om in Nederland te tanken.

- c** Toon aan dat deze formule juist is.

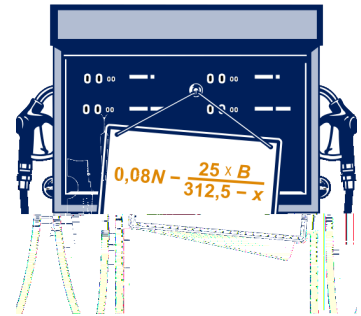
Men wil de benzineprijs in Nederland zodanig vaststellen dat er geen voordeel bij tanken in het buitenland is voor mensen die 15 kilometer of verder van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation wonen. De benzineprijs in Nederland is dan een vast percentage hoger dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland.

- d** Toon dat aan.

De literprijs van benzine verandert met grote regelmaat. Daarmee verandert ook de afstand tot het dichtstbijzijnde tankstation in het buitenland waarbij er geen voordeel of nadeel is om daar te gaan tanken.

- e** Toon aan dat uit  $V = 0,08N - \frac{25 \cdot B}{312,5 - x}$  volgt dat deze afstand gelijk is aan  $312,5 \cdot \left(1 - \frac{B}{N}\right)$ .

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven



## 15.6 Extra opgaven

30



### Lawaaitrauma

Als je langdurig harde geluiden hoort, kunnen klachten ontstaan, zoals stress of gehoorbeschadiging. Men spreekt dan van een lawaaitrauma.

In Noorwegen bleek het aantal militairen met een lawaaitrauma tussen 1 januari 1982 en 1 januari 1988 te zijn verdubbeld.

Op 1 januari 1982 hadden 4500 van hen een aantoonbaar lawaaitrauma.

Neem aan dat het aantal militairen met zo'n trauma in de periode 1982-1988 exponentieel toenam.

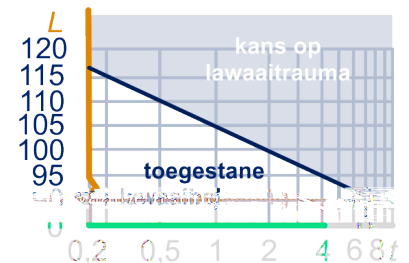
- a Bereken het aantal militairen dat op 1 januari 1985 een lawaaitrauma had. Rond je antwoord af op honderdtallen.

In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidsstrektes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag (een werkdag) wordt blootgesteld, een lawaaitrauma kunnen opleveren.

Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:

- bij een voortdurende geluidsstrekte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidsstrekte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

In de figuur hiernaast is een lijn getekend. Deze lijn geeft het verband weer tussen de geluidsstrekte en de maximaal toegestane werktijd, zoals die gebruikt wordt voor industriellawaai in de VS. Op de horizontale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.  $L$  is de geluidsstrekte in dB en  $t$  is de maximaal toegestane werktijd in uren.



De Europese norm is sinds enkele jaren strenger dan de norm van de VS:

- bij een voortdurende geluidsstrekte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidsstrekte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

Op het werkblad is rechte de lijn, behorend bij de norm van de VS in een assenstelsel getekend.

- b Teken in dit assenstelsel de rechte lijn die bij de Europese norm hoort.

## 15.6 Extra opgaven

De formule die hoort bij de in de figuur getekende lijn is  
 $L = -16,6 \cdot \log(t) + 105$ .

In Amerika en Europa staan twee fabrieken met voor de werknemers precies dezelfde geluidssterkte. In de Amerikaanse fabriek mag men vanwege de geluidssterkte maximaal 6 uur per dag werken.

- c Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

31

### Sauna

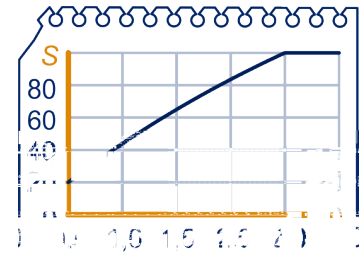
Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Voor het opwarmen geldt de formule

$$S = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$$

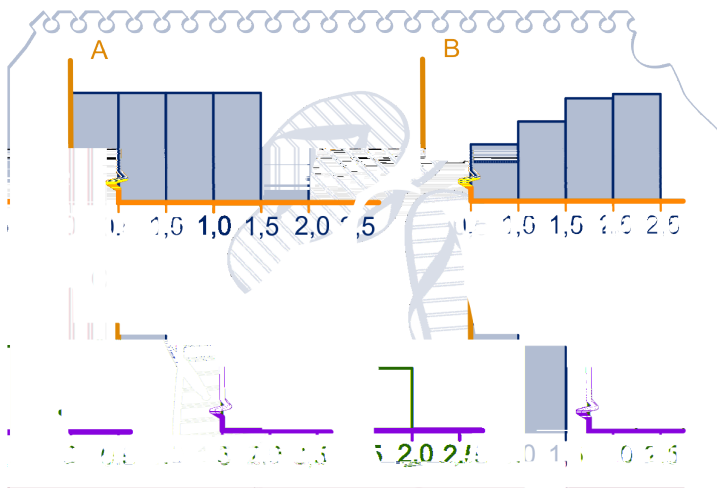
Hierin is  $S$  de temperatuur in de sauna in graden Celsius en  $t$  de tijd in uren vanaf 15.00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op  $100^\circ\text{C}$ . Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden. In de figuur hiernaast staat de grafiek van  $S$ .

- a Bereken algebraïsch hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.



Om na te gaan hoe de opwarming van de sauna verloopt, wil men kijken naar een toenamediagram dat hierbij hoort. In de figuur hieronder zie je vier toenamediagrammen, allemaal met een stapgrootte van een half uur, voor de periode van 15.00 uur tot 17.30 uur.



## 15.6 Extra opgaven

- b Welk van de geschetste diagrammen is het juiste toenamediagram? Licht je antwoord toe.

Als je in de grafiek van  $S$  naar het opwarmen kijkt, lijkt de temperatuur afnemend te stijgen.

- c Onderzoek met behulp van differentiëren of deze conclusie juist is.
- d Bereken  $S'(1)$ , afgerond op 1 decimaal en geef de betekenis ervan in deze situatie.

Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die  $t$  uitdrukt in  $S$ .

- e Druk  $t$  uit in  $S$ .

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

32

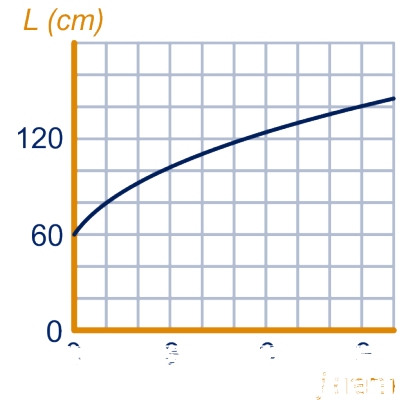
### Lengte van jongetjes

Een onderzoeker heeft gegevens verzameld over de gemiddelde lengte van jongetjes van 0 tot 10 jaar in Nederland. In de figuur hiernaast zie je het verband tussen de gemiddelde lengte  $L$  en de leeftijd  $j$ .

De formule die het verband tussen  $j$  en  $L$  beschrijft is:

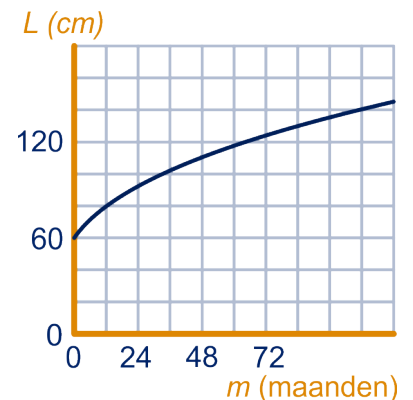
$$L = p + q\sqrt{j} \text{ waarin } p \text{ en } q \text{ getallen zijn.}$$

- a Bereken de waarden van  $p$  en  $q$ .



De onderzoeker is vooral geïnteresseerd in het verband tussen lengte en leeftijd in de eerste maanden na de geboorte. Zij maakt daartoe de grafiek van de tweede figuur hiernaast.

- b Teken met behulp van de formule een grafiek van het verband tussen de gemiddelde lengte  $L$  en de leeftijd  $m$  in maanden voor het eerste levensjaar.
- Neem op de horizontale as 1 cm voor elke maand en op de verticale as 1 cm voor elke 5 cm lengte (gebruik een scheurlijijn).



Uit de gegeven formule die het verband tussen  $L$  en  $j$  beschrijft, is een vergelijkbare formule af te leiden van het verband tussen  $L$  en  $m$ .

- c Stel een formule op die het verband tussen  $L$  en  $m$  beschrijft.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

## 15.6 Extra opgaven

33

### Onnodig ingewikkeld?

Een gezonde volwassene is 's morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie  $S$ :

$$S = \ln(-0,00216t + 2,7183).$$

Hierin is  $t$  het aantal uren nadat een persoon is opgestaan en  $S$  de verhouding tussen de lengte  $L$  van die persoon ten opzichte van zijn lengte  $L_0$  bij het opstaan.

$$\text{Dus } S = \frac{L}{L_0}.$$

Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm.

- a Bereken algebraïsch na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

We gaan er in het vervolg van de opgave van uit dat een persoon na het opstaan 16 uur actief is, dus na 16 uur weer gaat slapen.

In de figuur hiernaast is de grafiek van  $S$  als functie van  $t$  getekend. Deze grafiek lijkt zo op het eerste gezicht een rechte lijn, maar door de formule is bekend dat dit niet zo is.

- b Stel de formule voor de afgeleide van  $S$  op en toon met behulp van deze afgeleide aan dat er bij  $S$  voor  $0 \leq t \leq 16$  sprake is van daling. Onderzoek vervolgens of het hier om toenemende of afnemende daling gaat.

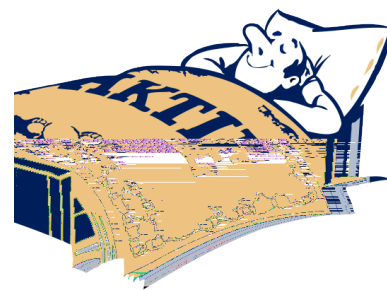
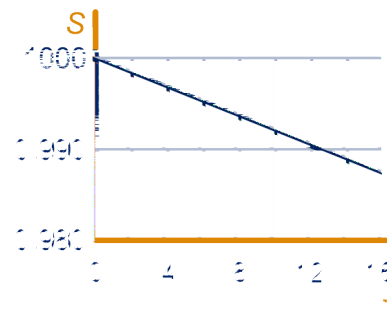
De grafiek van  $S$  valt nagenoeg samen met de rechte lijn door de punten  $(0; 1,0000)$  en  $(16; 0,9872)$ .

Is de formule van  $S$  met de natuurlijke logaritme, zoals gepubliceerd door de Australische wetenschapper, niet onnodig ingewikkeld? We zouden voor  $S$  ook gewoon een lineaire functie van  $t$  kunnen nemen.

We vergelijken daarom de formule  $S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$  met de formule  $S = -0,0008t + 1,0000$  die hoort bij de rechte lijn door de punten  $(0; 1,0000)$  en  $(16; 0,9872)$ . Om de twee formules met elkaar te vergelijken, wordt de verschilformule  $V$  opgesteld.

$$V = \ln(-0,00216t + 2,7183) - (-0,0008t + 1,0000)$$

We nemen weer meneer Jansen, met een lengte van 170,0 cm bij het opstaan, als voorbeeld. Met behulp van  $V$  kun je op elk tijdstip  $t$  (met  $0 \leq t \leq 16$ ) het verschil tussen de uitkomsten van



## 15.6 Extra opgaven

beide formules bekijken.

c Bereken de maximale waarde van dit verschil.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

34



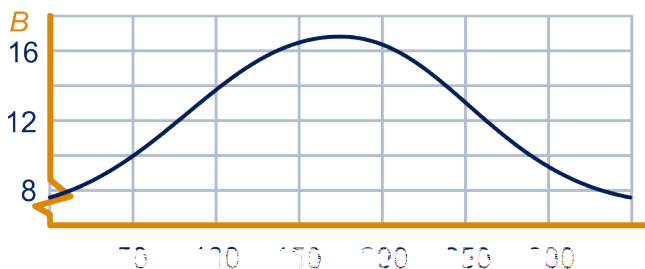
Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezonning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkenloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw van andere gebouwen staan. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. In de tabel hieronder is af te lezen hoeveel dagen elke kalendermaand telt.

maand	aantal dagen	maand	aantal dagen	maand	aantal dagen
jan.	31	april	30	september	30
febr.	28	mei	31	oktober	31
march	31	juni	30	november	30
april	30	juli	31	december	31

Hieronder is het dagelijks aantal uren zonschijn  $B$  bij een altijd wolkenloze hemel uitgezet tegen het nummer van de dag  $n$ ; hierbij geldt  $n = 1$  voor 1 januari.

Voor  $B$  geldt de formule:

$$B = 12,3 + 4,6 \cdot \sin(0,0172 \cdot (n - 80))$$



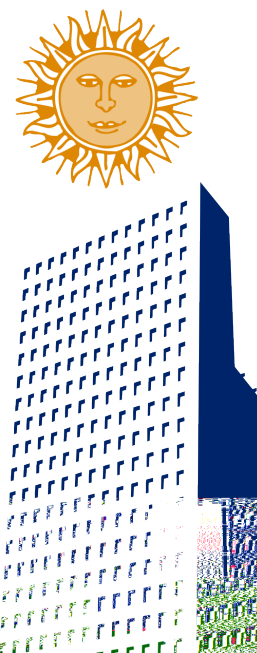
Op 30 januari komt de zon op om 8:27u.

- Bereken met behulp van de formule het tijdstip waarop de zon op 30 januari onder gaat in minuten nauwkeurig.
- Toon door berekening aan dat 13 april de eerste dag van het jaar is dat de zon langer dan 14 uur schijnt.

Er is een groot verschil tussen het maximale en het minimale dagelijkse aantal uren zonschijn.

- Bereken aan de hand van de formule voor  $B$  dit verschil in minuten nauwkeurig.

Gevels aan weerszijden van een rechthoekig gebouw kunnen niet tegelijkertijd door de zon beschenen worden. Ook is het zo dat, als de zon schijnt, òf de noord-gevel òf de zuid-gevel



## 15.6 Extra opgaven

zonlicht ontvangt. (Uiteraard geldt zoiets ook voor oost- en westgevel maar dat is hier niet van belang.)

In de grafiek hieronder is ook het dagelijks aantal bezonningsuren voor een noordgevel uitgezet; zie de grafiek

$B_{\text{noord}}$

## 15.6 Extra opgaven

### Schoksgewijs exponentieel

Sommige wetenschappers vragen zich af hoeveel mensen er ooit op aarde geleefd hebben.

De Amerikaan Carl Haub schatte in 2002 dat er tot en met dat jaar ruim 0 miljard mensen op aarde geleefd hadden (of nog leefden). Hij ging daarbij uit van een rekenmodel met “schoksgewijs exponentiële toename” van de wereldbevolking. In de tabel hieronder zie je een gedeeltelijk overzicht van dit rekenmodel.

periode 8000 voor Chr. tot 1 na Chr.	groei wereldbevolking in miljoenen 5-300	groeipercentage per jaar 0,5119
1-1200	300-450	0,3379
1200-1650	450-500	0,2342
1650-1750	500-795	0,4648
1750-1850	795-1265	0,4656
1850-1900	1265-1656	0,5401
1900-1950	1656-2516	
1950-1995	2516-5760	1,8576
1995-2002	5760-6215	1,0920

In deze tabel kun je onder andere aflezen dat volgens het model van Haub de wereldbevolking in de periode 1850-1900 jaarlijks toenam met 0,5401%, van 1265 miljoen tot 1656 miljoen. Hierbij wordt er dus van uit gegaan dat er binnen elke periode van de tabel een exponentiële groei plaatsvindt en de groeifactoren per periode kunnen verschillen.

- c** Bereken het ontbrekende groeipercentage in vier decimalen nauwkeurig.

Volgens het model van Haub werd de grens van 1 miljard mensen bereikt in de periode 1750-1850.

- d** Bereken algebraïsch in welk jaar dit volgens het model van Haub gebeurde.

Om een schatting te krijgen van het aantal mensen dat ooit op aarde geleefd heeft, gebruikte Haub voor elke periode in de tabel schattingen van de aantallen geboortes. We bekijken de aanpak van Haub voor de periode van 1995 tot en met 2002. Voor die periode 1995-2002 kan de wereldbevolking bij benadering beschreven worden met de formule

$$N = 5760 \cdot 1,01092^t.$$

Hierbij is  $t$  de tijd in jaren, waarbij  $t = 0$  overeenkomt met het jaar 1995, en is  $N$  de wereldbevolking in miljoenen.

Volgens redelijke schattingen werden er in deze periode



## 15.6 Extra opgaven

jaarlijks per 1000 mensen 23 baby's geboren. Dat betekent dat er in deze periode in totaal bijna 1 miljard baby's geboren werden.

Het aantal geboortes in het  $n$ -de jaar na 1995 noemen we  $a_n$ .

Het totale aantal geboortes in periode 1995-2002 kun je met de GR berekenen met een recursieve betrekking van de vorm:

$$\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_n = s_{n-1} + a_n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

e Bereken dit aantal in miljoenen nauwkeurig.



Hint 10.

Naar SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

36



### Koolstofdatering

Koolstofdatering is een manier om de ouderdom van organisch materiaal te bepalen, bijvoorbeeld van hout, plantenresten of botten. In levende organismen komt naast de gewone, niet-radioactieve vorm van koolstof C-12 ook het radioactieve C-14 voor en wel in een bepaalde verhouding tot C-12. Na de dood van het organisme zal de hoeveelheid C-14 door radioactief verval exponentieel afnemen. Door te meten hoeveel C-14 er nog over is, kan men de ouderdom van het organische materiaal bepalen. Voor de afname van de hoeveelheid C-14 geldt de volgende formule:

$$Q = 100 \cdot g^t.$$

Hierin is  $Q$  de relatieve huidige hoeveelheid C-14 (als percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14),  $g$  de jaarlijkse groeifactor en  $t$  de ouderdom van het organische materiaal in jaren.

De halfwaardetijd, ook wel halveringstijd genoemd, van C-14 is 5730 jaar. Hiermee kunnen we berekenen dat  $g = 0,99988$ .

a Bereken de waarde van  $g$  in zes decimalen nauwkeurig.

De methode van koolstofdatering is niet bruikbaar voor materiaal ouder dan 600000 jaar, omdat de hoeveelheid C-14 dan te klein is om te meten.

b Bereken hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14 nog over is na 60000 jaar. Rond je antwoord af op honderdsten van procenten.

De formule  $Q = 100 \cdot 0,99988^t$  kan, bij benadering, herschreven worden tot de volgende formule:

$$t = \frac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}.$$

c Laat dit zien

## 15.6 Extra opgaven

De ouderdom die men met de formule  $t = \frac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}$  berekent, is niet de werkelijke ouderdom. In de figuur hiernaast zie je een gedeelte van de zogenoemde calibratiecurve, dat is een grafiek waarmee men de berekende ouderdom om kan zetten in de werkelijke ouderdom. Deze calibratiecurve is gemaakt door de hoeveelheid C-14 te bepalen in materiaal waarvan de ouderdom ook op een andere manier bekend was. De figuur staat vergroot op het werkblad.

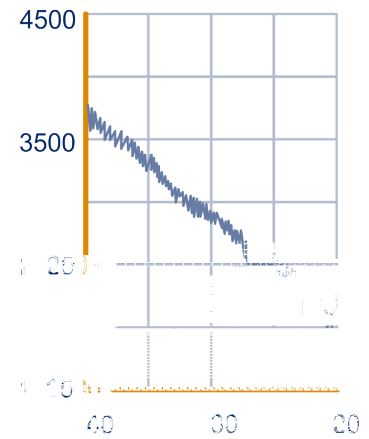
Langs de verticale as is de berekende ouderdom uitgezet. Deze wordt uitgedrukt in jaren BP, "Before Present" (vóór heden). Hiermee wordt in dit verband altijd bedoeld: het aantal jaren vóór 1950, zodat het niet nodig is te weten in welk jaar het onderzoek is gedaan. Langs de horizontale as staat de werkelijke ouderdom, ook in jaren BP, dus in jaren vóór 1950. Bij Vlaardingen is een kano gevonden, gemaakt van een uitgeholde boomstam. Om de ouderdom van deze kano te bepalen wordt de hoeveelheid C-14 gemeten. Het blijkt dat er nog 73,19% over is van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14.

**d** Bereken in welk jaar deze kano gemaakt is.

De curve van de figuur verloopt vooral rechtsonder grillig, doordat er voor deze periode veel materiaal beschikbaar was om de curve te maken. Voor het oudste deel van de calibratiecurve is niet zoveel materiaal beschikbaar. Voor een bepaald gedeelte heeft men alleen de volgende gegevens: bij een berekende ouderdom van 20550 BP hoort een werkelijke ouderdom van 22650 voor Chr. en bij een berekende ouderdom van 19925 BP hoort een werkelijke ouderdom van 21925 voor Chr. Men neemt aan dat de calibratiecurve tussen deze twee punten volgens een rechte lijn verloopt.

**e** Bereken, uitgaande van die rechte lijn, de werkelijke ouderdom van een stuk hout waarvan de berekende ouderdom 20100 BP is. Rond je antwoord af op tientallen jaren.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven



## 15.6 Extra opgaven

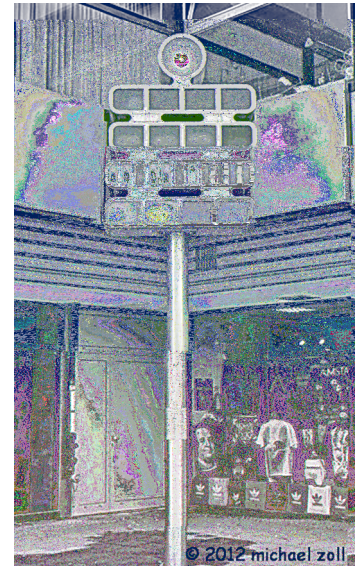
37

### Berlijnse klok

In Berlijn staat op de Wittenbergplatz een bijzondere klok. Als je weet hoe het werkt, kun je er prima de tijd op aflezen. In de figuur staat een foto.

