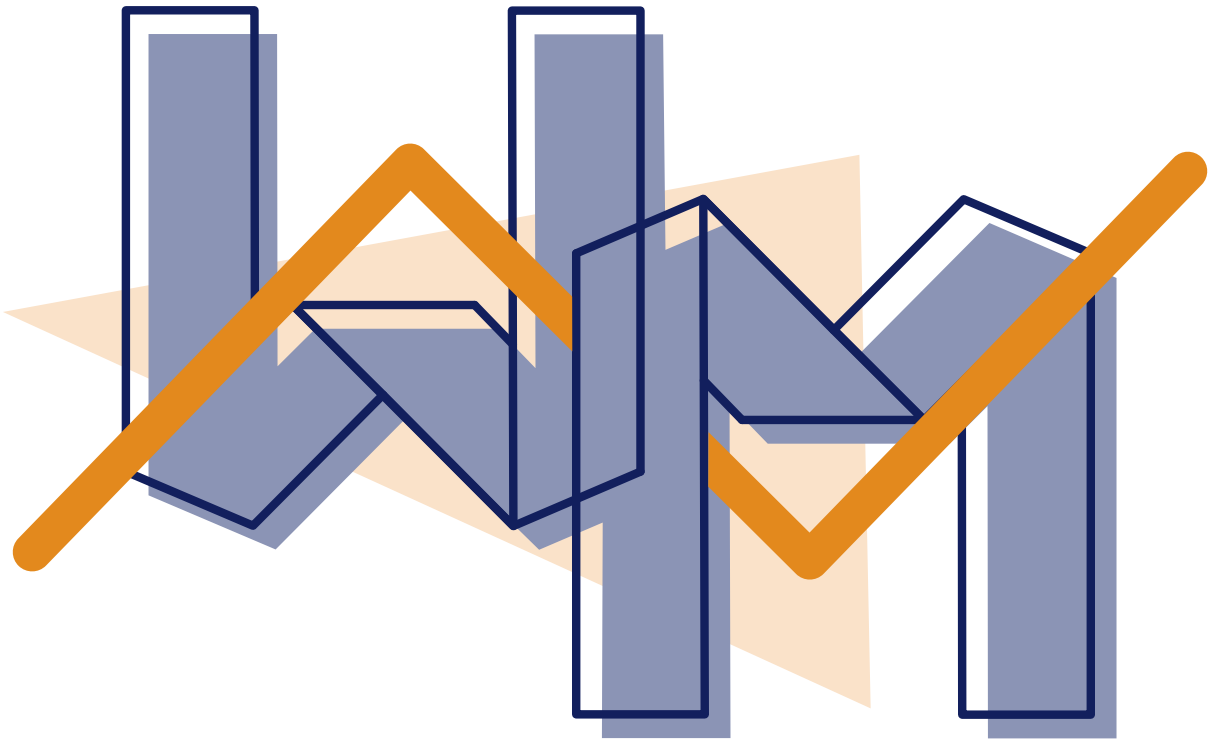
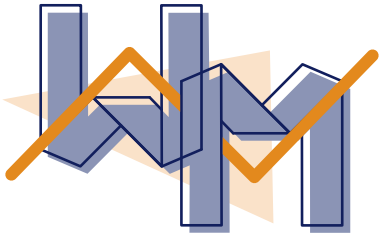


vwo wiskunde d

Hoeken en bogen

de Wageningse Methode



Copyright © 2019 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN xxx
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Niets uit deze uitgave mag verveelvuldigd en/of openbaar gemaakt worden door middel van druk, fotokopie, microfilm of op elke andere wijze ook, zonder voorafgaande toestemming van de houder van het copyright.

Inhoudsopgave

4 Hoeken en bogen **3**
4.1 Over hoeken 4
4.2 Door één punt 10
4.3 Redeneren 17
4.4 Stand van zaken 24
4.5 Hoeken en bogen 30
4.6 Koordenvierhoeken 37
4.7 Iso-hoeklijnen 41
4.8 Computer-practicum 46
4.9 Eindpunt 53
4.10 Extra opgaven 58
4.11 Opdrachten 66

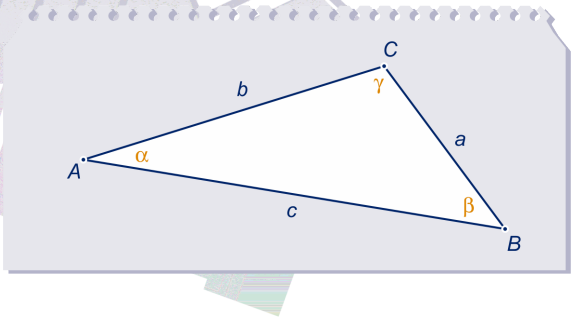
Antwoorden **71**
4 Hoeken en bogen 71

Hints **103**
4 Hoeken en bogen 103

Index **104**

4.1 Over hoeken

Zoals we ook in wiskunde b gedaan hebben, spreken we het volgende af.



Als de hoekpunten van een driehoek A, B en C heten, noemen we de (grootte van de) hoeken achtereenvolgens α, β en γ.
De (lengte van de) zijden tegenover die hoekpunten noemen we achtereenvolgens a, b en c.

We weten:

- een gestrekte hoek is $180°$;
- een rechte hoek is de helft daarvan, dus $90°$;
- de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk.

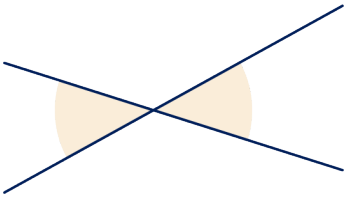
Zoals al in het voorwoord gezegd, proberen we van vanuit nader te bepalen uitgangspunten, door redeneren een bouwwerk van stellingen te creëren.
Deze uitgangspunten noemen we axioma's.

We willen in dit hoofdstuk wat preciezer zijn. We noteren daarom de lengte van lijnstuk AB met $|AB|$.

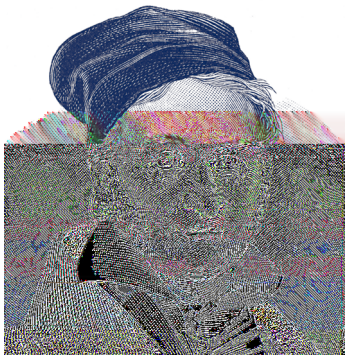
1

Overstaande hoeken

Twee lijnen snijden elkaar. Ze maken bij het snijpunt vier hoeken. Beredeneer met het uitgangspunt dat een gestrekte hoek $180°$ is, de overstaande hoeken (de hoeken die tegenover elkaar liggen, bijvoorbeeld de twee gekleurde hoeken) even groot zijn.

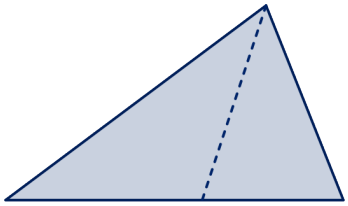


Uit de onderbouw weet je ook dat de som van de hoeken van een driehoek $180°$ is.



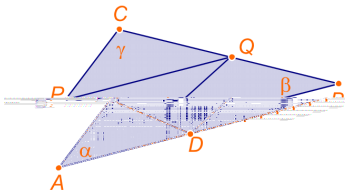
In de wiskundewereld is tot in de negentiende eeuw aan de juistheid hiervan getwijfeld. Zo heeft de grote geleerde C. F. Gauss zeer nauwkeurig de hoeken gemeten van de driehoek tussen drie toppen in het Harzgebergte (Duitsland); hij vond geen significante afwijking van $180°$.
Gauss en anderen ontdekten later dat er ook andere soorten meetkunden bestaan (bijvoorbeeld op de bol) waarbij de hoekensom van een driehoek geen $180°$ is.

2 Veronderstel dat we weten dat de hoekensom van elke driehoek hetzelfde aantal graden is - noem dat s - maar dat we (nog) niet weten dat $s = 180$.
Beredeneer met behulp van nevenstaand plaatje dat moet gelden: $s = 180$.



Hint 1.

3 In deze opgave zie je nog een andere manier om ervan overtuigd te raken dat de hoekensom in een driehoek $180°$ is.
We trekken een lijn door de middens P en Q van twee zijden van driehoek ABC. We spiegelen het bovenste stuk PQC in deze lijn; het spiegelbeeld D van C komt dan op AB te liggen.



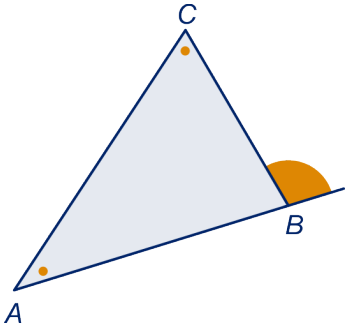
a Waarom geldt: $|AP| = |DP|$ en $|BQ| = |DQ|$?

b Leg uit dat de drie hoeken met hoekpunt D zijn: α, β en γ en dat dus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

De hoekensom van een driehoek is $180°$.

4 **Gelijkzijdige driehoek**
Van een driehoek zijn de zijden even lang. We noemen zo'n driehoek **gelijkzijdig**.
Beredeneer dat de hoeken van de driehoek $60°$ zijn.

5 **Buitenhoek**
In het plaatje hiernaast is de zogenaamde **buitenhoek** bij hoekpunt B aangegeven.
Beredeneer dat een buitenhoek van een driehoek gelijk is aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken (dat zijn de hoeken met een stip).

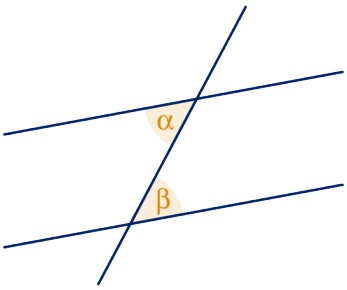


Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.

4.1 Over hoeken

Definitie
Twee lijnen zijn **evenwijdig** als ze geen gemeenschappelijk punt hebben.

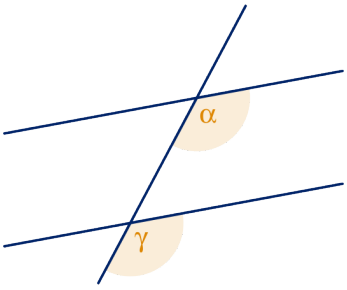
6 **Z-hoeken**
Hiernaast worden twee lijnen gesneden door een derde lijn. In het plaatje zijn twee hoeken aangegeven: α en β.
Gegeven is dat $\alpha = \beta$.
Beredeneer dat hieruit volgt dat de twee lijnen evenwijdig zijn.



Hint 2.

Het omgekeerde geldt ook. Als de lijnen evenwijdig zijn, dan zijn de hoeken α en gelijk.

7 **F-hoeken**
Hiernaast worden twee lijnen gesneden door een derde lijn. In het plaatje zijn twee hoeken aangegeven: α en γ. Gegeven is dat $\alpha = \gamma$.
Beredeneer dat hieruit volgt dat de twee lijnen evenwijdig zijn.



Hint 3.

Het omgekeerde geldt ook: als de twee lijnen evenwijdig zijn, dan zijn de hoeken α en γ gelijk.

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk.
En omgekeerd: als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig .

8 **Hoekensom van een vierhoek**
Beredeneer - uitgaande van de hoekensom van een driehoek - dat de hoekensom van een vierhoek $360°$ is.

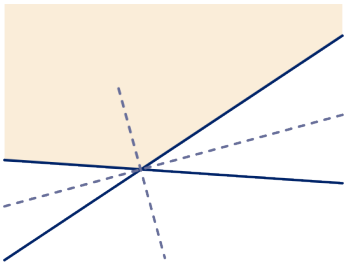
9 **a** Hoe groot is de hoekensom van een n-hoek? ($n \geq 3$)

Van een

4.1 Over hoeken

10

Twee lijnen snijden elkaar. Ze maken in het snijpunt vier hoeken. Van elk van die hoeken tekenen we de bissectrice (dat is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt). Die zijn in de figuur gestippeld.



a Toon aan dat de bissectrices van de stompe hoeken in elkaars verlengde liggen (dus eigenlijk één lijn vormen). (Dat geldt ook voor de bissectrices van de twee scherpe hoeken.)

b Toon aan dat deze twee lijnen loodrecht op elkaar staan.

Terugblik

We hebben enkele uitgangspunten gekozen. Van daaruit hebben we nieuwe feiten gevonden. In sommige redeneringen maakten we gebruik van feiten die we al eerder beredeneerd hadden. De feiten zijn niet zo schokkend: eigenlijk ligt de waarheid ervan erg voor de hand. Op deze manier maken we een bouwwerk: straks kunnen we ook feiten beredeneren die helemaal niet zo vanzelfsprekend zijn.

De kracht van het bouwwerk is dat je feiten die eenmaal bewezen zijn (en dus in het bouwwerk zijn opgenomen) nooit meer opnieuw hoeft te bewijzen: die kan je in het vervolg direct gebruiken. Belangrijke bouwstenen die we tot nu toe hebben, zijn:

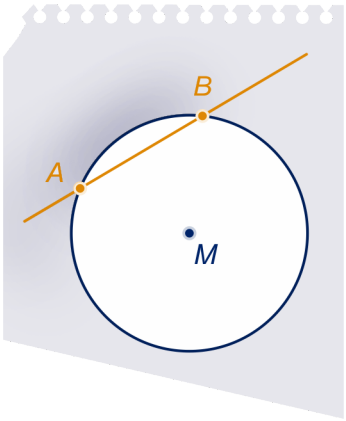
- de stelling van Pythagoras (zie 4vb deel 1, hoofdstuk 2 Meetkunde en algebra);
- de hoekensom van een driehoek (en vierhoek);
- Z- en F-hoeken;
- overstaande hoeken;
- de stelling van de buitenhoek.

In het vervolg zul je je redeneringen (bewijzen) moeten baseren op deze uitgangspunten en op zaken die je daaruit al eerder hebt afgeleid.

Definitie

Een lijn is **raaklijn** aan een cirkel als hij precies één punt met de cirkel gemeenschappelijk heeft.

11 Een cirkel met middelpunt M wordt door een lijn gesneden in de punten A en B.
Beredeneer dat de stralen MA en MB niet loodrecht op de lijn staan.



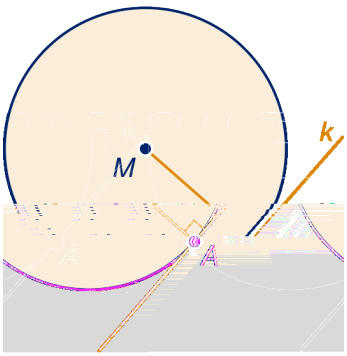
12 Een lijn gaat door punt A van een cirkel met middelpunt M. De lijn staat loodrecht op de straal MA.

a Bewijs dat de lijn raaklijn is aan de cirkel

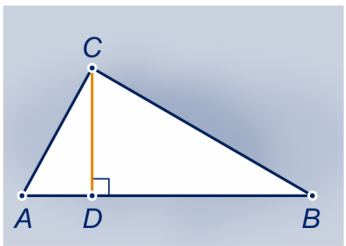
Een lijn is raaklijn aan een cirkel met middelpunt M. Het raakpunt is A.

b Bewijs dat de lijn loodrecht staat op de straal MA.

Een lijn k raakt een cirkel met middelpunt M in A dan en alleen dan als lijn k loodrecht op lijn MA staat.



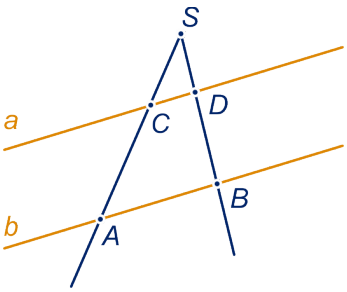
13 Driehoek ABC is rechthoekig in C. Lijnstuk CD is het hoogtelijnstuk vanuit C van driehoek ABC.
Zodoende zijn er drie rechthoekige driehoeken in de figuur te zien.
Beredeneer dat deze drie driehoeken gelijke hoeken hebben. (Dus ze zijn gelijkvormig.)



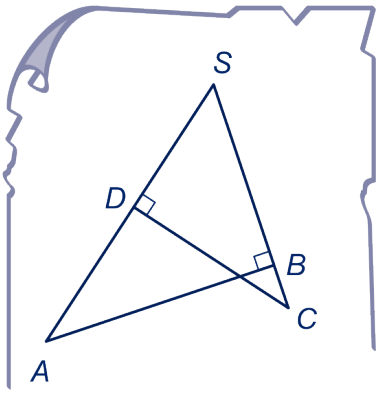
We herhalen uit hoofdstuk 15 Gelijkvormigheid van 2 vwo.

Definitie
Twee driehoeken zijn gelijkvormig als de een een uitvergroting van de ander is.
Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze dezelfde hoeken hebben.

14 De lijnen a en b zijn evenwijdig. Het punt S ligt niet op a of op b. Zie voor de overige gegevens de figuur.
Bewijs dat de driehoeken ABS en CDS gelijkvormig zijn.



15 D ligt op de lijn AS en B ligt op de lijn CS, zó dat de hoeken ABS en CDS recht zijn.



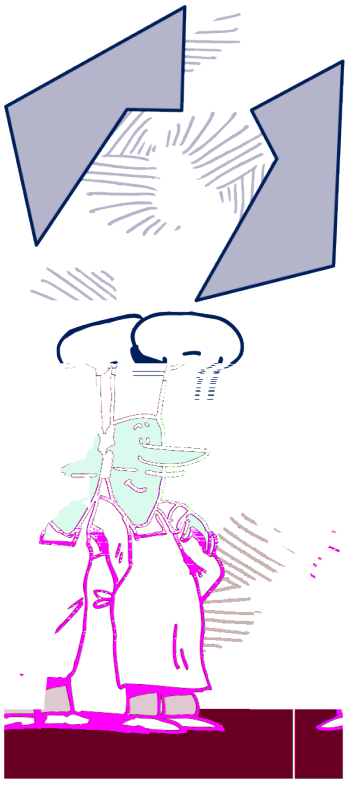
Bewijs dat de driehoeken ABS en CDS gelijkvormig zijn.

16 Zijn twee vierhoeken met gelijke hoeken gelijkvormig?

4.2 Door één punt

Definitie

Twee figuren heten **congruent** als de ene figuur zo verplaatst kan worden dat hij de andere precies bedekt. Daarbij mag gespiegeld worden.



17 Gegeven zijn de volgende paren figuren:

- twee cirkels met dezelfde straal,
- twee rechthoeken met dezelfde oppervlakte
- twee gelijkbenige driehoeken met dezelfde omtrek,
- twee lijnstukken van dezelfde lengte,
- twee rechte hoeken.

Welke paren zijn congruent?

Opmerking

In plaats van congruent wordt ook wel de term gelijk gebruikt. Twee congruente figuren zijn weliswaar verschillend (het zijn tenslotte twee figuren), maar de figuren zijn verder in alle opzichten gelijk: dezelfde zijden, dezelfde hoeken, dus ook gelijke oppervlakte, enzovoort.

Van Dale: [Fr. of Lat. congruens] 1 overeenstemmend; 2 (wisk.) (van figuren) gelijk en gelijkvormig.

18 Waar of niet waar?

a

- ZZZ Twee driehoeken met gelijke zijden zijn congruent.
- HZH Twee driehoeken met twee gelijke hoeken en gelijke ingesloten zijde zijn congruent (de ingesloten zijde ligt tussen de hoeken).
- HHZ Twee driehoeken met twee gelijke hoeken en een gelijke niet-ingesloten zijde zijn congruent.
- ZHZ Twee driehoeken met twee gelijke zijden en gelijke ingesloten hoek zijn congruent (de ingesloten hoek ligt tussen de gelijke zijden).
- ZZH Twee driehoeken met twee gelijke zijden en een gelijke niet-ingesloten hoek zijn congruent
- HHH Twee driehoeken met drie gelijke hoeken zijn congruent.

In vier van de zes gevallen bij vraag **a** was er sprake van congruentie.

b Geval HHH is eigenlijk HH. Waarom?
En dat is een kenmerk voor gelijkvormigheid.

Geval HHZ en HZH komen eigenlijk op hetzelfde neer.

c Waarom?

Geval ZZH is verraderlijk!

d Teken - als je dat nog niet gedaan hebt - een voorbeeld van twee niet-congruente driehoeken. Bijvoorbeeld beide met een hoek van $0°$, een zijde van 5 cm grenzend aan deze hoek en een zijde van 3 cm tegenover deze hoek.

e Ga na dat wel geldt:

- ZZR Twee driehoeken met twee gelijke zijden een niet ingesloten rechte hoek zijn congruent.

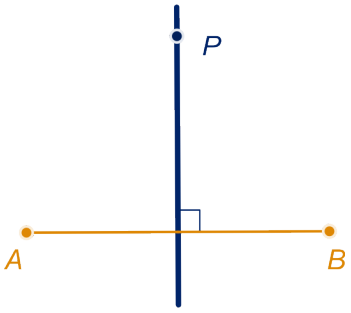
Congruentiekenmerken

Er zijn vier echt verschillende congruentiekenmerken:
ZZZ , ZHZ , HZH en ZZR.

Definitie

De **middelloodlijn** van een lijnstuk is de lijn die door het midden van dat lijnstuk gaat en er loodrecht op staat.

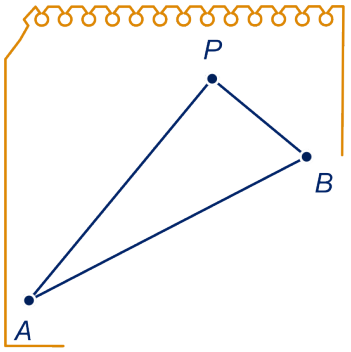
Toon met congruentie aan dat punten op de middelloodlijn van lijnstuk AB gelijke afstand hebben tot A en B.



Een ander uitgangspunt van ons zal de zogenaamde driehoeksongelijkheid zijn.

