vwo wiskunde d

Inleiding complexe getallen

de Wageningse Methode

Copyright © 2018 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN xxx
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit hoofdstuk geeft een inleiding in de complexe getallen.
Het behoort tot de stof van het vak 456 vwo wiskunde d.
Complexe getallen kent vele toepassingen. Wij laten zien hoe je het in de vlakke meetkunde kunt gebruiken.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

Deze versie is van 6 februari 2018.

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

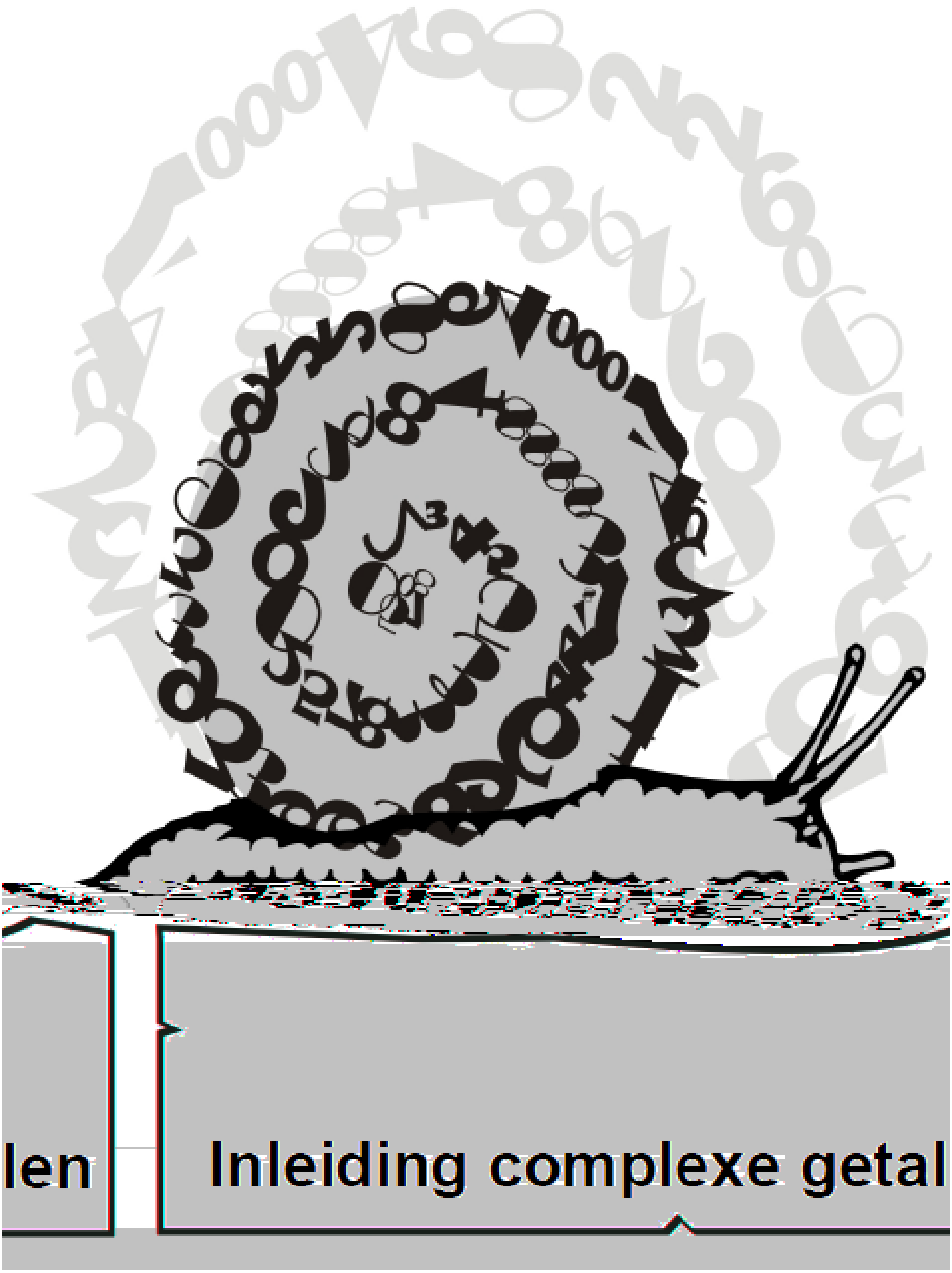
Echt, moet kunnen
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.

Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

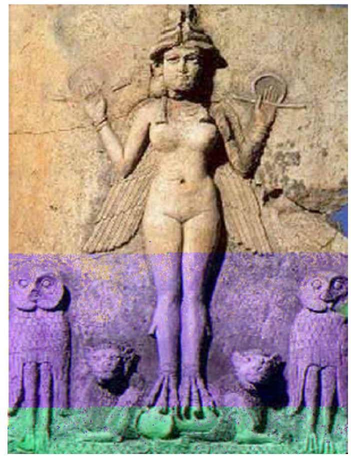
Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.


len
Inleiding complexe getal

Een kwadratische vergelijking is van de vorm:
$ax^2 + bx + c = 0$, waarbij $a \neq 0$.
De Babyloniërs (2000 voor Chr.) hielden zich al bezig met kwadratische vergelijkingen en waren in staat om deze op te lossen.
In de derde klas heb je de zogenaamde wortelformule gehad om een kwadratische vergelijkingen op te lossen. Als je de getallen a, b en c kent, geeft die formule je onmiddellijk de oplossingen:
$x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Je moet natuurlijk wel de wortel van het getal $b^2 - 4ac$ kunnen trekken, dus moet $4ac < b^2$, anders zijn er geen oplossingen.