Het aflezen werkt als volgt.

- De 4 lampen in de bovenste balk staan elk voor 5 uur;
  - de 4 lampen in de tweede balk staan elk voor 1 uur;
  - de 11 lampen in de derde balk staan elk voor 5 minuten;
  - de 4 lampen in de onderste balk staan elk voor 1 minuut.
- (De ronde lamp helemaal bovenaan gebruiken we hier niet.) De lampen gaan van links naar rechts branden, telkens wanneer er een keer de bijbehorende tijdseenheid voorbij is, dus na één minuut gaat op de onderste balk de volgende lamp aan. Wanneer er 5 minuten voorbij zijn, gaan de lampen in de onderste balk uit en gaat in de balk erboven de volgende lamp aan. Zo ook in de andere balken. Op de klok in de figuur is het dus  $(2 \times 5 + 4 \times 1)$  uur en  $(11 \times 5 + 2 \times 1)$  minuten, oftewel 14:57u.



Om middernacht is het 00:00u. Dan zijn alle lampen uit. Het is nu 13:48u.

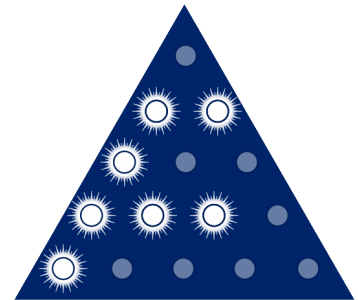
- a Bereken hoe vaak de meest rechtse lamp op de onderste balk sinds middernacht aan gegaan is

Deze Berlijnse klok was voor Jörg Pretz aanleiding om op zoek te gaan naar een (wiskundig) mooiere klok. Hij kwam uit op de klok in de tweede figuur. Dit is een 12-uurs-klok.

De klok in deze figuur werkt net zo als de Berlijnse klok, met kleine aanpassingen.

- De lamp in de bovenste rij staat voor 6 uur;
- de lampen in de tweede rij staan elk voor 2 uur;
- de lampen in de derde rij staan elk voor 30 minuten;
- de lampen in de vierde rij staan elk voor 6 minuten;
- de lampen in de onderste rij staan elk voor 1 minuut.

Ook op deze klok gaan de lampen van links naar rechts branden. Op de klok in de tweede figuur is het dus  $2 \times 2$  uur en  $(1 \times 30 + 3 \times 6 + 1 \times 1)$  minuten, oftewel 04:49u.



In de klok zie je 7 lampen branden.

- b Onderzoek hoeveel tijdstippen er mogelijk zijn waarop er precies 2 lampen branden.

Je kunt je de vraag stellen hoe het komt dat deze klok kan werken.

Bij het beantwoorden van die vraag is het volgende van

## 15.6 Extra opgaven

belang: met de onderste rij van 5 lampen zijn 6 mogelijke 'minuut'-tijdstippen weer te geven: 00:00, 00:01, 00:02, 00:03, 00:04 en 00:05. Dat principe geldt voor elke rij.

- c Toon door het berekenen van het aantal mogelijke 'minuut'-tijdstippen aan dat je op deze manier met 5 rijen inderdaad precies een 12-uurs-klok kunt maken.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

38

### Sluipwespen

Larven kunnen grote schade toebrengen aan gewassen. Larven kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk doodgaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden. Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet. Na één dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren. Dit aantal noemen we  $L$ . Ook werd geteld hoeveel larven er een eitje bevatten. Dit aantal wordt  $E$  genoemd. Het experiment werd enkele malen uitgevoerd.

De resultaten zijn als stippen te zien in de figuur.

Het verband tussen  $E$  en  $L$  kan redelijk worden benaderd door de volgende formule:

$$E = 64 \cdot (1 - e^{-0,01L}).$$

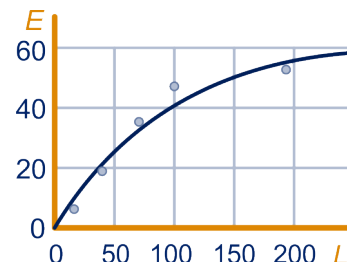
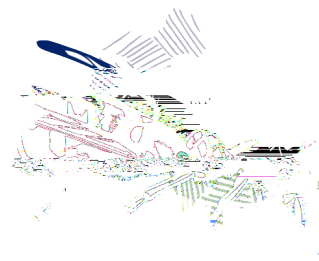
In de figuur is te zien dat het aantal larven met eitjes  $E$  steeds minder snel toeneemt als het totale aantal larven  $L$  toeneemt. Dit is ook in te zien met behulp van de afgeleide van  $E$ .

- a Bepaal de afgeleide van  $E$  en toon daarmee aan dat het aantal larven met eitjes volgens de formule steeds minder snel toeneemt bij toenemend aantal larven.

De formule is een hulpmiddel om te schatten hoeveel larven maximaal per dag door één sluipwesp kunnen worden bestreden. Volgens de formule kan het aantal larven met eitjes  $E$  niet boven een bepaalde grenswaarde uitkomen.

- b Geef deze grenswaarde. Licht je antwoord toe.  
c Laat zien dat het verband tussen  $E$  en  $L$  te schrijven is als:  
 $L = -100 \cdot \ln(64 - E) + 41,6$  (ongeveer).

Naar SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven



## 15.6 Extra opgaven

39

### Groenbelegging

Beleggingsmaatschappijen zoeken naar steeds nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is beleggen in bomen.

Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een reclamefolder het volgende.

#### Uw belegging groeit vanzelf.

De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant. Om een idee te krijgen van de te verwachten opbrengst, geven we u het volgende schema.

Na 8 jaar moeten 200 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 7 m en een stamdiameter van 10,8 cm.

Na 15 jaar moeten nog eens 300 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 12 m en een stamdiameter van 13 cm.

De eindkap volgt na 20 jaar. Dan worden van elk perceel de

bomen gekapt en de opbrengst wordt berekend. De opbrengst wordt berekend met de formule:

$$\text{Opbrengst} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot l}{4} \cdot n \cdot p$$
 Hierin is  $d$  het aantal m<sup>3</sup> benutbaar hout. De  $p$  is de prijs per m<sup>3</sup> hout. De  $l$  is de lengte van de boom in

van 5000 euro  
tig jaar de

voor de Labironia  
iende jaren niet  
Zelfs als U de

en oude ook

U kunt deelnemen door een bedrag in te leggen per perceel. U ontvangt dan in de komende twee opbrengst van het op dat perceel geoogste hout. Wanneer we ervan uitgaan dat de houtprijs, die momenteel 600 euro per m<sup>3</sup> bedraagt, in de komende jaren zal stijgen, is deze belegging de moeite waard. Z

gelden die na 8 jaar of na 15 jaar rijpkomen in de opbrengst. Het bedrag dat u moet betalen is 5000 euro. De opbrengst wordt berekend met de formule:

Onderzoek of deze laatste bewering klopt en bereken welk rentepercentage je op een spaarrekening zou moeten krijgen om na twintig jaar minstens een even hoge opbrengst te hebben als met deze groenbelegging.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

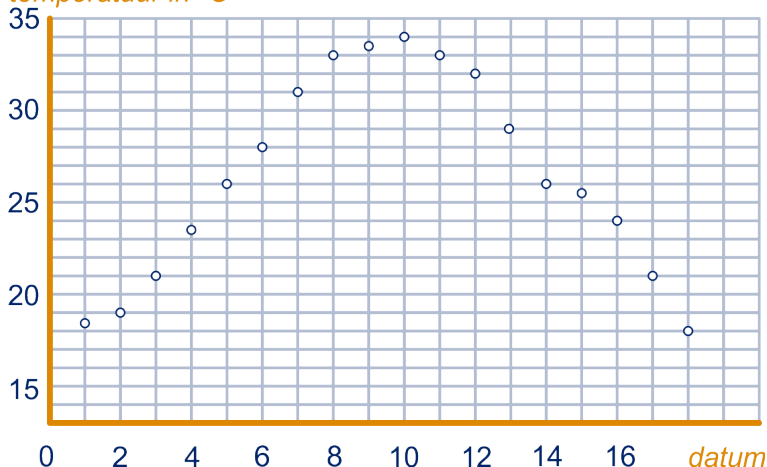
## 15.6 Extra opgaven

40

### Productie en temperatuur

Op een industrieterrein wordt elke dag de maximumtemperatuur gemeten. In onderstaande grafiek zijn de meetresultaten voor juni 2010 weergegeven.

temperatuur in  $^{\circ}\text{C}$



Een groot bedrijf op dit industrieterrein produceert materiaal. De productie van dit materiaal is afhankelijk van de buitentemperatuur. In onderstaande tabel kun je terugvinden hoeveel er per dag in dezelfde periode geproduceerd is (in tonnen).

dag	datum	productie
di	1 juni	1032
wo	2 juni	1030
do	3 juni	1026
vr	4 juni	1028

dag	datum	productie
ma	7 juni	1007
di	8 juni	1004
wo	9 juni	1002
do	10 juni	1000
vr	11 juni	1007

dag	datum	productie
ma	14 juni	1012
di	15 juni	1017
wo	16 juni	1020
do	17 juni	1021
vr	18 juni	1021

Een medewerker van de afdeling planning wil het verband tussen de maximumtemperatuur  $T$  en de productie  $P$  bestuderen. Hij wil daarbij dit verband in een zo eenvoudig mogelijke en goed passende formule uitdrukken.

Stel een dergelijke formule op en licht je antwoord toe.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

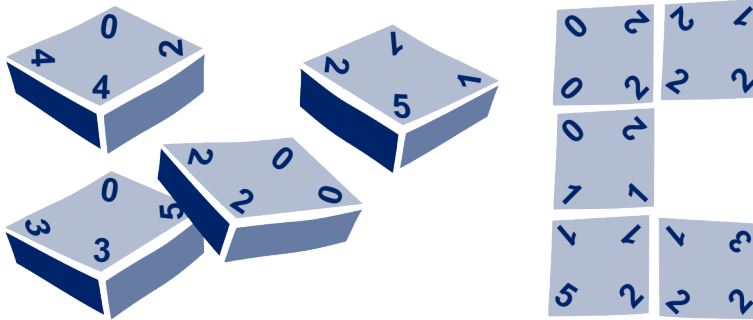
## 15.6 Extra opgaven

41

### Quadominos

Het spel Quadominos bestaat uit vierkante stenen. Zie hieronder links. Op elke steen staan vier cijfers, één cijfer bij elke hoek. Dit cijfer kan zijn een 0, 1, 2, 3, 4 of 5.

Doel van het spel is zoveel mogelijk stenen passend aan te leggen. Hieronder rechts zie je daar een voorbeeld van.



Alle stenen zijn verschillend. Alle mogelijke combinaties van cijfers komen voor, behalve één: er is geen steen met de cijfers 0, 2, 4 en 5. Je kunt de stenen in vijf soorten verdelen: stenen met

- vier dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3-3;
- precies drie dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3-4;
- twee keer twee dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 0-0-2-2;
- twee dezelfde en daarnaast twee verschillende cijfers, bijvoorbeeld 1-1-0-2;
- vier verschillende cijfers, bijvoorbeeld 1-2-3-5

Van elke combinatie van vier toegestane cijfers zit er in het spel slechts één steen. Er zit bijvoorbeeld dus maar precies één steen in met de cijfers 1-1-0-2.

Onderzoek hoeveel stenen er in totaal zijn bij het spel Quadominos.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven

42



### Elektriciteit

In november 2004 maakte energiebedrijf Essent de tarieven voor de levering van elektriciteit bekend voor het jaar 2005. Zie onderstaande tabel.

electriciteits tarieven 2005	vaste kosten	laagtarief	normaaltarief
	100 jaar	100 jaar	100 jaar
KeuzeTarief Budget	€ 0,00	€ 0,0520	€ 0,0970
KeuzeTarief Standaard	€ 17,85	€ 0,0410	€ 0,0710
KeuzeTarief Plus	€ 35,70	€ 0,0340	€ 0,0710

Zoals je kunt zien, kunnen klanten bij Essent kiezen uit drie tarieven.

## 15.6 Extra opgaven

Essent kent tarieven voor huishoudens die een elektriciteitsmeter gebruiken waarmee onderscheid wordt gemaakt tussen laagtarief en normaal tarief.

Het laagtarief wordt berekend voor elektriciteitsverbruik in het weekend en 's nachts van 23:00 tot 7:00 uur, het normaal tarief op de andere tijden.

Alle bedragen zijn inclusief BTW.

Een huishouden kan kiezen uit een van de drie tarieven.

Afhankelijk van het verbruik en de momenten waarop verbruikt wordt, is voor het ene huishouden het ene keuzetarief het voordeligste en voor het andere huishouden het andere.

Een energieadviseur maakt een voorlichtingsfolder om daarbij met een figuur duidelijk te maken bij welke combinaties van laag- en normaal tariefverbruik (op jaarbasis) welk keuzetarief het voordeligst is. Hij wil daarin gebieden aangeven waar een bepaald tarief het voordeligst is. Hij gebruikt daarvoor het assenstelsel op de uitwerkbijlage. Hij heeft daarop al een lijnstuk getekend. Op dat lijnstuk liggen alle punten waarbij keuzetarief Budget en keuzetarief Standaard precies even duur zijn.

Geef in het assenstelsel op het werkblad drie **gebieden** aan waarin telkens één van de drie keuzetarieven het voordeligst is. Licht je antwoord toe.

SYLLABUS WISKUNDE A VWO 2018, voorbeeldopgaven



# 14 Periodieke functies

## Intro

1

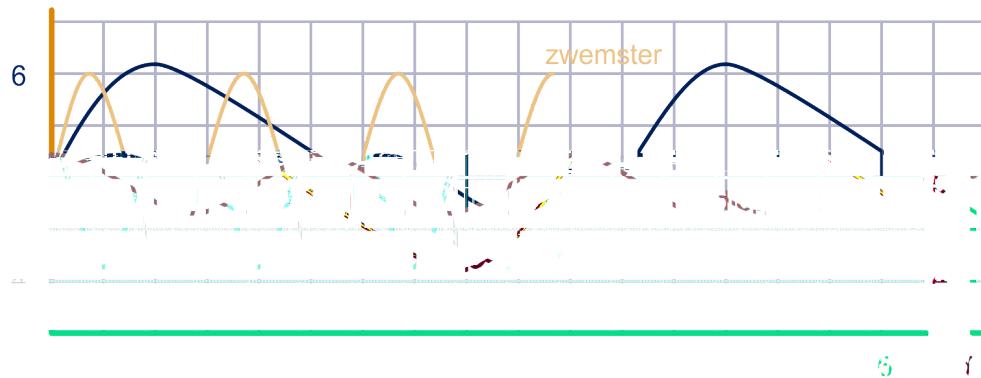
- a De hoogte is het verschil tussen de grootste uitwijking naar de ene kant en de grootste uitwijking naar de andere kant.  
De lengte is na hoeveel cm (of mm) het patroon weer opnieuw begint (de afstand tussen twee opvolgende toppen).
- b -

## Periodieke verschijnselen

2

- a Eén cyclus duurt 5 seconden, de longinhoud varieert tussen  $4\frac{1}{2}$  en  $5\frac{1}{2}$  liter, dat klopt dus.
- b Zie figuur. Een grafiek die schommelt om gemiddelde longinhoud 5 liter.
- c Zie figuur
- d 5 seconden, 11 seconden
- e Bij gewoon ademen wordt ongeveer 0,5 liter ververst, dat is 10%, bij diep ademen 2,2 liter, dat is 44%
- f In 36 seconden 12 keer ademen, dus de periode is 3 seconden

longinhoud



3

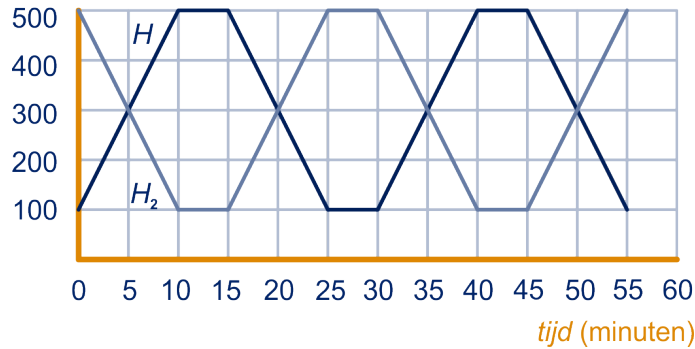
- a Zie de donkergekleurde grafiek in de figuur bij opgave 4a.
- b 30 minuten
- c  $7\frac{1}{2}$ ,  $17\frac{1}{2}$ ,  $37\frac{1}{2}$ ,  $47\frac{1}{2}$  en  $67\frac{1}{2}$
- d Op dezelfde hoogte als op tijdstip  $1000 - 33 \cdot 30 = 10$ , dus op hoogte 500 meter (dus in  $T$ ).
- e
- $H(t) = 40t + 100$  als  $0 \leq t \leq 10$ ;
  - $H(t) = 500$  als  $10 \leq t \leq 15$ ;
  - $H(t) = -40(t - 15) + 500 = -40t + 1100$  als  $15 \leq t \leq 25$ ;
  - $H(t) = 100$  als  $25 \leq t \leq 30$ .

4

- a Zie de licht gekleurde grafiek in de figuur op de volgende bladzijde.

## 14 Periodieke functies

hoogte (seconden)



- b 15 minuten  
 c  $H_2(t) = H(t - 15)$  (of:  $H_2(t) = H(t + 15)$ )  
 d
  - 500
  - 467
  - 101  
 e  $H_2(t) = 600 - H(t)$

5

- a Ze hebben dezelfde frequentie ; 400.  
 b Hoger want de frequentie is groter.

6

4, 1,  $\frac{1}{2}$ , 2, 2 (seconden)

7

- a
  - 365 dagen (nauwkeuriger: 365,25 dagen)
  - 28 dagen
  - 1 seconde
  - 1 uur
  - 12 uur
  - 12,5 uur  
 b
  - Het verspringen van verkeerslichten.
  - Rondetijden bij 10.000 meter schaatsen (als de schaatser zijn krachten ideaal verdeelt).
  - Temperatuurverloop van een dag (als het weer een tijdje constant is).
  - El nino (4-jaarlijkse droogte bij de evenaar).
  - ...

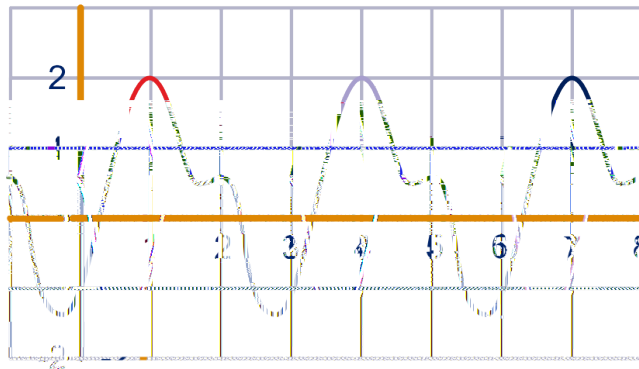
8

- a 60  
 b Ruim  $\frac{60}{\frac{4}{5}} = 75$

# 14 Periodieke functies

9

- a Rood gekleurde deel.
- b Lichtblauw gekleurde stuk.



figuur bij opgave 9

c 3

10

- a 6
- b Zie figuur.



figuur bij opgave 10

- c  $2\frac{1}{3}$ ,  $1\frac{2}{3}$ ,  $1\frac{2}{3}$ ,  $2\frac{1}{3}$ ,  $2\frac{1}{3}$ ,  $2\frac{1}{3}$  en  $1\frac{2}{3}$
- d  $1\frac{1}{2}$ ,  $7\frac{1}{2}$  en  $-1\frac{1}{2}$ ,  $4\frac{1}{2}$ ,  $10\frac{1}{2}$
- e  $58\frac{1}{2}$ ,  $61\frac{1}{2}$ ,  $64\frac{1}{2}$ ,  $67\frac{1}{2}$ ,  $70\frac{1}{2}$
- f 60, 66
- g -1, 2, 5, 8, 11

11

Alleen de laatste, de periode is 8.

12

- a  $-7$ ,  $-3\frac{1}{2}$ ,  $0$ ,  $3\frac{1}{2}$ ,  $7$ ,  $-8$ ,  $-4\frac{1}{2}$ ,  $-1$ ,  $2\frac{1}{2}$ ,  $6$ ,  $9\frac{1}{2}$
- b  $-7\frac{1}{2}$ ,  $-4$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $3$ ,  $6\frac{1}{2}$ ,  $10$

13

- a 12.25 uur (ofwel: 12 uur en 25 minuten)
- b Bij IJmuiden is eb en vloed minder hoog dan bij Vlissingen.  
Bij IJmuiden komt de vloed sneller op en duurt het eb worden langer.  
Bij IJmuiden is de gemiddelde waterhoogte hoger dan bij Vlissingen.

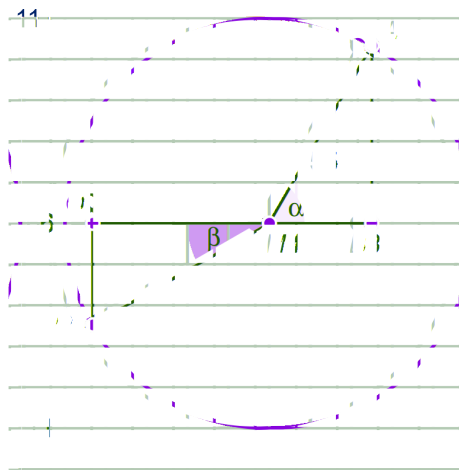
## 14 Periodieke functies

- c Het afnemen duurt langer dan het toenemen.  
Het waterpeil is langer onder de gemiddelde zeestand dan erboven.
- d 3.50 uur en 16.15 uur.