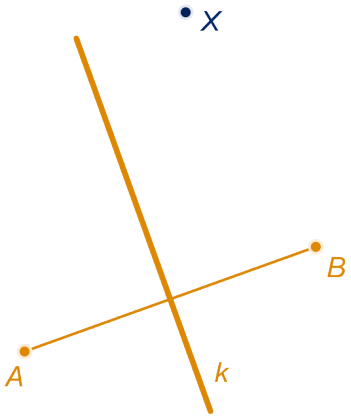
Driehoeksongelijkheid

Als P niet op lijnstuk AB ligt, dan: $|AP| + |BP| > |AB|$.



20 In de figuur is k de middelloodlijn van lijnstuk AB. Verder is X een punt aan de kant van B van lijnstuk AB.
Toon aan: $|AX| > |BX|$.

Hint 4.



Met de twee voorgaande opgaven heb je de volgende stelling.

Op de middelloodlijn van lijnstuk AB liggen precies alle punten die even ver van A als van B liggen.

21 We gaan bewijzen dat de middelloodlijnen van de zijden van een driehoek door één punt gaan. (Dit heb je ook al in de brugklas gedaan.)

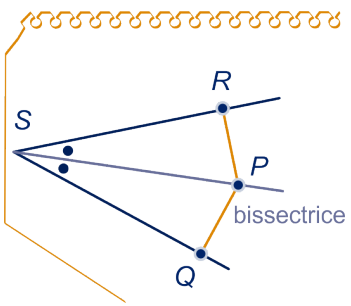
Bewijs
Gegeven is een driehoek ABC.
Noem het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden AB en BC: S.
We gaan bewijzen dat S ook op de derde middelloodlijn ligt.
$|AS| = |BS|$, want S ligt op de middelloodlijn van AB.
$|BS| = |CS|$, want ... .
Hieruit volgt dat $|AS| = |...|$. Dus S ligt op ....
Dus gaan de middelloodlijnen van AB, BC en CA door één punt (namelijk door het punt S).
Vul het bewijs aan.

Stelling
De middelloodlijnen van de zijden van een driehoek gaan door één punt.

22 Leg uit hoe uit het voorgaande volgt dat elke driehoek een **omgeschreven cirkel** heeft, dat is de cirkel die gaat door de hoekpunten van de driehoek.

23 Teken een scherphoekige en een stomphoekige driehoek. Bepaal van beide de omgeschreven cirkel.

Stelling
De punten op de bissectrice van een hoek liggen even ver van de benen van die hoek.



Opmerking
De afstand van een punt A tot een lijn k noteren we met: $d(A, k)$.

24 **a** Bewijs de stelling.

Hint 5.

De bissectrices van de hoeken van een driehoek gaan door één punt.

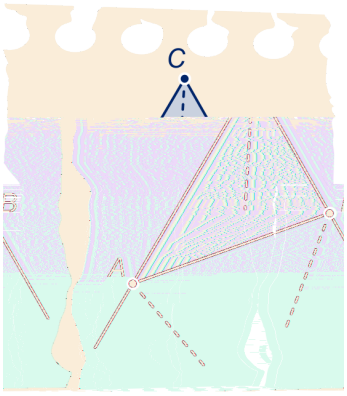
b Bewijs dat door nauwkeurig de bewijsgang van opgave 21 te volgen.

Stelling
De bissectrices van de hoeken van een driehoek gaan door één punt.

25 Leg uit hoe uit het voorgaande volgt dat elke driehoek een **ingeschreven cirkel** heeft, dat is de cirkel die raakt aan de zijden van de driehoek.

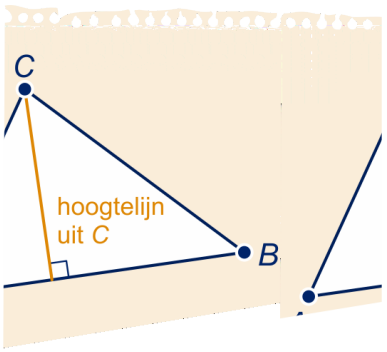
26 Teken een driehoek met daarin de ingeschreven cirkel.

27 Van driehoek ABC zijn de zijden CA en CB aan de kanten van A en B verlengd. De **buitenbissectrice** van hoek A is de bissectrice van de buitenhoek bij A.
Bewijs dat de buitenbissectrice van hoek A, de buitenbissectrice van hoek B en de binnenbissectrice van hoek C door één punt gaan.



28 Teken een driehoek met de ingeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels.

Definitie
Een **hoogtelijn** van een driehoek gaat door een hoekpunt en staat loodrecht op de zijde tegenover dat hoekpunt.



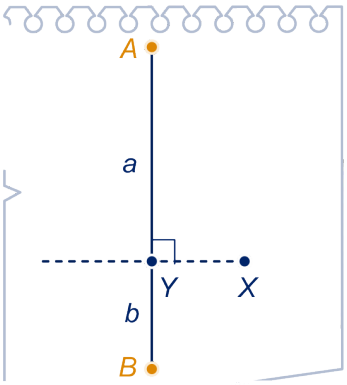
Stelling
De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

We gaan deze stelling in de volgende twee opgaven bewijzen.

29

AB is een lijnstuk. Y ligt op AB; zeg dat $|YA| = a$ en $|YB| = b$. Het punt X ligt op de lijn door Y, loodrecht op AB.

a Bewijs dat $|AX|^2 - |BX|^2 = a^2 - b^2$.



Voor de punten X boven die lijn is $|AX|^2 - |BX|^2 < a^2 - b^2$; voor de punten X onder die lijn is $|AX|^2 - |BX|^2 > a^2 - b^2$.

Voor een lijnstuk AB van lengte 4 met daarop het punt Y op afstand 3 van A en op afstand 1 van B geldt: $|AX|^2 - |BX|^2 = 8$.

b Teken alle punten X, waarvoor geldt: $|AX|^2 - |BX|^2 = 8$.

De vorige opgave geeft het volgende resultaat.

Gegeven is een lijnstuk AB. P en Q zijn twee punten.

- Als PQ loodrecht staat op AB, dan geldt: $|AP|^2 - |BP|^2 = |AQ|^2 - |BQ|^2$.
- Als $|AP|^2 - |BP|^2 = |AQ|^2 - |BQ|^2$, dan staat PQ loodrecht op AB.

30

Bewijs van de stelling over de hoogtelijnen

Gegeven is een driehoek ABC. AD en BE zijn hoogtelijnen in driehoek ABC (D op BC en E op AC). Het snijpunt van de hoogtelijnen is H.

$|HB|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$, want de lijn AH staat loodrecht op BC.

$|HA|^2 - |HC|^2 = \ldots$, want ....

Hieruit volgt dat $|HB|^2 - |HA|^2 = \ldots$.

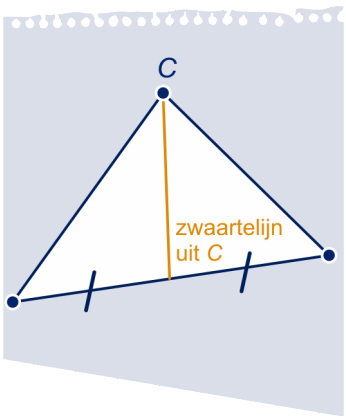
Dus staat de lijn ... loodrecht op ... en dus is lijn HC ook hoogtelijn in driehoek ABC.

Dus gaan de hoogtelijnen door één punt (namelijk door het punt H).

Maak het bewijs af door op de stippellijnen het passende in te vullen.

Definitie

Een **zwaartelijn** van een driehoek gaat door een hoekpunt en het midden van de zijde tegenover dat hoekpunt.

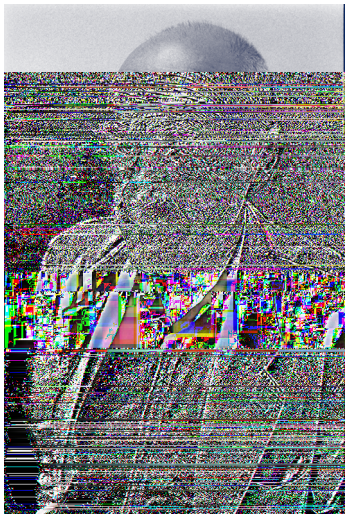


Stelling

De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.

4.2 Door één punt

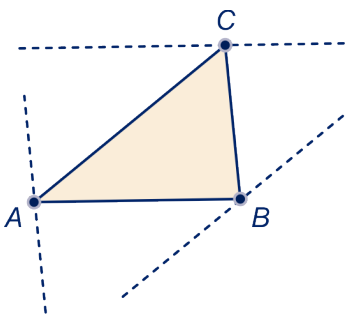
Het bewijs van deze stelling moeten we uitstellen.



Een stukje uit een artikel **Drie eerlijke lijnen snijden elkaar in één punt** van H. Brandt Corstius in NRC Handelsblad van 25 januari 1996.

Ik lag in mijn bedje en dacht. Natuurlijk wilde ik de hoogtelijnenstelling bewijzen. Maar vooral wilde ik begrijpen hoe de drie stellingen over steeds drie lijnen in een driehoek die door één punt gaan, verwant waren. Wat hadden bissectrices, zwaartelijnen en hoogtelijnen gemeen?
Dat ze steeds door een hoekpunt gingen, maar ook dat ze geen voorkeur hadden voor een van de andere twee hoekpunten. In hun definitie kwamen de andere twee hoekpunten op gelijke wijze voor. Ik vond de bissectrices, zwaartelijnen en hoogtelijnen eerlijke lijnen. Een lijn door hoekpunt A is een eerlijke lijn als hij weliswaar gedefinieerd is met behulp van B en C, maar zo dat er, als je B en C verwisselt, dezelfde lijn uitkomt.
Het bewijs van de hoogtelijnenstelling kon even wachten. Ik wilde iets veel mooiers bewijzen, namelijk: "In een driehoek snijden de drie eerlijke lijnen door de drie hoekpunten elkaar in één punt". Een hoogtelijn was een eerlijke lijn, dus dan had ik de hoogtelijnenstelling ook bewezen. Een aangename hitte verwarmde mijn hersenpan. Ik had alleen nog maar een stelling, maar ik was ervan overtuigd dat hij waar was. Het zou mooi zijn als ik nog andere eerlijke lijnen bedacht dan de drie die het meetkundeboek me had gegeven. Ik vond ze niet en een halve eeuw later weet ik er nog geen.

Verderop beschrijft H. Brandt Corstius dat hij het volgende voorbeeld ontdekte: de lijnen door een hoekpunt, evenwijdig aan de overstaande zijde. Hij vervolgt:

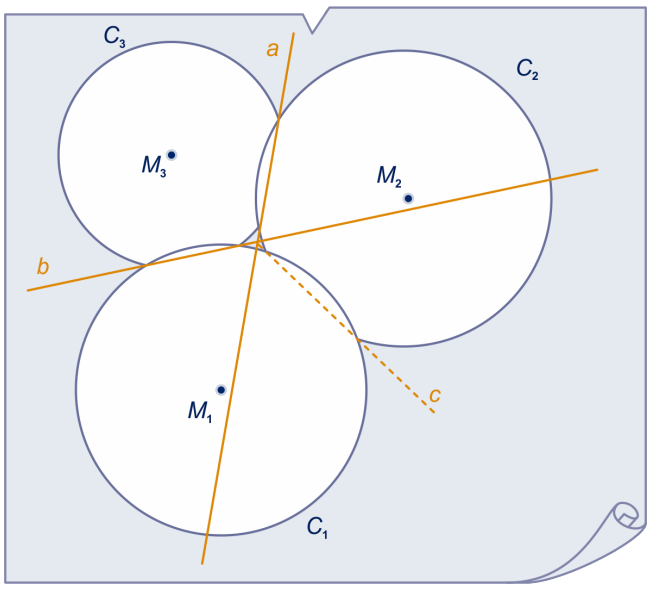


Maar ik besefte dat ik mijn Eerlijke-Lijnen-stelling wel kon vergeten. Want de drie evenwijdige lijnen door de drie hoekpunten A, B en C waren ongetwijfeld drie eerlijke lijnen, en toch gingen ze niet door één punt. Misschien had ik het begrip eerlijkheid moeten inperken door alleen over lijnen binnen de driehoek te spreken, maar voor mij was de lol er af. Mijn stelling was niet waar. Maar het gloeien van opwinding over zo'n stelling ben ik nooit vergeten.

4.2 Door één punt

31

Drie cirkels C_1, C_2 en C_3 met stralen r_1, r_2 en r_3 en middelpunten M_1, M_2 en M_3 snijden elkaar twee aan twee.



We gaan bewijzen dat de drie lijnen a, b en c door de snijpunten door één punt gaan.
Duidelijk is dat lijn a loodrecht staat op M_2M_3, b loodrecht staat op M_1M_3 en c loodrecht staat op M_1M_2.
We zullen dit in paragraaf 7 nog precies bewijzen.

Bewijs
Noem het snijpunt van a en b: S.
$|SM_2|^2 - |SM_3|^2 = r_2^2 - r_3^2$, want S ligt op a en a staat loodrecht op M_2M_3.
$|SM_1|^2 - |SM_3|^2 =$ ..., want ...
Hieruit volgt dat $|SM_2|^2 - |SM_1|^2 =$....
$|XM_2|^2 - |XM_1|^2 = r_2^2 - r_1^2$ geldt alleen voor punten X op c. Dus ligt S ook op c.
Dus gaan a, b en c door één punt (namelijk het punt S).
Maak het bewijs af door op de stippellijnen het passende in te vullen.

32

De bewijzen in deze paragraaf zijn van een speciaal type.
Probeer het gemeenschappelijke in de structuur van de bewijzen onder woorden te brengen.

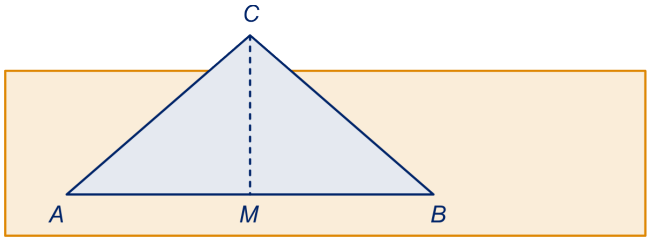
4.3 Redeneren

Als uitgangspunt van onze redeneringen nemen we de congruentiegevallen in de vorige paragraaf. Als we van twee driehoeken weten dat ze gelijke zijden hebben, dan kunnen we met behulp van ZZZ concluderen dat ze congruent zijn en dus hebben de driehoeken ook gelijke hoeken. Op een dergelijke manier maken we gebruik van de congruentiekenmerken om te redeneren in de meetkunde.
Het eerste bewijs doen we als voorbeeld.

Opmerking
We gebruiken de volgende notaties:
$\triangle$ voor driehoek,
$\cong$ voor congruentie,
$\perp$ voor loodrecht
$\|$ voor evenwijdig

Stelling
Een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken.

Eerst tekenen we een plaatje waarin we de hoekpunten namen geven.



Noem het midden van de basis AB: M en teken in het plaatje lijnstuk CM.

Gegeven $|AC| = |BC|$, $|AM| = |BM|$
Te bewijzen $\angle A = \angle B$.
Bewijs
1. $|AC| = |BC|$, gegeven
2. $|AM| = |BM|$, gegeven
3. $|CM| = |CM|$
4. $\triangle AMC \cong \triangle BMC$, volgt uit 1, 2, 3 ; ZZZ
5. $\angle A = \angle B$ volgt uit 4

- Misschien vind je het overdreven dat hierboven alles zo netjes is opgeschreven. Dat doen we om twee redenen.
  Het is verstandig je rekenschap te geven wat je uitgangspunten zijn (het gegeven) en wat je daaruit wilt afleiden (hetgeen je wilt bewijzen).

- Je moet in je bewijs elke stap verantwoorden: of met een gegeven, of het is triviaal (bijvoorbeeld stap 3 in het voorgaande bewijs), of met een eerder bewezen stelling of congruentiekenmerk.

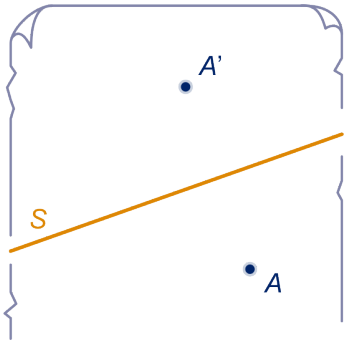
Andere argumenten die je ter beschikking staan, heb je in paragraaf 1 ontmoet: F-hoeken, Z-hoeken, de hoekensom van een driehoek, de stelling van de buitenhoek en de stelling van Pythagoras.

33 Bewijs de volgende stellingen.

a Als in een driehoek de zwaartelijn en de hoogtelijn uit een hoek hetzelfde zijn, dan is de driehoek gelijkbenig.

b Als in een driehoek twee hoogtelijnen even lang zijn, dan is de driehoek gelijkbenig.

34 Bewijs de volgende stelling.
Als A en A' elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn s en punt P ligt op As, dan zijn AP en $A'P$ even lang en maken AP en $A'P$ gelijke hoeken met s.



35 Bewijs de volgende stelling.
Als in een driehoek een zwaartelijn uit een hoek half zo lang is als de overstaande zijde van die hoek, dan is die hoek recht.

Hint 6.

Definitie
Een parallellogram is een vierhoek met evenwijdige overstaande zijden.

36 Bewijs de volgende stellingen over een parallellogram.

a In een parallellogram zijn de overstaande hoeken gelijk.

b In een parallellogram zijn de overstaande zijden gelijk.

c In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.

37 Bewijs de volgende stellingen.

a Als in een vierhoek de overstaande hoeken gelijk zijn, is het een parallellogram.

b Als in een vierhoek de overstaande zijden gelijk zijn, is het een parallellogram.

c Als in een vierhoek de diagonalen elkaar midden door delen, is het een parallellogram.

Definitie
Een **rechthoek** is een vierhoek met vier gelijke (dus rechte) hoeken.
Een **ruit** is een vierhoek met vier gelijke zijden.

Over ruiten en rechthoeken kun je ook een heleboel stellingen formuleren. In opgave 38 en 39 staan er enkele. Als je de bewijzen eenvoudig vindt, hoef je die niet te geven.

38

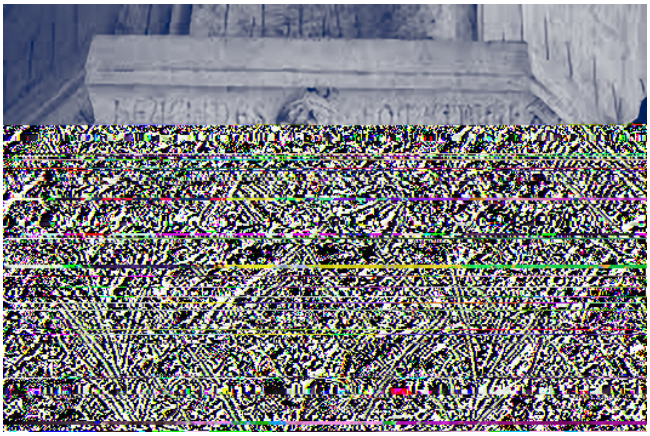
Bewijs de volgende stellingen over rechthoeken.

a Een rechthoek is een parallellogram.
b In een rechthoek zijn de diagonalen even lang.
c Als in een parallellogram de diagonalen even lang zijn, is het parallellogram een rechthoek.

39

Bewijs de volgende stellingen over ruiten.

a Een ruit is een parallellogram.
b In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar.
c Als in een parallellogram de diagonalen loodrecht op elkaar staan, is het parallellogram een ruit.



Afbeelding van Euclides in het Dogepaleis in Venetië
Foto van Giovanni Dall'Orto in Wikipedia.

De Elementen
Rond 300 voor Chr. leefde de Griekse wiskundige Euclides in Alexandrië; hij was daar leraar aan het Museon, het wetenschappelijke centrum. Verder is er niets met zekerheid over de persoon Euclides te zeggen. In dertien boeken, de Elementen, zette hij de wiskundige kennis van die tijd uiteen. Vanuit enkele voor iedereen acceptabele uitgangspunten leidde hij een heel bouwwerk van stellingen af. Hij gaat daarbij uiterst zorgvuldig te werk. Elke stap was onweerlegbaar. Hij bewijst flauwe stellingen zoals de driehoeksongelijkheid; iets

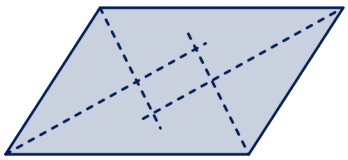
wat voor iedereen duidelijk is. Maar ook veel moeilijkere stellingen; daarvan zullen we nog voorbeelden zien.
Tot de jaren vijftig heeft zijn werk het wiskunde-onderwijs beheerst. Na de Bijbel is dit het meest bestudeerde boek. Na de uitvinding van de boekdrukkunst zijn er meer dan duizend drukken van de Elementen verschenen.

Voor meer informatie, zie bijvoorbeeld de 'site' van Dick Klingens.

40 Twee cirkels snijden elkaar.
Bewijs dat de verbindingslijn van de snijpunten loodrecht staat op de verbindingslijn van de middelpunten.

41 Twee raaklijnen aan een cirkel snijden elkaar in het punt S. De raakpunten zijn A en B.
$|AS| = |BS|$.

42 Bewijs dat de bissectrices van de hoeken van een parallellogram een rechthoek insluiten.
[Als er tenminste sprake is van een rechthoek. Het is ook mogelijk dat de diagonalen een lijnstuk of zelfs een punt insluiten.]



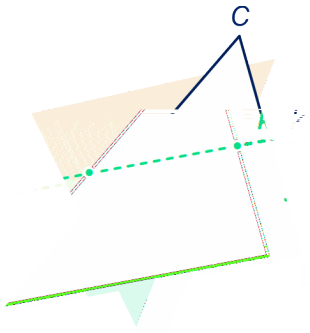
43 Gegeven is driehoek ABC. Lijn k is evenwijdig aan AB.

a Bewijs dat geldt:
Als k door het midden van AC gaat, dan gaat k ook door het midden van BC.