De Babylonische godin Ishtar

1 Wat kun je zeggen als $b^2 - 4ac = 0$?

Tot nu toe reken je vaak met negatieve getallen, breuken of wortels; het zijn vertrouwde getallen geworden.
Als kleuter begin je te tellen (1, 2, 3,...). Naarmate je ouder (en wijzer) wordt, wordt het soort getallen dat je kent en waarmee je kunt werken steeds groter. De kennis van getallen die jij in enkele jaren opdoet, heeft de mensheid in eeuwen opgebouwd.
Alleen al de manier waarop getallen genoteerd worden, is belangrijk. Egyptenaren gebruikten voor zover wij nu weten bijvoorbeeld alleen stam-breuken (breuken met teller 1, zie hoofdstuk 6 van brugklasdeel 1a van de Wageningse Methode).
Pas Simon Stevin (1548-1620), stelde voor om breuken decimaal te schrijven, in zijn werk De Thiende).

Standbeeld in Brugge
Simon Stevin 1548-1620

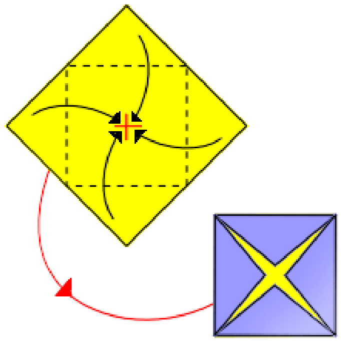
De verzameling getallen waarmee je hebt leren werken, is in de loop der jaren groter geworden:
$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$
Hierbij staat
- $\mathbb{N}$ voor de verzameling **natuurlijke** getallen:
$0, 1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Z}$ voor de verzameling **gehele** getallen:
$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Q}$ voor de verzameling **rationale** getallen:
alle gehele getallen met de positieve en negatieve breuken.
- $\mathbb{R}$ voor de verzameling **reële** getallen:
alle getallen, inclusief wortels, π, e, $^2\log(3)$ en nog veel meer.

De behoefte aan 'nieuwe' getallen diende zich steeds 'vanzelf' aan.
Een interessante vraag is of er buiten $\mathbb{Q}$ nog meer getallen bestaan: als je de getallen uit $\mathbb{Q}$ op de getallenlijn zet, lijkt die al behoorlijk vol.
Daarover gaat de volgende opgave.

2

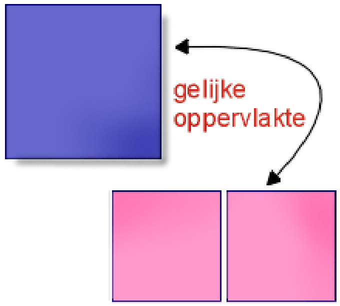
Van een vierkant wordt een kleiner vierkant gevouwen, zie figuur 1. Neem aan dat het kleine vierkant zijde 1 heeft. De zijden van het grote vierkant noemen we x.

a Wat is x^2?



figuur 1

In het volgende laten we zien dat x geen breuk is.
Neem eens aan dat x wel een breuk is, dus dat er twee positieve gehele getallen p en q zijn zó, dat $x = \frac{p}{q}$.

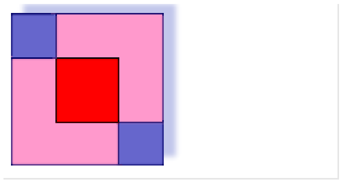


figuur 2

Hiernaast zijn drie vierkanten getekend, het een heeft zijden p en de twee andere zijden q.
Dan hebben de twee kleine vierkanten samen dezelfde oppervlakte als het grote vierkant.

b Waarom?

Neem aan: in figuur 2 is het kleinste vierkant met gehele zijden getekend met de eigenschap:
zijn oppervlakte is gelijk is aan de oppervlakte twee (even grote) kleinere vierkanten met gehele zijden.



figuur 3

In figuur 3 leggen we de kleine vierkanten op het grote, het ene in de hoek rechtsboven, het ander in de hoek linksonder. De overlap van de twee kleine vierkanten is anders gekleurd.
Op de diagonaal zie je drie vierkanten.

c Druk de zijden van de drie vierkanten in p en q uit.

Dus de zijden van de drie vierkanten uit het vorige onderdeel hebben gehele zijden.

d Toon aan dat de oppervlakte van de twee kleinste vierkanten samen dezelfde oppervlakte hebben als het grote vierkant.

In figuur 3 staat nu een kleiner vierkant met de eigenschap dat zijn oppervlakte is gelijk is aan de oppervlakte twee (even grote) kleinere vierkanten met gehele zijden en dat is een tegenspraak die voort komt uit de aanname dat x een breuk is. Het getal x noemen we $\sqrt{2}$, zoals bekend.

$\sqrt{2}$ is niet rationaal.

Voorbeeld
Een bacteriekolonie verdubbelt elk uur. In hoeveel tijd wordt deze kolonie 3 keer zo groot? Als je deze tijdsduur x uur noemt, dan is x oplossing van de vergelijking: $2^x = 3$.
Deze vergelijking heeft geen oplossing in $\mathbb{Q}$, dat wil zeggen: er is geen rationaal getal x te vinden, zó dat $2^x = 3$.
De oplossing in $\mathbb{R}$ is: ${}^2\log(3)$.

Dat${}^2\log(3)$. niet rationaal is, is niet zo eenvoudig aan te tonen.

3 Neem aan p en q zijn twee getallen met $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, dan $\frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$.

a Hoe volgt dat uit opgave 2?
b Laat algebaïsch zien dat $\frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$ als $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

4 **a** Geef een vergelijking die geen oplossing in $\mathbb{N}$ heeft, maar wel in $\mathbb{Z}$.
b Geef een vergelijking die geen oplossing in $\mathbb{Z}$ heeft, maar wel in $\mathbb{Q}$.