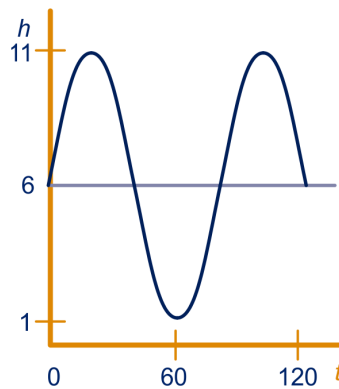
### De sinusfunctie

14

- a Teken een cirkel met diameter 10 cm (dus straal 5 cm); laagste punt 1 cm boven de grond, zie figuur 1.
- b  $t = 45$  en  $t = 105$ .
- c Gemiddelde hoogte 6 meter.  
 $t = 0, t = 30, t = 60, t = 90$  en  $t = 120$ .
- d Zie figuur 2. Periode: 60 seconden.
- e Zie figuur 1.  $B$  is het punt op dezelfde hoogte als  $M$ , recht onder  $A$ .  
 $\alpha = \frac{10}{60} \cdot 360^\circ = 60^\circ$ ,  $AB = MA \cdot \sin(\alpha) = 5 \cdot \sin(60^\circ) = 4,330$ , dus de hoogte van  $A$  op  $t = 10$  is:  $6 + 4,330 = 10,330$ .  
Neem aan dat  $A$  op  $t = 35$  in  $P$  is, zie figuur 1.  $Q$  is het punt op dezelfde hoogte als  $M$ , recht boven  $P$ .  $\beta = \frac{35}{60} \cdot 360^\circ - 180^\circ = 30^\circ$ ,  $PQ = MP \cdot \sin(\beta) = 5 \cdot \sin(30^\circ) = 2,5$ , dus de hoogte van  $P$  op  $t = 35$  is:  $6 - 2,5 = 3,500$ .



figuur 1



figuur 2

- f evenwichtswaarde = 11;  
amplitude = 10

15

Amplitude 1, evenwichtsstand 0 en periode  $2\pi$ .

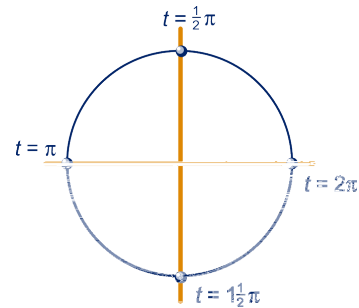
# 14 Periodieke functies

16

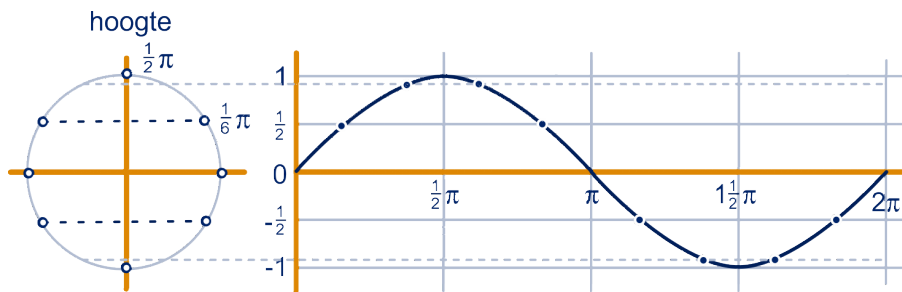
- a  $2\pi$  seconden
- b Zie figuur.

17

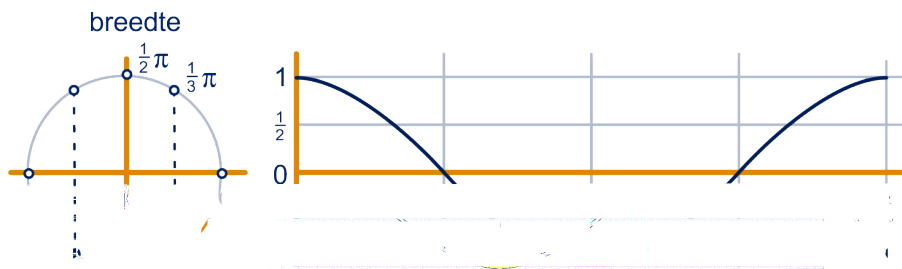
- a Linksom over de eenheidscirkel achtereenvolgens  $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, 1\frac{1}{6}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, 2\pi$
- b Zie figuur 1 hieronder.
- c Zie figuur 2 hieronder.



figuur bij opgave 16 b



figuur 1



figuur 2

- d Amplitude: 1, evenwichtswaarde 0

18

- a  $\frac{2}{5}\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 72^\circ$
- b  $H\left(\frac{2}{5}\pi\right) = OP \cdot \sin(72^\circ) = \sin(72^\circ) = 0,951$
- c  $W\left(\frac{2}{5}\pi\right) = OP \cdot \cos(72^\circ) = \cos(72^\circ) = 0,309$

# 14 Periodieke functies

d Zie figuur.

De plaats van het kogeltje op tijdstip  $t = \frac{7}{10}\pi$  noemen we  $Q$ . Het punt  $(-1,0)$  noemen we  $T$ .

Hoek  $TOQ$  is  $\frac{3}{10}\pi \cdot \frac{360}{2\pi} = 54^\circ$ .

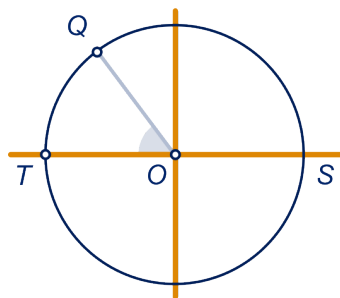
Dan:  $H\left(\frac{7}{10}\pi\right) = OQ \cdot \sin(54^\circ) = \sin(54^\circ) = 0,809$  en  $W\left(\frac{7}{10}\pi\right) = -OQ \cdot \cos(54^\circ) = -\cos(54^\circ) = -0,588$ .

e  $\frac{1}{2\pi} \cdot 360^\circ \approx 57,29578^\circ$

f  $H(1) = OR \cdot \sin(57,29578^\circ) =$

$\sin(57,29578^\circ) = 0,841,$

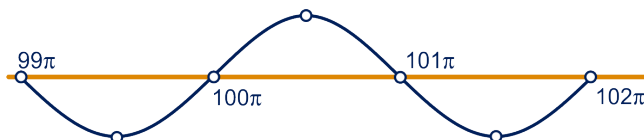
$W(1) = OR \cdot \cos(57,29578^\circ) = \cos(57,29578^\circ) = 0,540$



19

a Periode  $2\pi$ , evenwichtswaarde 0, amplitude 1

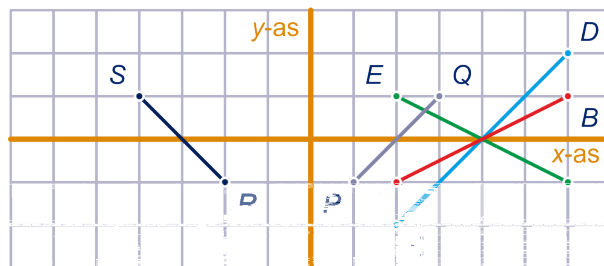
b Zie figuur.



## Schuiven en rekken

20

a Zie figuur.



b Spiegelen in de  $x$ -as

21

a  $g$  door verticaal met 2 te vermenigvuldigen

$h$  door 1 eenheid omhoog te schuiven,

en  $k$  door verticaal met -1 te vermenigvuldigen.

b  $g(x) = 2 \cdot f(x) = x^2 - 2x + 2$ ,  $h(x) = f(x) + 1 = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$  en  $k(x) = -1 \cdot f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ .

22

a  $w(5) = h(0)$ ;  $w(7) = h(2)$ ;  $w(t) = h(t - 5)$

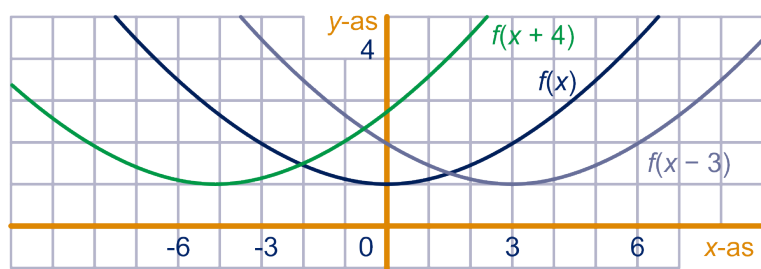
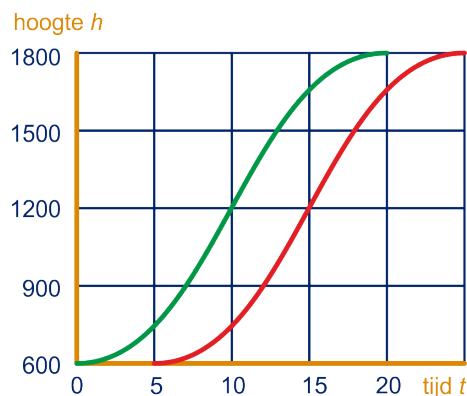
b De grafiek van  $h$  moet je 5 eenheden naar rechts schuiven om die van  $w$  te krijgen. Zie figuur op de volgende bladzijde.

# 14 Periodieke functies

23

- c  $a(t) = h(t + 10)$   
 d De grafiek van  $h$  moet je 10 eenheden naar links schuiven om die van  $a$  te krijgen.

- a -  
 b De grafiek wordt 3 eenheden naar rechts geschoven. En 4 eenheden naar links, zie figuur hieronder.



- c De grafiek gaat 3 eenheden naar rechts, 4 eenheden naar links.

24

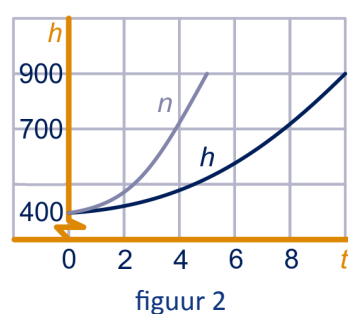
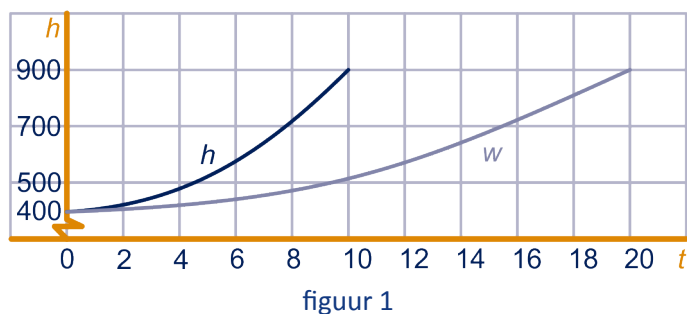
-

25

- a  $g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$   
 b  $h(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$

26

- a  $w(20) = h(10)$ ;  $w(12) = h(6)$ ;  $w(t) = h\left(\frac{1}{2}t\right)$ .  
 b Zie figuur 1 hieronder.

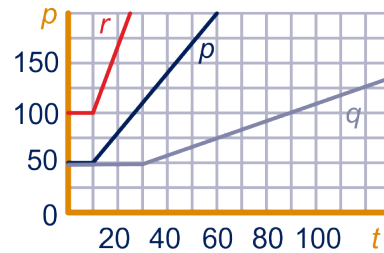


- c  $n(4) = h(8)$ ;  $n(2) = h(4)$ ;  $n(t) = h(2t)$ .  
 d Zie figuur 2 hierboven.

# 14 Periodieke functies

27

- a  $q(30) = p(10)$ ;  $q(84) = p(28)$ ;  $q(t) = p\left(\frac{1}{3}t\right)$
- b Zie figuur.
- c Door horizontaal met factor 3 te vermenigvuldigen.



28

- a  $r(t) = 2 \cdot p(t)$
- b Zie onderdeel b.
- c Door verticaal met 2 te vermenigvuldigen.

29

-

30

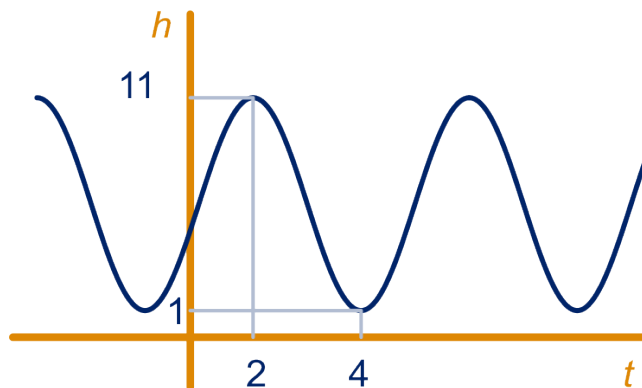
- a  $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$
- b  $\frac{1}{5} \cdot 2\pi = \frac{2}{5}\pi$ ,  $\frac{1}{a} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{a}$
- c  $\frac{p}{2\pi} \cdot 2\pi = p$

31

- a De functie  $y = 3 \sin(2t)$  ontstaat uit die van  $y = \sin(2t)$  door verticaal met 3 te vermenigvuldigen, dus de amplitude is 3.  
De functie  $y = 4 \sin(3t)$  ontstaat uit die van  $y = \sin(3t)$  door verticaal met 4 te vermenigvuldigen, dus de amplitude is 4.
- b Je krijgt ze uit de functies  $y = 3 \sin(2t)$  respectievelijk van de functie  $y = 4 \sin(3t)$  door in de  $x$ -as te spiegelen, dus de amplitude is 3 respectievelijk 4.
- c  $b$
- d 1, want hij ontstaat uit  $y = b \cdot \sin(a \cdot t)$  door 1 eenheid omhoog te schuiven.

32

- a Zie figuur.



- b De evenwichtswaarde is 6 en de amplitude 5, de grootste hoogte is dus 11 en de kleinste 1.
- c De periode is 4, de grafiek gaat stijgend door het evenwicht in 0, dus de grootste hoogte wordt bereikt op  $t = 0 + \frac{1}{4}$  van een periode en dan telkens één periode verder, dus op de tijdstippen 1, 5, 9, ...  
De kleinste op de tijdstippen aar tussenin, dus 3, 7, 11, ...



## 14 Periodieke functies

33

- a Eén periode is  $\frac{1}{50}$  seconde, dus 50.  
b  $\frac{1}{200}$

34

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + 1,$$
$$g(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2t) - 1; h(t) = 3 \cdot \sin(t) - 2$$

35

- a  $h(t) = 5 \cdot \sin\left(\frac{1}{30}\pi \cdot t\right) + 6$   
b (Let op de stand RAD.)  
c Het eerste is  $t = 10$ , het tweede  $t = 30 - 10 = 20$  en de volgende twee  $t = 10 + 60 = 70$  en  $t = 20 + 60 = 80$ .  
d De verticale lijn  $t = 45$  is symmetrie-as van de grafiek. Het eerste is  $t = 35$ , het tweede  $t = 60 - 5 = 55$  en de volgende twee  $t = 35 + 60 = 95$  en  $t = 55 + 60 = 115$ .

36

- a  $\frac{2}{12} \cdot 60 = 10$  en op  $15 + 10 = 25$ .  
b 10 eenheden naar rechts schuiven.  
c  $b(10) = h(0)$ ,  $b(25) = h(15)$ ,  $b(t) = h(t - 10)$

37

- a Voor  $f$ : evenwichtswaarde =  $\frac{1}{2}$ , de amplitude =  $\frac{1}{2}$ , de periode =  $4\pi$  en een waarde van  $x$  waar de grafiek stijgend door de evenwichtslijn gaat =  $\pi$ .  
Voor  $g$ : evenwichtswaarde =  $-1$ , de amplitude =  $2$ , de periode =  $2\pi$  en een waarde van  $x$  waar de grafiek stijgend door de evenwichtslijn gaat =  $\frac{1}{2}\pi$ .  
b  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right) + \frac{1}{2}$ ;  $g(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) - 1$   
c  $h(x) = 2 \cdot \sin(\pi(x - 2)) + \frac{1}{2}$ ;  $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right) + 1\frac{1}{2}$ .

38

- a  $h(15) = 15$ ,  $h(30) = 5$  en  $h(45) = 15$ .  
b  $h(t) = 15 + 10 \cdot \sin\left(\frac{1}{30}\pi(t - 45)\right)$  of  $h(t) = 15 + 10 \cdot \sin\left(\frac{1}{30}\pi(t + 15)\right)$

39

$$p = \frac{49,82 + 49,96}{2} = 49,89, q = \frac{49,96 - 49,82}{2} = 0,07, r = \frac{2\pi}{\pi} = 2, s = \frac{7}{16}\pi \approx 1,37$$

### Vergelijkingen en meer

40

- a De periode is 20 en de evenwichtswaarde 1.  
b  $x = 3 + \frac{1}{4} \cdot 20 = 8$ ,  $x = 8 + 10 = 18$  en  $x = 8 - 10 = -2$ .  
c De evenwichtswaarde is 1 en de amplitude 2.  
De maximale waarde is  $1 + 2 = 3$  en de minimale waarde  $1 - 2 = -1$ .  
d  $f(x)$  is maximaal voor  $x = 3 + \frac{1}{4} \cdot 20 = 8$ . Dus de waarden van  $x$  waarvoor  $f(x)$  maximaal is, is de rij: ...,  $8 - 2 \cdot 20$ ,  $8 - 1 \cdot 20$ ,  $8 + 1 \cdot 20$ ,  $8 + 2 \cdot 20$ , ....  
Tussen 100 en 130 dus voor  $x = 108$  en  $x = 128$ .  
e Noem de gezochte getallen van links naar rechts:  $a$ ,  $b$  en  $c$ .  
Dan ligt 8 midden tussen  $4\frac{1}{2}$  en  $b$ , dus  $8 = \frac{1}{2}\left(4\frac{1}{2} + b\right)$ , dus  $b = 11\frac{1}{2}$ .

## 14 Periodieke functies

41

- a De periode van de functie is  $2 \cdot (14 - 8) = 12$ .  
Noem de gezochte getallen van links naar rechts  $a$ ,  $b$  en  $c$ .  
Dan  $9\frac{1}{3} + b = 8 + 14$ , dus  $b = 12\frac{2}{3}$ . Verder  $b = 12\frac{2}{3} - 12 = \frac{2}{3}$  en  $c = 9\frac{1}{3} + 12 = 21\frac{1}{3}$ .
- b Noem de gezochte getallen van links naar rechts  $p$ ,  $q$  en  $r$ .  
Dan  $7 + q = 8 + 14$ , dus  $q = 15$ . Verder  $p = 15 - 12 = 3$  en  $r = 7 + 12 = 19$ .

42

Van links naar rechts (maak een schets):

- Eén oplossing met de GR:  $\sin^{-1}(0,6) = 0,643\dots$   
De andere oplossing tussen 0 en  $2\pi$  is  $\pi - 0,643\dots = 2,498\dots$   
De oplossingen tussen  $-2\pi$  en 0 zijn dan:  $0,643\dots - 2\pi = -5,639\dots$  en  $2,498\dots - 2\pi = -3,785\dots$   
De gevraagde oplossingen in twee decimalen zijn dus:  $-5,64$ ;  $-3,79$ ;  $0,64$ ;  $2,50$ .
- Eén oplossing met de GR:  $\sin^{-1}(-0,9) = -1,119\dots$   
De andere oplossing tussen  $-2\pi$  en 0 is  $-\pi + 1,119\dots = -2,021\dots$   
De oplossingen tussen 0 en  $2\pi$  zijn dan:  $-1,119\dots + 2\pi = 5,163\dots$  en  $-2,021\dots + 2\pi = 4,261\dots$   
De gevraagde oplossingen in twee decimalen zijn dus:  $-2,02$ ;  $-1,12$ ;  $5,16$ ;  $4,26$ .
- Voor alle  $x$  geldt:  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ , deze vergelijking heeft dus geen oplossingen.
- Dit kan zonder GR:  $x = -\frac{1}{2}\pi$ ,  $x = 1\frac{1}{2}\pi$ . In twee decimalen:  $-1,57$ ;  $4,71$

43

- a Dan  $h(t) = 6 + 5 \cdot 0,6 = 9$ .  
 $\frac{1}{30}\pi t = \sin^{-1}(0,6) = 0,643\dots$ , dus  $t = \frac{0,643}{\frac{1}{30}\pi} = 6,144\dots$ , in twee decimalen:  $6,14$ .
- b Uit symmetrie volgt ook dat  $t = 30 - 6,144\dots = 23,855\dots$  voldoet. In twee decimalen zijn de oplossingen:  $6,14$ ;  $23,86$ ,  $6,14 + 60 = 66,14$  en  $23,86 + 60 = 83,86$ .
- c  $2(23,84 - 6,14) = 34,0$  minuten.
- d  $h(t) = 2 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{30}\pi t\right) = -0,8$  Een waarde van  $t$  met  $h(t) = 2$  vind je met de GR:  $\frac{\sin^{-1}(-0,8)}{\frac{1}{30}\pi} = -8,855\dots$  Dus een tijdstip tussen 0 en 60 is  $-8,855\dots + 60 = 51,144\dots$ . Het andere is  $30 + 8,855\dots = 38,855$ .  
De gevraagde waarden zijn:  $38,9$ ;  $51,14$ ;  $60 + 8,86 = 68,86$ ;  $60 + 51,14 = 111,14$ .

44

- Voor de periode  $p$  geldt:  $\frac{2\pi}{p} = \frac{1}{2}$ , dus  $p = 4\pi$ .  
Eén oplossing vind je met de GR:  $\frac{1}{2}x = \sin^{-1}\left(-\frac{0,75}{2}\right) \Leftrightarrow x = -0,7587\dots$   
De grafiek van de functie  $y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$  gaat bij 0 door het evenwicht, dus de lijn  $x = \pi$  is symmetrie-as van de grafiek. Een andere oplossing  $a$  vind je met symmetrie:  
 $\frac{1}{2}(a - 0,7687\dots) = \pi \Leftrightarrow a = 7,0519\dots$   
Alle oplossingen zijn van de vorm:

## 14 Periodieke functies

$-0,7687... + k \cdot 4\pi$  of  $a = 7,0519... + k \cdot 4\pi$  met  $k$  geheel.

De gevraagde oplossingen zijn:  $-0,769$  en  $7,0519... - 4\pi = -5,514$ .

- Voor de periode  $p$  van de functie  $y = \sin(0,4\pi(x - 3))$  geldt:  $0,4\pi = \frac{2\pi}{p}$ , dus  $p = 5$ .

Een oplossing van de vergelijking vind je met de GR:

$$0,4\pi(x - 3) = \sin^{-1}(0,7) = 0,7753..., \text{ dus } x = 3 + \frac{0,7753...}{0,4\pi} = 3,6170...$$

De grafiek gaat bij  $x = 3$  door het evenwicht, dus  $x = 3 + \frac{1}{4} \cdot p = 4\frac{1}{4}$  is symmetrie-as.