Hint 7.

b Ga na dat hieruit volgt:
De lijn door de middens van AC en BC is evenwijdig aan AB.

Deze lijn heet daarom wel een **middenparallel** van driehoek ABC.



44 Ga na dat uit het bewijs van opgave 43**a** onmiddellijk volgt:
een middenparallel van een driehoek is half zo lang als de zijde waaraan hij evenwijdig is.

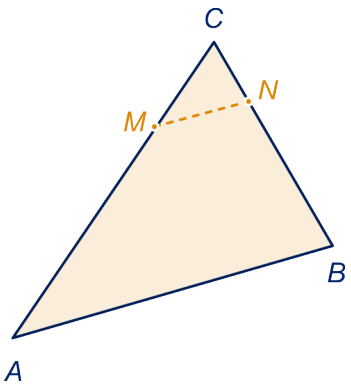
45 Gegeven is driehoek ABC. Punt M ligt op AC zó, dat $|AM| = 3 \cdot |MC|$ en punt N ligt op BC, zó dat $|BM| = 3 \cdot |NC|$.

a Bewijs dat MN evenwijdig is aan AB.

Hint 8.

b Bewijs dat $|AB| = 4 \cdot |MN|$.

Je kunt zo verder redeneren voor andere gelijke verhoudingen $|AM| : |MC|$ en $|BN| : |NC|$. Dat is een heel gedoe.
Euclides doet dat zorgvuldig en heeft daarmee het volgende bewezen.



Gegeven is driehoek ABC. M ligt op AC en N ligt op BC, zo dat $|AM| : |MC| = |BN| : |NC|$. Dan is MN evenwijdig aan AB.

Opmerking

Dit resultaat ken je al uit de onderbouw. Als volgt.
Als $|AM| : |MC| = |BN| : |NC|$, dan zijn de driehoeken ABC en MNC gelijkvormig, dus dan $\angle BAC = \angle NMC$, dus zijn MN en AB evenwijdig (F-hoeken).

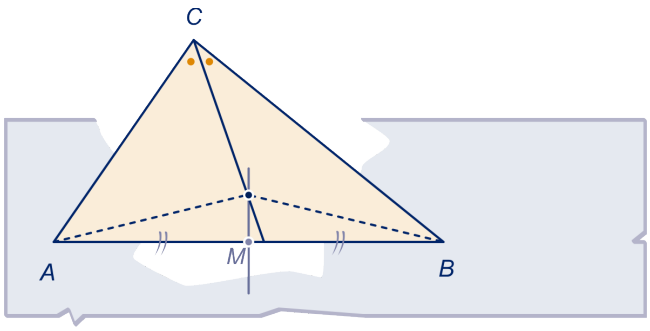
Met behulp van de middenparallel (opgave 43 en opgave 44) kunnen we bewijzen dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan. Maar dat is bepaald niet eenvoudig. Je moet daarvoor een geschikte hulplijn trekken.

46 $ABCD$ is een willekeurige vierhoek. De middens van de zijden noemen we achtereenvolgens P,

48

In deze opgave bewijzen we dat alle driehoeken gelijkbenig zijn.
Waar zit de fout in de volgende redenering?

In driehoek ABC trekken we de bissectrice uit hoek C en de middelloodlijn van AB. S is het snijpunt van deze twee lijnen.



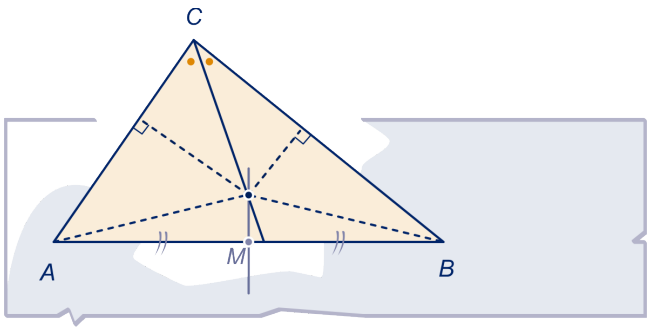
Gegeven MS is middelloodlijn van AB.
CS is bissectrice van hoek C.
Te bewijzen
$|AC| = |BC|$
Bewijs

1. $\|AS\| = \|BS\|$	S op de middelloodlijn van AB
2. $\angle ACS = \angle BCS$	S op de bissectrice van hoek C
3. $\|CS\| = \|CS\|$	
4. $\triangle ACS \cong \triangle BCS$	ZZH, uit 1, 2 en 3
5. $\|AC\| = \|BC\|$	uit 4

49

Je trapte natuurlijk niet in het bedrog bij opgave 48. Laten we zorgvuldiger te werk gaan. Nu wel een echt bewijs dat alle driehoeken gelijkbenig zijn.
Waar zit de fout?

Dezelfde situatie als in opgave 48. Trek de loodlijnen SP en SQ op AC en BC.



Gegeven
MS is middelloodlijn van AB.

CS is bissectrice van hoek C.

Te bewijzen

$|AC| = |BC|$

Bewijs

1. $\|AS\| = \|BS\|$	S ligt op de middelloodlijn van AB
2. $\|QS\| = \|PS\|$	S op de bissectrice van hoek C
3. $\angle SPC = \angle SQC$	beide zijn $90°$
4. $\triangle APS \cong \triangle BQS$	ZZR, uit 1, 2 en 3
5. $\angle SAP = \angle SBQ$	uit 4
6. $\angle SAB = \angle SBA$	uit 1, gelijkbenige driehoek
7. $\angle BAC = \angle ABC$	uit 5 en 6
8. $\|AC\| = \|BC\|$	uit 7, gelijke basishoeken

4.4 Stand van zaken

In deze paragraaf wordt je gevraagd wat je weet van de zijden, hoeken en diagonalen van verschillende soorten vierhoeken. En omgekeerd, wat voor speciaal type vierhoek het is als je iets gegeven hebt over de zijden, hoeken of diagonalen. Enkele van deze zaken heb je al bewezen. Nu kun je volstaan met de antwoorden en mag je de bewijzen achterwege laten.
Er zijn veel en gevarieerde opgaven om het redeneren te oefenen en om routine op te doen. Het is wellicht niet nodig alle opgaven te maken. Er zijn vaak verschillende voor de hand liggende oplossingen.

Voorbeeld
Vraag
Wat weet je van de zijden van een parallellogram?
Antwoord
De overstaande zijden zijn evenwijdig en even lang.

50

a Wat weet je van de hoeken van een parallellogram?
Wat weet je van de diagonalen van een parallellogram?
b Wat weet je van de zijden van een ruit?
Wat weet je van de diagonalen van een ruit?
c Wat weet je van de hoeken van een rechthoek?
Wat weet je van de diagonalen van een rechthoek?

Voorbeeld
Gegeven
Van een vierhoek zijn de overstaande zijden even lang.
Vraag
Wat voor soort vierhoek is dat?
Antwoord
Het is een parallellogram.

51

Van een vierhoek is gegeven dat de overstaande hoeken even groot zijn.
a Wat voor soort vierhoek is dat?

Van een vierhoek is gegeven dat de vier hoeken recht zijn.
b Wat voor soort vierhoek is dat?

52

Van een parallellogram is gegeven dat het een rechte hoek heeft.
a Wat voor soort vierhoek is dat?

Van een ruit is gegeven dat hij een rechte hoek heeft.
b Wat voor soort vierhoek is dat?

4.4 Stand van zaken

53 Van een vierhoek is gegeven dat de diagonalen even lang zijn.

a Kun je hieruit concluderen dat de vierhoek een rechthoek is?

Van een parallellogram is gegeven dat de diagonalen even lang zijn.

b Kun je hieruit concluderen dat de vierhoek een rechthoek is?

54 Van een vierhoek is gegeven dat de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

a Kun je hieruit concluderen dat de vierhoek een ruit is?

Van een parallellogram is gegeven dat de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

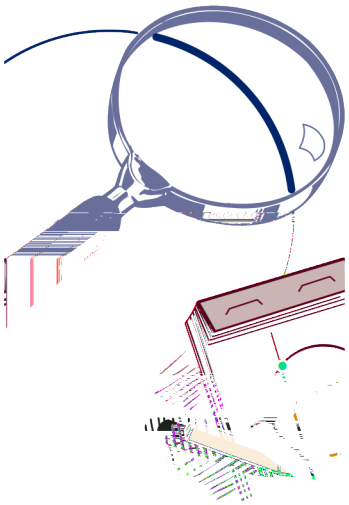
b Kun je hieruit concluderen dat de vierhoek een ruit is?

Op de volgende bladzijden staan onze uitgangspunten en de resultaten die we daaruit bewezen hebben bij elkaar. Deze mag je zonder verdere toelichting opnemen in redeneringen en bewijzen. Wel moet je dan de naam gebruikte stelling vermelden; die staat cursief achter de stelling.
Het is handig de stellingen paraat te hebben.

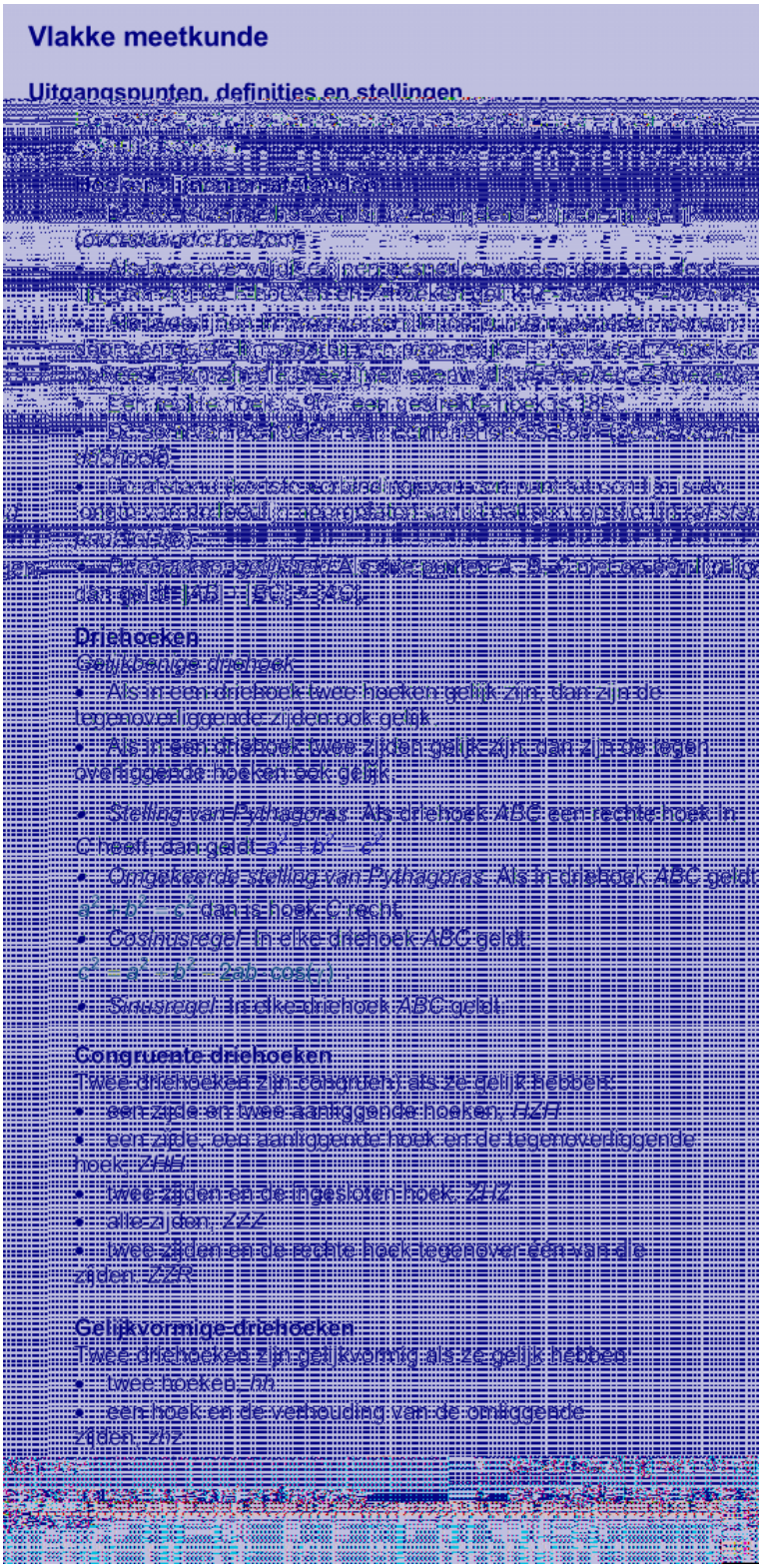
- Lees daarom de zaken aandachtig door en leer wat je niet zo bekend was.
- Maak zo mogelijk plaatjes bij de stellingen.

Verderop staan een serie oefenopgaven (vanaf opgave. Ga bij voldoende van deze opgaven als volgt te werk.

- Maak een tekening. Zet daarin zo veel mogelijk gegevens; gebruik tekens om gelijke zijden en pijltjes om evenwijdigheid aan te geven
- Als je zelf punten of lijnen toevoegt, vermeld dat dan.
- Schrijf het Gegeven op.
- Schrijf het Te bewijzen op.
- Lever een bewijs op grond van Vlakke meetkunde Uitgangspunten, definities en stellingen op de volgende twee bladzijden.



4.4 Stand van zaken



Vlakke meetkunde

Uitgangspunten, definities en stellingen

Driehoeken

Gelijkbenige driehoek

- Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk.
- Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk.
- *Stelling van Pythagoras*: Als driehoek ABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$.
- *Omgekeerde Stelling van Pythagoras*: Als in driehoek ABC geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is hoek C recht.
- *Cosinusregel*: In elke driehoek ABC geldt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C)$.
- *Sinusregel*: In elke driehoek ABC geldt

Congruente driehoeken

Twee driehoeken zijn congruent als ze gelijk hebben:

- een zijde en twee aanliggende hoeken: *HZH*
- een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek: *ZHH*
- twee zijden en de ingesloten hoek: *ZHZ*
- alle zijden: *ZZZ*
- twee zijden en de ruime hoek tegenover een van de zijden: *ZZR*

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- twee hoeken: *hh*
- een hoek en de verhouding van de omliggende zijden: *zhz*

4.4 Stand van zaken

Vierhoeken

- De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (*hoekensom vierhoek*).

Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram*.

- Er zijn twee paren evenwijdige zijden.
- Er zijn twee paren gelijke overstaande zijden.
- Twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig.
- De diagonalen delen elkaar middendoor.

Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit*.

- Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
- Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
- Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Equivalente definities en eigenschappen van een *rechthoek*.

- Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- Het is een parallellogram met een rechte hoek.
- Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

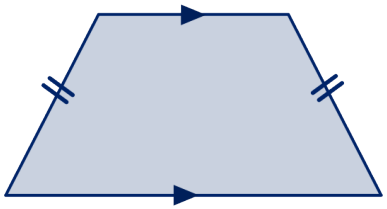
Puntverzamelingen

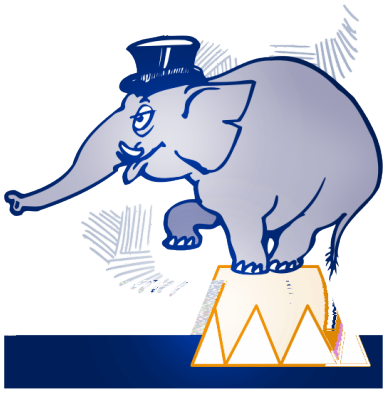
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B, is de middelloodlijn van het lijn stuk AB (*middelloodlijn*).
- De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek, is de deellijn (bissectrice) van die hoek (*deellijn*).
- De verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben, is de cirkel met middelpunt M en straal r (*cirkel*).
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het deellijnenpaar (bissectrice paar) van die twee lijnen (*deellijnenpaar*).
- De twee deellijnen van twee elkaar snijdende lijnen snijden elkaar loodrecht in het snijpunt van die twee lijnen (*loodrechte stand deellijnenpaar*).
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar (*middenparallel*).

Cirkeleigenschappen

- De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor (*loodlijn op koorde*).

4.4 Stand van zaken





Een **trapezium** is een vierhoek met twee evenwijdige zijden.
Dit trapezium heet **gelijkbenig** als de andere twee zijden even lang en niet evenwijdig zijn, zie plaatje.

55 Beredeneer dat de diagonalen van een gelijkbenig trapezium even lang zijn.

56 Bewijs dat de buitenbissectrices van een rechthoek een vierkant insluiten.

57 Als in een vierhoek de diagonalen bissectrices zijn van de hoeken, dan is die vierhoek een ruit.
Bewijs dit.

58 In een vierhoek zijn twee zijden evenwijdig en de andere twee zijden zijn even lang.
Bewuhs dat de vierhoek een parallellogram of een gelijkbenig trapezium is.

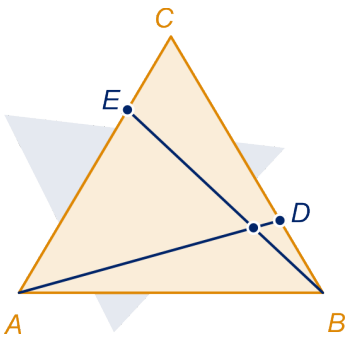
59 Twee cirkels met middelpunten M en N snijden elkaar in P en Q.
Er geldt: $\angle PMQ = \angle PNQ$
Bewijs dat de cirkels gelijke straal hebben.

60 In een gelijkbenige driehoek liggen het zwaartepunt, het middelpunt van de ingeschreven cirkel en het middelpunt van de omgeschreven cirkel op de hoogtelijn uit de top.
Bewijs dit.

61 H is het hoogtepunt van een scherphoekige driehoek ABC.
Waar ligt het hoogtepunt van driehoek ABH?

62 Een vierhoek zonder inspringende hoeken wordt door zijn diagonalen verdeeld in vier driehoeken.
Bewijs dat de hoogtepunten van deze driehoeken de hoekpunten zijn van een parallellogram.

63 Driehoek ABC is gelijkzijdig. D ligt op zijde BC en E ligt op zijde AC zo dat $|BD| = |CE|$.
P is het snijpunt van AD en BE.



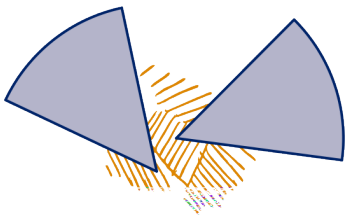
a Zoek twee congruente driehoeken in de figuur en bewijs die congruentie

b Bereken $\angle APB$

Net als bij driehoeken kunnen we bij cirkelsectoren spreken van congruentie. Er zijn twee congruentie-gevallen.

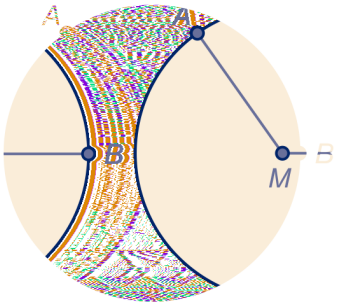
Twee cirkelsectoren zijn congruent als:

- de stralen van de cirkels gelijk zijn en de middelpuntshoeken zijn gelijk,
- de stralen van de cirkels gelijk zijn en de cirkelbogen zijn gelijk.



Afspraak

A en B zijn punten op een cirkel met middelpunt M. Als $\angle AMB = 129°$, zeggen we dat boog AB 129° is.
Dit korten we af met: $bg(AB) = 129°$.



64 In een cirkel is een rechthoek $ABCD$ getekend.

a Hoe groot is $bg(AC)$?

In een cirkel is een regelmatige vijfhoek $ABCDE$ getekend.

b Hoe groot zijn $bg(AB)$ en $bg(AC)$?

65 A en B zijn twee punten op een cirkel met straal 3. Gegeven is dat $bg(AB) = 129°$.

a Bereken $|AB|$ en de lengte van boog AB in twee decimalen.

A en B zijn twee punten op een cirkel met straal r.
Gegeven is dat $bg(AB) = \alpha$.

b Druk $|AB|$ en de lengte van boog AB uit in r en α.

66 De punten A, B, C en D liggen op een cirkel met middelpunt M.
We vergelijken de sectoren AMB en CMD.
Bewijs dat geldt: $bg(AB) = bg(CD) \Leftrightarrow |AB| = |CD|$.
Opmerking Je moet hier twee dingen bewijzen:

- als de bogen AB en CD gelijk zijn, dan zijn de lijnstukken AB en CD ook gelijk,
- als de lijnstukken AB en CD gelijk zijn, dan zijn de bogen AB en CD ook gelijk.

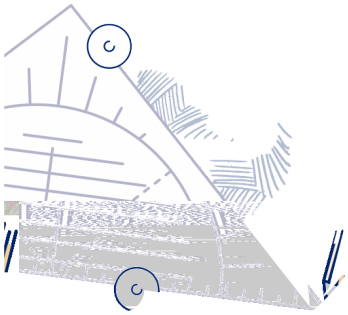
67

Experiment

Steek twee punaises door een karton op een afstand van ongeveer 7 cm. Leg het karton op tafel, met de punten van de punaises omhoog.

a Schuif een geodriehoek met de rechte hoek tussen de punaises. Laat de geodriehoek alle mogelijke posities innemen. Let op de baan die het hoekpunt bij de rechte hoek daarbij beschrijft.

b Schuif een geodriehoek met een hoek van $45°$ tussen de punaises. Laat de geodriehoek weer alle mogelijke posities innemen. Let op de baan die het hoekpunt bij de hoek van $45°$ daarbij beschrijft.



De volgende stelling is ook te vinden in 4V deel 1 wiskunde b.

68

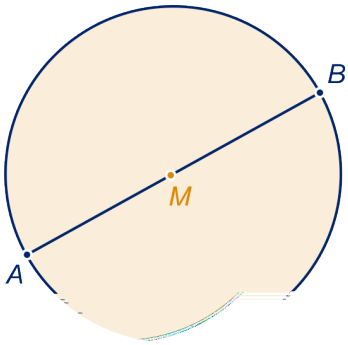
Stelling van Thales

Van een cirkel met middelpunt M is AB een middellijn. Verder is er een punt C, verschillend van A en B.

a Bewijs: als C op de cirkel ligt, dan is $\angle ACB = 90°$.