Er zijn kwadratische vergelijkingen die oplossingen in $\mathbb{Q}$ hebben, maar niet in $\mathbb{Z}$.
c Geef een voorbeeld van zo'n vergelijking.
d Zijn er rationale getallen x die oplossing zijn van de vergelijking $x^2 - 2x - 2 = 0$. En reële getallen x?
e Zijn er rationale>getallen x die oplossing zijn van de vergelijking $x^2 - 2x + 2 = 0$? En reële getallen x?

Uit wikipedia:
Een derdegraadsvergelijking is een vergelijking die herleid kan worden tot de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, waarin a, b, c en d, constanten zijn en $a \neq 0$.
Het oplossen van vergelijkingen van dit type bleek wezenlijk moeilijker te zijn dan het oplossen van kwadratische vergelijkingen, waarvoor al in de oudheid een algemene oplossing gevonden is (al werd toen alleen naar positieve oplossingen gezocht).
De Italiaan Niccolo Fontana Tartaglia (de stotteraar) vond als eerste een formule om derdegraadsvergelijkingen op te lossen.

Niccolo Fontana Tartaglia
1499?-1557

5

a Waarom zou men in de oudheid alleen naar positieve oplossingen gezocht hebben?

b Waarom wordt in wikipedia geeist dat $a \neq 0$ in de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?

Elke derdegraadsvergelijking is te reduceren (terug te voeren) tot een vergelijking van de vorm:
$x^3 + ux^2 + vx + w = 0$, met u, v en w constanten.

c Hoe?

Bekijk de vergelijking $x^3 - 12x^2 - 4x + 48 = 0$.
We vervangen in deze vergelijking x door $y + 4$.
Dan krijg je de vergelijking: $y^3 = 52y + 96$.

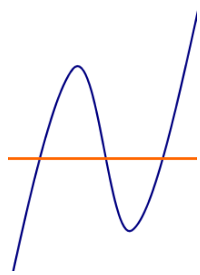
d Reken dat na.

Hint 1.

De oplossingen van de vergelijking $y^3 - 52y - 96 = 0$ zijn:
$y =$ -2, $y =$ -6 en $y = 8$.

e Controleer dat -2, -6 en 8 oplossingen zijn.

De grafiek van de functie $y \rightarrow y^3 - 52y - 96$ gaat van "linksonder" tot "rechtsboven", snijdt de horizontale as dus hooguit drie keer.
De vergelijking $y^3 - 52y - 96 = 0$ heeft dus niet nog meer oplossingen.



f Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^3 - 12x^2 - 4x + 48 = 0$?

Voor alle a en b geldt: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

In de vorige opgave hebben we door een substitutie van de vorm $x = y + \ldots$ een vergelijking van de vorm $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ omgezet in een vergelijking van de vorm: $y^3 + uy + v = 0$.

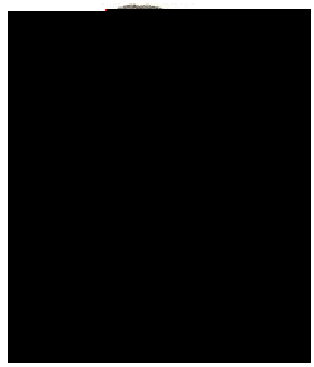
6 Door een substitutie van de vorm $x = y + \ldots$ kun je de vergelijking $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$ ook omzetten in een vergelijking van de vorm: $y^3 - uy - v = 0$, voor zekere u en v.

a Welke substitutie $x = y + \ldots$ en wat zijn dan de getallen u en v?

b Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$?

Cardano heeft een formule opgeschreven voor een oplossing van een derdegraadsvergelijking van de vorm: $x^3 = px + q$.

Die formule is: $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$.



Cardano 1501-1576

In de volgende opgaven bekijken we de formule nader.

7 Gegeven de vergelijking $x^3 = 52x + 96$.

a Waarom geeft de formule van Cardano geen oplossing?

f is de functie $x \to x^3 - 52x - 96$. Er geldt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b Leg uit dat hieruit volgt dat $f(x)$ een nulpunt heeft.

Bekijk de functie $g : x \to -2x^3 + 100x^2 + 1000$.

c Waarom heeft de functie g minstens één nulpunt?

Elke derdegraads vergelijking heeft minstens één oplossing.

In het volgende hebben we een rekenregel voor derdemachts-wortels nodig.

Voor positieve getallen a en b geldt:
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$

Dat deze regel juist is kun je als volgt inzien.
$\left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = a \cdot b$ en $\left(\sqrt[3]{a \cdot b}\right)^3 = a \cdot b$, dus $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ en $\sqrt[3]{a \cdot b}$ hebben dezelfde derdemacht, dus ze zijn gelijk (omdat de functie $x \to x^3$ stijgend is).

8 Gegeven is de functie $f : x \to x^3 - 12x - 20$.

a Bereken de extreme waarden van $f(x)$ exact.

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 12x + 20$?

De formule van Cardano levert de oplossing $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}$.

c Reken dat na.

d Controleer door in te vullen dat $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}$ aan de vergelijking $x^3 = 12x + 20$ voldoet.

e Voor welke waarden van a heeft de vergelijking $x^3 = 12x+a$ twee oplossingen en voor welke waarden van a drie?

9 Gegeven is de vergelijking $x^3 = 9x + 28$.

a Bereken een oplossing met de formule van Cardano.

b Heeft de vergelijking nog andere oplossingen?

In sommige gevallen levert de formule van Cardano niets op, in andere gevallen wel, maar dan vind je misschien niet alle oplossingen.
Om met de formule van Cardano oplossingen van een derdegraadsvergelijking te vinden, moet je wortels van negatieve getallen trekken en accepteren dat de vergelijking $x^3 = 1$ meer dan één oplossing heeft.

Rafaël Bombelli (1526-1572) kwam op het idee met wortels uit negatieve getallen te rekenen in zijn boek Algebra.