Dus voor een andere oplossing  $a$  geldt:  $\frac{1}{2}(a + 3,6170...) = 4\frac{1}{4}$ ,

$$\text{dus } a = 8\frac{1}{2} - 3,6170... = 4,8829.$$

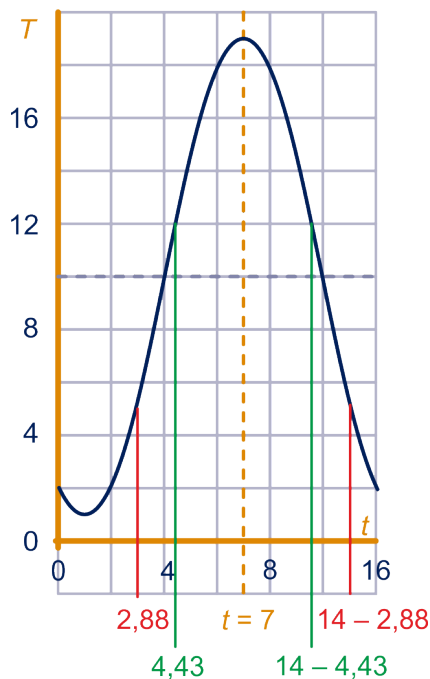
Alle oplossingen van de vergelijking  $\sin(0,4\pi(x - 3)) = 0,7$  zijn dus:

$$x = 3,617 + k \cdot 5 \text{ of } x = 4,889 + k \cdot 5.$$

De gevraagde oplossingen zijn:  $3,617$ ;  $4,889$ ;  $8,617$  en  $9,889$ .

45

- a** Als de periode  $p$  is, dan  $\frac{2\pi}{p} = \frac{1}{6}\pi$ , dus  $p = 12$ . De gemiddelde temperatuur is  $10^\circ\text{C}$ , die wordt bereikt voor  $t = 4$  en voor  $t = 4 + \frac{1}{2}p = 10$ , dus eind april en eind oktober.
- b** De grootste is  $10 + 9 = 19^\circ$ , die wordt bereikt op  $t = 4 + \frac{1}{4}p = 7$ , dus eind juli. De kleinste is  $10 - 9 = 1^\circ$ , die wordt bereikt op  $t = 4 - \frac{1}{4}p = 1$ , dus eind januari.
- c**  $T(11) - T(10) = 4,5^\circ\text{C}$
- d** Zie figuur.  
Dan  $\sin\left(\frac{1}{6}\pi(t - 4)\right) = \frac{2}{9}$ . Met de GR:  
 $\frac{1}{6}\pi(t - 4) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = 0,224$ , dus een waarde voor  $t = 4 + \frac{0,224}{\frac{1}{6}\pi} = 4,43$ .  
De andere waarde voor  $t = 14 - 4,43 = 9,57$ . De bijbehorende data zijn 13 mei en 17 oktober.  
Opmerking.  $t = 4$  komt overeen met 1 mei en  $0,43 \cdot 31 = 13,3$ .
- e** Zie figuur. Dan  $\sin\left(\frac{1}{6}\pi(t - 4)\right) = -\frac{5}{9}$ .  
Met de GR:  $\frac{1}{6}\pi(t - 4) = \sin^{-1}\left(-\frac{5}{9}\right) = -0,589$ , dus  $t = 4 - \frac{0,589}{\frac{1}{6}\pi} = 2,88$ .  
De andere oplossing tussen 0 en 12 is:  $14 - 2,88 = 11,12$ .  
De lengte van het seizoen is  $11,12 - 8,24$  maanden, dus iets meer dan 35 weken.



# 14 Periodieke functies

46

a Zie figuur.

Formule:  $u = 5 \sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

b Eerste slinging (algebraïsch of met  $t = 0,128$  en  $t = 1,872$ ).

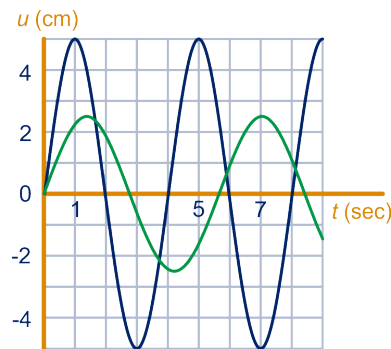
Vijfde slinging (4 periodes later):

$t = 16,128$  en  $t = 17,872$ .

c Zie de grafiek van vraag a.

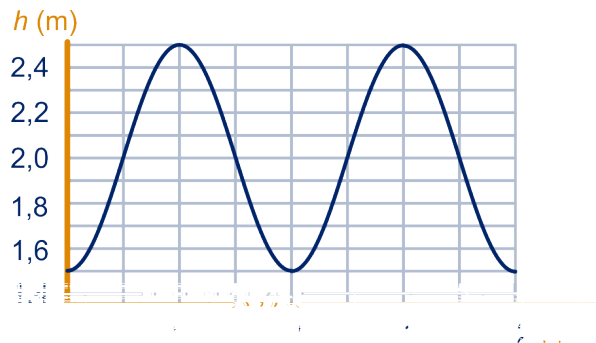
Periode =  $0,7 \cdot 4 = 2,8$ , dus  $c = \frac{2\pi}{2,8} = \frac{5\pi}{7}$ ;

Formule:  $u = 2,5 \sin\left(\frac{5\pi}{7}t\right)$ .



47

a Zie figuur.



Formule:  $h = 2,0 + 0,5 \sin(\pi(t - 0,5))$ .

b  $\Delta h = h(1,41) - h(1,39) = -0,03\dots$ , dus  $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-0,03}{0,02} = -1,5$  m/s.

c  $2,0 + 0,5 \sin(\pi(t - 0,5)) = 2,3$

$\rightarrow \sin(\pi(t - 0,5)) = 0,6$

$\rightarrow \pi(t - 0,5) = 0,6435\dots$  of

$\pi(t - 0,5) = \pi - 0,6435\dots = 2,4980\dots$

$\rightarrow t \approx 0,70$  of  $t \approx 1,30$ ;

De periode is 2, dus de tijdstippen zijn 1,30 en 2,70.

48

a  $h = 23\frac{1}{2} + 23\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 6)\right)$

b  $h = 23\frac{1}{2} + 23\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$

c  $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{47}{12} \approx 3,9$  graad/uur

d  $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{3,07}{0,5} \approx 6,15$  graad/uur

e Dan komt de zon niet boven de horizon.

49

a De waarden van alle stippen optellen: 19.500 geboortes.

b De verticale as begint niet met 0, maar met 400.

c De verhouding is 7 : 6.

d  $A = 815 + 165 \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 3)\right)$

50

a diepte =  $0,1 \cdot x$

## 14 Periodieke functies

**b** golflengte =  $0,2 \cdot x$ ;

amplitude =  $0,0025 \cdot x$

**c**  $h = 0,0025x \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0,2x}(x - 400)\right) = 0,0025x \cdot \sin\left(\frac{10\pi}{x}(x - 400)\right)$

51

Laat het sinusmodel van deze drempel  $h = d + a \cdot \sin(b(x - c))$  zijn.

Hiervan is de periode 12 m. Dus  $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{1}{6}\pi$ .

Uit de hoogte van 0,14 m volgt  $a = d = 0,07$ . Na een kwart van de periode gaat de sinusoiden door de evenwichtsstand, dus  $c = 3$ .

We berekenen bij welke  $x$  de hoogte van de drempel 10 cm is, dus  $0,1 = 0,07 + 0,07 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 3)\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 3)\right) = \frac{3}{7}$ .

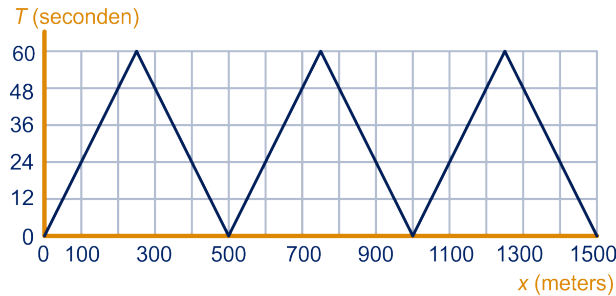
De GR geeft  $\sin^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 0,4429$ ;  $\frac{1}{6}\pi(x - 3) \approx 0,4429 \Leftrightarrow x \approx 3,8459$ ; de volgende keer dat de hoogte 10 cm is, is bij meter.  $12 - 3,8459 \approx 8,1541$ . Het antwoord op de vraag is:  $8,1541 - 3,8459 \approx 4,3082$ , dus 431 cm.

### Gemengde opgaven

52

**a**  $T(100) = 24, T(300) = 48, T(1000) = 0, T(1750) = T(250) = 60$  en  $T(2050) = T(50) = 12$ .

**b** Zie figuur.



**c** De periode is 500.

**d**  $0 \leq x \leq 250: T(x) = 0,24x$ ;

$250 \leq x \leq 500: T(x) = -0,24(x - 250) + 60 = -0,24x + 120$ ;

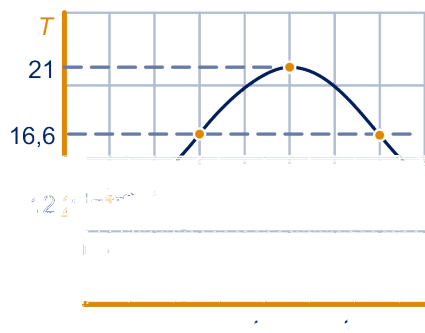
$1000 \leq x \leq 1250: T(x) = 0,24(x - 1000) = 0,24x - 240$ ;

$1250 \leq x \leq 1500: T(x) = -0,24(x - 1250) + 60 = -0,24x + 360$ .

# 14 Periodieke functies

53

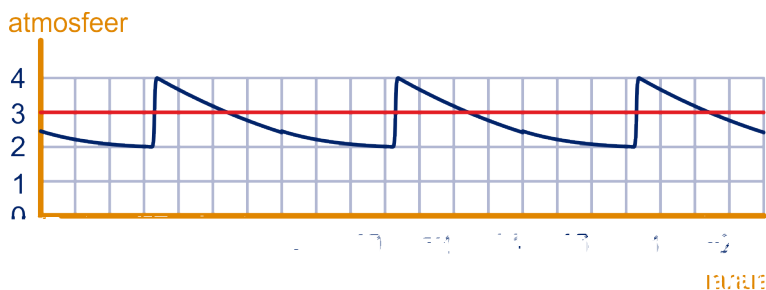
- a Zie figuur.  
 b  $T = 16,6 + 4,4 \sin\left(\frac{\pi}{12}(u - 9)\right)$   
 c De vergelijking  $7,6 + 4,3 \sin\left(\frac{\pi}{12}(u - 10)\right) = 10$  lossen we op met op de GR.  
 Dit geeft:  $u = 12,26$  of  $u = 19,74$ .  
 Dus ongeveer  $(19,74 - 12,26) \cdot 60 = 449$  minuten.



figuur bij opgave 53a

54

- a Dan is de druk van het gas groter, maar ook zijn de gaatjes groter (want opgerekt).  
 b De periode is 7.  
 c De band wordt opgepompt op 4 januari, dus dat is een maandag; 1 januari was dus op een vrijdag.  
 d Zie figuur.



- e 12 februari is de 33<sup>e</sup> dag na de jaarwisseling, dus dan is de bandenspanning hetzelfde als op 1 januari rond het middaguur; aflezen: (ongeveer) 2,3 atmosfeer.  
 f Zie grafiek van vraag d: boven de rode lijn, dus ongeveer 29%.

55

- A:  $y = -2\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{10}(x - 5)\right)$   
 B:  $y = 2 + \frac{1}{2} \sin(2\pi x)$  of ...  
 C:  $y = -3 \sin(\pi x)$  of  $y = -3 \sin(\pi(x - 1))$  of ...  
 D:  $y = \sin\left(x - 1\frac{1}{2}\pi\right)$  of ...  
 E:  $y = -1 + \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right)$  of ...  
 F:  $y = -5 + 10 \sin\left(6\left(x - \frac{1}{12}\pi\right)\right)$  of ....

56

- a  $a = 50$ ;  $b = \frac{2\pi}{28} \approx 0,2244$   
 b De vergelijking  $50 \sin\left(\frac{2\pi}{28}t\right) = -25$  met bijvoorbeeld oplossen op de GR. Je vindt in de eerste periode  $t = 16,33$  en  $t = 25,67$ . Dus op 9,33 van de 28 dagen geldt  $E < -25$ .

## 14 Periodieke functies

Dit is 33% van de periode.

NB. Je kunt de vergelijking  $50 \sin\left(\frac{2\pi}{28}t\right) = -25$  ook algebraïsch oplossen.

Dan  $\sin\left(\frac{\pi}{14}t\right) = -\frac{1}{2}$ . Met de GR vind je:  $\frac{\pi}{14}t = \sin^{-1}(-0,5) = -0,523\dots$ , dus  $t = \frac{-0,523\dots}{\frac{\pi}{14}} = -2,333\dots$

Dus een waarde van  $t$  in de eerste periode is:  $t = -2,333\dots + 28 = 25,666\dots$ . De andere waarde in de eerste periode vind je met symmetrie:  $t = 14 + 2,333\dots = 16,333\dots$ . Enzovoort.

- c** De eerste verjaardag begint na  $\frac{365}{23} \approx 15,87$  perioden (in een schrikkeljaar  $\frac{366}{23} \approx 15,96$ ). Dus de verjaardag ligt geheel in het laatste kwart van een periode. Dus de fysieke toestand heeft een stijgend verloop op de eerste verjaardag.
- d** Als ze 18 wordt, zijn er vanaf haar geboorte  $5 \cdot 366 + 13 \cdot 365 = 6575$  dagen voorbij.  
 $\frac{6575}{23} = 285,8\dots$  en  $286 \cdot 23 = 6578$ , dus  $F$  is positief vanaf de 6579<sup>e</sup> dag.  
 $\frac{6575}{33} = 199,2\dots$  en  $199 \cdot 33 = 6567$ , dus de intellectuele toestand is positief vanaf de 6568<sup>e</sup> dag.  
Dus de 6579<sup>e</sup>, 6580<sup>e</sup> en 6581<sup>e</sup> dag zijn geschikt, dus 5, 6, of 7 januari.

57

- a** De periode is  $\pi$ , de evenwichtswaarde  $-0,5$  en de amplitude  $2,5$ , dus een formule is  $f(x) = 2,5 \sin(2x) - 0,5$ .
- b** Dan  $2,5 \sin(2x) = 2 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0,8$ .  
Met de GR vind je  $\sin^{-1}(0,8) = 0,927\dots$ , dus een oplossing is:  $x = \frac{0,927\dots}{2} = 0,463\dots$ . Vanwege symmetrie is  $x = \frac{1}{2}\pi - 0,463\dots = 1,107\dots$  ook een oplossing.  
De andere oplossingen volgen uit de periodiciteit:  $x = 1,107\dots - \pi = -2,034\dots$  en  $x = 0,463\dots - \pi = -2,677\dots$ .  
De vier oplossingen zijn in twee decimalen:  $-2,68$ ;  $-2,03$ ,  $0,46$  en  $1,11$ .
- c**  $f(x)$  is maximaal als  $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$  voor alle gehele waarden van  $k$ .  
 $x = \frac{100 - \frac{1}{4}\pi}{\pi} = 31,58\dots$ , dus  $f(x)$  is maximaal voor  $x = 32\frac{1}{4}\pi = 101,32$  en voor  $x = 33\frac{1}{4}\pi = 104,46$ .
- d**  $g(x) = -2,5 \sin(2x) + 0,5$
- e**  $h(x) = -2,5 \sin(2x) - 0,5$  of:  
De grafiek van  $h$  heeft dezelfde periode en evenwichtswaarde, maar gaat bij  $x = 0,5\pi$  stijgend door de evenwichtslijn, dus  
 $h(x) = 2,5 \sin(2(x - 0,5\pi)) - 0,5$ .

### Extra opgaven

1

De algemene formule is  $y = a + b \sin(c(x - d))$ , waarbij  $a$ : evenwichtswaarde;  $b$  de amplitude;  $c = \frac{2\pi}{p}$  met  $p$  de periode en  $d$  een waarde van  $x$  waarbij de grafiek stijgend

## 14 Periodieke functies

door de evenwichtslijn gaat.

**Eerste grafiek:**

$$\text{evenwichtswaarde} = \frac{1}{2} \cdot (4 + 1) = 2\frac{1}{2} \text{ dus } a = 2\frac{1}{2};$$

$$\text{amplitude} = 4 - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ dus } b = 1\frac{1}{2};$$

$$\text{periode} = \frac{2}{3}\pi \text{ dus } c = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3;$$

bij  $x = 0$  stijgend door de evenwichtstand, dus  $d = 0$ ;

$$\text{formule: } y = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \sin(3x)$$

**Tweede grafiek:**

$$\text{evenwichtswaarde} = \frac{1}{2} \cdot (-1 + 5) = 2 \text{ dus } a = 2;$$

$$\text{amplitude} = 4 - 2 = 3 \text{ dus } b = 3;$$

$$\text{tussen } x = 1 \text{ en } x = 6 \text{ zit } 1\frac{1}{2} \text{ periode, dus periode} = \frac{5}{1,5} = \frac{10}{3}, \text{ dus } c = \frac{\frac{2\pi}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{3}{5}\pi;$$

bij  $x = 1$  stijgend door de evenwichtstand, dus  $d = 1$ ;

$$\text{formule: } y = 2 + 3 \sin\left(\left(\frac{3}{5}\pi(x - 1)\right)\right)$$

2

- a** De minimale hoogte is  $7 - 3 = 4$  en de maximale hoogte  $7 + 3 = 10$  meter.  
**b** De periode van de sinusoiden is  $20\pi$ . We berekenen de waarden van  $x$  waarvoor de hoogte  $h = 8$ .

Dan  $\sin(0,1 \cdot x) = 0,33\dots$ . De GR geeft:  $\sin^{-1}(0,33\dots) = 0,339\dots$ , dus als  $x = 3,39\dots$  is de hoogte 8 meter. De andere waarden van  $(0,33\dots)$  waarbij de hoogte 8 is, zijn:  $10\pi - 3,39\dots$ ,  $20\pi + 3,39\dots$  en  $30\pi - 3,39\dots$ . Bij de laatste  $x$ -waarde 'eindigt' het gebouw.

De lengte van het gebouw is dus:  $30\pi - 2 \cdot 3,39\dots = 87$  meter.

3

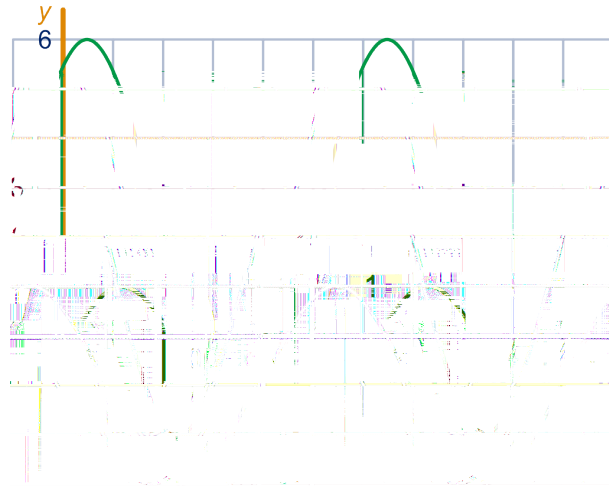
- a** De maximale waarde is  $0,4 + 0,8 = 1,2$  en de minimale waarde  $0,4 - 0,8 = -0,4$ .  
**b** De periode is  $p$  is 6 en de grafiek gaat stijgend door de evenwichtslijn bij  $-1$ , dus  $y$  is minimaal voor bijvoorbeeld:  $x = -1 - \frac{1}{4}p = -2\frac{1}{2}$ .  
 $y$  is één maal per periode minimaal, dus voor  $y$  voor de volgende waarden van  $x$ :  $-14\frac{1}{2}$ ,  $-8\frac{1}{2}$ ,  $-2\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{1}{2}$ ,  $9\frac{1}{2}$  en  $15\frac{1}{2}$ .  
**c**  $y$  is maximaal als  $x = -1 + \frac{1}{4}p = \frac{1}{2}$  en dus ook als  $x = \frac{1}{2} + 2 \cdot 6 = 12\frac{1}{2}$ . De lijn  $x = 12\frac{1}{2}$  is symmetrie-as van de grafiek, dus  $y$  is weer 1 als  $x = 12\frac{1}{2}$ .

4

- a** evenwichtswaarde  $= -1$ ; amplitude  $= 2$ ;  
periode  $= 6$ ; stijgend door evenwichtsstand bij  $x = 5$ ;  
formule:  $y = -1 + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{6}(x - 5)\right) = -1 + 2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi(x - 5)\right)$   
**b** Zie figuur op de volgende bladzijde.  
**c** De nieuwe evenwichtswaarde is  $y = 2$  en amplitude  $= 4$ ;  
Formule:  
 $y = 2 + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{6}(x - 5)\right) = 2 + 4 \sin\left(\frac{1}{3}\pi(x - 5)\right)$ .  
**d** De nieuwe evenwichtswaarde is  $y = 0$  en amplitude  $= 4$ ;  
Formule:  $y = 4 \sin\left(\frac{1}{3}\pi(x - 5)\right)$ .



## 14 Periodieke functies



5

- a  $n = 30$  in de formule invullen geeft:  $B = 8,813\dots$ , dat is 8 uur en  $60 \cdot 0,813\dots = 48,8$  minuten.  $8 : 27 + 8 : 48,8 = 17$  uur en 15,8 minuten.  
De zon gaat dus onder om 17 uur en 16 minuten.
- b 13 april komt overeen met  $n = 103$ . Verder:  $B(102) = 13,999\dots$  en  $B(103) = 14,07\dots$ . Klopt.
- c Het maximale verschil is tweemaal de amplitude, dus  $2 \cdot 4,6 = 9,2$  uur, dus 9 uur en 12 minuten.