Hint 10.

b Bewijs: als $\angle ACB = 90°$, dan ligt C op de cirkel.



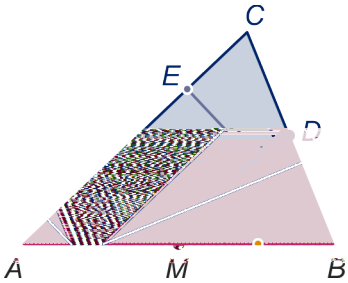
De stelling in opgave 68**a** wordt toegeschreven aan Thales van Milete (Milete was in de oudheid een Griekse stad in Klein Azië, tegenwoordig Turkije, ongeveer 80 km zuidelijk van Izmir).

Thales is een van de legendarische oude wijzen, een filosoof die als koopman in aanraking kwam met de Egyptische en Babylonische meetkunde van zijn tijd. Bij hem laat men in het algemeen de Griekse wetenschap beginnen. Er zijn allerlei anekdotes over hem in omloop. Zo zou Thales als eerste een zonsverduistering hebben voorspeld. Maar weinig is met zekerheid over hem bekend.

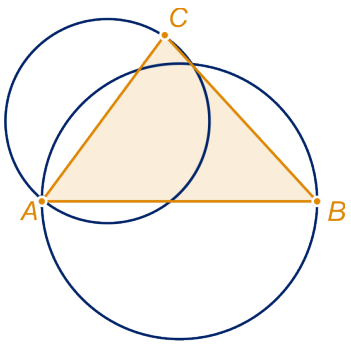
Thales van Milete
ca 624 - 547 v. Chr.

69

AD en BE zijn hoogtelijnen in driehoek ABC. M is het midden van zijde AB.
Bewijs dat D en E even ver van M afliggen.

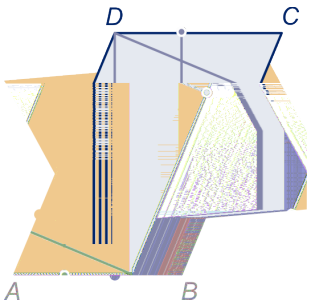


70 Gegeven is driehoek ABC. Bekijk de cirkels met middellijnen AB en AC. Die snijden elkaar behalve in A nog in een tweede punt: S.
Bewijs dat S op de zijde BC ligt.

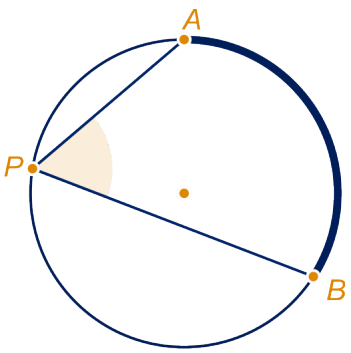


71 $ABCD$ is een parallellogram.
Teken de loodlijnen uit B op de zijden DA en DC; teken de loodlijnen uit D op de zijden BA en BC.
Bewijs dat de voetpunten van de loodlijnen de hoekpunten van een rechthoek zijn.

Hint 11.



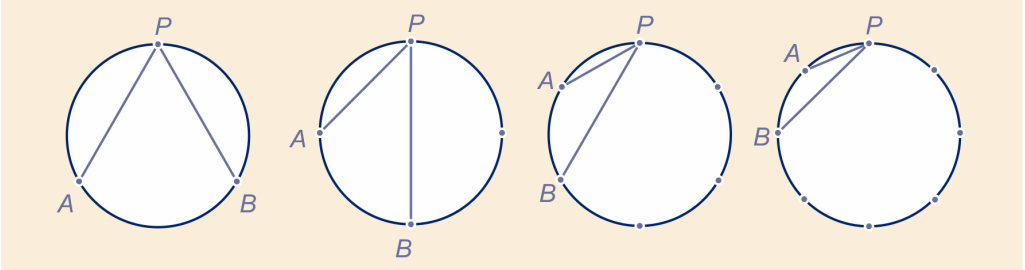
Terminologie
A en B zijn twee punten van een cirkel. Hiernaast is boog AB gekleurd.
Eigenlijk zijn er twee bogen AB. Die vullen elkaar aan tot de hele cirkel.
Tegenover boog AB is er een punt P op de cirkel gekozen. We zeggen dat hoek APB **staat** op de boog AB.



72 Het is duidelijk dat, hoe groter de boog, des te groter de hoek is die op de boog staat. Als de hoek bijna $0°$ is, is de booglengte ook bijna 0.

a Wat weet je van de boog als de hoek $90°$ is
b Hoe zit het als de hoek $180°$ is?

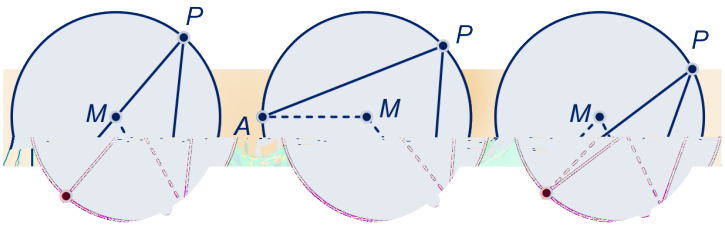
73 We bekijken enkele speciale gevallen. In de opvolgende plaatjes is de cirkel verdeeld in 3, 4, 6 en 8 even lange bogen.



a Hoe groot is $bg(AB)$ in elk van deze gevallen?
b Hoe groot is $\angle APB$ in elk van deze gevallen?

Bij deze speciale gevallen was er iets moois aan de hand: $\angle APB = \frac{1}{2}bg(AB)$.
Iets dergelijks geldt algemeen. De grootte van een hoek hangt alleen af van de boog waarop hij staat! Deze stelling is centraal in de theorie over hoeken en bogen.
We gaan hem bewijzen.

74 Gegeven is een boog AB van een cirkel met middelpunt M. P is een punt, ongelijk aan A en B.
Als P op de cirkel ligt, tegenover boog AB, dan geldt: $\angle APB = \frac{1}{2} \cdot \angle AMB$.
Om dit te bewijzen, onderscheiden we drie gevallen.



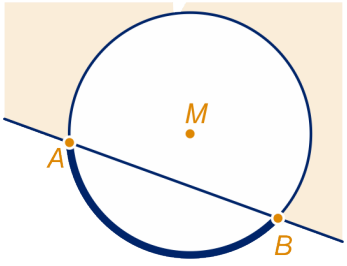
a Bewijs de stelling als P zo ligt dat M op AP ligt.
b Bewijs de stelling als P zo ligt dat M binnen driehoek APB ligt.

Hint 12.

c Bewijs de stelling als P zo ligt dat M buiten driehoek APB ligt.

Hint 13.

75 **Omkering van de stelling van de omtrekshoek**
Gegeven is een boog AB van een cirkel met middelpunt M. P is een punt, aan de kant van de lijn AB waar boog AB niet ligt. (Dat is in het plaatje de kant "boven" de lijn AB.)



a Stel dat P buiten de cirkel ligt.
Bewijs dat dan $\angle APB < \frac{1}{2} \cdot bg(AB)$.

Hint 14.

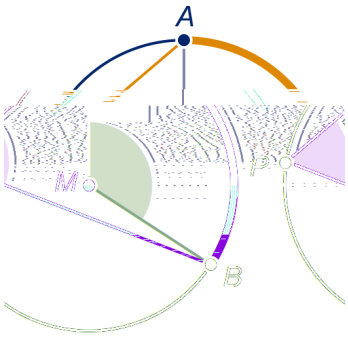
Stel dat P binnen de cirkel ligt.
b Bewijs dat dan $\angle APB > \frac{1}{2} \cdot bg(AB)$.

Hint 15.

76 $ABCDE$ is een regelmatige vijfhoek.
Bewijs dat $\angle EAD = \angle DAC$.

77 Laat zien dat de stelling van Thales een speciaal geval is van de stelling van de omtrekshoek.

A, B en P zijn punten op de cirkel met middelpunt M.
We zeggen dat hoek APB op boog AB staat.
Er geldt:
$\angle AMB = 2 \cdot \angle APB$.
Omgekeerd geldt:
als P buiten de cirkel ligt, dan: $\angle AMB > 2 \cdot \angle APB$.
als P binnen de cirkel ligt, dan: $\angle AMB < 2 \cdot \angle APB$.



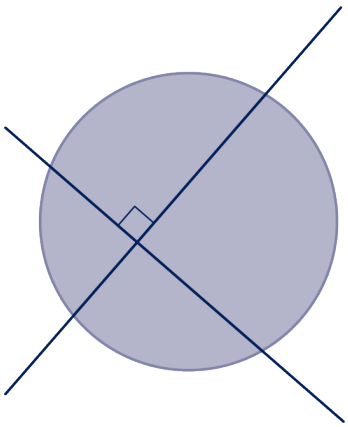
78 A, B, C en D liggen op een cirkel zo dat $AB \parallel CD$.
Bewijs dat boog AD en boog BC even lang zijn.

79 Twee lijnen snijden elkaar loodrecht binnen een cirkel. De snijpunten verdelen de cirkelomtrek in vier stukken.

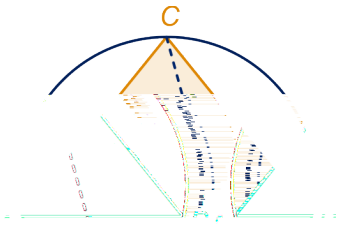
a Bewijs dat de twee tegenover elkaar liggende stukken samen de helft van de cirkelomtrek zijn.

Bekijk het grensgeval dat de lijnen elkaar niet binnen de cirkel loodrecht snijden, maar op de cirkelrand.

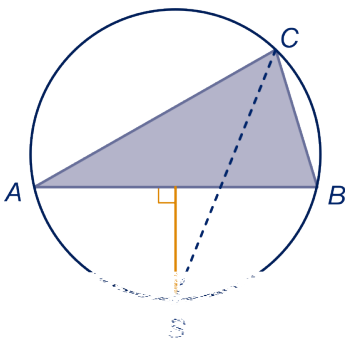
b Leg uit dat je daarmee opnieuw de (omgekeerde) stelling van Thales hebt bewezen.



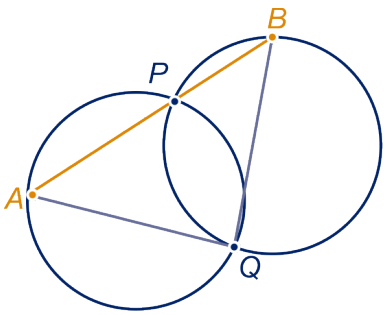
80 ABC is een gelijkbenige driehoek met tophoek C. D ligt op boog AB van de omgeschreven cirkel, tegenover C.
Bewijs dat DC bissectrice is van hoek ADB.



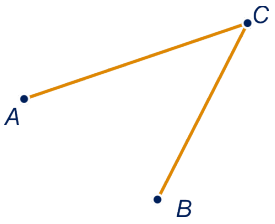
81 Gegeven is driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel. De middelloodlijn van AB snijdt de cirkel in het punt S, tegenover C.
Bewijs dat CS bissectrice is van hoek ACB.



82 Twee cirkels met gelijke straal snijden elkaar in de punten P en Q. Een lijn door P snijdt de ene cirkel ook nog in A en de andere ook nog in B.
Bewijs dat A en B even ver van punt Q afliggen.

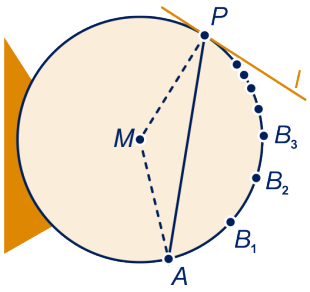


83 Gegeven zijn drie punten A, B en C die niet op een rechte lijn liggen.
Teken alle punten P, zo dat $\angle APB = \angle ACB$.



84 Gegeven is een cirkel met middelpunt M. De lijn l raakt in het punt P aan de cirkel. A is een ander punt van de cirkel.
De hoek die l maakt met de koorde AP noemen α.
Bewijs dat $\angle AMP = 2\alpha$.

Hint 16.



Je kunt de situatie in opgave 84 als volgt zien als limietgeval van de stelling van de omtrekshoek.
Benader het punt P met een rij punten B_n op een cirkel.
Er geldt:

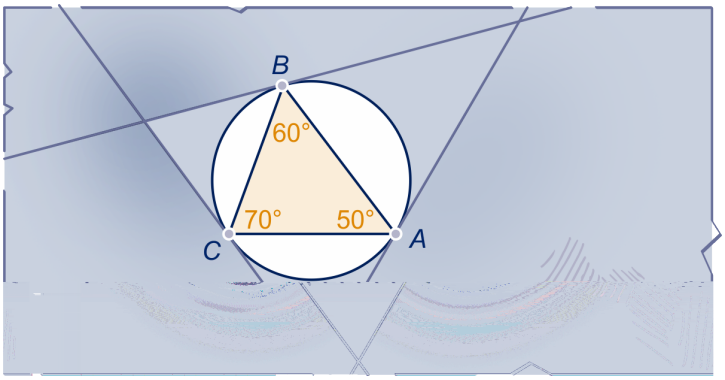
- $\angle B_nPA$ nadert willekeurig dicht tot α,
- $\angle B_nMA$ nadert willekeurig dicht tot $\angle PMA$,
- $\angle B_nMA = 2 \cdot \angle B_nPA$ voor elke n.

Dus $\angle PMA = 2 \cdot \alpha$.

Gegeven een koorde van een cirkel en de raaklijn in een eindpunt van de koorde.
De hoek tussen raaklijn en koorde is de helft van de boog waarop de koorde staat.

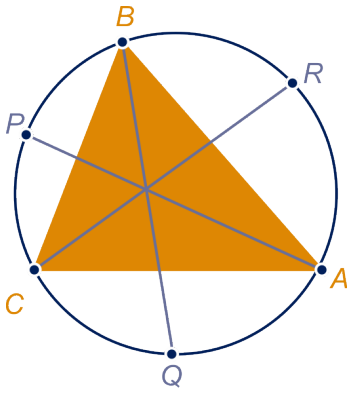
We kunnen de hoek tussen de raaklijn in P en de koorde AP dus beschouwen als een omtrekshoek die staat op de boog AP. De stelling van de omtrekshoek geldt dus ook voor deze situatie.
We zullen hieraan refereren als het **limietgeval**.

85 Driehoek ABC heeft hoeken van $50°$, $60°$ en $70°$. In de hoekpunten worden de raaklijnen aan de omgeschreven cirkel getekend. Die sluiten een driehoek in.

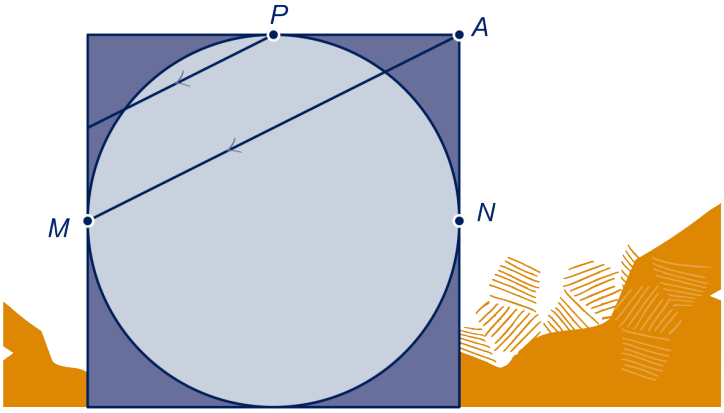


Bereken de hoeken van die driehoek.

86 Driehoek ABC heeft hoeken van $50°$, $60°$ en $70°$. De bissectrices van de hoeken snijden de omgeschreven cirkel in de punten P, Q en R.
Bereken de hoeken van driehoek PQR.



87 Van een vierkant is A een hoekpunt en zijn M, N en P middens van zijden. In het vierkant is de ingeschreven cirkel getekend. Er zijn twee lijnen getekend. De ene lijn gaat door A en M; de andere gaat door P en is evenwijdig aan de eerste lijn. De lijnen snijden twee bogen van de cirkel af; die zijn in de figuur gekleurd.

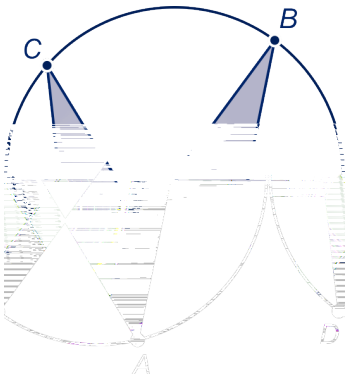


Bewijs dat die bogen even lang zijn.

88

Vlinderstelling

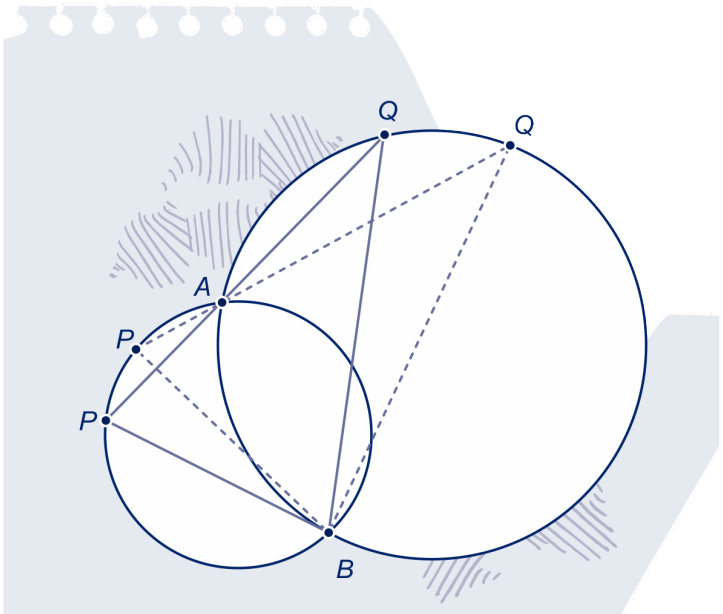
De vier punten A, B, C en D liggen in deze volgorde op een cirkel.
Trek de lijnen AB, BD, DC en CA
Dan ontstaat een "vlinder"-figuur, bestaande uit twee driehoeken.



Bewijs dat deze driehoeken gelijkvormig zijn.

89

Twee cirkels snijden elkaar in de punten A en B. Het punt P beweegt over de ene cirkel. De lijn door A en A snijdt de andere cirkel in Q.
We bekijken de driehoek PQB.
Hieronder zijn deze driehoeken getekend voor twee verschillende posities van P.



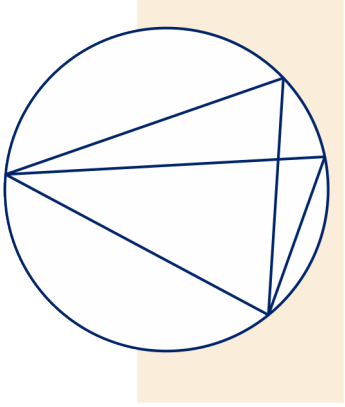
Bewijs dat de driehoeken gelijkvormig zijn.

4.6 Koordenvierhoeken

Definitie
Een **koorde** is een verbindingslijnstuk van twee punten op een kromme in het bijzonder op een op een cirkel.
Een **koordenveelhoek** is een veelhoek waarvan de zijden koorden zijn van een cirkel. Met andere woorden: een koordenveelhoek heeft een omgeschreven cirkel.

Koorde is een typisch Nederlands woord, dat alleen in de wiskunde gebruikt wordt. Het is verwant met het Latijnse chorda, wat snaar betekent.

90 Hiernaast staat een koordenvierhoek met zijn diagonalen. Er zijn acht omtrekshoeken twee aan twee gelijk.
Neem de figuur over en schrijf dezelfde tekens in gelijke hoeken.

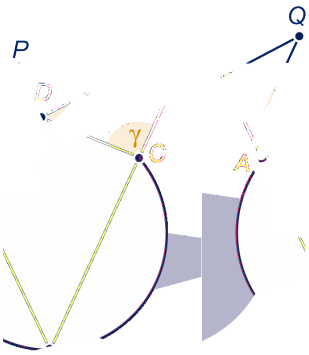


Koordenvierhoekstelling
In een koordenvierhoek is de som van de overstaande hoeken $180°$.

Omkering
Als in een vierhoek de som van de overstaande hoeken $180°$ is, dan is het een koordenvierhoek.

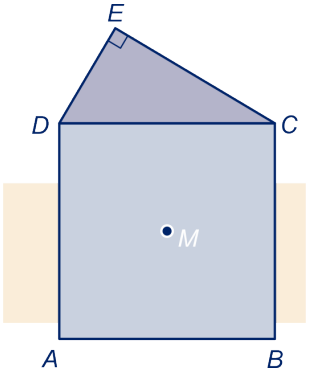
91 Bewijs de koordenvierhoekstelling en zijn omkering.

92 De verlengden van de overstaande zijden van een koordenvierhoek $ABCD$ snijden elkaar in P en Q. In de figuur zijn drie hoeken aangegeven: α, β en γ.
Bewijs dat $\alpha = \gamma - \beta$.



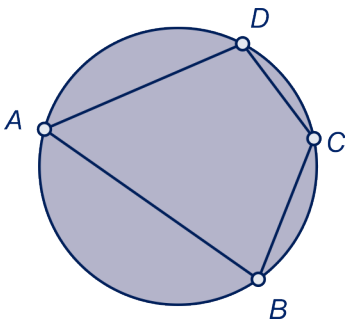
93
a Wat weet je van een vlieger die koordenvierhoek is?
b Wat weet je van een parallellogram dat koordenvierhoek is?