In opgave 4 hebben we de volgende vergelijking bekeken: $x^2 - 2x + 2 = 0$. Als we Bombelli volgen vind je:

$x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

Dat $1 + \sqrt{-1}$ oplossing is controleer je, rekenend als Bombelli, zó:

$$\left(1+\sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{-1}\right) + 2 =$$
$$1 + 2\sqrt{-1} + \left(\sqrt{-1}\right)^2 - 2 - 2\sqrt{-1} + 2 =$$
$$1 + -1 = 0.$$

Bombelli behandelde $\sqrt{-1}$ net als alle andere getallen.

Bombelli 1526-1572

L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Aritmetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giovanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

titelpagina van het boek
Algebra van Bombelli

10

a Controleer, rekenend als Bombelli, dat $1 - \sqrt{-1}$ oplossing van de vergelijking $x^2 - 2x + 2 = 0$ is.

b Laat, rekenend als Bombelli, zien dat $\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}} = 2$.

Bekijk de vergelijking $x^3 = 6x - 2$.

c Geef de oplossing die je met de formule van Cardano krijgt.

d Controleer, rekenend als Bombelli, dat je antwoord uit vraag c aan de vergelijking $x^3 = 6x - 2$ voldoet.

We introduceren het getal i met de eigenschap $i^2 = -1$. Als je hiermee wilt gaan rekenen, heb je ook $2i$ nodig, en $1 + 2i$, enzovoort. We werken dus met getallen van de vorm $a + bi$, waarbij a en b gewone reële getallen zijn. De reële getallen maken ook deel uit van de getallen van de vorm $a + bi$; je krijgt ze door $b = 0$ te nemen. De manier waarop we getallen van de vorm $a + bi$ optellen en vermenigvuldigen, moet zó gaan dat rekenregels zoals de commutatieve, distributieve en associatieve wet blijven gelden.

11

Als $x = 2 + 3i$ en $y = 1 - 4i$, wat zou dan $x + y$ en $x \cdot y$ volgens jou moeten zijn?

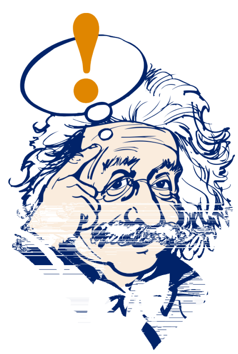
We spreken de volgende **optelling** en **vermenigvuldiging** af voor de getallen $x = a + bi$ en $y = c + di$:

$x + y = (a + c) + (b + d)\,i$

$x \cdot y = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$.

De verzameling getallen $a + bi$ met a en b reëel met de optelling en de vermenigvuldiging zoals hierboven, noemen we de verzameling van **complexe getallen**, die we met $\mathbb{C}$ noteren.

In $\mathbb{C}$ gedraagt de optelling vermenigvuldiging zich net zo als in $\mathbb{R}$.



Zo geldt bijvoorbeeld de **distributieve wet**:
$z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$.

Dat deze rekenregel geldt, zie je door uitschrijven. Voor complexe variabelen gebruiken we vaak de letters z en w, enzovoort, in plaats van x en y enzovoort, die we meestal voor reële variabelen reserveren.
In het bijzonder gelden de zogenaamde merkwaardige producten voor complexe getallen.

merkwaardige producten
$(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$
$(z - w)^2 = z^2 - 2zw + w^2$
$(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$

Merkwaardig moet hier in een oude betekenis gelezen worden: waard om te merken = onthouden. Dat bijvoorbeeld $(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$ volgt uit de distributieve wet als volgt:
$(z + w)^2 = (z + w)(z + w) = (z + w)\,z + (z + w)\,w = z^2 + wz + zw + w^2 = z^2 + 2zw + w^2$.

12

a Ga na of je antwoorden van opgave 8 kloppen met de optelling en vermenigvuldiging zoals hierboven gedefinieerd is.

Bereken (dat wil zeggen: schrijf in de vorm $\ldots + \ldots \cdot i$):

b

$(2i)^3$	$2i^3$	i^{10}
$(1 + i)(1 - i)$	$(2 + i)^2$	$(2 + i)(1 - 2i)$
$(4 + 3i)(4 - 3i)$	$(1 + i)^2$	$(1 + i)^3$

c Geef twee complexe getallen waarvan het kwadraat -4 is

d Bereken $z \cdot 1$.

Om in $\mathbb{R}$ kwadratische vergelijkingen op te lossen, kun je kwadraatafsplitsen. Dat werkt ook in $\mathbb{C}$.

13

We bekijken nog eens de vergelijking $z^2 - 2z + 2 = 0$, zie opgave 4, maar nu zoeken we complexe oplossingen.
Die vergelijking is gelijkwaardig met de vergelijking $(z - 1)^2 = -1$.

a Ga dat na.

b Welke twee complexe getallen kan $z - 1$ dus zijn? En welke z?

Zoek twee oplossingen in $\mathbb{C}$ voor de volgende vergelijkingen.
Schrijf die oplossingen in de vorm $\ldots + \ldots i$.

c

$(z - 3)^2 = -25$	$z^2 - 10z + 29 = 0$
$z^2 - 10z + 27 = 0$	$z^2 - 2iz + 3 = 0$

14

a Bereken $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$ en $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3$.

b Bereken $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^3$ en $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^3$.

c Van welke derdegraadsvergelijking zijn $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ oplossingen?

d Kun je nu ook drie oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8$ geven?

15

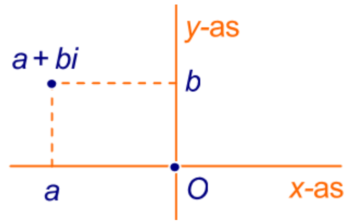
We bekijken de vergelijking $z^3 = 6z + 4$. De formule van Cardano geeft: $z = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$.

a Ga dat na.

b Ga na dat $(-1 + i)^3 = 2 + 2i$ en $(-1 - i)^3 = 2 - 2i$.