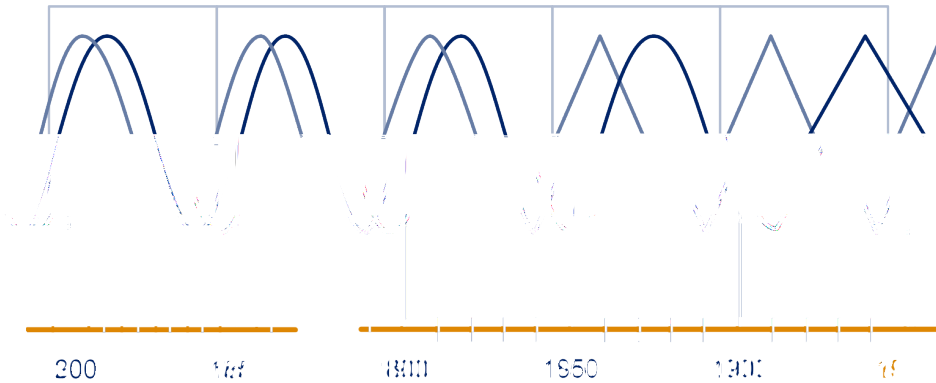
6

- a Bijvoorbeeld  $h = 5 + 5 \sin(0,1\pi(b - 15))$ .
- b Noem die hoogte  $h$ . De breedte van het linker punt op de grafiek op hoogte  $h$  heeft breedte  $b = 10 - 4 = 6$ , dus  $h = 5 + 5 \sin(0,1\pi(6 - 15)) \approx 3,5$ .

7

- a De golf van Kondratieff heeft een periode van ongeveer 51. In 1913 is er een maximum, dus ook in 2015 (want  $2015$  is  $2 \cdot 51 = 102$  jaar later dan 1913). In 1989 (of 1990) is er een minimum. Het crisisjaar 2009 ligt vlak voor de top, (dus ligt 2009 niet in een periode van economische neergang).
- b Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Barker maxima in (ongeveer) 1981 en in 2044 en een minimum voor in 2012.  
Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Kondratieff maxima in (ongeveer) 1964 en 2015 en minima voor in 1989 en in 2040.  
Op de volgende bladzijde zie je een schets van beide grafieken.  
Dus in de perioden 1964 tot 1981; 1989 tot 2012; 2015 tot 2040 en 2044 tot 2050.
- c Een periode is  $p = 51$  jaar, dus  $c = \frac{2\pi}{51}$ . Een waarde waarbij de sinusoidale stijgend door de evenwichtslijn gaat is:  $1913 + \frac{3}{4}p = 1951$ .  
Dus een formule is:  $K = \sin\left(\frac{2\pi}{51}(t - 1951)\right)$ .
- d De twee volgende perioden duren 20 en 13,3 jaar.  
2040 valt in de periode van 2035 tot 2048. Elk van de jaargetijden duurt iets meer dan 3 jaar, dus: lente: 2035-238, zomer 2038-2041, .., dus 2040 valt in de zomer.

## 14 Periodieke functies



- e De lengten van de perioden vormen een meetkundige rij met factor  $\frac{2}{3}$ . De periode van 30 jaar is die met  $n = 0$ . De  $n$ -de periode heeft lengte  $a_n = 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

$$a_n \leq 1 \text{ als } n > \frac{2}{3} \log\left(\frac{1}{30}\right) = 8,3\dots, \text{ dus } n = 9.$$

Om te weten in welk jaar dat is, moet je de somrij  $b_n = \sum_{n=0}^9 a_n$  berekenen.

Dat kan door in de GR een recursieve formule voor de somrij in te voeren:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_n = b_{n-1} + a_n \end{cases}$$

Je vindt  $b_9 = 57,7\dots$ , dus 57,7... jaar na 2015, dus in 2072.

8

- a  $\frac{1975 - 1755}{20} = 11$   
 b  $1960 + 6 \cdot 11 = 2026$   
 c  $16 \cdot 11 = 176$  jaar  
 d Hetzelfde als in 1895: bijna 160  
 e 22  
 f  $R = 140 + 35 \cdot \sin\left(\frac{115}{11}\pi\right) = 140 + 35 \cdot \sin\left(\frac{5}{11}\pi\right) = 174,64\dots$ , dus 174,6 cm.  
 g Een tijdstip met maximale neerslag is  $t = 5\frac{1}{2}$ , dus 1910-1911, dus ook 110 jaar daarna: 2020-2021.

9

- a Dat is als  $\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{1}{2}\pi\right) = -1$ . Eén waarde van  $t$  waarvoor dit het geval is voldoet aan:  $\frac{\pi}{6}t + \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi$ , dus als  $t = -6$ . De periode van de functie is 12, dus de gevraagde waarden zijn:  $t = 6, 18$  en  $30$ .  
 b Je vindt de grafiek van  $k$  door die van  $h$  3 eenheden naar links te schuiven. Dus  $k(t) = h(t + 3) = 7 - 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(t + 3) + \frac{1}{2}\pi\right)$ .  
 Of: de grafiek van  $k$  heeft dezelfde periode, amplitude en evenwichtswaarde als  $h$ .  $h$  gaat bij  $t = 0$  stijgend door de evenwichtslijn, dus een formule is:  
 $k(t) = 7 + 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ .

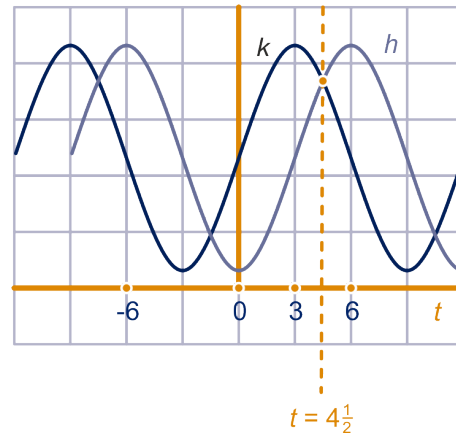
## 14 Periodieke functies

c Zie figuur.

We schetsen beide grafieken. De grafiek van  $h$  heeft symmetrie-as  $t = 6$  en die van  $k$  heeft symmetrie-as  $t = 3$ , dus  $t = 4\frac{1}{2}$  is een tijdstip waarop  $P$  en  $Q$  op dezelfde hoogte zijn.

Met dezelfde redenering vind je  $t = 10\frac{1}{2}$  als tijdstip waarop  $P$  en  $Q$  op dezelfde hoogte zijn.

De figuur bestaande uit de grafieken van  $h$  en  $k$  heeft ook periode 12, dus de gevraagde tijdstippen zijn:  $4\frac{1}{2}$ ,  $10\frac{1}{2}$ ,  $16\frac{1}{2}$ ,  $22\frac{1}{2}$ ,  $28\frac{1}{2}$ .



## Combinatoriek

1

a  $\binom{80}{10} \approx 1,2 \cdot 10^{12}$

b Er zijn 22 'goede' getallen en 58 'verkeerde'.

Aantal mogelijkheden om er 0 goed te hebben:  $\binom{58}{10} \approx 5,2 \cdot 10^{10}$  en aantal

mogelijkheden om er 2 goed te hebben:  $\binom{58}{8} \cdot \binom{22}{2} \approx 4,4 \cdot 10^{11}$ .

2

a  $7! = 5040$

b Aantal is:  $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ .

3

20

$10 - 5 - 5 - 5 - 5$ ;

$10 - 5$ : 3 manieren, namelijk  $10 - 5 - 2 - 2 - 1$ ,  $10 - 5 - 2 - 1 - 1 - 1$  en  $10 - 5 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1$ .

10 en geen van 5: 6 manieren;

$5 - 5 - 5 - 5$ ;

$5 - 5 - 5$ : 3 manieren;

$5 - 5$ : 6 manieren;

5: 8 manieren;

alleen 2 en 1: 11 manieren.

Totaal: 40 manieren

4

a  $2^{10} = 1024$

b  $3^{10} - 2^{10} = 58025$

c Er zijn  $\binom{10}{3}$  manieren om de 2 te plaatsen. Op de andere 7 plaatsen, heb je 2

mogelijkheden per plaats, dus  $\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 15360$ .

d Er zijn  $\binom{10}{2}$  manieren om eerst de 0 te plaatsen; op de acht overgebleven

plaatsen kun je op  $\binom{8}{3}$  manieren de 1 plaatsen. Er zijn dus  $\binom{10}{3} \cdot \binom{8}{2} = 3360$  rijtjes.

5

a  $7^3 = 343$

b  $7 \cdot 1 \cdot 1 = 7$

c  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

d  $4^3 = 64$

e Niet stoppen op de zevende verdieping op  $6^3$  manieren, dus wel op  $7^3 - 6^3 = 127$  manieren.

6

a  $\binom{15}{2} = 105$

7

b  $\binom{8}{2} = 28$  en  $2 \binom{7}{2} = 21$

c  $\binom{15}{2} - \binom{8}{2} - \binom{7}{2} = 56$  en  $7 \cdot 8 = 56$

a Neem een eiland met  $m$  en een eiland met  $n$  huizen.

Het aantal verbindingen op het ene eiland is  $\binom{m}{2}$ , op het andere  $\binom{n}{2}$  en van het ene naar het andere eiland  $mn$ . Dus het totale aantal verbindingen is  $\binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn$ .

Anderzijds is het totale aantal verbindingen ook:  $\binom{m+n}{2}$ .

b  $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = \frac{1}{2}n(n-1)$ .

Dus  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ , dus  $a = \frac{1}{2}$  en  $b = -\frac{1}{2}$ .

c  $\binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + mn$ ;

$$\binom{m+n}{2} = \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) = \frac{1}{2}(m+n)^2 - \frac{1}{2}(m+n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + mn.$$

8

a  $\binom{9}{0} \cdot \binom{41}{25} \approx 6,3 \cdot 10^{13}$

b  $\binom{43}{22} \approx 1,1 \cdot 10^{12}$

c  $\binom{4}{3} \cdot \binom{43}{19} \approx 3,2 \cdot 10^{12}$

9

Er is een rij van vijf letters A. Daar kun je vanaf de C op (van links naar rechts):  $\binom{6}{1}$ ,

$\binom{6}{2}$ ,  $\binom{6}{3}$ ,  $\binom{6}{4}$  en  $\binom{6}{5}$  manieren komen. Van K naar die letters A, kun je op

hetzelfde aantal manieren komen dus ook van die letters A naar K.

Er zijn dus:  $\binom{6}{1}^2 + \binom{6}{2}^2 + \binom{6}{3}^2 + \binom{6}{4}^2 + \binom{6}{5}^2 = 1022$  manieren.

## Exponenten, logaritmen, vergelijkingen

10

a De groeifactor is  $2^{\frac{1}{14}} = 1,05075\dots$ , dus met 5,08% per dag.

b  $2 \cdot \frac{\log(20)}{\log(2)} = 8,644$  weken.

c In één week minder, dus in 7,64 weken; in de dubbele tijd, dus 17,29 weken.

11

- a  $D = 3 \cdot (0,95)^t$
- b  $(0,95)^{\frac{1}{7}} = 0,9926\dots$ , dus met  $100 - 99,26\dots = 0,73\%$ .
- c Noem de gevraagde tijd in weken  $t$ , dan  $3 \cdot (0,95)^t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{\log\left(\frac{2}{3}\right)}{\log(0,95)} = 7,904\dots$ , dus na 55 dagen.

12

- a Van links naar rechts.
- $\log(y) = 2x + 1 \Leftrightarrow y = 10^{2x+1} \Leftrightarrow y = 10 \cdot (10^2)^x = 10 \cdot (100)^x$ ;
  - $\log(y) = -x + 1 \Leftrightarrow y = 10^{-x+1} \Leftrightarrow y = 10 \cdot (10^{-1})^x = 10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^x$ ;
  - $\log(y) = \frac{1}{2}x + \log(4) \Leftrightarrow y = 10^{\frac{1}{2}x + \log(4)} \Leftrightarrow y = 10^{\log(4)} \cdot \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^x = 4 \cdot (\sqrt{10})^x$ ;
  - $\log(y) = -\frac{1}{2}x - \log(4) \Leftrightarrow y = 10^{-\frac{1}{2}x - \log(4)} \Leftrightarrow y = 10^{-\log(4)} \cdot \left(10^{-\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^x$ .
- b Van links naar rechts.
- $\log(y) = 2 \log(x) + 1 \Leftrightarrow 10^{\log(y)} = 10^{2 \log(x) + 1} \Leftrightarrow y = (10^{\log(x)})^2 \cdot 10 = 10x^2$ ;
  - $\log(y) = -\log(x) + 1 \Leftrightarrow 10^{\log(y)} = 10^{-\log(x) + 1} \Leftrightarrow y = (10^{\log(x)})^{-1} \cdot 10 = 10x^{-1}$ ;
  - $\log(y) = \frac{1}{2} \log(x) + \log(4) \Leftrightarrow 10^{\log(y)} = 10^{\frac{1}{2} \log(x) + \log(4)} \Leftrightarrow y = (10^{\log(x)})^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\log(4)} = 4x^{\frac{1}{2}}$ ;
  - $\log(y) = -\frac{1}{2} \log(x) - \log(4) \Leftrightarrow 10^{\log(y)} = 10^{-\frac{1}{2} \log(x) - \log(4)} \Leftrightarrow y = (10^{\log(x)})^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{-\log(4)} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$

13

- a  $10 = 5,4 \cdot r^3 \Leftrightarrow r = \left(\frac{10}{5,4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,2$ , dus 12 cm
- b  $G = 5,4 \cdot r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{G}{5,4} \Leftrightarrow r = \left(\frac{G}{5,4}\right)^{\frac{1}{3}}$ , dus  $r = \left(\frac{1}{5,4}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot G^{\frac{1}{3}}$  dus  $a = \left(\frac{1}{5,4}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,57$  en  $b = \frac{1}{3}$ .
- c  $\log(11,0) = 3 \cdot \log(r) + 0,1 \Leftrightarrow \log(r) = \frac{\log(11,0) - 0,1}{3} = 0,313\dots$ , dus  $r = 10^{0,313\dots} = 2,059\dots$ , dus de straal is 2,06 dm.
- d  $0,1 = \log(1,258\dots)$ , dus  $\log(G) = 3 \cdot \log(r) + \log(1,258\dots) \Leftrightarrow \log(G) = \log(r^3) + \log(1,258\dots) \Leftrightarrow \log(G) = \log(1,258\dots \cdot r^3)$ , dus  $G = 1,26 \cdot r^3$ .

14

- a  $t = \frac{\log(40,0) - 1,3}{1,1} = 0,274\dots$ , dus  $t = 0,27$ .
- b  $\log(H) = 1,3 + 1,1 \cdot 1,13 = 2,543$ , dus  $H = 10^{2,543} = 349,14$ .
- c  $\log(H) = 1,3 + 1,1 \cdot t$ , dus uit de rekenregels voor machten volgt:  
 $H = 10^{1,3 + 1,1 \cdot t} = 10^{1,3} \cdot 10^{1,1 \cdot t} = 10^{1,3} \cdot (10^{1,1})^t$ .

# 15 Examentraining

15

a  $90 = 17,1 \cdot g^{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow \frac{90}{17,1} = g^{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow g = \left(\frac{90}{17,1}\right)^{\frac{8}{3}}$ ; je vindt:  $g = 83,8$  kg.

b  $d = 17,1 \cdot g^{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow \frac{1}{17,1} \cdot d = g^{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow g = \left(\frac{1}{17,1}\right)^{\frac{8}{3}} \cdot d^{\frac{8}{3}} = 0,0005d^{\frac{8}{3}}$

c 2 km in 5,87 komt overeen met  $\frac{60}{5,87} \cdot 2 = 20,442... \text{ km/u.}$

Er geldt:  $v = c \cdot r^{\frac{1}{9}}$ , dus  $20,442... = c \cdot 8^{\frac{1}{9}}$ , dus  $c = \frac{20,442...}{8^{\frac{1}{9}}} = 16,23$ .

Een formule is dus:  $v = 16,23 \cdot r^{\frac{1}{9}}$ .

16

a  $\log(10) - \log(5) = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log(2) = p$

b  $\log(25) - \log(10) = 2\log(5) - 1 = 2p - 1$

c  $\frac{1}{2}(\log(4) + \log(0,01)) = \log\left(0,04^{\frac{1}{2}}\right) = \log(0,2)$

17

a De pasfrequentie is 150, dus per uur zet de hond  $150 \cdot 60 = 9000$  passen. Dus een pas is  $\frac{700000}{9000} = 78$  cm.

b Het getal dat je op de verticale as bij  $m = 1$  afleest is  $a$ . Je vindt:  $a = 10^{2,5}$ . Het punt  $(10^3, 10^2)$  ligt op die lijn, dus  $10^{2,5} \cdot 10^{3b} = 10^2$ , dus  $b = -\frac{1}{6} = -0,17$ . Je krijgt de formule:  $f = 315 \cdot m^{-0,17}$ .

c Uit de formule  $v_G = 5,5m^{0,25}$  volgt  $m = \left(\frac{v_G}{5,5}\right)^4$ .

Dit vul je in in de formule  $f = 315 \cdot m^{-0,17}$ , je krijgt:

$$f = 315 \cdot \left(\left(\frac{v_G}{5,5}\right)^4\right)^{-0,17} = 315 \cdot 5,5^{4 \cdot 0,17} \cdot v_G^{-0,68} = 990 \cdot v_G^{-0,68}.$$

18

a In de figuur meet je de afstand tot 1, die is 0,2 eenheden, dus  $D = 10^{0,2} = 1,6$  meter.

b  $\log(2,5) = -2 + 1,5\log(H)$ , dus  $\log(H) = 1,6$  en  $H = 10^{1,6} = 40$  meter.

c  $\log(D) = -2 + 1,5\log(H) \Leftrightarrow 10^{\log(D)} = 10^{-2+1,5\log(H)} = 10^{-2} \cdot (10^{\log(H)})^{1,5}$ , dus  $D = 0,01 \cdot H^{1,5}$ .

Of:  $\log(D) = -2 + 1,5\log(H) \Leftrightarrow \log(D) = \log(0,01) + \log(H^{1,5}) = \log(0,01 \cdot H^{1,5})$ , dus  $D$ .

Dus  $p = 0,01$  en  $q = 1,50$ .

19

a 11% per jaar.

$0,89^5 = 0,5584...$ , dus in vijf jaar met  $100 - 55,84... = 44,16\%$ .

b  $0,89^t = 0,5 \Leftrightarrow t = \frac{\log(0,5)}{\log(0,89)} = 5,9$ , dus in 2016.

c  $60 \text{ km}^2$  komt overeen met  $6 \cdot 10^7 \text{ m}^2$ , dus  $A = \frac{6 \cdot 10^7}{5000} = 12000$ .

d  $A = \frac{6 \cdot 10^7}{5000 \cdot 0,89^t} = 12000 \cdot 0,89^{-t} = 12000 \cdot (0,89^{-1})^{-t} = 12000 \cdot 1,124^t$ , dus  $A = 12000$  en  $g = 1,124$ .

20

$0, 1\frac{1}{2}$

$2, -\frac{1}{2}$

3

geen oplossingen

21

Van links naar rechts.

- $\sqrt{x+2} = 5 \Leftrightarrow x+2 = 25 \Leftrightarrow x = 23$
- $5\sqrt{x} + 2 = 10 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1,6 \Leftrightarrow x = 2,56$
- $4x^4 = 44 \Leftrightarrow x^4 = 11 \Leftrightarrow x = 11^{\frac{1}{4}} = 1,82\dots$
- $\frac{1}{4}x^{0,4} = 4,4 \Leftrightarrow x^{0,4} = 17,6 \Leftrightarrow x = 17,6^{\frac{1}{0,4}} = 1,29\dots$
- $\sqrt[4]{x^3} = 10 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4}} = 10 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{4}{3}} = 21,54\dots$
- $\sqrt[4]{2x^3} = 10 \Leftrightarrow (2x^3)^{\frac{1}{4}} = 10 \Leftrightarrow 2x^3 = 10^4 \Leftrightarrow x^3 = 500 \Leftrightarrow x = 500^{\frac{1}{3}} = 7,93\dots$

22

- a  $4\pi R^2 = 100 \Leftrightarrow R^2 = \frac{100}{4\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{100}{4\pi}} = 2,82\dots$ , dus 28 mm.
- b  $4\pi R^2 = O \Leftrightarrow R^2 = \frac{O}{4\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \sqrt{O}$ , dus  $a = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} = 0,282\dots$ , dus in twee decimalen:  $a = 0,28$ .

23

Van links naar rechts.

- $\frac{8}{x^2+1} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $\frac{3}{x+2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow 3x = 5x + 10 \Leftrightarrow x = -5$
- $\frac{8}{x+2} = 2(x-1) \Leftrightarrow 8 = 2(x-1)(x+2) \Leftrightarrow x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0$ , dus  $x = 2$  of  $x = -3$
- $10 - \frac{3}{x+2} = 2x + 9 \Leftrightarrow -\frac{3}{x+2} = 2x - 1 \Leftrightarrow (2x-1)(x+2) = -3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$ ,  
dus  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$ , dus  $x = -1$  of  $x = -\frac{1}{2}$ .

24

- a Voor de heenweg 1 uur en de terugweg  $\frac{24}{18} = 1\frac{1}{2}$  uur. Dus zijn gemiddelde snelheid heen en terug is  $\frac{48}{2\frac{1}{2}} = 19,2$  km/u
- b  $\frac{24}{v_h}$  is de tijd over de heenweg,  $\frac{24}{v_t}$  de tijd over de terugweg en  $\frac{48}{v}$  de tijd over de weg heen en terug.
- Als je beide kanten van de gelijkheid  $\frac{24}{v_h} + \frac{24}{v_t} = \frac{48}{v}$  door 24 deelt, krijg je
- $$\frac{1}{v_h} + \frac{1}{v_t} = \frac{2}{v}.$$
- c  $\frac{1}{15} + \frac{1}{v_t} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{v_t} = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$ , dus met 30 km/u.