94 $ABCD$ is een vierkant met middelpunt M. Driehoek DCE is rechthoekig in E.
a Bewijs dat $DMCE$ een koordenvierhoek is.
b Bewijs dat EM bissectrice van hoek DEC is.

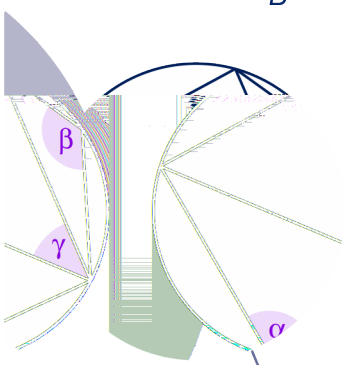


4.6 Koordenvierhoeken

Je kunt de stelling van de koordenvierhoek ook als volgt inzien.
Hoek A staat op de ene boog BD (tegenover A) en hoek C staat op de andere boog BD (tegenover C).
Samen zijn deze bogen de hele cirkel. De bijbehorende middelpuntshoeken zijn samen $360°$. De bijbehorende omtrekshoeken zijn dus samen $180°$.



95 In een koordenvijfhoek zijn twee diagonalen getekend; zie de figuur. Daarin zijn drie hoeken aangegeven: α, β en γ.
Bewijs dat $\alpha + \beta = 180° + \gamma$.



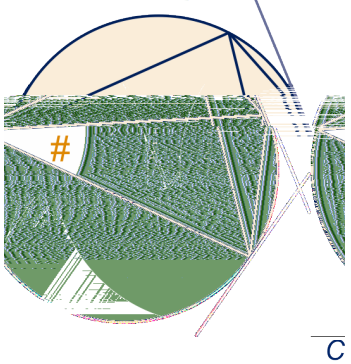
96 $ABCDEF$ is een koordenzeshoek.

a Bewijs dat $\angle A + \angle C + \angle E = 360°$.

$ABCDEFGH$ is een koordenachthoek.

b Hoe groot is $\angle A + \angle C + \angle E + \angle G$?

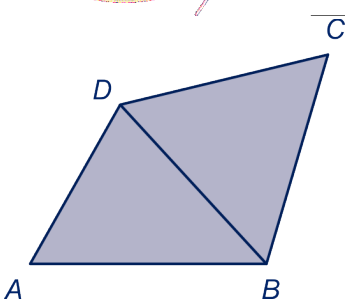
97 Hiernaast staat een koordenvierhoek met zijn diagonalen en in twee opvolgende hoekpunten de raaklijnen aan de omgeschreven cirkel. In een van de hoeken staat het teken #.
Neem de figuur over en geef daarin de drie andere hoeken aan die even groot zijn als met het #.



98 $ABCD$ is een vierhoek met $\angle A = \angle C$. Diagonaal BD verdeelt de vierhoek in twee stukken.

a Bewijs dat het hoogtepunt van het ene stuk op de omgeschreven cirkel van het andere stuk ligt.

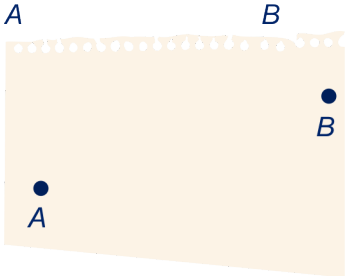
b Ga na dat je het beweerde in onderdeel **a** kunt toepassen op een vlieger en op een parallellogram.



99 We komen terug op het experiment van opgave 67 van de vorige paragraaf.
Gegeven zijn twee punten A en B.

a Bepaal alle punten P, zo dat $\angle APB = 45°$.

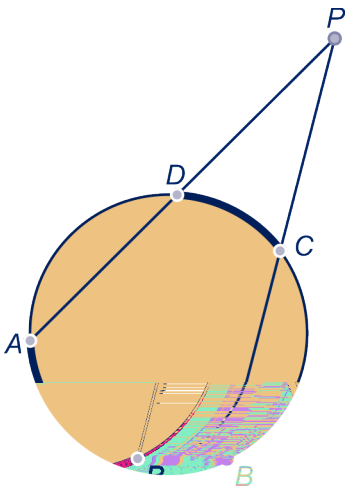
b Bepaal alle punten P, zo dat $\angle APB = 135°$.



Op een cirkel is een boog gegeven. De stelling van de middelpuntshoek gaat over de hoek die staat op de boog als het hoekpunt op de cirkel ligt (tegenover die boog). Hoe zit het als het hoekpunt buiten of binnen die cirkel ligt? Daarover gaan de volgende opgaven.

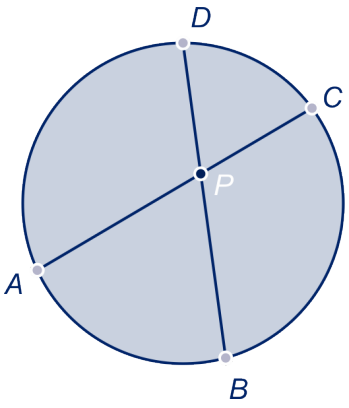
100 Gegeven is een cirkel en een punt P daar buiten. Twee lijnen door P snijden de cirkel in A, B, C en D. Zie de figuur.
Bewijs dat $\angle P = \frac{1}{2} \cdot bg(AB) - \frac{1}{2} \cdot bg(CD)$.

Hint 17.



101 Gegeven is een cirkel en een punt P daar binnen. Twee lijnen door P snijden de cirkel in A, B, C en D. Zie de figuur.
Bewijs dat $APB = \frac{1}{2} \cdot bg(AB) + \frac{1}{2} \cdot bg(CD)$.

Hint 18.

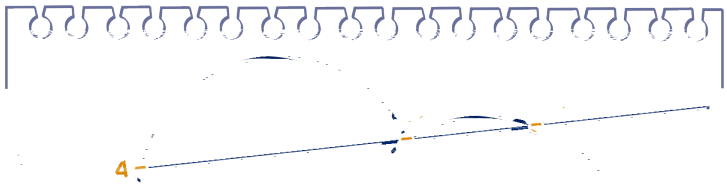


102 Ga na dat de resultaten van opgave 101 en opgave 102 beide als randgeval de stelling van de omtrekshoek opleveren.

Als twee lijnen door punt P van een cirkel twee bogen afsnijden, dan geldt:

- als P buiten de cirkel ligt, is de grootte van hoek P het halve verschil van de bogen;
- als P binnen de cirkel ligt, is de grootte van hoek P de halve som van de bogen.

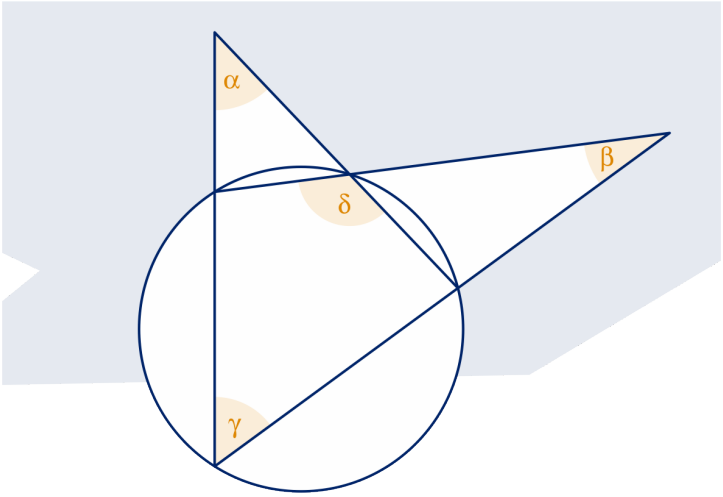
103 Twee cirkels met dezelfde straal snijden elkaar in P en Q.
A ligt op de ene cirkel. Lijn AP en lijn AQ snijden de andere cirkel in B en C.



Bewijs: $bg(BC) = 2 \cdot bg(PQ)$.

104

We verlengen de zijden van een koordenvierhoek. Zodoende ontstaat onderstaande figuur. Hierin zijn vier hoeken aangegeven: α, β, γ en δ

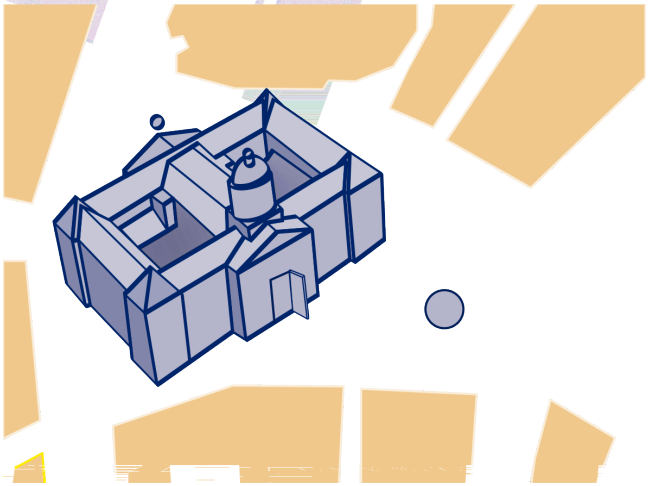


Bewijs dat $\delta = \alpha + \beta + \gamma$.

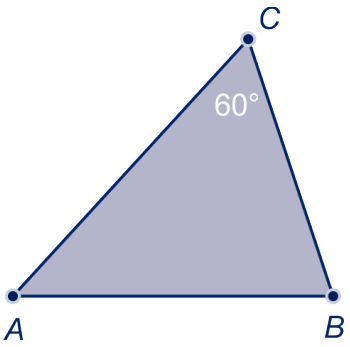
4.7 Iso-hoeklijnen

105

Je bent in Neerlands hoofdstad en bewondert het paleis op de Dam. Hoe breed zie je het gebouw? Richt je blik eerst op de linkerkant en dan op de rechterkant. Dan verander je je kijkrichting. De hoek waarover die verandert, is de **kijkhoek** waaronder je het gebouw ziet.
Hoe groot de kijkhoek is, hangt natuurlijk af van de plek waar je je bevindt.



Lijnstuk AB hiernaast zie je vanuit C onder een hoek van $60°$.



a Teken op het werkblad alle punten aan de kant van C van lijn AB waar je lijnstuk AB onder een hoek van $60°$ ziet; dat is de **iso-60 graden-hoeklijn**.
Beschrijf je werkwijze.

De iso-hoeklijn van $70°$ kunje tekenen door bijvoorbeeld een punt D te zoeken waarvoor geldt: $\angle ADB = 70°$.

b Teken de isohoeklijn aan de 'bovenkant' van lijn AB .
Beschrijf je werkwijze.

Hint 19.

Om een isohoeklijn 'boven' lijnstuk AB te tekenen, kun je ook meteen op zoek gaan naar het middelpunt M van de cirkelboog die je moet tekenen.

c Hoe groot zijn de hoeken van driehoek MAB bij de isohoeklijn van $48°$?

Hint 20.

Gegeven is een lijnstuk AB.
Gevraagd is de verzameling punten P, zodat $\angle APB = 46°$.
Je redeneert dan bijvoorbeeld zo.

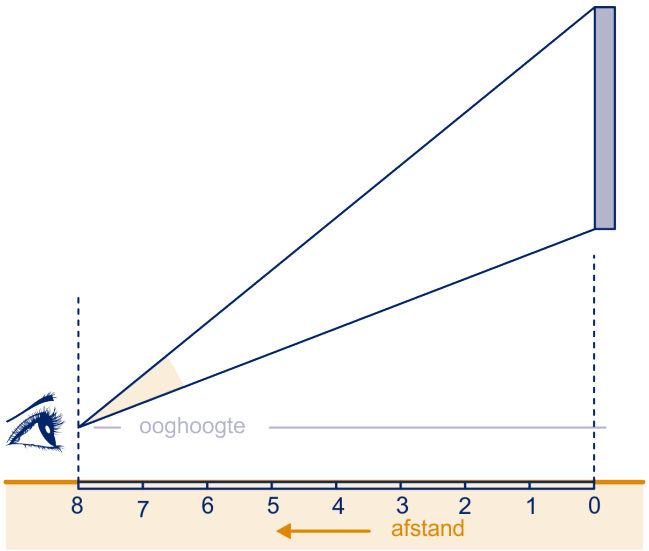
- De punten liggen op twee cirkelbogen die elkaars spiegelbeeld zijn in lijn AB ; noem een van de middelpunten: M.
- De middelpuntshoek M is dan $92°$.
- de hoeken MAB en MBA zijn even groot(gelijkbenige driehoek).
- Deze hoeken zijn dus beide $44°$ (uit hoekensom).
- Nu kan ik de punten M bepalen (aan weerszijden van lijn AB een punt M.
- De punten P liggen op bogen van de cirkels met een middelpunt M die door A en B gaan.

Deze aanpak gaat volgens opgave 105**c**. Je kunt ook de methode van opgave 105**b** volgen.

106

Jan van den Heuy rijdt op de A50. Hij moet naar Arnhem. In de verte ziet hij het bord waarop staat hoe hij moet voorsorteren. Als hij dichterbij komt, lijkt het bord groter te worden. Dat komt omdat de kijkhoek waaronder hij het bord ziet groter wordt. Maar als hij vlak bij het bord is, lijkt het weer kleiner.

De onderkant van het bord is 4 meter boven de weg. Het bord is $3{,}5$ meter hoog. Reken met een ooghoogte van de automobilist van 1 meter. Hieronder is de hoek getekend waaronder hij het bord ziet als de auto nog 8 meter van het bord af is.



a Bereken de hoek waaronder Jan het bord ziet in één decimaal nauwkeurig.

Hint 21.

Als Jan x meter voor het bord is, is de hoek waaronder Jan het bord dan ziet: $\tan^{-1}\left(\frac{6{,}5}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$.

b Toon dat aan.
c Teken de grafiek op de GR en bepaal daarmee in twee decimalen nauwkeurig voor welke afstanden x de hoek $15{,}0°$ graden is.

107 We gaan meetkundig bepalen op welke plek Jan het bord het grootst ziet.

Vergeet even de ooghoogtelijn. De punten van waaruit je het bord onder een hoek van $40°$ ziet, liggen op een cirkelboog, de iso-$40°$-hoeklijn.
a Teken die op schaal $1 : 100$.
b Teken ook de iso-hoeklijnen bij de hoeken: $15°$, $20°$ en $25°$.

Nu letten we wel op de ooghoogtelijn. Je ziet dat er twee plekken zijn waar Jan het bord ziet onder een hoek van $20°$. Maar er zijn geen plekken waar hij het bord ziet onder een hoek van $25°$. Er is één plek waar Jan het bord ziet onder de grootste kijkhoek.
c Wat weet je van de bijbehorende iso-hoeklijn te vertellen? Wat is dus de straal van die cirkel?
d Teken de iso-hoeklijn bij de grootste kijkhoek.
e Bereken de grootste kijkhoek in één decimaal.

108 We keren terug naar opgave 105.
Iemand steekt schuin de Dam over. Zijn route staat op het werkblad: de lijn k. Er is een plek op k van waar uit hij het paleis op de Dam (lijnstuk AB het breedst ziet. Omdat de lijn k niet loodrecht staat op de voorgevel van het paleis, is het lastig die plek te vinden. Hieronder volgt een slimme constructie.
- We zoeken een cirkel die door de uiterste punten A en B van de voorgevel gaat en raakt aan lijn k.
- Het middelpunt van die cirkel ligt op de middelloodlijn m van AB.
- Teken een (kleine) cirkel met middelpunt op m, die raakt aan k. Noem het middelpunt M.

- Noem het snijpunt van m met k: S. Vanuit S gaan we de kleine cirkel opblazen, totdat hij door A en B gaat.
- Trek lijn AS. Noem een van de snijpunten met de cirkel: T (Als AS de cirkel niet snijdt, doet BS dat wel; verwissel dan A en B.)
- Trek de lijn door A, evenwijdig aan TM. Noem het snijpunt met lijn m: N.
- Teken de cirkel met middelpunt N die raakt aan k.

a Voer deze constructie stap voor stap uit.

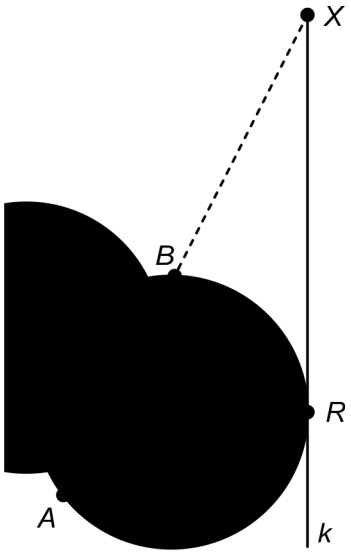
We zochten de plek op de route k van waar uit de persoon het paleis het breedst ziet.

b Ga na dat het raakpunt van de cirkel met middelpunt N en de lijn k het gezochte punt op k is.

109 Een cirkel gaat door de punten A en B en raakt aan de lijn k in het punt R. De lijnen k en AB snijden elkaar in het punt X.

a Bewijs dat de driehoeken ARX en RBX gelijkvormig zijn.

b Laat zien dat uit onderdeel **b** volgt: $|AX| \cdot |BX| = |RX|^2$.

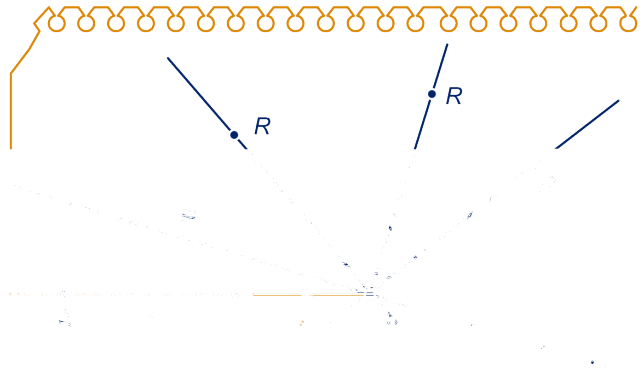


110 We hebben dezelfde figuur als in opgave 109.
Noem de straal van de cirkel r en het middelpunt M.
We gaan op twee manieren bewijzen dat $\sin(\angle ARB) = \frac{|AB|}{2r}$

a Gebruik dat $\angle ARB = \frac{1}{2} \cdot \angle AMB$.

b Verplaats R over de cirkel naar een punt S, zó dat $\angle ABS = 90°$.

111 Gegeven is lijnstuk AB van lengte 5. Op het verlengde van AB aan de kant van B ligt het punt X op afstand 4 van B.
Door X zijn vier lijnen getekend. Op elk van die lijnen is dat punt R aangegeven, waarbij de kijkhoek ARB het grootst is.



Leg uit dat de punten R op één cirkel liggen. Wat is de straal van de cirkel?

Hint 22.

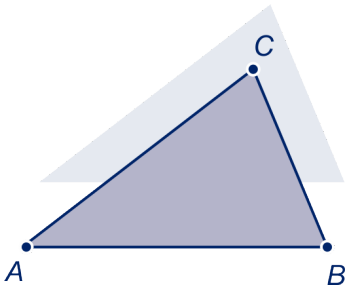
4.7 Iso-hoeklijnen

112

Gegeven is driehoek ABC. Er is een punt binnen de driehoek waar je zijde AB onder $120°$ ziet en zijde BC onder $106°$.

a Onder welke hoek zie je in dat punt zijde AC?

b Construeer dat punt op het werkblad.



113

Gegeven is driehoek ABC. Er is een punt binnen de cirkel waar je de drie zijden even groot ziet.
Bepaal de plaats van dat punt.

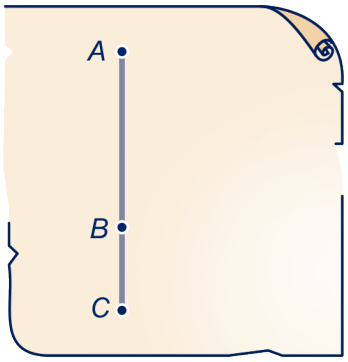
114

Gegeven is driehoek ABC.
Er zijn plekken in het platte vlak waar je alle drie de zijden onder een stompe hoek ziet. Er zijn ook plekken waar je twee zijden onder een stompe hoek ziet, er zijn plekken waar je één zijde onder een stompe hoek en er zijn plekken waar je geen van de zijden onder een stompe hoek ziet.
Teken een driehoek ABC.
Geef elke van de vier gebieden aan met een kleur.

115

Het punt B ligt op lijnstuk AC zo dat $|AB| = 2 \cdot |BC|$. Teken zo'n situatie. Neem voor $|BC|$ bijvoorbeeld 4 cm.

a Zoek de punten waar je de lijnstukken AB en BC beide onder een hoek van $40°$ ziet.
Ook voor $20°$, $60°$ en $80°$.



In onderdeel **a** heb je acht punten getekend die, als je het goed gedaan hebt, (zo ongeveer) op een cirkel liggen.
We gaan bewijzen dat de punten P waarvoor $\angle APB = \angle CPB$ inderdaad op een cirkel liggen.
Teken in een nieuwe figuur de punten A, B en C zoals hierboven en een punt P zodat $\angle APB = \angle CPB$. Teken ook de cirkels door A, B en P en door B, C en P;
noem hun middelpunten achtereenvolgens M en N.

b Waarom geldt: $\angle AMB = \angle CNB$?

c Waarom $AM \parallel BN$?

D is het snijpunt van de lijnen AC en MN.
DriehoekDNB is gelijkvormig met driehoek DMA en $|BN| : |AM| = 1 : 2$.

d Bewijs dat $|DC| = |BC|$.

De lijn MN snijdt de lijn AC dus voor elke P in hetzelfde punt D.

Voor elk punt P is C namelijk het midden van BD.

e Bewijs dat P het spiegelbeeld is van B in de lijn MN.

f Bewijs dat P op de cirkel ligt met D als middelpunt en $|BD|$ als straal

4.8 Computer-practicum

Er bestaan verschillende meetkunde-computerprogramma's. Daarmee kun je nauwkeurige tekeningen maken op het scherm. Vervolgens kun je een punt verplaatsen en zien hoe de getekende figuur mee verandert. Sommige meetkundige eigenschappen blijven dan gelden.
Het programma dat wij gebruiken is GeoGebra, dit is sinds enkele jaren het standaardprogramma. In de Wageningse Methode wordt het programma ook gebruikt in Hoofdstuk 13 paragraaf 6.