Als je nu uit opgave 14b concludeert dat $\sqrt[3]{2 + 2i} = -1 + i$ en dat $\sqrt[3]{2 - 2i} = -1 - i$, dan geeft de formule van Cardano de oplossing $z = -2$.
Als je met complexe getallen werkt en complex derdemachtswortels kunt trekken, werkt de formule van Cardano!
Hoe je complex derdemachtswortels trekt, zullen we in het volgende zien.

5.2 Het complexe vlak



De verzameling van de reële getallen stellen we ons voor op een getallenlijn. Bij elk punt van de getallenlijn hoort een reëel getal en omgekeerd.
Om de complexe getallen voor te stellen, gebruiken we het platte vlak waarin een assenstelsel is gekozen. Het getal $a + bi$ laten we corresponderen met het punt (a, b).
Bij elk punt van het platte vlak hoort zodoende een complex getal en omgekeerd. We spreken van het **complexe vlak**.

Van het getal $z = a + bi$ noemen we a het **reële** deel en b het **imaginaire** deel.
We noteren dat zo: $Re(z) = a$ en $Im(z) = b$.
In plaats van de x-as en y-as spreken we ook wel van de de **reële** en de **imaginaire as**.

Opmerking
Let op: het imaginaire deel van een complex getal is dus reëel.

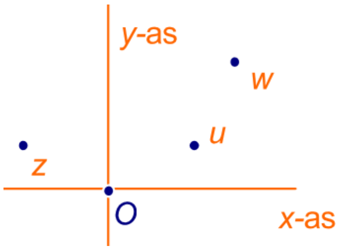
We kunnen de verzameling van de reële getallen opvatten als een deel van de complexe getallen: het zijn namelijk de getallen $z = a + bi$ met $b = 0$.
Zoals al opgemerkt, gedragen zich de complexe getallen met de gedefinieerde optelling en vermenigvuldiging net zoals de reële getallen.
Zo is er een zogenaamd **neutraal getal voor de optelling** $0 = 0 + 0 \cdot i$ waarvoor geldt: $z + 0 = 0 + z = z$ voor elk complex getal z.
En er is een **neutraal getal voor de vermenigvuldiging** $1 = 1 + 0 \cdot i$ waarvoor geldt: $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$ voor elk complex getal z.
Verder heeft elk getal complex getal z een **tegengestelde**; dat is het getal waarvan de som met z gelijk is aan 0. Het tegengestelde van z noteren we met $-z$. Als $z = a + bi$, dan $-z = -a - bi$.
We zullen nog zien dat elk complex getal $z \neq 0$ een **omgekeerde** heeft; dat is het complexe getal waarvan het product met z gelijk is aan 1. Het omgekeerde van z noteren we als z^{-1} of als $\frac{1}{z}$.

16 Teken in het complexe vlak de volgende verzamelingen:
de getallen z met:

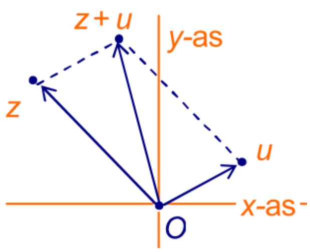
$Re(z) = 0$	$Im(z) = 2$
$Re(z) = Im(z)$	$Re(z) + Im(z) > 1$

17

In het plaatje hiernaast zijn de getallen z, w en u aangegeven.
Teken op het werkblad de getallen $-u$, $u+w$, $z+w$, $2u$, $-2z$ aan.



Twee complexe getallen optellen gaat in het complexe vlak 'vectorieel'.



18

Vermenigvuldigen gaat wat moeilijker.

a Teken in het complexe vlak de getallen $a = 1 + i$, $b = 2 - i$ en $a = -3 + 2i$.
Teken vervolgens $i \cdot a$, $i \cdot b$ en $i \cdot c$

b Teken nu op het werkblad bij opgave 16 $i \cdot u$, $i \cdot v$ en $i \cdot w$

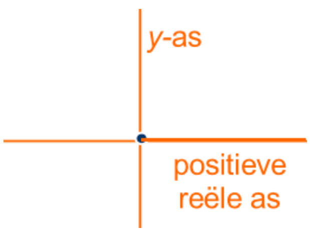
Meetkundig gezien is vermenigvuldigen met i het draaien om O over 90° in tegenwijzer richting.

c Toon dat aan.

We komen hierop nog terug.

In het volgende bekijken we algemener wat vermenigvuldigen met een complex getal in het complexe vlak voorstelt.
Hiervoor zijn wat nieuwe begrippen handig.

Met de **positieve reële as** bedoelen we de halve lijn waarop de getallen z met $Im(z) = 0$ en $Re(z) > 0$ liggen.



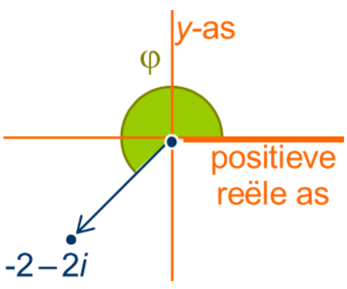
19

In de figuur hiernaast is het getal $z = -2 - 2i$ getekend met bijbehorende vector. φ is de hoek (in radialen) die deze vector met de positieve x-as maakt.

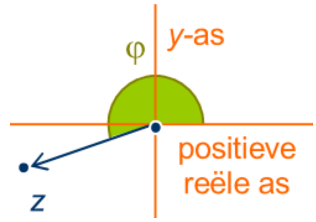
a Bereken φ en de afstand van z tot 0 exact

b Doe dat ook voor de getallen $w = 1 - i\sqrt{3}$ en $u = -10$.

c Bereken in radialen de hoek die de vector bij $2 - 3i$ met de positieve reële as maakt in één decimaal nauwkeurig.