25

- a 240 km wordt nu afgelegd in  $\frac{6}{60}$  uur minder tijd, dus in 1,9 uur. De gemiddelde snelheid is dan  $\frac{240}{1,9} = 126,3\dots$ , dus  $\Delta v = 6,3\dots$
- b De tijd die de reis duurt is:  $2 - \frac{1}{60}A$ , de snelheid waarmee gereden wordt is  $120 + \Delta v$ . Dus  $(120 + \Delta v) \left(2 - \frac{1}{60}A\right) = 240$ .
- De formule is juist als  $\left(120 + \frac{2A}{2 - \frac{1}{60}A}\right) \left(2 - \frac{1}{60}A\right) = 240$ . Haakjes wegwerken



in  $\left(120 + \frac{2A}{2 - \frac{1}{60}A}\right) \left(2 - \frac{1}{60}A\right)$  geeft:  $\left(120 + \frac{2A}{2 - \frac{1}{60}A}\right) \left(2 - \frac{1}{60}A\right) = 240 - 2A + 2A = 240$ , dus de formule is juist.

26

- a Als  $t = 0$ , dan  $P = \frac{10}{2 + 3 \cdot 1} = 2\%$ .
- b  $\frac{10}{2 + 3 \cdot 2^{-t}} = 4,5 \Leftrightarrow 10 = 9 + 13,5 \cdot 2^{-t} \Leftrightarrow t = -^2\log\left(\frac{1}{13,5}\right) = 3,75 \dots$  weken, dus na 26 dagen.
- c Als  $t$  groot wordt, dan  $2^{-t} \approx 0$ , dus  $P$  wordt dan  $\frac{10}{2 + 0} = 5$ .

27

- a  $\frac{10}{3x + 1} = 1,2 \Leftrightarrow 1,2(3x + 1) = 10 \Leftrightarrow x = \frac{88}{36} = 2,44 \dots$ , dus 24 dm.
- b  $a = \frac{10}{3x + 1} - \frac{10}{3x + 4} = \frac{10(3x + 4)}{3x + 1} - \frac{10(3x + 1)}{3x + 4} = \frac{30}{9x^2 + 15x + 4}$
- c  $1 = \frac{30}{9x^2 + 15x + 4} \Leftrightarrow 9x^2 + 15x + 4 = 30 \Leftrightarrow 9x^2 + 15x - 26 = 0$ , met de -formule vind je:  $x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot -26 \cdot 15}}{2 \cdot 9}$ . Je vindt:  $x = 1,1$ .

## Differentiëren

28

Van links naar rechts.

- $y = x + 2x^{\frac{1}{2}}$ , dus  $\frac{dy}{dx} = 1 + 3x^{\frac{1}{2}} = 1 + 3\sqrt{x}$ ;
- $y$  is de ketting  $x \rightarrow x^2 + 1 = u \rightarrow 2 \cdot \ln(u) = y$ , dus  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2}{u} \cdot 2x = \frac{4x}{x^2 + 1}$
- $y$  is de ketting  $x \rightarrow -x + 1 = u \rightarrow 2^u = y$ , dus  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2^u \cdot -1 = -2^{-x+1}$
- $y$  is de ketting  $x \rightarrow 3x + 1 = u \rightarrow \sqrt[3]{u} = y$ , dus  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x + 1)^2}}$
- $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{(3x + 1)^2}}$
- $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \sqrt[3]{3x + 1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(3x + 1)^2}}$

wel steeds meer positief, dus de hellingfunctie  $h'$  is stijgend.

Als  $h$  toenemend dalend is, dan is de helling in elk punt negatief, dus  $h'$  is negatief, en wel steeds meer negatief, dus de hellingfunctie  $h'$  is dalend.

31

- a  $x > 16$
- b  $7 < x < 12$

32

- a Zie figuur.

Teken de raaklijn aan de grafiek van  $K$  en lees de helling af. Die is ongeveer 0,8, dus 8000 euro per stuk.

- b  $\frac{dK}{dq} = 1,2q^{-0,4}$ , als je  $q = 2,5$  invult, vind je  $\frac{dK}{dq} = 0,83$ , dus 8300 euro per stuk.

- c  $q - 2q^{0,6} = 0 \Leftrightarrow q^{0,4} - 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2^{\frac{1}{0,4}} = 5,65\dots$ , dus bij een productie tot 565 stuks.

- d  $\frac{dW}{dq} = 1 - 1,2q^{-0,4}$ , dus  $\frac{dW}{dq} = 0 \Leftrightarrow q^{-0,4} = \frac{1}{1,2} \Leftrightarrow q = \left(\frac{1}{1,2}\right)^{0,4} = 1,577\dots$ , dus bij een productie van 158 stuks.

33

- a Als  $t = 0$ , dan  $A = 120$ , dus 120 stuks.
- b Als  $t$  stijgt, dan daalt  $e^{-t}$ , dus wordt de noemer  $1 + 9 \cdot e^{-t}$  kleiner en dus  $A$  groter.
- c De grenswaarde is 1200. Als  $t$  erg groot is, dan is  $e^{-t}$  bijna 0, dus dan  $A = \frac{1200}{1}$ .
- d

- b  $\begin{cases} s_1 = 2 \\ s_n = s_{n-1} + 2^n, n = 2, 3, \dots \end{cases}$   
 c  $d_n = 2^{n+1} - 2 = 2 \cdot 2^n - 2 = 2^n + 2^n - 2 = 2^n + d_{n-1}$ , klopt.  
 d Door een recursieve formule ligt een rij vast. De rijen  $s_n$  en  $d_n$  hebben dezelfde recursieve formule.

$$\sum_{k=1}^3 a_k = 6 + 8 + 10 = 24, \quad \sum_{k=4}^5 a_k = 12 + 14 = 26$$

37

- a  $\begin{cases} a_0 = 10 \\ a_n = a_{n-1} - 4, n = 1, 2, 3, \dots; a_n = 10 - 4n, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$   
 b  $-30 = 10 - 4n \Leftrightarrow n = 10$ , het is dus de 11-de term, want de rij begint met de 0-de term.  
 c  $b_n = 7n - 10, n = 0, 1, 2, \dots$

38

- a Recursieve formule:  $\begin{cases} a_0 = 16 \\ a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}, n = 1, 2, \dots; \end{cases}$

directe formule:  $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 0, 1, \dots$

- b  $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 121\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{243}{32}$ , dus  $n = \frac{\log\left(\frac{243}{32}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = 5$  exact want

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}.$$

- c Noem de beginterm  $b$  en de reden  $r$ , dan  $b \cdot r^3 = 7$  en  $b \cdot r^9 = 700$ , dus  $r^6 = 100$  en  $r = 10^{\frac{1}{3}}$ , dus  $b \cdot \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 7$ , dus  $b = \frac{7}{10}$  en  $m_n = \frac{7}{10} \cdot \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^n$ .

Uitdrukkingen die op hetzelfde neerkomen zijn  $m_n = 7 \cdot 10^{\frac{1}{3}n-1}$  of  $m_n = \frac{7}{10} \cdot \sqrt[3]{10^n}$  of ...

- d De termen zijn afwisselend 10 (de termen met even  $n$ ) en -10, dus  $p_{1000} = 10$  en  $p_{1001} = -10$ .  
 e Geen van beide.

40

- a  $a_{10} = 24$ , het aantal termen is 11, dus  $\sum_{j=0}^{10} a_j = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (4 + 24) = 154$ .

- b Bij 30 hoort  $n = 13$  en bij 60 hoort  $n = 28$ .

Er worden dus  $28 - 12 = 16$  termen opgeteld. De som is dus  $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (30 + 60) = 720$ .

- c Het aantal termen is  $n + 1$ , de beginterm is 4 en de eindterm is  $4 + 2n$ .

Dus  $s_n = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (4 + 4 + 2n) = n^2 + 5n + 4$ .

- d De poten van de grootste L zijn  $n + 2$  en  $n + 3$ . Het aantal blokjes is dus:  $(n + 2)(n + 3) - 2 = n^2 + 5n + 4$ .

## Periodieke functies

- a Voor  $x = 1 + k \cdot 4$  en voor  $x = -1 + k \cdot 4$ , met  $k$  geheel.

41

42

- b Als  $-2 \leq x \leq 2$ , dan  $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ , dus als  $18 \leq x \leq 23$ , dan  $20 + \sqrt{3}$ ,  $20 - \sqrt{3}$  en  $24 - \sqrt{3}$

a  $k(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 1\frac{1}{2}x$ .

- b Horizontaal 1 eenheid naar links, verticaal 2 eenheden omhoog.

c  $f(x) = 4 - (x - 8)^2$

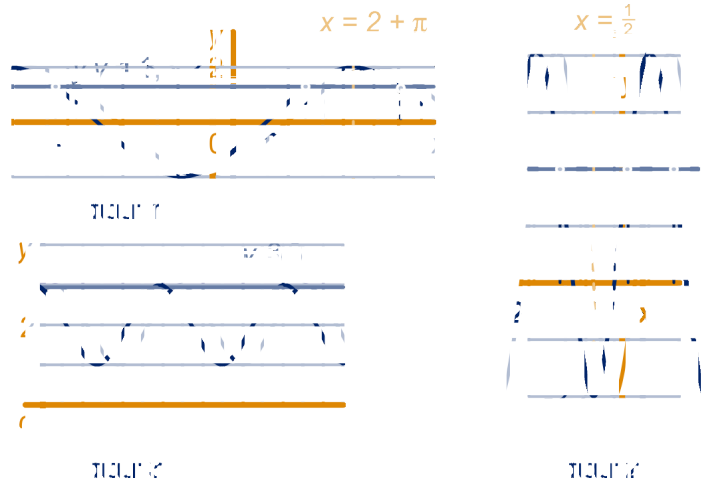
43

- a De periode van  $f$  is 4, De maximale waarden worden bereikt voor  $x = 2 + k \cdot 4$  met  $k$  geheel, dus voor  $x = 102, 106$  en  $110$ .

- b De periode van  $g$  is 5, De minimale waarden worden bereikt voor  $x = -\frac{1}{2} + k \cdot 5$  met  $k$  geheel, dus voor  $x = 104\frac{1}{2}$  en  $109\frac{1}{2}$ .

c  $f(x) = -3 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - 1)\right)$ ;  $g(x) = 3 + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(x - 1)\right)$ .

44



- We bekijken de functie  $y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$ , zie figuur 1.

De periode is  $4\pi$ , de grafiek gaat door het evenwicht bij  $x = 2, x = 2 + 2\pi, \dots$

Een symmetrieas is de lijn  $x = 2 + \pi$ .

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 1,34 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0,67; \text{ één oplossing met de GR:}$$

$$\frac{1}{2}x - 1 = \sin^{-1}(0,67) = 0,734\dots, \text{ dus } x = 2(1 + 0,734\dots) = 3,468\dots$$

Een tweede oplossing uit symmetrie ten opzichte van de lijn  $x = 2 + \pi$  is

$4 + 2\pi - 3,468\dots = 6,814\dots$ . De andere oplossingen verschillen gehele periodes van deze twee oplossingen, de enige is nog:  $6,814\dots - 4\pi = -5,751\dots$

De oplossingen zijn dus:  $-5,75; 3,47$  en  $6,81$ .

- We bekijken de functie  $y = 1 - 3 \sin(\pi(x + 1))$ , zie figuur 2.

De periode is 2, de grafiek gaat door het evenwicht als  $x = -1, x = 0, \dots$

Een symmetrieas is de lijn  $x = -\frac{1}{2}$ .

$$1 - 3 \sin(\pi(x + 1)) = 2 \Leftrightarrow \sin(\pi(x + 1)) = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{De GR geeft: } \sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = -0,339\dots$$

Eén oplossing is  $x = -1 + \frac{-0,339\dots}{\pi} = -1,108\dots$ . Een tweede oplossing vind je met

behulp van symmetrie:  $x = -1 + -1,108\dots = 0,108\dots$

De andere oplossingen verschillen gehele periodes van deze twee oplossingen, dat zijn:  $-1,108\dots$ ,  $0,892\ 0,108\dots$  en  $-1,89\dots$

De gevraagde oplossingen zijn:  $-1,89$ ;  $-1,11$ ;  $0,11$ ;  $0,89$ .

- We bekijken de functie  $y = 2 + \sin(2x + 1)$ , zie figuur 3. 3 is de maximale waarde van de functie, dus er is maar één oplossing per periode. De periode is  $\pi$ .  $2 + \sin(2x + 1) = 3 \Leftrightarrow \sin(2x + 1) = 1$ . Eén oplossing is  $2x + 1 = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{2}\pi - 1}{2} = 0,285\dots$

De andere oplossingen verschillen gehele periodes van deze oplossing en zijn dus:  $3,426\dots$ ,  $6,568\dots$

De gevraagde oplossingen zijn  $0,29$ ,  $3,43$  en  $6,57$ .

45

$5 + 5 \sin(0,1\pi(b - 15)) = 8 \Leftrightarrow \sin(0,1\pi(b - 15)) = 0,6$ ; de GR geeft:  $\sin^{-1}(0,6) = 0,643\dots$ , een oplossing is dus:  $b = \frac{0,643\dots}{0,1\pi} + 15 = 17,048\dots$ . De andere oplossing vind je met behulp van symmetrie:  $b = 20 - 17,048\dots = 2,951\dots$ , dus de breedte van de waterspiegel is  $17,048\dots - 2,951\dots = 14,096\dots$ , in één decimaal:  $14,1$ .

## Extra opgaven

1

a  $2500 = \frac{3500}{1 + 34 \cdot 0,87^t} \Leftrightarrow 1 + 34 \cdot 0,87^t = \frac{3500}{2500} = 1,4 \Leftrightarrow 0,87^t = \frac{0,4}{34}$ , dus  $t = {}^{0,87}\log\left(\frac{0,4}{34}\right) = 31,9$ , dus na  $t = 31,9$  dagen.

b Als  $t$  groot is, dan is  $0,87^t$  nagenoeg 0, dus dan wordt  $F = \frac{3500}{1 + 34 \cdot 0} = 3500$

c Er geldt:  $t = \frac{T}{24}$ , dus  $0,87^t = 0,87^{\frac{T}{24}} = \left(0,87^{\frac{1}{24}}\right)^T$ , dus  $b = 0,87^{\frac{1}{24}} = 0,994$ , de formule wordt dus:  $F = \frac{3500}{1 + 34 \cdot 0,994^T}$

d  $F = \frac{3500}{34 \cdot 0,87^t} = \frac{3500}{34} \cdot \frac{1}{0,87^t} = \frac{3500}{34} \cdot \left(\frac{1}{0,87}\right)^t$ , dus  $b = \frac{3500}{34} \approx 103$  en  $g = \frac{1}{0,87} \approx 1,15$ .

2

a De periode van  $P$  is  $p = \frac{2\pi}{0,212769} \approx 29,5305$ . Dit is  $42524$ .

b Dat is als  $P$  minimaal is. Dat gebeurt éénmaal per periode. Er wordt gevraagd naar de kleinste (positieve) waarde van  $t$  met  $P(t) = 0$ .

$$50 + 50 \sin(0,212769t - 1,042563) = 0 \Leftrightarrow \sin(0,212769t - 1,042563) = -1.$$

De GR geeft:  $\sin^{-1}(-1) = -1,57079\dots$ , dus een oplossing is:  $t = \frac{-1,57079\dots + 1,042563}{0,212769} = -2,4826\dots$ . De andere oplossingen verschillen

gehele perioden van deze, dus de gevraagde waarde van  $t$  is:

$$-2,482 + 29,2905 \approx 27,047, \text{ dus op 28 januari 2017.}$$

- c 22 februari (van 0:00 uur tot 24:00 uur) ligt tussen  $t = 52$  en  $t = 53$ ;  $P(52) \approx 22$  en  $P(53) \approx 14$ , dus neemt  $P$  af, dus tussen laatste kwartier en nieuwe maan

3

- a  $3,31 + \frac{21}{t-148} = 0 \Leftrightarrow 3,31(t-148) + 21 = 0 \Leftrightarrow 3,31t = 468,88$ , dus  $t = \frac{468,88}{3,31} \approx 141,6556$ , dus 141 uur en 39 minuten.
- b  $\frac{dV}{dt} = -\frac{21}{(t-148)^2}$
- c  $\frac{dV}{dt}$  is negatief, dus is  $V$  dalend.  $\frac{dV}{dt}$  wordt steeds minder negatief omdat  $(t-148)^2$  steeds groter wordt, dus de daling neemt af.
- d Op het moment dat blokje 2 uitgaat, is de spanning  $0,94 \cdot 3,2 = 3,008$ .  
 $3,31 + \frac{21}{t-148} = 3,008 \Leftrightarrow \frac{21}{t-148} = -0,302 \Leftrightarrow 21 = -0,302(t-148)$ , dus  $t = 148 - \frac{21}{0,302} \approx 78,5$ .  
 Dit is meer dan de helft van de stand-by-tijd.

4

- a Op de heenweg is de snelheid 12 km/u, dus duurt de heenweg  $\frac{42}{12} = 3\frac{1}{2}$  uur, de terugweg duurt  $\frac{42}{28} = 1\frac{1}{2}$  uur, intotaal dus 5 uur.
- b De snelheid op de heenweg  $v - 8$  km/u, dus tijd over de heenweg is  $T = \frac{42}{v-8}$  en het brandstofverbruik  $B = \frac{42}{v-8} \cdot v^3 = \frac{42v^3}{v-8}$ .
- c  $\frac{dB}{dv} = \frac{126v^2(v-8) - 42v^3}{(v-8)^2} = \frac{84v^3 - 1008v^2}{(v-8)^2}$ , dus  $\frac{dB}{dv} = 0 \Leftrightarrow v = 0$  of  $v = \frac{1008}{84} = 12$ .  
 Uit de grafiek op de GR blijkt dat het brandstofverbruik minimaal is als  $v = 12$ .

5

- a Het gemiddelde van de maximale en de minimale hoogte is  $a = 33,5$ , de amplitude  $b = 37,0 - 33,5 = 3,5$ ;  $c = \frac{2\pi}{p}$  waarbij de periode  $p = 12$ , dus  $c = \frac{1}{6}\pi$ .
- b Voer een variabele in op de GR. We noemen hem hier  $A$ . Teken op de GR de grafiek van  $v = d - w = -4,0 + 3,5 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - A \sin\left(\frac{1}{2}(t-3,14)\right)$  als functie van de tijd  $t$ . We noemen  $d - w$  bijvoorbeeld  $Y$  en  $t$  bijvoorbeeld  $X$ . Als  $A = 1,9$  zijn er geen snijpunten met de  $X$ -as en  $A = 2,0$  zijn er wel snijpunten met de  $X$ -as. Dus vanaf een amplitude van 2,0 (meter) komt de drijver af en toe boven water.

6

- a  $12! \approx 4$  miljoen
- b  $\frac{12!}{3!} = 79833600$
- c  $\binom{12}{6} = 924$  (Als je geen onderscheid tussen "onder" en "boven" zijn er maar half zoveel mogelijkheden.)
- d  $\frac{12!}{4!4!2!2!} = 207900$

7

- a Voor elke streep zijn er 4 mogelijkheden, in totaal dus  $4^4 = 256$  mogelijkheden.

- b Het zwart maken van 2 van de 4 stukken boven kan op  $\binom{4}{2}$  verschillende manieren.

Er zijn dus  $\binom{4}{2}^2 = 36$  mogelijkheden.

- c De laatste drie symbolen vormen een huisnummer van 3, dus 900 mogelijkheden van 100 tot en met 999. of het kan ook cijfer + X + toevoeging zijn, daarvoor zijn  $9 \cdot 1 \cdot 36 = 324$  mogelijkheden.  
In totaal zijn er  $900 + 324 = 1224$  mogelijkheden.

8

- a Vier mogelijkheden

	Lunteren	Dialect X			
zich	+	+	+	+	+
hem	-	-	+	+	+
zit en					
zich					
zit en					

- b Het aantal verschillende Hammingafstanden is gelijk aan het aantal verschillende tweetallen dat je kunt maken met 267 dialecten, dus  $\binom{267}{2} = 35511$ .

- c De helling van de lijn is  $\frac{145 - 55}{400 - 10} \approx 0,23$ , dus een vergelijking is  $H = 0,23x + b$ , voor zeker getal  $b$ . Het punt (10,55) moet voldoen, dus  $55 = 0,23 \cdot 10 + b$ , dus  $b \approx 53$ .

De vergelijking  $-45,88 + 66,44 \log(x) = 0,23x + 53$  oplossen met de GR (beschrijf duidelijk hoe je dat doet!) geeft: bij 44 en bij 275 km

- d  $-45,88 + 66,44 \log(2x) = -45,88 + 66,44 (\log(x) + \log(2))$   
 $= -45,88 + 66,44 \log(x) + 66,44 \log(2)$ , dus het klopt want  
 $66,44 \log(2) = 20,0004 \dots$

9

- a Dan  $f = \frac{1}{2}$ , dus  $\frac{f}{1-f} = 1$ , verticaal  $10^0$  geeft horizontaal 1877.

- b  $y = \frac{f}{1-f}$ , dan  $\frac{dy}{df} = \frac{1 \cdot (1-f) - (-1) \cdot f}{(1-f)^2} = \frac{1}{(1-f)^2}$ . Omdat  $(1-f)^2$  positief is voor elke waarde van  $f$  tussen 0 en 1, is  $\frac{dy}{df}$  dat ook, dus  $y$  is een stijgende functie van  $f$ .

- c Uit  $\frac{f_{\text{hout}}}{1-f_{\text{hout}}} = 3,03 \cdot 0,96^t$  volgt, door aan beide kanten met  $1 - f_{\text{hout}}$  te vermenigvuldigen:  $f_{\text{hout}} = 3,03 \cdot 0,96^t (1 - f_{\text{hout}})$ , dus  $f_{\text{hout}} + 3,03 \cdot 0,96^t \cdot f_{\text{hout}} = 3,03 \cdot 0,96^t \Leftrightarrow (1 + 3,03 \cdot 0,96^t) \cdot f_{\text{hout}} = 3,03 \cdot 0,96^t \Leftrightarrow f_{\text{hout}} = \frac{3,03 \cdot 0,96^t}{1 + 3,03 \cdot 0,96^t}$ .

- d Voer de som van  $f_{\text{olie}}$  en  $f_{\text{gas}}$  in op de GR.

Teken de lijn  $y = 0,25$  erbij en bepaal het snijpunt van de twee grafieken.

Je vindt  $t \approx 93,34$ , dus in 1943.

Geef weer duidelijk aan hoe je een en ander op de GR invoert.

e In de figuur is iedere volgende rechthoek twee keer zo groot als de vorige, dus de verdubbelingstijd is 20 jaar, dus de groeifactor per jaar is  $2^{\frac{1}{20}} = 1,0352\dots$ , dat komt overeen met 3,5% stijging per jaar.