Met GeoGebra kun je het volgende tekenen.

- Een punt, een lijn, een cirkel;
- een lijn door een gegeven punt,
- het lijnstuk met gegeven eindpunten,
  de cirkel met gegeven middelpunt en gegeven punt op de omtrek,
- het midden van een gegeven lijnstuk,
- de middelloodlijn van een gegeven lijnstuk,
  de bissectrice van een gegeven hoek,
  een loodlijn door een gegeven punt op een gegeven lijn;
- snijpunten van twee lijnen, van twee cirkels en van een lijn en een cirkel.
- Je kunt ook in een tekening een punt, lijn of cirkel aanwijzen en vastpakken. Het object kun je vervolgens met de muis verplaatsen. Als je bijvoorbeeld een punt op een al getekende lijn hebt gekozen, zal het punt bij verschuiven op die lijn blijven.

In GeoGebra kun je het volgende ook.

- Labels" aan punten, lijnen en cirkels hangen met hun namen zoals "A" en "k",
- verschillende objecten verschillend kleuren.
- lijnstukken en hoeken opmeten.

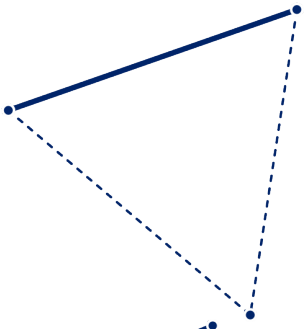
Voorlopig heb je genoeg aan deze basishandelingen. Om te leren hoe dat precies gaat, moet je een (samenvatting van een) handleiding van het betreffende programma raadplegen. Al doende leer je de (on)mogelijkheden van het programma kennen.

De eerste acht opgaven van deze paragraaf zijn bedoeld om met het programma kennis te maken.
Er zijn geen antwoorden bij.

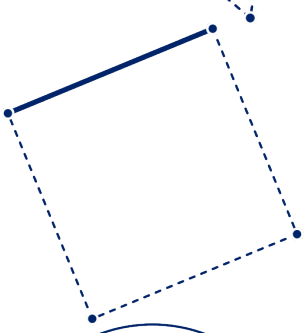
4.8 Computer-practicum

1 Teken een lijnstuk en construeer een gelijkzijdige driehoek met dat lijnstuk als zijde.
Misschien heeft het programma een optie "Regelmatige veelhoek", maar die moet je nu niet gebruiken.

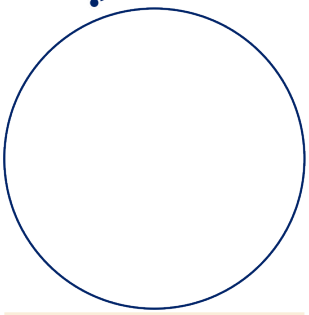
Hint 23.



2 Teken een lijnstuk en construeer een vierkant met dat lijnstuk als zijde.
Je moet hierbij niet de optie "Regelmatige veelhoek" gebruiken.



3 Teken een (niet te kleine) cirkel op het scherm, zonder het middelpunt te tekenen.
Construeer het middelpunt van de cirkel.



4 Teken een driehoek.

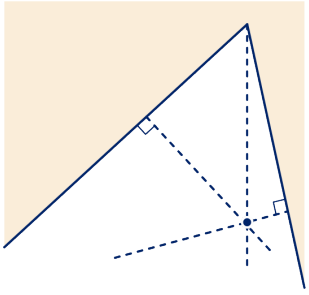
a Construeer daarin zijn drie hoogtelijnen.

Pak een hoekpunt vast en verschuif het over het scherm.

b Blijven de drie hoogtelijnen door één punt gaan?

De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt, het zogenaamde hoogtepunt.

c Waar ligt het hoogtepunt als de driehoek rechthoekig is? En als hij stomphoekig is?



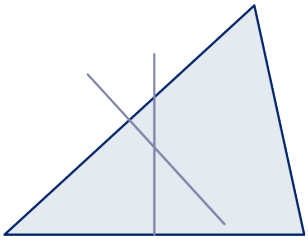
5 Teken een driehoek.

a Construeer daarin twee van de middelloodlijnen van de zijden.
Construeer vervolgens de omgeschreven cirkel van de driehoek.

Pak een hoekpunt vast en verschuif het over het scherm.

b Blijft de omgeschreven cirkel door de hoekpunten gaan?

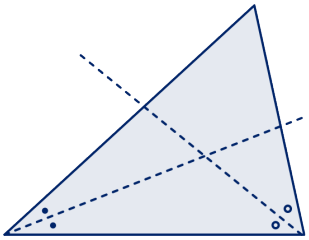
c Waar ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel als de driehoek rechthoekig is?
En als hij stomphoekig is?



6

Teken een driehoek.

a Construeer daarin twee van zijn bissectrices.
Construeer vervolgens de ingeschreven cirkel van de driehoek.



Pak een hoekpunt vast en verschuif het over het scherm.

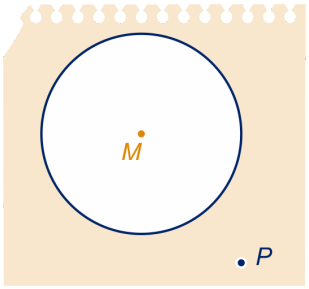
b Blijft de ingeschreven cirkel raken aan de zijden?

7

Teken een punt M en een cirkel met M als middelpunt.
Teken buiten de cirkel nog een punt P.

a Construeer de raaklijnen uit P aan de cirkel.

Hint 24.



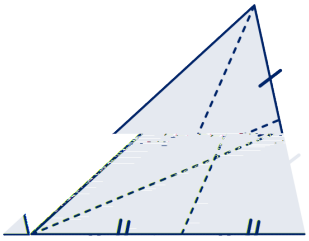
Pak het punt P vast en verschuif het over het scherm.

b Blijven de raaklijnen raken aan de cirkel?
Wat gebeurt er als P heel dicht bij de cirkel komt?

8

Teken een driehoek.

a Construeer daarin twee van zijn zwaartelijnen.



Het snijpunt van de zwaartelijnen is het zwaartepunt van de driehoek.

b Meet de stukken waarin het zwaartepunt een van de zwaartelijnen verdeelt.

Pak een hoekpunt vast en verschuif het over het scherm.

c Blijft de verhouding van de lengten van de stukken zwaartelijn hetzelfde?

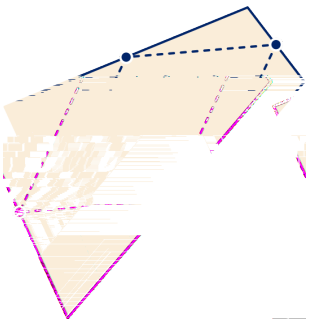
9

Middens van de zijden

Teken een willekeurige vierhoek. Verbind de opvolgende middens van de zijden.

a Wat voor vierhoek krijg je?
Kun je dat ook bewijzen.

Hint 25.



Pak een van de hoekpunten van de vierhoek vast.
Verplaats het zo dat er een ruit ontstaat.

b Wat voor vierhoek met de middens als hoekpunten krijg je nu?
Kun je dat ook bewijzen?

10

Medianen

a Teken een willekeurige vierhoek. Verbind de overstaande middens van de zijden. De twee verbindingslijnstukken heten de medianen van de vierhoek.

Verplaats een of meer hoekpunten zo dat de medianen loodrecht op elkaar staan.

b Bij wat voor vierhoek is dat het geval?
Kun je dat ook bewijzen?

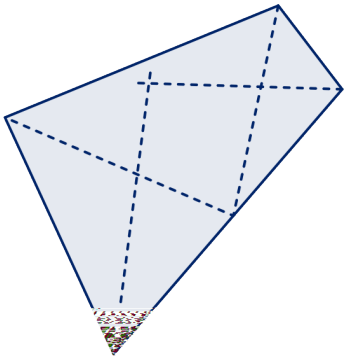
Verplaats een of meer hoekpunten zo dat de medianen even lang zijn.

c Bij wat voor vierhoek is dat het geval?
Kun je dat ook bewijzen?

11

Bissectrices

We bekijken een willekeurige vierhoek V met daarin de bissectrices van de hoeken. We letten op de vierhoek die door de bissectrices wordt ingesloten.



a Teken zo'n vierhoek met zijn bissectrices.

b Verplaats een van de hoekpunten zo dat de vierhoek V een parallellogram wordt.
Wat voor soort vierhoek wordt dan door de bissectrices ingesloten?
Kun je dat ook bewijzen?

c Verplaats een of meer hoekpunten zo dat de vierhoek V een rechthoek wordt.
Wat voor soort vierhoek wordt dan door de bissectrices ingesloten?
Kun je dat ook bewijzen?

d Verplaats een of meer hoekpunten zo dat de vierhoek V een ruit wordt.
Hoe zit het nu met de "vierhoek" die door de bissectrices wordt ingesloten?
Kun je dat ook bewijzen?

e We keren terug naar de willekeurige vierhoek V. De bissectrices sluiten altijd een koordenvierhoek in.
Controleer dat op het scherm.
Kun je dat bewijzen?

Hint 26.

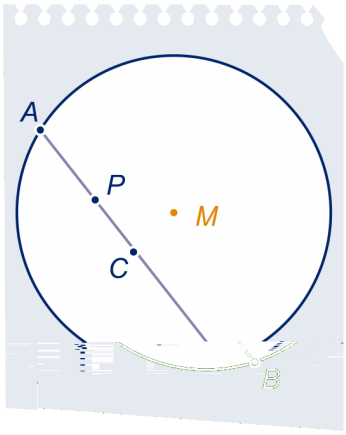
4.8 Computer-practicum

In de volgende drie opgaven moet je een punt over een cirkel bewegen. Kies daarvoor in GeoGebra de optie Punt op object.

12

a Teken een (niet te kleine) cirkel met middelpunt M.
Kies een punt P binnen de cirkel (niet te dicht bij M) en een punt A op de cirkel en bepaal het andere snijpunt B van lijn AP met de cirkel. Geef het midden C van de koorde AB aan.

b Pak punt A vast en beweeg het over de cirkel.
Welke baan beschrijft het punt C dan?
Bewijs dat.



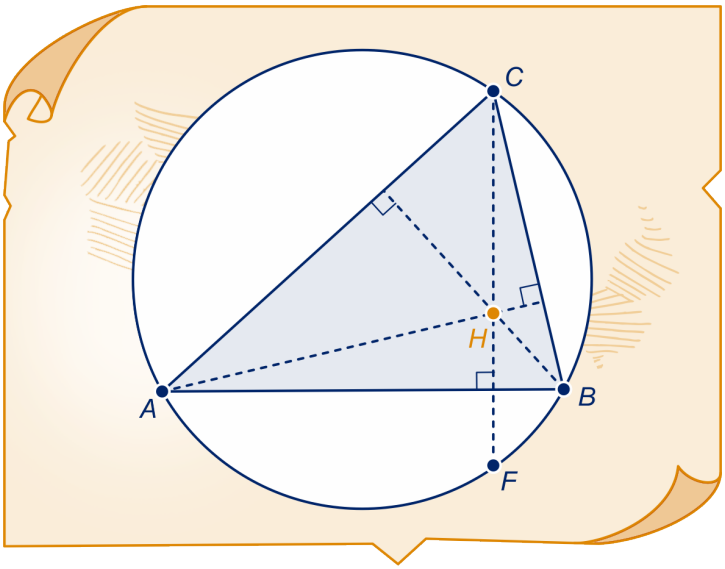
Het computerprogramma GeoGebra heeft ook een optie waarbij de plaatsen die C tijdens het bewegen van A inneemt op het scherm blijven staan: C trekt een spoor. O
ok kun je in GeoGebra het punt A automatisch over de cirkel rond laten draaien.

c Probeer dit uit.

13

De baan van het hoogtepunt

a Teken een cirkel met daarin een ingeschreven driehoek ABC.
Construeer het hoogtepunt H van ABC.



b Pak punt C vast en beweeg het over de cirkel.
Welke baan beschrijft H dan zo te zien?

We gaan je vermoeden uit onderdeel **b** bewijzen.
Noem het snijpunt van lijn CH met de cirkel: CF.

c Bewijs dat $\angle AHF = \angle AFH$.

d Hoe volgt uit onderdeel **c** dat H het spiegelbeeld is van F in de lijn AB?

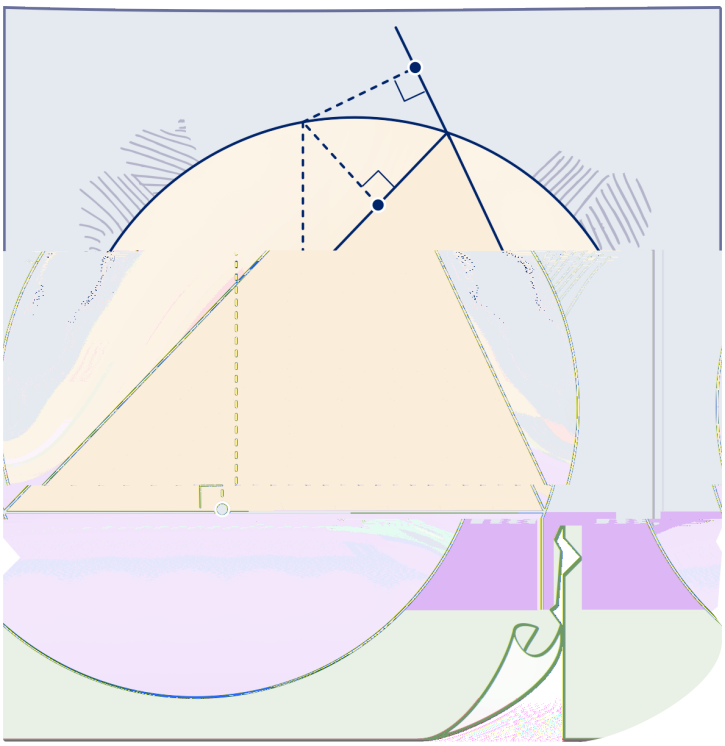
e Over welke cirkelboog beweegt H dus?

Om inzicht te krijgen in een meetkundige situatie, kun je goed een computertekening maken. Dat gaat vrij snel, heel nauwkeurig, en je kunt gemakkelijk experimenteren door bijvoorbeeld een punt te bewegen. Zodoende kun je meetkundestellingen ontdekken. Die moeten dan nog wel bewezen worden! In opgave 14 geven we een voorbeeld.

14

De rechte van Wallace

a Teken een driehoek met zijn omgeschreven cirkel.
Kies een punt op de cirkel en construeer de voetpunten van de loodlijnen uit dat punt op de (verlengden van de) zijden van de driehoek.



b Pak het punt vast en beweeg het over de cirkel.
Wat valt je op aan de ligging van de drie voetpunten?

c Wat gebeurt er als het punt een hoekpunt van de driehoek is?

4.8 Computer-practicum

Je hebt ontdekt dat (waarschijnlijk) de drie voetpunten op een rechte lijn liggen, de zogenaamde **rechte van Wallace**.
"Waarschijnlijk", omdat een bewijs je pas echt zekerheid verschaft. En een bewijs geeft uitleg waarom het zo is zoals het lijkt.

In de paragraaf **Opdrachten** zullen we bewijzen dat de drie voetpunten op één lijn liggen.
In de paragrafen **Extra opgaven** en **Opdrachten** kom je allerlei situaties tegen die je op het computerscherm kunt verkennen. Je kunt natuurlijk ook opgaven uit vorige paragrafen opnieuw bekijken.

Onze uitgangspunten en stellingen in de vlakke meetkunde
We verwijzen in een bewijs met de cursief gedrukte termen naar de uitgangspunten en stellingen.

Hoeken, lijnen en afstanden
De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk (overstaande hoeken).
Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk (F-hoeken, Z-hoeken).
Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig (F-hoeken, Z-hoeken).
Een rechte hoek is $90°$; een gestrekte hoek is $180°$.
De som van de hoeken van een driehoek is $180°$ (hoekensom driehoek).
De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn (afstand punt tot lijn).
Driehoeksongelijkheid Als drie punten A, B en C niet op één lijn liggen, dan geldt: $|AB| + |BC| > |AC|$.

Driehoeken

Gelijkbenige driehoek
- Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk.
- Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegen overliggende hoeken ook gelijk.

Stelling van Pythagoras Als driehoek ABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

Omgekeerde stelling van Pythagoras Als in driehoek ABC geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is hoek C recht.

Cosinusregel In elke driehoek ABC geldt:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$.

Sinusregel In elke driehoek ABC geldt:
$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

Congruente driehoeken

We zeggen dat figuren congruent zijn als de ene figuur zo verplaatst kan worden dat hij de andere precies bedekt. Daarbij mag gespiegeld worden.

Twee driehoeken zijn congruent als ze gelijk hebben:

- een zijde en twee (aanliggende) hoeken, (HZH)
- een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek, (ZHH)
- twee zijden en de ingesloten hoek, (ZHZ)
- alle zijden, (ZZZ)
- twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden. (ZZR)

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze het volgende gelijk hebben.

- twee hoeken, (hh)
- een hoek en de verhouding van de omliggende zijden, (zhz)
- de verhouding van de zijden, (zzz)
- een rechte hoek en de verhouding van twee nietomliggende zijden.

Vierhoeken

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (hoekensom vierhoek).

Equivalente definities en eigenschappen van een **parallellogram**.

- Er zijn twee paren evenwijdige zijden.
- Er zijn twee paren gelijke overstaande zijden.
- Twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig.
- De diagonalen delen elkaar middendoor.

Equivalente definities en eigenschappen van een **ruit**.

- Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
- Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
- Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar lood recht snijden.

Equivalente definities en eigenschappen van een **rechthoek**.

- Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- Het is een parallellogram met een rechte hoek.
- Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

Koordenvierhoeken

Definitie

Een **koorde** is een verbindingslijnstuk van twee punten op een kromme in het bijzonder op een op een cirkel.

Een **koordenveelhoek** is een veelhoek waarvan de zijden koorden zijn van een cirkel. Met andere woorden: een koordenveelhoek heeft een omgeschreven cirkel.

Koordenvierhoekstelling

In een koordenvierhoek is de som van de overstaande hoeken $180°$.

Omkering

Als in een vierhoek de som van de overstaande hoeken $180°$ is, dan is het een koordenvierhoek.

Puntverzamelingen

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B, is de **middelloodlijn** van het lijnstuk AB (middelloodlijn).

De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek, is de **deellijn** (**bissectrice**) van die hoek (deellijn).

De verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben, is de **cirkel** met middelpunt M en straal r (cirkel).

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het **deellijnenpaar** (**bissectrice paar**) van die twee lijnen (deellijnenpaar).

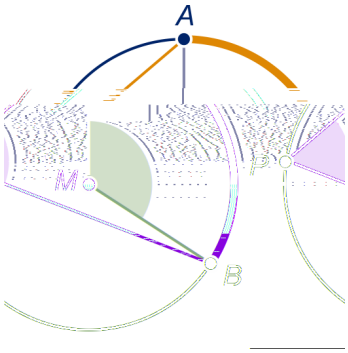
De twee deellijnen van twee elkaar snijdende lijnen snijden elkaar loodrecht in het snijpunt van die twee lijnen (loodrechte stand deellijnenpaar).

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de **middenparallel** van dat lijnenpaar (middenparallel)

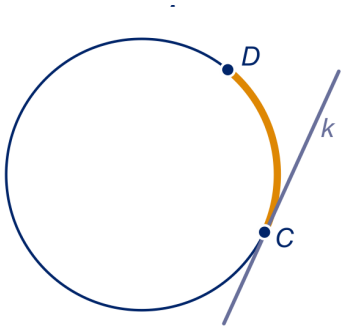
Stelling van de omtrekshoek

A, B en P liggen op de cirkel met middelpunt M, zie figuur 1 hieronder. We zeggen dat hoek APB op boog AB staat.
Met $bg(AB)$ bedoelen we de grootte van hoek AMB. Er geldt: $\angle AMB = 2 \cdot \angle APB$.
Dus: de grootte van een omtrekshoek is de helft van de boog waarop hij staat.

Het limietgeval van de stelling is het volgende.
C en D zijn punten op de cirkel en lijn k raakt de cirkel in C, zie figuur 2 hieronder.
De hoek tussen raaklijn en koorde CD is de helft van de boog waarop de koorde staat.

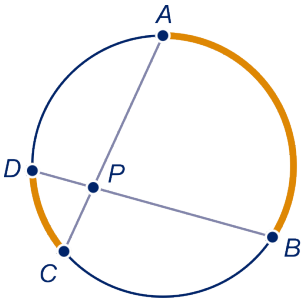


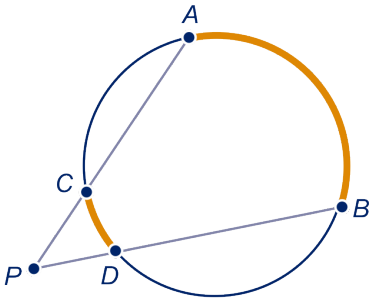
figuur 1



figuur 2

Omgekeerd geldt:
als P buiten de cirkel ligt, dan: $\angle AMB > 2 \cdot \angle APB$.
als P binnen de cirkel ligt, dan: $\angle AMB < 2 \cdot \angle APB$.
Dit zijn speciale gevallen van het volgende.





Als P binnen de cirkel ligt, dan $\angle APB = bg(AB) + bg(CD)$.
Als P buiten de cirkel ligt, dan $\angle APB = bg(AB) - bg(CD)$.

Hierbij zijn C en D snijpunten van de lijnen PA en PB met de cirkel.
Ook de stelling van Thales is een speciaal geval hiervan.