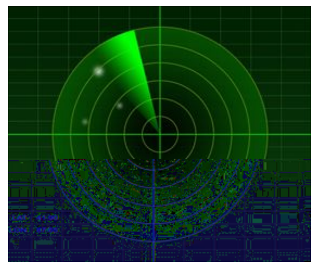
Het **argument van een complex getal** z, $z \neq 0$, is de hoek φ in radialen die de vector bij z met de positieve x-as maakt.
De **absolute waarde** van z is de afstand van z tot 0.
Het argument van z noteren we met $\arg(z)$ en de absolute waarde van z met $|z|$.



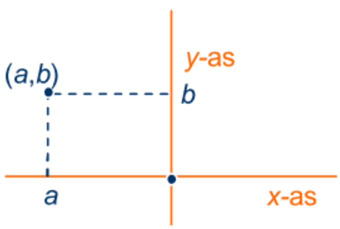
In de vorige opgave hebben we gezien dat $|-2-2i| = 2\sqrt{2}$ en $\arg(-2-2i) = 1\frac{1}{4}\pi$. Je zou ook kunnen zeggen: $\arg(-2-2i) = -\frac{3}{4}\pi$, misschien zelfs $\arg(-2-2i) = -2\frac{3}{4}\pi$.
Eigenlijk zijn we alleen maar geïnteresseerd in het antwoord op een veelvoud van 2π na. Indien nodig, kiezen we $\arg(z)$ zó, dat $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.

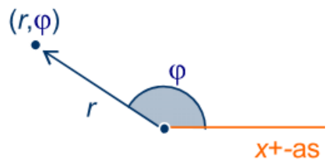
Intermezzo

Poolcoördinaten
Op het radarscherm van een schip lees je af welke afstand r een voorwerp tot het schip heeft en ook de richting waarin je het voorwerp ziet. Die richting kun je bijvoorbeeld aangeven met de hoek φ die de verbindingslijn schip-voorwerp met de oostelijke windstreek maakt.

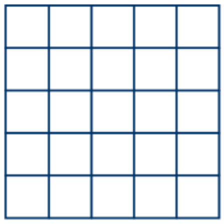


Vaak is het handig om een punt in het vlak met behulp van een getallenpaar weer te geven. Tot nu toe hebben we dat zó gedaan: we kiezen een punt, de oorsprong, (ons uitgangspunt) nemen hierdoor twee lijnen die loodrecht op elkaar staan, de x-as en de y-as enzovoort. Het getallenpaar bij een punt dat je zo krijgt, noemen we **rechthoekscoördinaten** van dat punt.





Je zou het ook anders kunnen doen. Je kiest vanuit de oorsprong een richting (bij ons valt die steeds samen met de richting van de positieve x-as). Een punt ligt dan vast door zijn afstand r tot de oorsprong en de richting waarin het punt ligt. Die richting geven we aan met een hoek, de hoek die die richting met de positieve x-as maakt. Het getallenpaar (r, φ) bij een punt dat je nu krijgt, noemen we de **poolcoördinaten** van dat punt.
Meestal kiezen we hoek φ zó, dat $-\pi < \varphi \leq \pi$.
Bij rechthoekscoördinaten hoort ’ruitjespapier’ (met vierkante ruitjes) en bij poolcoördinaten poolroosterpapier.



ruitjespapier

poolroosterpapier

Uit hoofdstuk 8 goniometrie vwo5 wiskunde b, zal duidelijk zijn dat een punt met poolcoördinaten (r, φ) rechthoekscoördinaten (a, b) heeft met:
$a = r \cdot \cos(\varphi)$ $b = r \cdot \sin(\varphi)$.
Met de GR kun je in poolcoördinaten rekenen. Zoek uit hoe dat gaat.

Als $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$, dan $z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot i$.

20 **a** Ga na dat bovenstaande juist is.
b Beschrijf de ligging van de punten z met: $\arg(z) = \frac{3}{4}\pi$.
Beschrijf ook de ligging van de punten z met: $|z| = 1$

We bekijken nu de punten $z \neq 0$ met de volgende eigenschap:
$\arg(z) = \frac{1}{2}\pi \cdot |z|$ op een veelvoud van 2π na.
Zij vormen een kromme K.

c Bereken exact de snijpunten van de kromme met de reële as, de imaginaire as en de lijnen $y = x$ en $y = -x$, voor zover de afstand tot 0 niet groter dan 4 is.
d Geef een parametervoorstelling van K en teken K.

Stelling 1
Voor twee complexe getallen z en w geldt:
1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
2. $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ (op een veelvoud van 2π na).

?

Dit bewijzen we in de volgende opgave.

21 Neem aan: $|z| = r$, $|w| = s$, $\arg(z) = \alpha$ en $\arg(w) = \beta$, dan $z = r \cdot \cos(\alpha) + r \cdot \sin(\alpha) \cdot i$ en $w = s \cdot \cos(\beta) + s \cdot \sin(\beta) \cdot i$.

a Toon aan:
$z \cdot w =$
$rs \cdot (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta) + i \cdot \cos(\alpha)\sin(\beta))$.
b Hoe volgt uit a: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ en $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$? (op een veelvoud van 2π na)?

Hint 2.

22

a Hoe kun je met de formules hierboven zien dat het product van twee unitaire getallen weer unitair is?

b Wat is het verband tussen $\left|z^2\right|$ en $|z|^2$?

c Wat is het verband tussen $\arg\left(z^2\right)$ en $\arg(z)$?

d Wat kun je van z zeggen als $|z \cdot w| = |w|$ voor elk getal w?

e Voor welke getallen z geldt: $|z \cdot w| = z \cdot |w|$ voor elk complex getal w?
En voor welke getallen z geldt: $|z \cdot w| = -z \cdot |w|$ voor elk complex getal w?