10

a De lichtste soort weegt  $\frac{7,8}{1,35^3} \approx 3,2$  kg.

b Noem de gewichtsratio  $g$ , dan  $g$ , dan  $g^{21} = \frac{631}{164}$ , dus  $g = \left(\frac{631}{164}\right)^{\frac{1}{21}} \approx 1,07$ .

c  $631 \cdot 1,06^x = 3550 \Leftrightarrow 1,06^x = \frac{3550}{631} = 5,625\dots \Leftrightarrow x = \frac{\log(5,625\dots)}{\log(1,06)} = 29,6\dots$ , dus er zijn  $30 - 3 = 27$  soorten uitgestorven.

d  $\log(W) = 0,075N + 0,4 \Leftrightarrow W = 10^{0,075N+0,4} = 10^{0,075N} \cdot 10^{0,4} = (10^{0,075})^N \cdot 10^{0,4}$ , dus  $b = 10^{0,075} \approx 2,5$  en  $g = 10^{0,4} \approx 1,2$

11

a Bij  $x \approx 19$  is de waarde van  $B$  in een onderzocht project ongeveer 210 duizend en de waarde van  $B$  volgens het model ongeveer 90 duizend, dus meer dan het dubbele. De afwijking is dus groter dan 100%.

b  $90 = p \cdot 20^q$  en  $300 = p \cdot 40^q$ , dus  $\frac{300}{90} = \frac{40^q}{20^q} = 2^q$ , dus  $q = \frac{\log\left(\frac{300}{90}\right)}{\log(2)} = 1,7369\dots$

Dit invullen in bijvoorbeeld  $90 = p \cdot 20^q$  geeft  $p = 0,494\dots$

Dus in twee decimalen:  $p = 0,49$  en  $q = 1,74$ .

c  $K_A = \frac{\text{aankoopkosten per hectare}}{\text{aantal woningen per hectare}} = \frac{170}{x} = 170 \cdot x^{-1}$

$K_B = \frac{\text{kosten bouwrijp maken per hectare}}{\text{aantal woningen per hectare}} = \frac{0,4 \cdot x^{1,8}}{x} = 0,4x^{0,8}$

d  $\frac{d}{dx}(K_A + K_B) = 0,32x^{-0,2} - 170 \cdot x^{-2}$ , dus

$\frac{d}{dx}(K_A + K_B) = 0 \Leftrightarrow 0,32x^{-0,2} = 170 \cdot x^{-2} \Leftrightarrow x^{1,8} = \frac{170}{0,32}$ , dus  $x = \left(\frac{170}{0,32}\right)^{\frac{1}{1,8}} \approx 32,66$ .

$K_A = K_B \Leftrightarrow 170 \cdot x^{-1} = 0,4x^{0,8} \Leftrightarrow x^{1,8} = \frac{170}{0,4}$ , dus niet hetzelfde.

e  $\frac{d}{dx}K_T = -G \cdot x^{-2} + 0,32x^{-0,2}$

Als  $\frac{d}{dx}K_T = 0$  voor  $x = 38,5$ , vind je  $G \approx 228,5$ ;

als  $\frac{d}{dx}K_T = 0$  voor  $x = 39,5$ , vind je  $G \approx 239,5$ .

De grafiek van  $K_T$  tekenen voor waarden voor gehele waarden van  $G = 229$  tot en met  $G = 239$  leidt tot de conclusie dat  $K_T$  voor al die waarden van  $G$  minimaal is als  $x \approx 39$ .

12

a De afstand tussen twee opeenvolgende verdeelstrepen op de assen noem ik een eenheid. Dan is het gekleurde punt horizontaal gemeten 2,7 eenheden vanaf 0, dus het hoort bij  $10^{3,7} = 5000$  meter en verticaal gemeten 2,9 eenheden dus bij  $10^{2,9} = 790$  seconden, dat is 13 minuten en 10 seconden.

b  $\log(t) = 1,111 \cdot \log(a) - 1,234 \Leftrightarrow 10^{\log(t)} = 10^{1,111 \cdot \log(a)} \cdot 10^{-1,234} = (10^{\log(a)})^{1,111} \cdot 10^{-1,234} = a^{1,111} \cdot 10^{-1,234}$ , dus  $p = 10^{-1,234} = 0,058$  en  $q = 1,111$ .



13

- a Neem aan: een hevige regenbui duurt  $d$  uur, dan is de bijbehorende  $R = 16,6 \cdot d^{0,475}$ . Bij een regenbui van  $10d$  uur, is de bijbehorende  $R = 16,6 \cdot (10d)^{0,475} = 10^{0,475} \cdot 16,6 \cdot 10^{0,475} \cdot d^{0,475}$  en  $10^{0,475} \approx 2,9$ , dus dat klopt wel.
- b  $\frac{16,6 \cdot D^{0,475}}{60D} = 0,1 \Leftrightarrow 16,6 \cdot D^{0,475} = 6D \Leftrightarrow D^{0,525} = \frac{16,6}{6}$  Dus  $D^{0,525} = 2,766\dots$  en  $D = (2,766\dots)^{\frac{1}{0,525}} \approx 6,95$ .
- c Er geldt  $R = \frac{r}{2,56}$  en  $D = \frac{d}{60}$ . Dit invullen in de gegeven formule geeft:  $\frac{r}{2,54} = 16,6 \cdot \left(\frac{d}{60}\right)^{0,475} \Leftrightarrow r = 2,54 \cdot 16,6 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{0,475} \cdot d^{0,475}$ , dus  $c = 2,54 \cdot 16,6 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{0,475} \approx 6,03$ .

14

- a 0-5-5, 1-5-5, 3-5-5 en 4-5-5, dus vier mogelijkheden
- b Het aantal stenen met maar één cijfer erop is 6,  
het aantal stenen met precies twee dezelfde cijfers erop is  $6 \cdot 5 = 30$ ,  
het aantal stenen met drie verschillende cijfers erop is  $\binom{6}{3} = 20$ .  
Er zijn 56 verschillende stenen.

15

- a Noem de groeifactor per 24 uur  $g$ , dan  $g^7 = 0,3$ , dus  $g = (0,3)^{\frac{1}{7}} = 0,8419\dots$ , dus afgerond 0,842.
- b Noem die tijd in uren  $t$ , dan  $(0,842)^{\frac{t}{24}} = 0,6 \Leftrightarrow \frac{t}{24} = \frac{\log(0,6)}{\log(0,842)} = 2,970\dots$ , dus  $t = 24 \cdot 2,970\dots \approx 71,29$ , dus afgerond in uren 71 uur.
- c  $\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{500 \cdot (0,842)^{0,01} - 500}{0,01} = -85,91\dots$ , dus de afbraaksnelheid is dus  $-\frac{85,91\dots}{24} = -3,57\dots$ , dus ongeveer 3,6 mg per uur.
- d  $\frac{dM}{dt} = 500 \cdot \ln(0,842) \cdot (0,842)^t$ , dit levert voor  $t = 0$ :  $500 \cdot \ln(0,842) \approx -85,99$ . Je komt dan ongeveer op hetzelfde uit.
- e Na de eerste week is nog  $500 \cdot 0,30 = 150$  mg medicijn over en na inname van de tweede tablet is er 650 mg medicijn. Na 10 dagen is er  $650 \cdot (0,842)^3 \approx 388$  mg medicijn over.
- f Na 14 dagen is er  $650 \cdot 0,30 + 500 = 695$  milligram, dus  $M(t) = 695 \cdot (0,842)^{t-14}$ .

16

- a Op elke laag komen er 2 stenen bij, dus  $a_n = 2n$ .
- b Dat is de somrij bij de rij  $a_n$ . De rij  $a_n$  is rekenkundig, dus de som is  
maal  $\frac{n \cdot \frac{1}{2} (2 + 2n)}{2} = n^2 + n$ .
- c  $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1280$
- d Neem aan de bovenste laag is wit ( $w$ ).  
Dan heb je (van boven naar beneden) de kleuren  
 $w \square w \square w$  waarbij op de plaats  $\square$  vier kleuren mogelijk zijn, dit geeft  $4 \cdot 4 = 16$  mogelijkheden of  
 $w \square g \square w$  waarbij op de laag in het midden een kleur  $g$ , geen wit zit, dus op de plaatsen  $\square$  3 kleuren mogelijk zijn, dit geeft  $3 \cdot 3 = 9$  mogelijkheden.

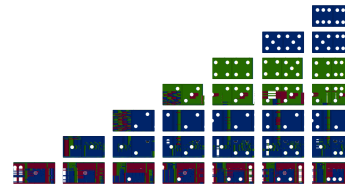
Er zijn  $9 + 16 = 25$  mogelijkheden waarbij de onderste laag wit is.  
In totaal zijn er dan  $5 \cdot 25 = 125$  mogelijkheden.

17

- a  $a_n = 8^n$   
b  $\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_n = s_{n-1} + 8^{n-1} \end{cases} n = 2, 3, \dots$   
c 153391689

18

- a Zie figuur.  
Er zijn er evenveel als hokjes in een vierkant van 7 bij 7 op of onder een diagonaal, dus  $\frac{7 \cdot 7 - 7}{2} + 7 = 28$  stenen.  
b Er zijn er evenveel als hokjes in een vierkant van 10 bij 10 op of onder een diagonaal, dus  $\frac{10 \cdot 10 - 10}{2} + 10 = 55$  stenen.



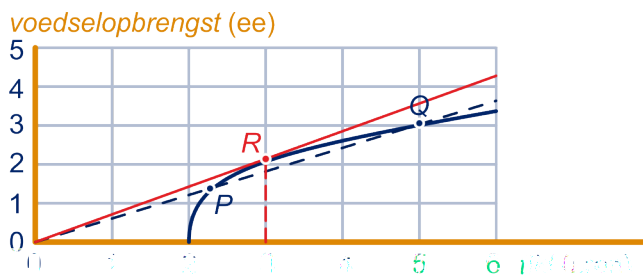
- c  $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n + 1 \end{cases} n = 1, 2, \dots$

Als je de stenen legt zoals in het antwoord van vraag d, krijg je het aantal stenen van het volgende spel door er nog een rij rechts naast te leggen met op de linker helft 0 ogen en op de rechterhelft 0, 1, ...,  $n$  ogen. Dus je moet er  $n + 1$  stenen bij leggen.

19

- a Na 0,5 uur is de voedselopbrengst (ongeveer) 1,5 ee. De dubbele hoeveelheid is 3 ee, daar hoort een tijd bij van 3 uur, dat is 6 maal zo groot.  
b Zie de figuur hieronder. De gemiddelde voedselopbrengst bij punt  $Q$  is de helling van lijn  $OQ$  en alle punten op die lijn hebben dezelfde gemiddelde voedselopbrengst. Je moet dus snijpunten van lijn  $OQ$  met de grafiek hebben. Het gevraagde punt is dus  $P$ .  
c Zie figuur.

Je moet een punt  $R$  op de grafiek hebben zó, dat lijn  $OR$  een zo groot mogelijke helling heeft. Je moet dus een lijn door  $O$  tekenen, die de grafiek aan de bovenkant raakt. Het gezochte punt is dan het raakpunt. Je vindt als bijbehorende tijd ongeveer 3 uur.



20

- a Je kunt de berekening op de GR uitvoeren. Schrijf in dit geval je werkwijze duidelijk op.  
Je kunt het ook 'met de hand' uitrekenen:  
Voor april is de schatting 4300, voor mei 4450 en voor voor juni 4375.

- b** De schattingen moeten liggen tussen (ongeveer) 4300 en 4386.  
Er geldt:  $V_3 = 4480$  en  $V_4 = 4288$  en  $V_5 = 4365$ . Dus in mei.
- c**  $V_3 = a \cdot 4000 + (1 - a) \cdot 5200 = 5200 - 1200a$ , dus  
 $V_4 = a \cdot (5200 - 1200a) + (1 - a) \cdot 4000 = -1200a^2 + 1200a + 4000$ .
- d**  $4260 = -1200a^2 + 1200a + 4000 \Leftrightarrow 1200a^2 - 1200a - 260 = 0 \Leftrightarrow$   
 $60a^2 - 60a - 13 = 0$ , dus  $a = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 + 4 \cdot 60 \cdot 13}}{120}$ , dus  $a \approx 0,32$  of  $a \approx 0,68$ .  
Omdat de grafiek van  $V_4$  als functie van  $a$  een bergparabool is vind je:  $a$  tussen 0,32 en 0,68.

21

- a** Het aantal tegels met twee dezelfde symbolen is  $6 \cdot 5 = 30$ ; het aantal tegels met twee verschillende symbolen is  $\binom{6}{2} = 15$ , dus het aantal tegels met verschillende symbolen is  $6 \cdot 15 = 90$ . Het totaal aantal is dus 120.
- b** De laagste score is kleiner dan 10, en de zes gekozen scores moeten samen 96 zijn. Een voorbeeld is: (18,18,18,17,17,8).
- c** In elke poule worden  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  wedstrijden gespeeld. Dat zijn  $6 \cdot 4 = 24$  wedstrijden voor alle poules samen.  
In de ronden daarna worden nog 4, 2 en 1 wedstrijden gespeeld. In totaal zijn dat 31 wedstrijden.

22

- a** Het 5 keer verrichten van handeling A kost  $5 \cdot 11,3 = 56,5$  minuten en het 4 keer verrichten van handeling A kost  $4 \cdot 12,1 = 48,4$  minuten, dus de 5de keer kost  $56,5 - 48,4 = 8,1$  minuten.
- b** Als  $n$  groot is, dan is  $0,68^{n-1}$  nagenoeg 0, dus  $T_n \approx 6$ . De tijdwinst is dus 10 minuten.
- c** 
$$\begin{cases} H_1 = 16 \\ H_n = \frac{H_{n-1} + T_n}{n} \end{cases} n = 1, 2, \dots, \text{ dus } \begin{cases} H_1 = 16 \\ H_n = \frac{H_{n-1} + 6 + 10 \cdot 0,68^{n-1}}{n} \end{cases} n = 1, 2, \dots$$
  
Invullen in de GR geeft:  $H_{10} = 9,06$ .
- d** De vergelijking  $\frac{31,25(1 - 0,68^n)}{n} = 7$  oplossen met de GR geeft  $n = 31,2, \dots$ , dus 32 handelingen.

23

- a** De levensduur van koper is  $\frac{313}{8,7} \approx 36$  jaar ; dus ongeveer  $\frac{420}{36} \approx 11,7$  keer zo groot
- b** Neem aan dat het (vanaf 1970)  $t$  jaren duurt, dan  $8,7 \cdot 1,058^t = 6 \cdot 1,9 \cdot 1,033^t$ .  
Dus  $\frac{1,058^t}{1,033^t} = \frac{6 \cdot 1,9}{8,7} \Leftrightarrow \left(\frac{1,058}{1,033}\right)^t = 1,310 \dots \Leftrightarrow (1,024 \dots)^t = 1,310 \dots$   
Dus  $t = \log\left(\frac{1,310 \dots}{1,024 \dots}\right) \approx 11, \dots$  jaar, dus vanaf 1982.
- c**  $p = 3,3$  en  $L = 420$  invullen geeft:  $L^* = 81,9$ , dus in 2051.
- d**  $p = 3,3$  en  $L^* = 30$  invullen geeft:  $30 = \frac{230 \cdot \log(L \cdot 6,1 + 100) - 460}{6,1} \Leftrightarrow$   
 $230 \cdot \log(L \cdot 6,1 + 100) = 30 \cdot 6,1 + 460$ , dus  $\log(L \cdot 6,1 + 100) = \frac{30 \cdot 6,1 + 460}{230} = 2,795 \dots$ , dus  $6,1L + 100 = 10^{2,795 \dots} = 624,67 \dots$ , dus  
 $L = \frac{624,67 \dots - 100}{6,1} = 86, \dots$

De voorraad is uitgeput in 2057.

- e  $T_n - T_{n-1}$  is het verbruik in het  $n$ -de jaar na 1970. Dit verbruik groeit exponentieel met groeifactor 1,058 en beginverbruik 8,7 over 1970.
- f  $150 \cdot 1,058^n - 150 - (150 \cdot 1,058^{n-1} - 150) = 150 \cdot 1,058 \cdot 1,058^{n-1} - 150 \cdot 1,058^{n-1} = (150 \cdot 1,058 - 150) \cdot 1,058^{n-1}$  en  $150 \cdot 1,058 - 150 = 8,7$ . Dus dat klopt.

24

Het aantal hoekstukjes is 4, het aantal randstukjes is 8, het aantal overige stukjes is 16.

Er zijn 18 verschillende vormsoorten.

25

- a Noem de groeifactor per week  $g$ , dan  $g^3 = \frac{1065}{140}$ , dus  $g = \left(\frac{1065}{140}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,97$ , dus  $F = 140 \cdot 1,97^{t-2}$  (of  $F = 36 \cdot 1,97^t$ ).
- b  $F(0) \approx 6,2$  en als  $t$  groot is, dan  $e^{-0,24t} \approx 6$ , dus  $F \approx 340$ , dus van 6 tot 340 vliegjes.
- c  $300 = \frac{340}{1 + 54 \cdot e^{-0,24t}} \Leftrightarrow 1 + 54 \cdot e^{-0,24t} = \frac{340}{300} = 1,1333... \Leftrightarrow e^{-0,24t} = \frac{0,1333...}{54} = 0,00246... \text{ Dus } t = \frac{\ln(0,00246...)}{-0,24} \approx 25,0 \text{ dagen.}$
- d De afgeleide kun je bepalen met bijvoorbeeld met de kettingregel:  
 $F$  is de ketting:  $t \rightarrow -0,24t = a \rightarrow 1 + 54 \cdot e^a = b \rightarrow 340 \cdot b^{-1}$ , dus  
 $\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{db} \cdot \frac{db}{da} \cdot \frac{da}{dt} = -340 \cdot b^{-2} \cdot 54e^a \cdot -0,24 = \frac{4406,4 \cdot e^a}{b^2} = \frac{340}{1 + 54 \cdot e^{-0,24t}}.$

Er komen de meeste fruitvliegjes bij als de groei van  $F$  maximaal is.

Teken de grafiek van  $F'$  op de GR. Deze functie is maximaal als  $t \approx 16,6$ , dus op 26 november 2011.

- e De mannelijke fruitvliegjes zijn op  $\binom{8}{2}$  manieren te selecteren; de vrouwelijke ook.

Er zijn dus  $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2} = 784$  mogelijkheden.

26

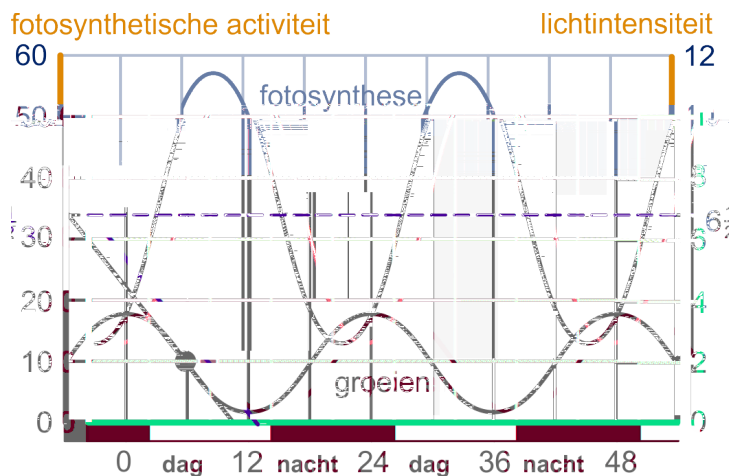
- a De evenwichtswaarde is  $\frac{57 + 13}{2} = 35$ ; de amplitude is  $57 - 35 = 12$  en de periode is 24, dus  $a = 35$ ,  $a = 12$  en  $\frac{2\pi}{24} \approx 0,26$ , dus een formule is:  $F = 35 + 12 \sin(0,26(t - 3))$ .
- b  $3 = 2,0 + 1,6 \sin\left(\frac{1}{12}\pi(t - 18)\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{12}\pi(t - 18)\right) = \frac{1}{1,6} = 0,625$ .  
 Volgens de GR:  $\sin^{-1}(0,625) = 0,675...$ , dus één waarde van  $t$  waarvoor  $G(t) = 3$  is de  $t$  met  $\frac{1}{12}\pi(t - 18) = 0,675... \Leftrightarrow t = 18 + \frac{0,675...}{\frac{1}{12}\pi} \approx 20,579$ .

De grafiek van  $G$  gaat stijgend door het evenwicht bij  $t = 18$ , dus

$t = 18 + \frac{1}{4} \cdot 24 = 24$  is symmetrie-as van de grafiek. Dus een andere waarde van  $t$  met  $G(t) = 3$  is:  $t \approx 3,421$  en dus ook  $24 + 3,421 = 27,421$ .

Met behulp van de grafiek vind je: gedurende  $27,421 - 20,579 = 6,842$  uur, dat is 6 uur en 51 minuten.

c Zie figuur.



Teken de raaklijn in het punt bij  $t = 6$  aan de grafiek. De helling van de raaklijn

is  $\frac{6\frac{1}{2} - 2}{12} \approx -0,4$ , dus een daling van 0,4 eenheden per uur.

27

$$a \quad \frac{dC_1}{dt} = \frac{16(190t^2 + 60) - 380t \cdot 16t}{(190t^2 + 60)^2} = \frac{-3040t^2 + 960}{(190t^2 + 60)^2},$$

dus  $\frac{dC_1}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{960}{3040}} = 0,315\dots$ , dus  $C_1$  is maximaal na 19 minuten.

b Bij  $C_1$  wordt de noemer veel sneller groot dan de teller als  $t$  groot wordt: de noemer gaat kwadratisch en de teller lineair. Dus  $C_1$  gaat naar 0.