Cirkeleigenschappen

De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor (loodlijn op koorde).

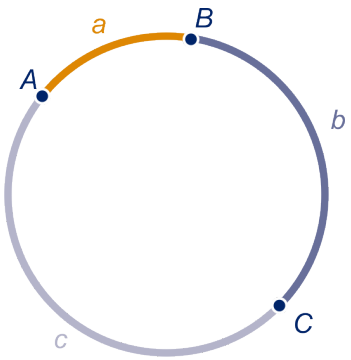
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt (raaklijn).

4.10 Extra opgaven

1

De cirkel verdeeld in drie bogen

De punten A, B en C verdelen een cirkel in drie bogen.
De lengten van de bogen verhouden zich als $a : b : c$; zie figuur.
Neem om te beginnen $a : b : c = 1 : 2 : 3$.



a Hoe groot zijn de hoeken van driehoek ABC?

Neem $a : b : c = 2 : 3 : 4$.

b Hoe groot zijn de hoeken van driehoek ABC?
Teken een cirkel en teken daarop punten A, B en C die hieraan voldoen. Geef een toelichting.

c Wat weet je van a, b en c als driehoek ABC rechthoekig is?

2

De cirkel verdeeld in vier bogen

De punten A, B, C en D verdelen (in deze volgorde) een cirkel in vier bogen. De lengten van de bogen verhouden zich als $a : b : c : d$; zie figuur.
Neem $a : b : c : d = 1 : 2 : 3 : 4$.

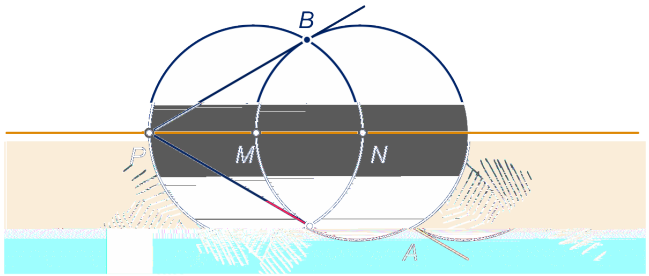
a Hoe groot zijn de hoeken van vierhoek$ABCD$?
Teken een cirkel en teken daarop punten A, B, C en D die hieraan voldoen en licht je antwoord toe.

b Wat weet je van A, B, C en D als $ABCD$ een rechthoek is?

c Wat weet je van A, B, C en D als de diagonalen AC en BD loodrecht op elkaar staan?

3

Gegeven zijn twee punten M en N. We bekijken de cirkel met middelpunt M die door N gaat en de cirkel met middelpunt N die door M gaat.
De cirkels snijden elkaar in de punten A en B. De lijn MN snijdt de cirkel met middelpunt M in het punt P, zie figuur.



a Bewijs dat lijn AP raaklijn is aan de cirkel met middelpunt N.

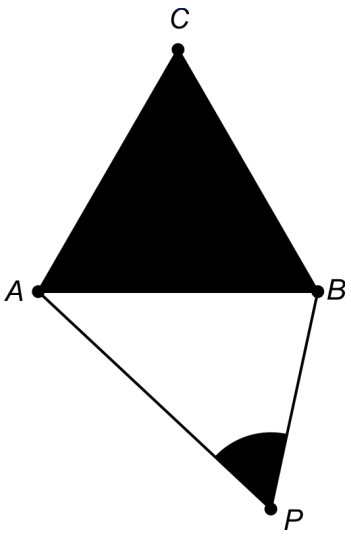
b Bewijs dat $\angle APB = 60°$.

c Bereken $|AP|$ als de straal van de cirkels 1 is.

4

Bissectrice

ABC is een gelijkzijdige driehoek met middelpunt M.
P is een punt buiten de driehoek, zo dat $\angle APB = 60°$. Zie figuur.
Bewijs dat PM bissectrice is van hoek APB.



5

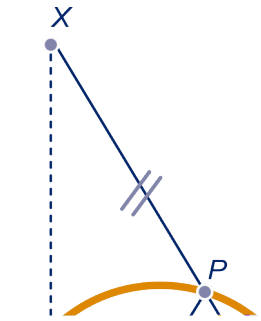
Een cirkelbeweging

Gegeven is een cirkel met koorde AB. Het punt P ligt op de cirkel.
Het punt X ligt op het verlengde van BP zodanig dat $|AP| = |XP|$.
Als P de in de figuur dikgetekende boog AB doorloopt, beschrijft X een baan in het vlak.

a Bewijs dat die baan een deel van een cirkel is.

b Teken de baan, geef een toelichting.

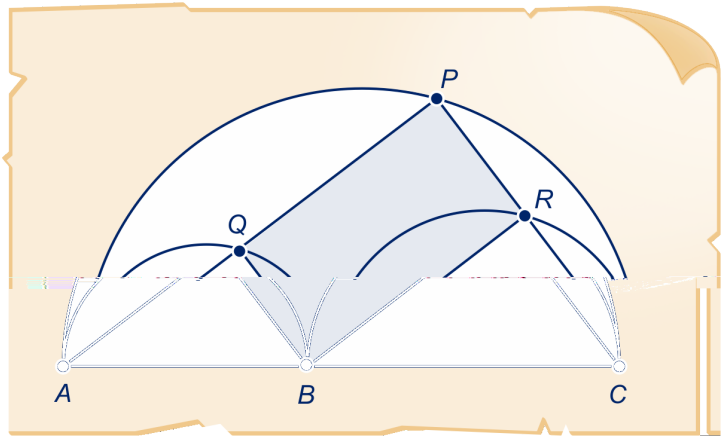
Profi examen wiskunde B 1998, tweede tijdvak



6

Rechthoek

Gegeven zijn drie halve cirkels met middellijnen AB, BC en AC waarbij A, B en C op één lijn liggen. P ligt op de grootste halve cirkel. De lijnen AP en CP snijden de andere twee halve cirkels in respectievelijk Q en R.



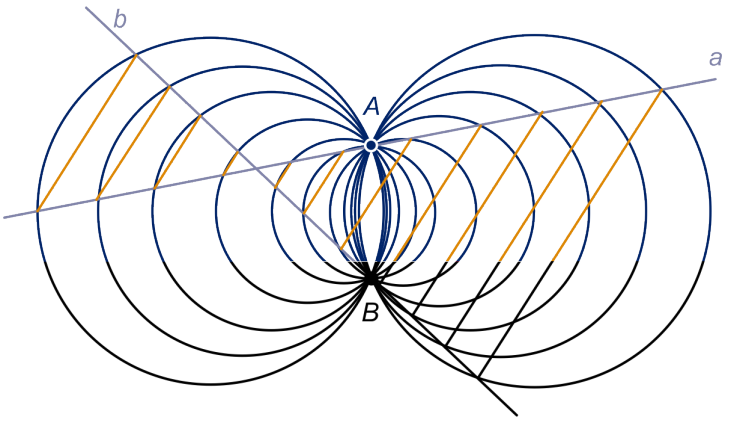
a Bewijs dat $BRPQ$ een rechthoek is.

Veronderstel dat $|AB| = 3$ en $|BC| = 5$.

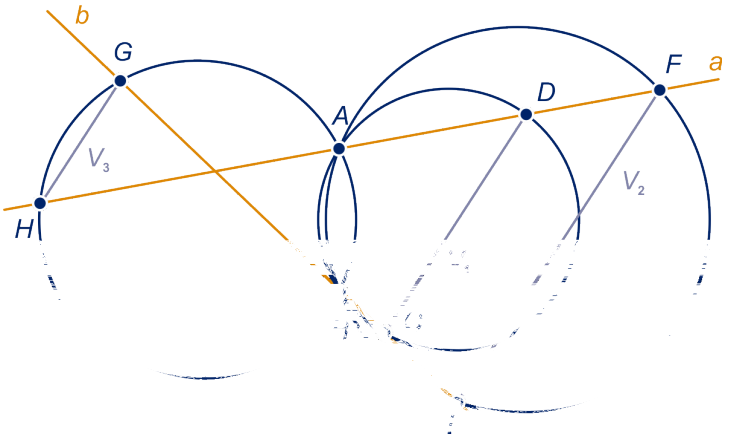
b Waar op de grootste halve cirkel moet je P kiezen opdat Q en R op afstand 4 van elkaar af liggen?

7

Evenwijdig 1



A en B zijn twee punten. Hierboven zijn elf exemplaren getekend van de bundel cirkels die door A en B gaan. a is een lijn door A, b is een lijn door B. Elk van de cirkels wordt door lijn a in nog een ander punt dan A gesneden en door lijn b in nog een ander punt dan B. Deze snijpunten zijn door koorden verbonden.
In onderstaand plaatje zijn alleen de koorden v_1, v_2 en v_3 getekend met de bijbehorende cirkels.

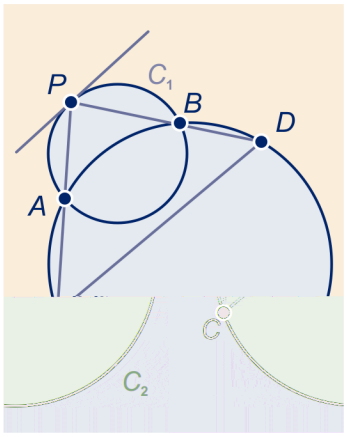


Bewijs dat v_1, v_2 en v_3 evenwijdig zijn.

Profi examen wiskunde B 1999, eerste tijdvak

8

Evenwijdig 2



Twee cirkels c_1 en c_2 snijden elkaar in A en B. P is een punt op c_1. De lijnen PA en PB snijden c_2 ook nog in C en D.

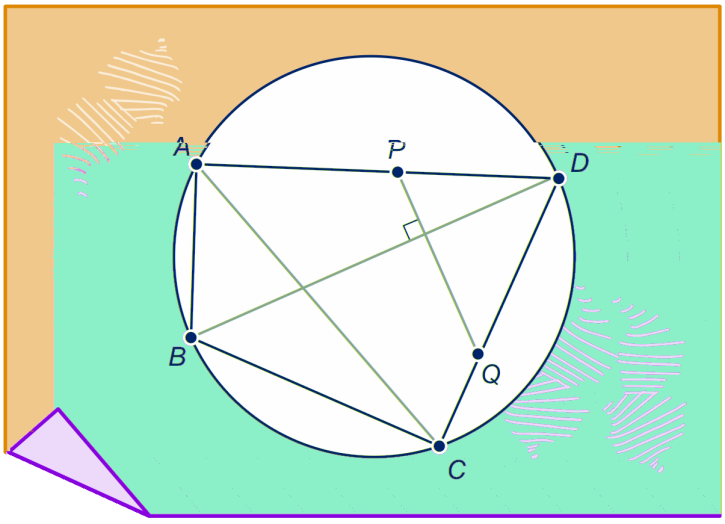
a Bewijs dat de raaklijn in P aan c_1 evenwijdig is aan CD.

b Bewijs dat de lengte van lijnstuk CD onafhankelijk is van de plaats van punt P op c_1.

9

Koordenvierhoek

Gegeven is een cirkel met koordenvierhoek $ABCD$, zo dat BD middellijn is van de cirkel. Punt P ligt op de zijde AD en punt Q op de zijde CD, zo dat PQ loodrecht staat op BD.



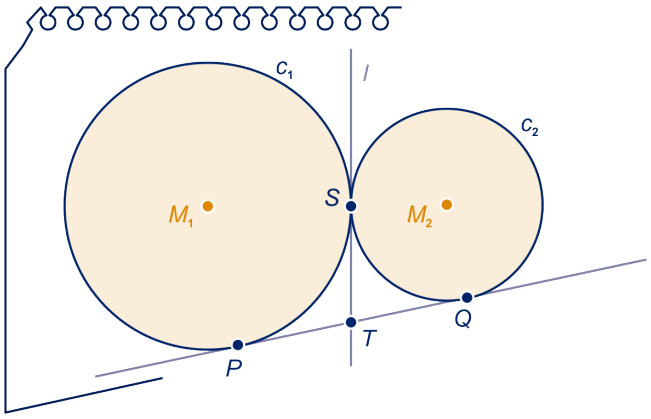
Bewijs dat $PACQ$ een koordenvierhoek is.

Profi examen wiskunde B 2000, eerste tijdvak

10

Op één lijn 1

De cirkels c_1 en c_2 in de figuur raken elkaar in S.

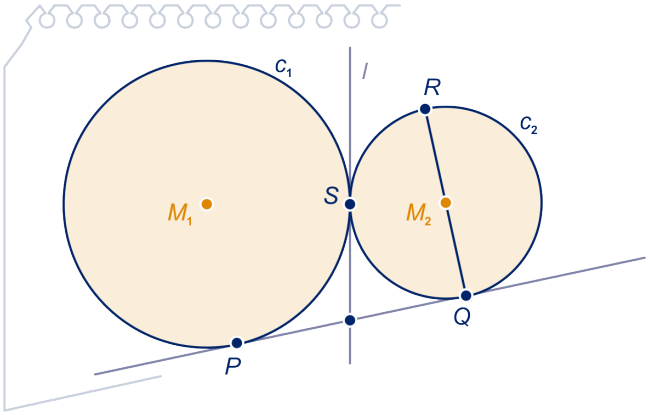


De middelpunten van de cirkels zijn respectievelijk M_1 en M_2. Lijn l raakt c_1 in P en c_2 in Q.

De gemeenschappelijke raaklijn aan c_1 en c_2 in S snijdt lijn l in punt T.

a Bewijs dat de punten P, Q en S op één cirkel met middelpunt T liggen.

Verder is gegeven dat QR een middellijn van c_2 is.



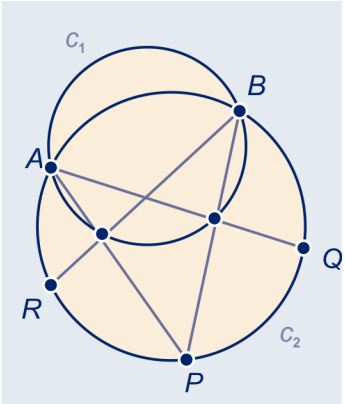
b Bewijs dat P, S en R op één lijn liggen.

Examen wiskunde B12 VWO 2002I

11

Even ver 1

De cirkels c_1 en c_2 snijden elkaar in de punten A en B.
P is een punt op c_2, C en D zijn de snijpunten van c_2 met respectievelijk PA en PB.
Q en R zijn de snijpunten met c_1 van respectievelijk AD en BC.
Bewijs dat de punten Q en R even ver van P af liggen.

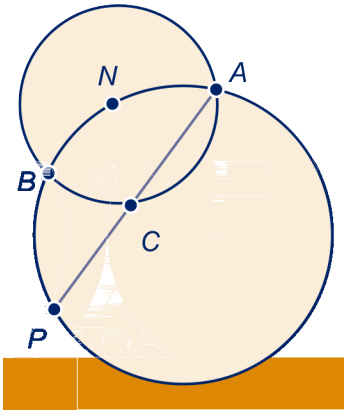


12

Even ver 2

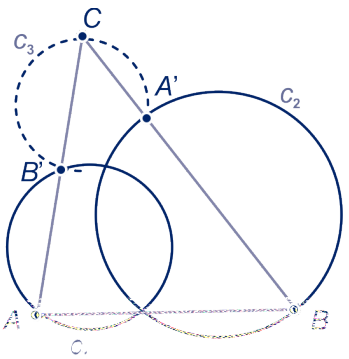
Teken een cirkel. Teken een tweede cirkel met middelpunt N op de eerste cirkel. Noem de snijpunten van de cirkels A en B. Kies op de eerste cirkel nog een punt: P. Bepaal het snijpunt C van AP met de tweede cirkel.
Bewijs dat B en C even ver van P af liggen.

Hint 27.



13

Gegeven is driehoek ABC. De punten A', B' en C' liggen op respectievelijk de zijden BC, AC en AB.
We bekijken drie cirkels:
c_1 door A, B' en C',
c_2 door B, A' en C' en
c_3 door C, A' en B'.
Bewijs dat deze cirkels door één punt gaan.



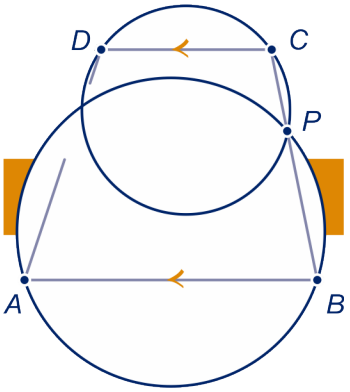
Hint 28.

Profi examen wiskunde B 1997

14

Op één lijn 2

$ABCD$ is een trapezium ($AB \parallel CD$). P is een punt op BC.
De omgeschreven cirkels van de driehoeken ABP en CDP snijden elkaar behalve in P ook nog in punt S.
Bewijs dat S op de lijn AD ligt.

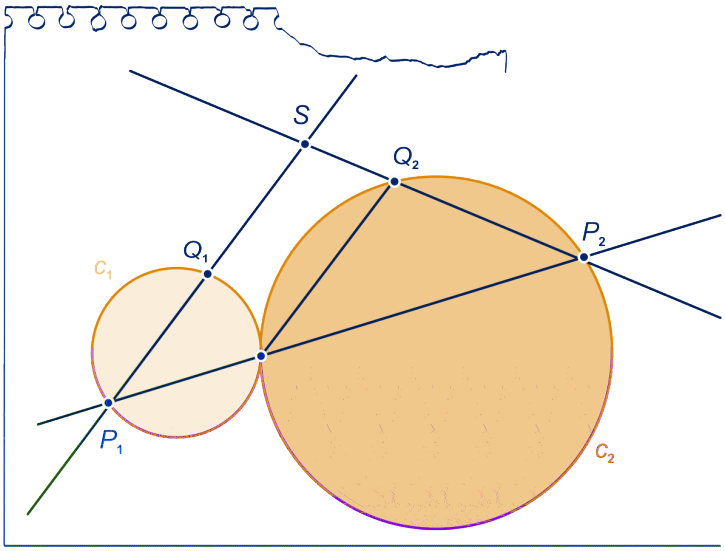


Hint 29.

15

Op één cirkel

Twee cirkels c_1 en c_2 raken elkaar in het punt R; ze hebben dus een gemeenschappelijke raaklijn in R.
Een lijn door R snijdt c_1 in het punt P_1 en c_2 in P_2. Een lijn door P_1 snijdt c_1 in het punt Q_1. Een lijn door P_2 snijdt c_2 in het punt Q_2.
De lijnen P_1Q_1 en P_2Q_2 snijden elkaar in het punt S.

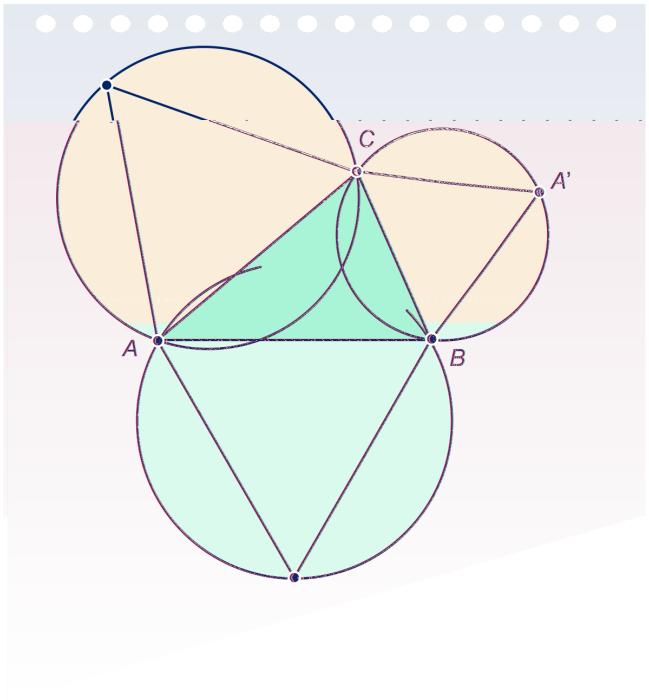


Bewijs dat de punten Q_1, Q_2, S en R op één cirkel liggen.

Profi examen wiskunde B 2000, tweede tijdvak

16

Door één punt



Gegeven is driehoek ABC. Op de zijden van de driehoek worden naar buiten gelijkzijdige driehoeken gezet. We bekijken de omgeschreven cirkels van die drie driehoeken.

a Bewijs dat deze cirkels door één punt gaan.

Hint 30.

Noem de top van de driehoek die op BC staat: A'.

b Bewijs dat A, S en A'' op één lijn liggen.

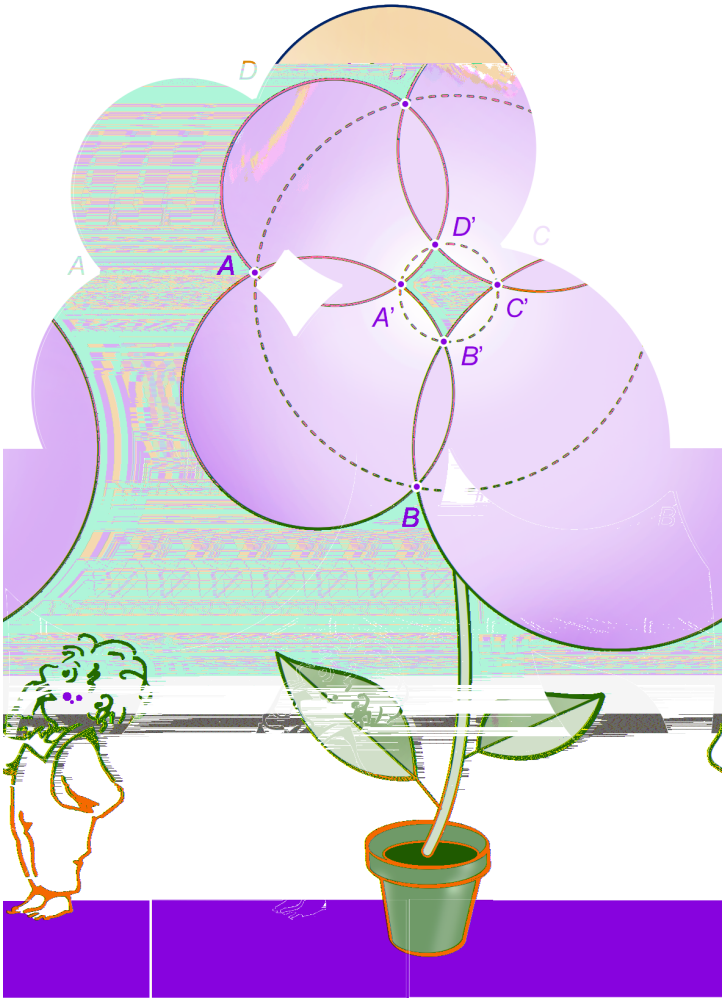
Het is niet noodzakelijk dat de driehoek die op de zijden van ABC gezet worden gelijkzijdig zijn. We zetten willekeurige driehoeken op de zijden met tophoeken α, β en γ (dat zijn de hoeken tegenover respectievelijk BC, AC en AB).

c Wat weet je van α, β en γ als de omgeschreven cirkels van deze driehoeken door één punt gaan?