In opgave 17 heb je gezien dat vermenigvuldigen met i draaien over $90°$ is.

f Hoe volgt dat uit stelling 1?

23

We bekijken de vergelijking $z^3 = 1$.

a Laat zien dat z unitair is.

b Uit $z^3 = 1$ volgt dat $3 \cdot \arg(z) = 0$ op een veelvoud van 2π na. Leg dat uit.

c Welke drie complexe getallen zijn dus oplossing van de vergelijking $z^3 = 1$?

We bekijken de vergelijking $z^4 = 1$.

d Teken de vier oplossingen van de vergelijking in het complexe vlak en geef de oplossingen.

We bekijken de vergelijking $z^8 = 1$.

e Teken de oplossingen van de vergelijking in het complexe vlak.
Geef de exacte oplossingen van de vergelijking.

De oplossingen van de vergelijking$z^n = 1$, met $n = 3, 4, 5, \ldots$ vormen een regelmatige n-hoek op de eenheidscirkel in het complexe vlak. Ze zijn van de vorm $\cos\left(\frac{k}{n} \cdot 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{k}{n} \cdot 2\pi\right)$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

24

We bekijken de vergelijking $z^6 = 1$.

a Teken de oplossingen van deze vergelijking in het complexe vlak.

Eén van de oplossingen heeft argument $\frac{1}{3}\pi$, die oplossing noemen we ε.

b Schrijf ε in de vorm $\ldots + \ldots \cdot i$, met op de stippellijnen reële getallen, exact.

c Wat is de meetkundige betekenis van de vermeningvuldiging met ε?

d Druk de andere oplossingen van de vergelijking $z^6 = 1$ in ε uit.

e Hoeveel is: $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5$?

Hint 3.

De getallen -ε en $\varepsilon^2 + 1$ zijn machten van ε.

f Welke machten? Bewijs je bewering.

g Bereken $\left|\varepsilon^2 - 1\right|$ exact.

25 Gegeven is de vergelijking $z^8 = -1$.

a Wat kun je zeggen van $\arg(z)$?

b Geef de exacte oplossing van de vergelijking $z^8 = -1$.

26 Gegeven is de vergelijking $z^3 = -8$.

a Wat kun je zeggen van $\arg(z)$?

b Geef $|z|$ exact.

c Geef de exacte oplossingen van de vergelijking $z^3 = -8$.

27

a Geef de exacte oplossingen van de vergelijking $z^3 = i$.

b Geef de exacte oplossingen van de vergelijking $z^3 = -i$.

28 In opgave 15 van de vorige paragraaf hebben we een oplossing van de vergelijking $z^3 = 2 + 2i$. gevonden.
Er zijn drie oplossingen.

a Geef van de drie oplossingen het argument en de absolute waarde.

Eén van de oplossingen heeft argument $\frac{3}{4}\pi$.

b Welke oplossing is dat?

Eén van de oplossingen van de vergelijking $z^3 = 2 - 2i$. heeft argument $-\frac{3}{4}\pi$.

c Ga dat na en geef die oplossing exact.

29 Geef de exacte oplossing van de vergelijking $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

30 Veronderstel $z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ en n geheel.

a Wat is $|z|^n$ en wat is $\arg\left(z^n\right)$?

Uit het antwoord op het vorige onderdeel volgt:
$(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$.

b Wat levert deze formule op voor $n = 2$, als je de linkerkant zonder haakjes schrijft?

Formule van de Moivre
$(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$

De Moivre (1667-1754) was een pionier in de ontwikkeling van de analytische meetkunde en de theorie van de kansrekening. Daarbij bouwde hij voort op werk van zijn voorgangers, met name Christiaan Huygens en verschillende leden van de Bernoulli-familie. Hij produceerde ook het tweede leerboek over de kansrekening, The Doctrine of Chances: a method of calcula t ng the probabili t es of events in play (Een doctrine over kansen: een methode voor de berekening van de waarschijnlijkheden van gebeurtenissen in het spel).
De Moivre was een calvinist. Hij verliet Frankrijk na de herroeping van het Edict van Nantes in 1685. De rest van zijn leven bracht hij in Engeland door. Doordat hij op zijn achttiende in ballingschap ging en niet over veel geld beschikte, behaalde hij geen academische graad. In 1697 werd hij tot lid van Royal Society gekozen. Hij was een vriend van Isaac Newton.
Uit Wikipedia


De Moivre 1667-1754

31 **a** Bereken met de formule van de Moivre:
$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10}$, $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10}$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)^{10}$.

b Bereken nu $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{10}$ met behulp van de eerste uitkomst van onderdeel a.

Als $z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot i$, dan
$z^n = r^n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi) \cdot i$.

In het volgende bekijken de complex geconjungeerde van een complex getal, onder andere nodig bij het berekenen van het omgekeerde van een complex getal.

Definitie
De **complex geconjungeerde** $\overline{z}$ van een getal $z = a + bi$, is

$\overline{z} = a - bi$.

Regels

Voor alle complexe getallen z en w geldt:

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. Als $\overline{z} = z$, dan is z reëel.

32

a Bewijs de regels.

Gegeven is de vergelijking $z^3 = 11z - 20$.

b Ga na: als z oplossing van de vergelijking is, dan ook $\overline{z}$.

$2 + i$ is oplossing van de vergelijking.

c Ga dat na. Welk getal is dus ook oplossing?

33

Als je de plaats van z weet in het complexe vlak, hoe vind je dan de plaats van $\overline{z}$?

In de onderbouw en in vwo4 hebben we gewerkt met machientjes in $\mathbb{R}$.
Het machientje **[PLUS 3]** geeft bij invoer x de uitvoer $x + 3$.
x →**[PLUS 3]**→→ $x + 3$.