Vanwege de negatieve exponent gaan  $e^{-0,65t}$  en  $e^{-3,9t}$  beide naar 0 als  $t$  groot wordt, dus het verschil ook, dus  $C_2$  ook.

$$c \quad \frac{dC_2}{dt} = 0,13(-0,65 \cdot e^{-0,65t} - 3,9 \cdot e^{-3,9t}), \text{ dus } \frac{dC_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0,65 \cdot e^{-0,65t} = 3,9 \cdot e^{-3,9t}. \text{ Deze vergelijking kun je met de GR oplossen.}$$

Het kan ook zonder:

$$0,65 \cdot e^{-0,65t} = 3,9 \cdot e^{-3,9t} \Leftrightarrow e^{-0,65t+3,9t} = \frac{3,9}{0,65} \Leftrightarrow e^{3,25t} = \frac{3,9}{0,65} = 6, \text{ dus}$$

$$t = \frac{\ln(6)}{3,25} = 0,551\dots, \text{ dus } C_2 \text{ is eerder maximaal.}$$

28

a Voer de rij in op de GR. Je ziet:  $u_{11} < 100$ ,  $u_{12} = 144$ ,  $u_{14} = 577$  en  $u_{15} > 500$ , dus 3 termen.

b Voer de rij  $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$  in op de GR. Je ziet:  $\frac{u_{12}}{u_{11}} \approx 1,61798$  en  $\frac{u_{13}}{u_{12}} \approx 1,61806$ , dus vanaf de 12e en 13e term.

c Voor „De Nachtwacht“ is  $v \approx 1,204$ , dus  $A \approx 0,131$ .

Voor „Oog“ is  $v \approx 1,404$ , dus  $A \approx 0,156$ .

d Met de GR de vergelijking  $\left(\frac{1}{v} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{v}\right) = 0,1544$  oplossen. Je vindt:

$$v \approx 1,383 \text{ of } v \approx 1,877, \text{ dus de kortste zijde is ongeveer } \frac{762}{1,383} \approx 551 \text{ cm of}$$

$$\frac{762}{1,877} \approx 406 \text{ cm, dus (omdat de kortste zijde meer dan 3 meter korter is, is de}$$

kortste zijde ongeveer 406 cm.

$$e \quad \left(\frac{1}{v} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{v}\right) = \left(\frac{1-v}{v}\right) \cdot \log\left(\frac{v-1}{v}\right) = \left(\frac{1-v}{v}\right) \cdot \log\left(\frac{v-1}{v}\right)^{-1} = -1 \cdot \left(\frac{1-v}{v}\right) \cdot \log\left(\frac{v}{v-1}\right) = \left(\frac{v-1}{v}\right) \cdot \log\left(\frac{v}{v-1}\right), \text{ dus mogelijkheid A.}$$

29

a Hij moet 400 km rijden om te tanken, dat kost 40 liter benzine, dus 80 gulden, het voordeel is  $150 - 80 = 70$  gulden.

b Bij het tanken in Nederland kan hij per 50 liter 500 gebruikskilometers rijden, dus 1 gebruikskilometer kost 0,50 gulden.

Bij het tanken in het buitenland kan hij per 50 liter 100 gebruikskilometers rijden, dus dan kost 1 gebruikskilometer 1 gulden.

Het voordeel per gebruikskilometer bij tanken in Nederland is 0,50 gulden.

c Bij tanken in Nederland kost een gebruikskilometer  $\frac{N}{12,5} = 0,08N$ .

Bij tanken in het buitenland kun je per 50 liter  $625 - 2x$  gebruikskilometers rijden, die kosten  $50B$  gulden, dus 1 gebruikskilometer kost  $\frac{50 \cdot B}{625 - 2x} =$

$$\frac{25 \cdot B}{312,5 - x}.$$

Het voordeel is dus:  $V = 0,08N - \frac{25 \cdot B}{312,5 - x}$ .

d  $V = 0$  als  $x = 15$ , dus  $0,08N = \frac{25 \cdot B}{312,5 - 15} \Leftrightarrow N \approx 1,05B$ , dus  $N$  is dan 5% hoger  $B$ .

e Dan  $0 = 0,08N - \frac{25 \cdot B}{312,5 - x}$ . Uit deze vergelijking  $x$  'vrijmaken'.

$$\text{Dan } 0,08N = \frac{25 \cdot B}{312,5 - x} \Leftrightarrow 312,5 - x = \frac{25 \cdot B}{0,08N} = 312,5 \cdot \frac{B}{N}, \text{ dus}$$

$$x = 312,5 - 312,5 \cdot \frac{B}{N} = 312,5 \cdot \left(1 - \frac{B}{N}\right).$$

30

a De groeifactor per 6 jaar is 2, dus per 3:  $\sqrt{2}$ . Het gevraagde aantal is  $4500\sqrt{2} \approx 6400$ .

b Je kunt die lijn tekenen als je twee punten kent, bijvoorbeeld  $(8,80)$  en  $(0,25; 95)$ .

c In de Amerikaanse fabriek is  $L = -16,6 \cdot \log(6) + 105 \approx 92$ , dat is  $12 = 4 \cdot 3$  dB meer dan de norm in Europa, dus men mag hier  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 8 = \frac{1}{2}$  uur werken.

31

a  $100 = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t} \Leftrightarrow e^{-0,29t} = 0,555\dots$ , dus  $t = -\frac{\ln(0,555\dots)}{0,29} = 2,0268\dots$  dus  $t = 2$  uur en 2 minuten dus om 17.02 uur.

b De grafiek van  $S$  stijgt steeds langzamer. Daardoor blijven alleen diagram C en diagram D over. Omdat (zie onderdeel a) de temperatuur blijft stijgen tot even na tijdstip  $t = 2$ , is er in de periode tussen  $t = 2$  en  $t = 2,5$  uur nog een kleine toename van de temperatuur. Alleen diagram C blijft dan over.

c  $S'(t) = -180 \cdot -0,29 \cdot e^{-0,29t} = 52,2 \cdot e^{-0,29t}$ .

$S'$  is positief, dus  $S$  is stijgend;

$S'$  is dalend, dus de stijging van  $S$  neemt af.

d  $S'(1) = 39,1$ , dus de stijging van de temperatuur is op dat moment 39,1 graad per uur.

## 15 Examentraining

e  $S = 200 - 180 \cdot 0,29 \cdot e^{-0,29t} \Leftrightarrow 200 - S = 0,29 \cdot e^{-0,29t} \Leftrightarrow e^{-0,29t} = \frac{200 - S}{0,29}.$

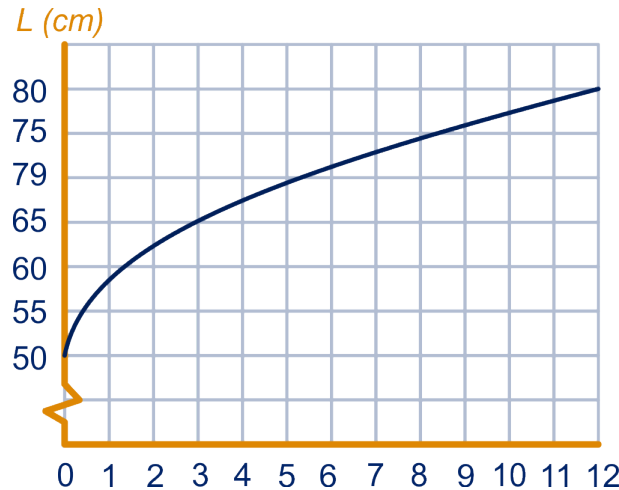
Dus  $-0,29t = \ln\left(\frac{200 - S}{0,29}\right)$  en  $t = -\frac{\ln\left(\frac{200 - S}{0,29}\right)}{0,29}.$

32

a Als  $j = 0$ , dan  $L = 50$ , dus  $p = 50$ .

Als  $j = 9$ , dan  $L = 140$ , dus  $140 = 50 + q\sqrt{9}$ , dus  $q = 30$ .

b Zie figuur.



c Er geldt:  $j = \frac{m}{12}$ , dus  $L = 50 + 30\sqrt{\frac{m}{12}} = 50 + \frac{30}{\sqrt{12}}\sqrt{m}.$

33

a  $S = \frac{168,0}{170,0} = 0,988\dots$ , dus  $\ln(-0,00216t + 2,7183) = 0,988\dots \Leftrightarrow$

$-0,00216t + 2,7183 = e^{0,988\dots} = 2,6864\dots$ , dus  $t = \frac{2,7183 - 2,6864\dots}{0,00216} = 14,727\dots$

Dus na 884 minuten (ofwel 14 uur en 44 minuten).

b  $S'(t) = \frac{-0,00216}{-0,00216t + 2,7183} = \frac{0,00216}{0,00216t - 2,7183}.$

Als  $t$  toeneemt, neemt de noemer van  $S'(t)$ , toe, dus het quotiënt  $S'(t)$  af.

c Met de GR het maximum van  $V$  bepalen, dit is:  $2,9551 \cdot 10^{-5}$ .

Het maximale verschil voor de lengte van meneer Jansen is dus  $170 \cdot 2,9551 \cdot 10^{-5} \approx 0,0050$  cm.

34

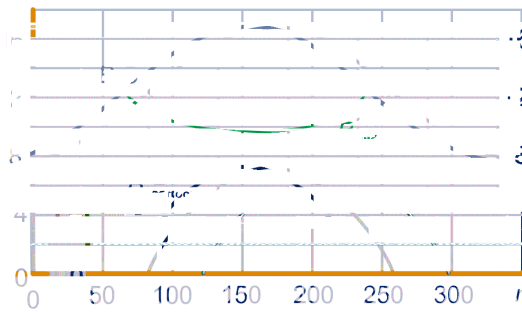
a Op 30 januari geldt:  $n = 30$ , dit invullen geeft:  $B \approx 8,832$ , dus de bezonning is dan 8 uur en 50 minuten.

Dus om 17:17u.

b Op 13 april geldt:  $n = 103$  en  $B(103) > 14,07$ . Verder geldt:  $B(102) < 13,9994$ , dus dat klopt.

c Het maximum van  $B$  is  $12,3 + 4,6$  en het  $12,3 - 4,6$ , dus het verschil is  $2 \cdot 4,6 = 9,2$  uur dus 9 uur en 12 minuten.

d  $B_{\text{noord}} + B_{\text{zuid}} = B.$



35

- a De formule geeft 1621 en 3098; de relatieve afwijkingen zijn 28% en 23%, dus in 1850.
- b  $0,0101 \cdot 1,0065^t = 20000 \Leftrightarrow 1,0065^t = \frac{20000}{1,0065} = 19870,8\dots$ , dus  $t = \frac{\log(19870,8\dots)}{\log(1,0065)} = 2237,8$ , dus in 2038.
- c Noem de groeifactor per jaar  $g$ , dan  $g^{50} = \frac{2516}{1656}$ , dus  $g = \left(\frac{2516}{1656}\right)^{0,02} = 1,0084003\dots$ , dus het ontbrekende groeipercentage is 0,8400%.
- d Er geldt in deze periode  $N = 795 \cdot 1,004656^{t-1750}$ .  
 $795 \cdot 1,004656^{t-1750} = 1000 \Leftrightarrow 1,004656^{t-1750} = \frac{1000}{795} = 1,25786\dots$ , dus  
 $t = 1750 + \frac{\log(1,25789\dots)}{\log(1,004656)} = 1799,3\dots$ , dus in 1800.
- e Er geldt:  $a_n = 0,023 \cdot 5760 \cdot 1,01092^n$ .  
 De recursieve betrekking is:  $\begin{cases} s_0 = 132,48 \\ s_n = s_{n-1} + a_n \end{cases}$ .  
 Gevraagd wordt:  $s_7 = 1101$  miljoen.

36

- a  $g^{5730} = 0,5 \Leftrightarrow g = (0,5)^{\frac{1}{5730}} = 0,9998790\dots$ , dus  $g = 0,999879$ .
- b  $Q = 100 \cdot 0,99988^{60000} = 0,070\dots$ , dus 0,07%.
- c  $Q = 100 \cdot 0,99988^t \Leftrightarrow \frac{Q}{100} = 0,99988^t$ , dus  $t = \frac{\ln\left(\frac{Q}{100}\right)}{\ln(0,99988)}$ ,  
 dus  $t = \frac{\ln\left(\frac{Q}{100}\right)}{\ln(0,99988)} = \frac{\ln(Q) - \ln(100)}{\ln(0,99988)} = \frac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}$ .
- d Voor  $Q = 73,19$  invullen in  $t = \frac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}$  geeft:  $t \approx 2600$ .  
 In de figuur kun je aflezen dat bij een berekende ouderdom van 2600 BP een werkelijke ouderdom van (ongeveer) 2750 BP hoort, dus de kano is van het jaar  $2750 - 1950 = 800$  voor Chr.
- e  $20550 - 19955 = 625$  en  $22650 - 21925 = 725$ , dus de ouderdom is  $21925 + \frac{175}{625} \cdot 725 = 22128 \approx 22130$  voor Chr.

37

- a Elke 5 minuten gaat de lamp 1 keer aan, dus 12 keer per uur. Na 13 uur dus 156 keer.  
 Om 13:48u dus  $156 + 9 = 165$  keer (de lamp brandt nu niet).



- b Op 2 verschillende rijen telkens 1 lamp, kan op  $\binom{5}{2} = 10$ .

Op 1 rij 2 lampen kan op 4 manieren.

In totaal zijn er 14 manieren.

- c 12 uur zijn 720 'minuut'-tijdstippen. De 4e rij geeft 5, de 3e rij 4, de 2e rij 3 en de 1e rij 1 mogelijkheden.

Dus (met de 5e rij erbij) heb je  $6! = 720$  mogelijke 'minuut'-tijdstippen.

38

- a  $\frac{dE}{dL} = 64 \cdot (-0,01 \cdot e^{-0,01L}) = 0,64 \cdot e^{-0,01L}$  is positief, dus  $E$  is een stijgende

functie van  $L$ . Vanwege de negatieve exponent in  $e^{-0,01L}$  is de functie  $\frac{dE}{dL}$

dalend, dus  $E$  is afnemend stijgend.

- b Als  $L$  erg groot is, dan is  $e^{-0,01L} \approx 0$ , dus dan  $E \approx 64$ .

- c  $E = 64 \cdot (1 - e^{-0,01L}) \Leftrightarrow 1 - e^{-0,01L} = \frac{E}{64}$ , dus  $e^{-0,01L} = 1 - \frac{E}{64} = \frac{64 - E}{64}$ .

Dus  $-0,01L = \ln\left(\frac{64 - E}{64}\right) = \ln(64 - E) - \ln(64)$  en

$L = -100 \cdot \ln(64 - E) + 100 \cdot \ln(64)$ , dus  $L \approx -100 \cdot \ln(64 - E) + 416$ .

39

Een boom van 8 jaar levert ongeveer  $0,16 \cdot 0,108^2 \cdot 7 = 0,0131 \text{ m}^3$  hout en voor een boom van 15 en 20 jaar is dit  $0,0324$  en  $0,0635 \text{ m}^3$ .

De houtopbrengst na 8 jaar is  $0,0131 \cdot 200 \cdot 600 \approx 1572$  euro; na 15 jaar is dit

$0,0324 \cdot 300 \cdot 600 \approx 5832$  euro en na 20 jaar is  $0,0635 \cdot 460 \cdot 600 \approx 1762$  euro. Dus de totale houtopbrengst is naar verwachting ten minste gelijk aan 24900 euro.

De spaarrekening levert  $5000 \cdot 1,0802^{20} \approx 23300$  euro op, dus de bewering klopt.

$5000 \cdot g^{20} \approx 24900 \Leftrightarrow g = \left(\frac{24900}{5000}\right)^{0,05} \approx 1,084$ , dus een spaarrekening met een rente van 8,4% zou minstens even veel opbrengen.

40

Met behulp van de tabel en de grafiek kun je de tabel hieronder links opstellen.

Als je een grafiek bij de tabel maakt, zie

figuur, zie dat deze nagenoeg op een rechte lijn liggen.

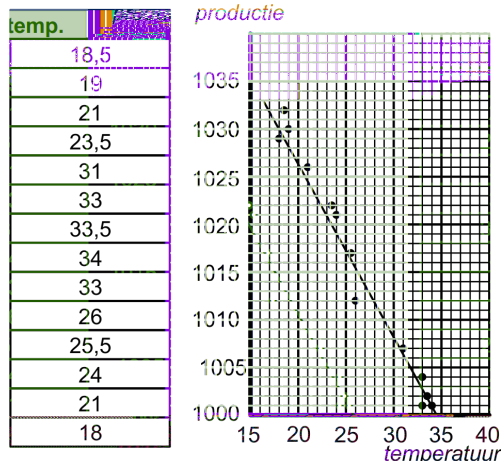
Een formule voor de rechte lijn is:

$$P = -1,7 \cdot T + 1060.$$

41

- Het aantal stenen met vier dezelfde cijfers is 6,
- het aantal stenen met precies drie dezelfde cijfers erop is  $6 \cdot 5$ ,
- het aantal stenen met twee keer twee dezelfde cijfers erop is  $\binom{6}{2}$ ,
- het aantal stenen met twee dezelfde

cijfers en daarnaast twee verschillende cijfers erop is  $6 \cdot \binom{5}{2}$ ,



## 15 Examentraining

- het aantal mogelijke stenen met vier verschillende cijfers erop is  $\binom{6}{4}$ ,
- het werkelijke aantal stenen met vier verschillende cijfers erop is  $\binom{6}{4} - 1$ .

In totaal zijn er  $6 + 30 + 15 + 60 + 14 = 125$  stenen.

42

Het laagtariefverbruik van een klant noemen we  $l$  en het normaal tariefverbruik  $l$ . Het bedrag (in euro) dat hij bij het keuzetarief Budget betaalt noemen we  $B$ , bij het keuzetarief Standaard  $S$  en bij het keuzetarief Plus  $P$ . Dan:

$$B = 0,0520 \cdot l + 0,0970 \cdot n;$$

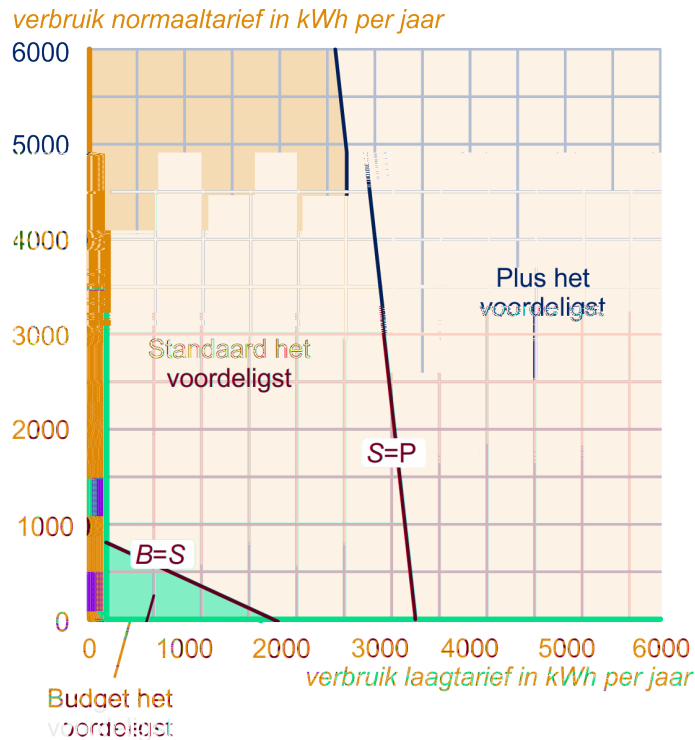
$$S = 17,85 + 0,0419 \cdot l + 0,0749 \cdot n;$$

$$P = 35,70 + 0,0364 \cdot l + 0,0743 \cdot n;$$

Teken op het werkblad de lijn:  $S = P$  met vergelijking  $0,0055 \cdot l + 0,0006 \cdot n = 17,85$ .

Zo wordt het gebied in drie vlakdelen verdeeld.

In elk vlakdeel is aangegeven welk tarief het voordeligst is.

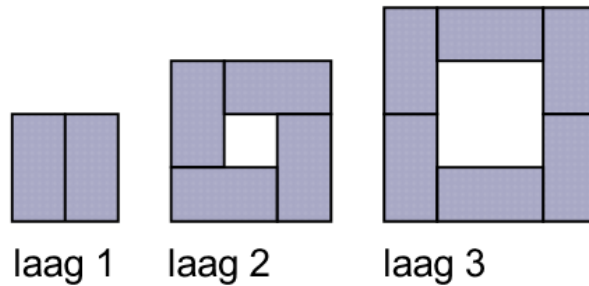


## 14 Periodieke functies

- 1 Schets beide grafieken en gebruik symmetrie.

## 15 Examentraining

- 1 Laat zien dat  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ .
- 2 Schrijf  $0,1 = \log(\dots)$  en gebruik de formules 3 en 1 voor het rekenen met logaritmen.
- 3 Pas de *abc*-formule toe.
- 4 De tijd dat de reis duurt wordt nu  $2 - \frac{1}{60}A$ .
- 5 Kijk eerst hoe lang de poten van de grootste L zijn, uitgedrukt in  $n$ .
- 6 Bereken algebraïsch  $M(14)$ , het moment net na inname tweede medicijn.
- 7



- 8 Maak onderscheid tussen de gevallen waarbij de eerste, derde en vijfde laag dezelfde kleur hebben en waarbij dit niet het geval is.
- 9 Er geldt:  $a_n = 0,023 \cdot 5760 \cdot 1,01092^n$ .

## **a**

afgeleide functie  
amplitude

## **b**

beeld  
beginhoeveelheid  
boomdiagram

## **c**

combinatie  
combinatiegetal

## **d**

differentiaalquotiënt  
differentiequotiënt  
differentiëren  
directe formule  
discriminant  
-formule

## **e**

eenheidscirkel  
evenwichtsstand  
evenwichtswaarde  
exponentiële groei

## **f**

faculteit

## **g**

geordende greep met herhaling  
geordende greep zonder herhaling  
goniometrie  
groefactor

## **h**

herhalingscombinatie

horizontaal vermenigvuldigen

horizontaal verschuiven

## **l**

logaritmische schaal

## **m**

meetkundige rij

## **p**

periode  
periodiek  
periodieke beweging  
periodieke functie  
permutatie

## **r**

recurrente betrekking  
recursieve formule  
reden  
rekenkundige rij

## **s**

sinusoïde  
sinusoïden  
sinus-functie  
somrij  
standaard cirkelbeweging  
systematisch uitschrijven

## **v**

verschil  
verticaal vermenigvuldigen  
verticaal verschuiven

## **w**

wegendiagram