17

Op één cirkel

Vier cirkels snijden elkaar twee aan twee in twee punten. De "buitenste" snijpunten zijn A, B, C en D,
de "binnenste" snijpunten zijn A', B', C' en D'.



Bewijs: als A, B, C en D op één cirkel liggen, dan liggen A', B', C' en D' ook op één cirkel.

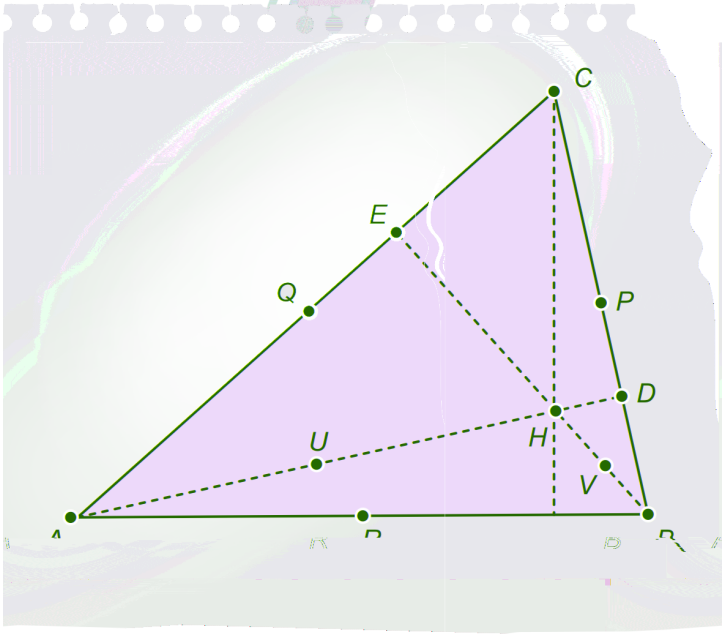
Hint 31.

4.11 Opdrachten

In deze paragraaf stellen we vier "klassiekers" uit de meetkunde aan de orde. Zij lenen zich uitstekend om leerlingen een presentatie in de klas te laten geven.
Er zijn geen antwoorden bij de opdrachten opgenomen.

1

Gegeven is driehoek ABC. H is zijn hoogtepunt.
De voetpunten van de hoogtelijnen zijn: D, E en F.
De middens van de zijden zijn: P, Q en R.
De middens van AH, BH en CH zijn: U, V en W.



Bewijs dat de negen punten D, E, F, P, Q, R, U, V en W op één cirkel liggen.

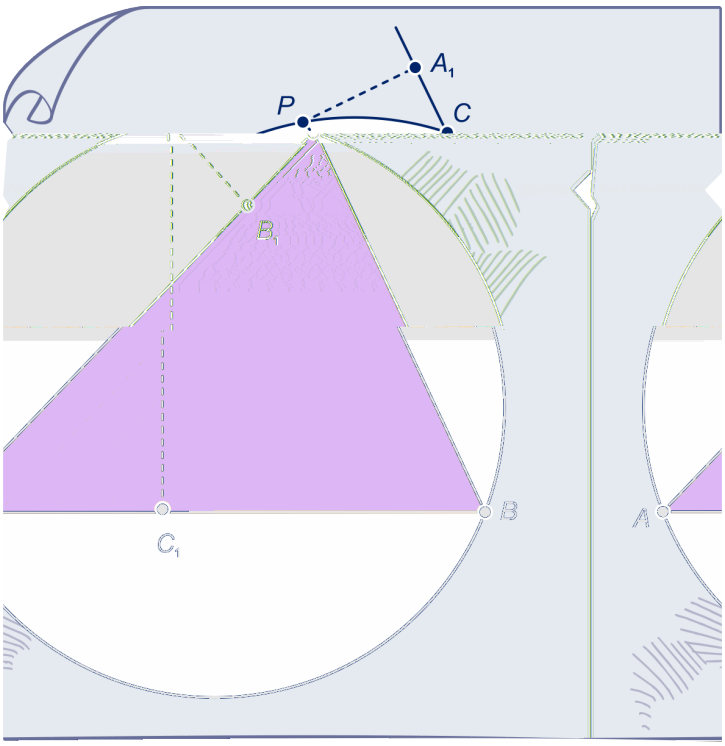
Hint 32.

Karl Wilhelm Feuerbach (1800 - 1834) was professor in Erlangen (Duitsland). Hij is vooral bekend geworden door de negenpuntscirkel. Hij bewees ook dat deze raakt aan zowel de ingeschreven als de drie aangeschreven cirkels van de driehoek.
Feuerbach had een slechte gezondheid en stierf jong.

2

De rechte van Wallace

Gegeven is driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel.
P is een punt van die omgeschreven cirkel. De voetpunten van de loodlijnen uit P op AB, BC en CA noemen we achtereenvolgens C', A' en B'.



Bewijs dat A', B' en C' op één lijn liggen.

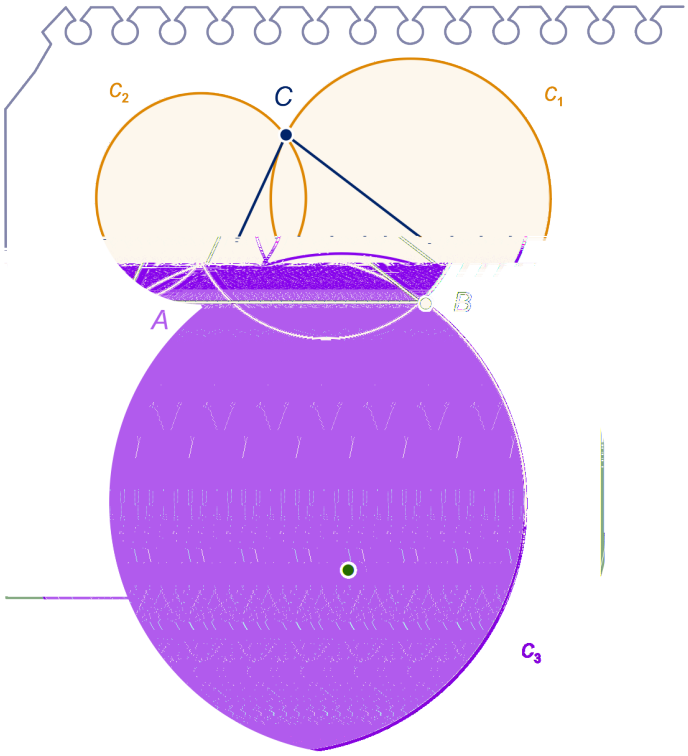
Hint 33.

William Wallace (1768 - 1843) was een Schots autodidact. Hij was professor in Great Marlow en Edinburgh. Van hem is ook de volgende stelling afkomstig.
Gegeven zijn vier lijnen waarvan elk drietal een driehoek insluit. Dan hebben de omgeschreven cirkels van deze vier driehoeken een gemeenschappelijk punt.
Wallace heeft ook de Pantograaf uitgevonden, zie het hoofdstuk Gelijkvormigheid in de tweede klas.

3

De punten van Brocard

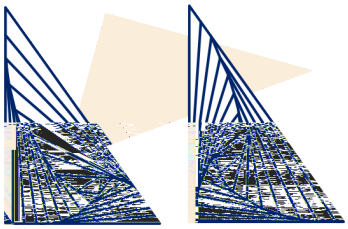
Gegeven is driehoek ABC.
c_1 is de cirkel die in C aan CA raakt en door B gaat,
c_2 is de cirkel die in A aan AB raakt en door C gaat,
c_3 is de cirkel die in B aan BC raakt en door A gaat.



Bewijs dat c_1, c_2 en c_3 door één punt gaan: **een punt van Brocard**.

Er is nòg een punt van Brocard, namelijk het snijpunt van:
de cirkel d_1 die in C aan CB raakt en door A gaat,
de cirkel d_2 die in A aan AC raakt en door B gaat,
de cirkel d_3 die in B aan BA raakt en door C gaat.

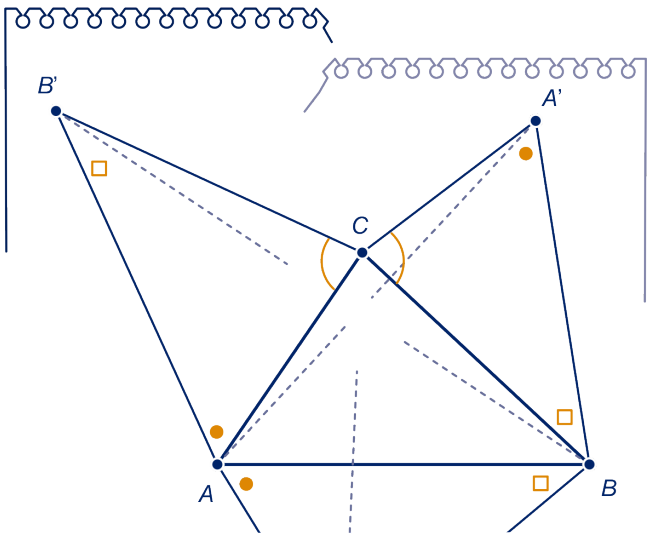
Henri Brocard (1845 - 1922) was een Frans legerofficier. Hij was een amateur wiskundige. Over de naar hem genoemde punten is nog veel meer te zeggen.
Wel heel fraai is het volgende. Drie hondjes A, B en C zitten in de hoekpunten van een driehoek. Op hetzelfde moment beginnen ze met dezelfde snelheid te rennen: A naar B, B naar C en C naar A. Op elk moment is hun looprichting naar de staart van hun voorganger. De hondjes zullen elkaar dan ontmoeten in een van de Brocard-punten van de driehoek. Als de looprichting wordt omgekeerd, eindigen ze in het andere Brocard-punt.



4

De stelling van Napoleon

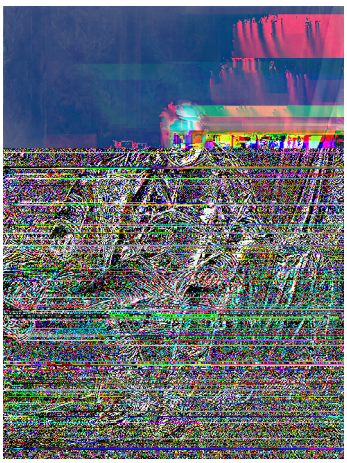
Gegeven is driehoek ABC. Plaats op de zijden drie driehoeken die gelijkvormig zijn, zo dat ze bij A met even grote hoeken liggen, ook bij B en ook bij C. De tophoeken, tegenover A, B en C noemen we achtereenvolgens A', B' en C'.



a Ga nog eens na dat de omgeschreven cirkels van deze gelijkvormige driehoeken door één punt gaan.

b Bewijs dat de lijnen AA', BB' en CC' door datzelfde punt gaan.

Of bovenstaande stelling inderdaad van Napoleon Bonaparte (1769 - 1821) afkomstig is, is onzeker. Het is niet onmogelijk, want Napoleon heeft een degelijke wiskunde opleiding genoten. Sommigen schrijven niet bovenstaande stelling aan Napoleon toe, maar de volgende.
Gegeven is een driehoek. Plaats op de zijden gelijkzijdige driehoeken, naar buiten of naar binnen. De middelpunten daarvan zijn dan de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

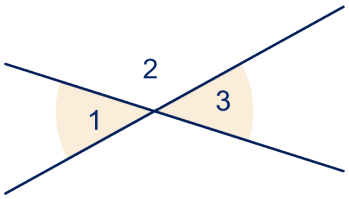


Meer soortgelijke opgaven vind je in 'Denken in cirkels en lijnen' van het Freudenthal Instituut te Utrecht.

4.11 Opdrachten

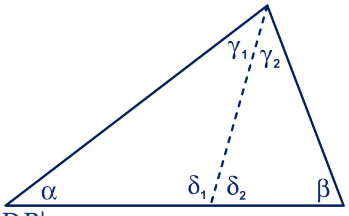
Over hoeken

1 Zie figuur.
De hoeken 1 en 2 zijn samen $180°$ evenals de hoeken 2 en 3.
Dus zijn de hoeken 1 en 3 even groot.



2 Zie figuur.

$\alpha + \gamma_1 + \delta_1 = s$;
$\beta + \gamma_2 + \delta_2 = s$;
Dus: $\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \beta + \delta_1 + \delta_2 = 2s$.
Omdat $\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \beta = s$ en $\delta_1 + \delta_2 = 180$ volgt dat $s = 180$.



3 **a** $|AP| = |PC|$, want P is het midden van lijnstuk AC.
$|PC| = |PD|$, want D is het spiegelbeeld van C. Dus $|AP| = |DP|$.
Op dezelfde manier vind je $|BQ| = |QD|$.
b $\angle PDQ = \gamma$, want D is het spiegelbeeld van C,
$\angle PDA = \alpha$, want $|AP| = |DP|$,
$\angle QDB = \beta$, want $|BQ| = |DQ|$.
Dus $\alpha + \beta + \gamma = \angle PDA + \angle QDB + \angle PDQ = 180°$.

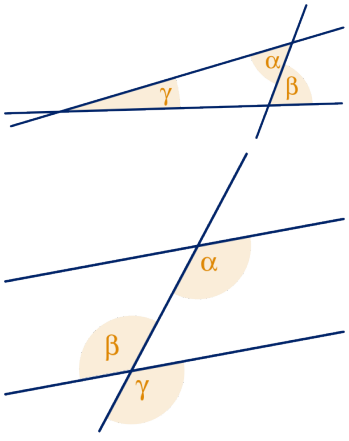
4 Noem de hoekpunten A, B en C.
Omdat $|AB| = |BC|$, is $\alpha = \beta$.
Net zo is $\gamma = \beta$.
Dus $\alpha = \beta = \gamma$.
Omdat de hoekensom in een driehoek $180°$ is, geldt: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

5 De buitenhoek bij $B = 180° - \beta$ (gestrekte hoek) en $\alpha + \gamma = 180° - \beta$ (hoekensom driehoek).
Dus: de buitenhoek bij $B = \alpha + \gamma$.

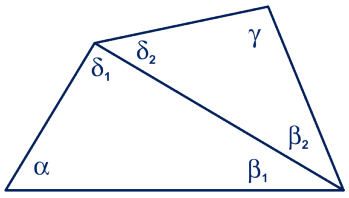
6 Zie figuur.
Als de lijnen niet evenwijdig zouden zijn, dan zouden ze elkaar snijden. Dan zou $\gamma + \alpha = \beta$, dus $\alpha \neq \beta$.

7 Zie figuur.
Uit opgave 1 volgt: $\beta = \gamma$;
Uit het gegeven volgt dan: $\alpha = \beta$.
Uit opgave 6 volgt dan dat de twee lijnen evenwijdig zijn.

8 Zie figuur.



Verdeel de vierhoek in twee driehoeken.
Er geldt: $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180°$ en
$\gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180°$, dus:
$\alpha + (\beta_1 + \beta_2) + \gamma + (\delta_1 + \delta_2) = 360°$.



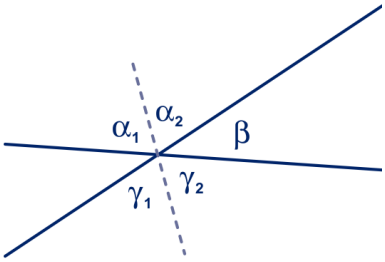
9

a Zie figuur.
Je kunt de veelhoek vanuit een hoekpunt verdelen is $n - 2$ driehoeken. (In de figuur is dat gedaan voor een zeshoek). Dus de hoekensom is $(n - 2) \cdot 180$ graden.

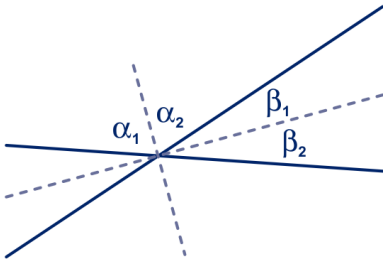
b $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$

10

a De twee stompe hoeken noemen we α en de twee scherpe β.
Zie figuur 1, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ en $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ Er geldt: $\alpha_1 = \gamma_2$ (overstaande hoeken).
Dus $\alpha_2 + \beta + \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 180°$ (dat laatste vanwege gestrekte hoek).



figuur 1



figuur 2

b Zie figuur 2. $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha$ en $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}\beta$.
Dus: $\alpha_2 + \beta_1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90°$.

11

Driehoek MAB is gelijkbenig, dus de hoeken MAB en MBA zijn even groot.
Dus $\angle MAB = \frac{1}{2}(180° - \angle AMB) < 90°$.

12

a Stel dat de lijn geen raaklijn is. Dan heeft de lijn nog een tweede punt met de cirkel gemeen, zeg punt B. Maar dan staat MA niet loodrecht op de lijn, volgens opgave 11. Dit is in tegenspraak met het gegeven.
Dus is de lijn wel een raaklijn.

b Stel dat MA niet loodrecht staat op de lijn. De loodrechte projectie van M op de lijn is dan een ander punt dan A; noem dat B.
Spiegel punt A in de lijn MB. Het beeldpunt C ligt op de raaklijn en $|MA| = |MC|$. Dus C ligt ook op de cirkel. Dus raaklijn gaat door twee punten van de cirkel en dat kan niet.
Dus staat MA wel loodrecht op de lijn.

13

De drie driehoeken hebben alle een rechte hoek.
De drie driehoeken hebben alle een hoek α. Van de driehoeken $ABDC$ en ABC is dat duidelijk.

In driehoek BCD geldt: $\angle BCD = 90° - \angle ACD = 90 - (90° - \alpha) = \alpha$.
De overgebleven hoeken van de drie driehoeken zijn dan automatisch ook gelijk. De driehoeken hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.

14 $\angle ASB = \angle CSD$ en $\angle ABS = \angle CDS$. (allebei 90°) (en dus automatisch ook $\angle BAS = \angle DCS$).
De driehoeken hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.

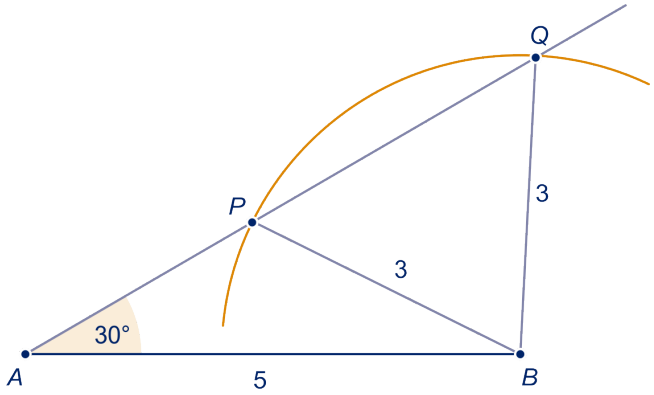
15 De twee driehoeken hebben beide een rechte hoek en de hoeken ASB en CSD zijn even groot.

16 Nee, bijvoorbeeld het vierkant met zijden 1 is niet gelijkvormig met de rechthoek met zijden 1 en 2. Beide hebben wel vier rechte hoeken.

Door één punt

17 Twee cirkels met dezelfde straal, twee lijnstukken van dezelfde lengte, twee rechte hoeken.

18
a ja, ja,ja,ja, nee, nee
b Als twee hoeken hetzelfde zijn, dan ook de derde, want de hoekensom in een driehoek is 180°.
c Als twee hoeken hetzelfde zijn, dan ook de derde.
d Zie figuur.



Driehoek ABP en driehoek ABQ voldoen beide.
e In het vorige onderdeel liggen de punten P en Q komen dan symmetrisch ten opzichte van hun midden$A$.
In het geval ZZR vallen P, Q en A samen.
Congrueentie volgt in dit geval ook uit de stelling van Pythagoras, want de derde zijde moeten de driehoeken volgens deze stelling ook gelijk hebben.

19 Het snijpunt van de middelloodlijn met lijnstuk AB noemen we D. Neem aan dat P een punt op de middelloodlijn is. Dan zijn de driehoeken ADP en BDP congruent (ZZR), dus $|AP| = |BP|$.

î ì

î í

î î

î ï

î ð

î ñ

Index

b
buitenbissectrice van een hoek 13
buitenhoek van een driehoek 5

c
congruent 10

d
driehoeksongelijkheid 11

e
evenwijdige lijnen 6

g
gelijkbenig trapezium 28
gelijkzijdige driehoek 5

h
hoek staat op boog 31
hoogtelijn van een driehoek 13

i
ingeschreven cirkel 13
iso-60 graden-hoeklijn 41

k
kijkhoek 41
koorde 37, 55
koordenveelhoek 37, 55

l
limietgeval 34

m
middelloodlijn 11
middenparallel van een driehoek 20

o
omgeschreven cirkel 12

r
raaklijn aan een cirkel 7
rechthoek 19
ruit 19

t
trapezium 28

z
zwaartelijn van een driehoek 14