De werking van dit machientje kun je ongedaan maken met **[PLUS -3]**.
De getallen 3 en -3, algemeen a en $-a$ noemen we elkaars **tegengestelde**.
Er geldt: $a + -a = 0$ voor alle getallen a uit $\mathbb{R}$. De werking van het machientje **[MAAL *a*]** wordt ongedaan gemaakt door het machientje **[MAAL a^{-1}]** ($a \neq 0$).
De getallen a en a^{-1} zijn elkaars **inverse**.
Er geldt: $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$.
Zo is de inverse van 2 gelijk aan $\frac{1}{2}$ en de inverse van $2\frac{1}{2}$ is $\frac{2}{5}$.
In $\mathbb{R}$ is delen door een getal $a \neq 0$ hetzelfde als vermenigvuldigen met a^{-1}.
Immers met $b : a$ bedoelen we het getal x dat met a vermenigvuldigd b oplevert; in formule: $ax = b$.
Als je de gelijkheid $ax = b$ aan beide kanten met a^{-1} vermenigvuldigt vind je: $a^{-1} \cdot ax = a^{-1} \cdot b$, dus $x = a^{-1} \cdot b$, want $a^{-1} \cdot a = 1$.
Om x te vinden als $ax = b$, moet je de inverse van a kennen.
In de volgende opgave zullen we zien hoe je die kunt vinden voor complexe getallen a.

34 Regel 3 hierboven zegt: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

a Laat zien dat hieruit volgt: $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

De **inverse** of **omgekeerde** van z is dus: $\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

b Geef de inverse van $1+i$ in de vorm: $\ldots + \ldots \cdot i$ en reken na dat het door jou gegeven getal vermenigvuldigd met $1+i$ inderdaad 1 oplevert.
Doe hetzelfde voor het getal $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i$.

c Als z op de eenheidscirkel ligt, hoe vind je dan de plaats van z^{-1}?

d Hoe ziet de formule voor de inverse van $a + bi$ eruit, geschreven in de vorm $\ldots + \ldots \cdot i$?

$z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Als $z = a + bi$, dan $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2} \cdot i$.

Voorbeeld

De vergelijking in z: $(1+i)\,z + i = 3$ los je als volgt op.
$(1+i)\,z + i = 3 \Leftrightarrow (1+i)\,z = 3 - i \Leftrightarrow z = (1+i)^{-1} \cdot (3-i)$.
In de voorgaande opgave heb je gezien dat $(1+i)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$,
dus $z = (3-i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - 1\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} = 1 - 2i$.

35 Los de volgende vergelijkingen in z op.

a $2z = 1 + i$

b $(2+i)\,z = 4 + 3i$

c $(2+3i)\,z + 3 + i = -2 + 13i$

36 De getallen z met $Re\,(z) = 1$ liggen op een rechte lijn. We bekijken waar die rechte lijn op afgebeeld wordt door de afbeelding $z \to z^{-1}$.
Drie getallen op die lijn zijn: 1, $1+i$ en $1-i$.

a Bepaal de beelden van die getallen onder de afbeelding $z \to z^{-1}$.

De bewering is dat de getallen op die rechte lijn afgebeeld worden op een cirkel. Uit de drie beelden uit onderdeel a volgt wat de straal en het middelpunt van die cirkel zijn.

b Wat zijn de straal en het middelpunt van die cirkel?

c Bewijs de bewering.

Hint 4.

d Krijg je de hele cirkel als beeld van de lijn? Licht je antwoord toe.

Complex worteltrekken

37 **Complex worteltrekken 1**

Veronderstel: $b = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, met $-\pi < \varphi \leq \pi$ en $r > 0$.

We bekijken hierbij het getal $c = \sqrt{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right)$.

a Wat is her verband tussen c^2 en b? Licht je antwoord toe.

b Kun je nog een getal bedenken met hetzelfde verband?

Opmerking

Elke kwadratische vergelijking in z (die niet van de vorm $(z-a)^2 = 0$ is) heeft twee oplossingen in $\mathbb{C}$.

Je kunt zo'n vergelijking (kwadraatafsplitsen) namelijk schrijven als: $(z-a)^2 = b$, voor zekere complexe getallen a en b. Er is een complex getal c zó, dat $c^2 = b$, zie de voorgaande opgave. Dan geldt: $(z-a)^2 = c^2 \Leftrightarrow z = a + c$ of $z = a - c$.

Meer algemeen is de volgende stelling te bewijzen.

Voor elke n-de graads veelterm in z zijn er complexe getallen $a \neq 0$ a en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ te vinden zó, dat die n-de graads veelterm te ontbinden is in: $a(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)$.

Deze stelling staat bekend als de **hoofdstelling van de algebra**. Een bewijs hiervan werd gegeven door Gauss. Om een kwadratische vergelijking op te kunnen lossen, moet je complex wortel kunnen trekken.

Hoe je dat theoretisch doet, staat in opgave 37.

Gauss 1777-1855

38 Veronderstel: $b = 2 + 2i\sqrt{3}$.

a Zoek twee getallen c met $c^2 = b$. Schrijf ze in de vorm: $c = \ldots + \ldots \cdot i$.

b Doe hetzelfde als $b = -1 + i\sqrt{3}$.

c Ook als $b = -i$.

In opgave 38 ging het complex worteltrekken tamelijk eenvoudig omdat $\frac{1}{2} \cdot \arg(b)$ daar een veelvoud van $\frac{1}{4}\pi$ of $\frac{1}{6}\pi$ en dan krijg je een mooie sinus en cosinus.

Anders kun je de volgende formules uit de goniometrie gebruiken.

$\left|\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\alpha)}$ en

$\left|\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\alpha)}$

39 Laat zien dat die formules volgen uit de verdubbelingsformules uit de goniometrie.

40 We zoeken twee getallen c met $c^2 = b$? waarbij $b = -7 - 24i$.
We stellen $\arg(b) = \alpha$, waarbij $-\pi < \alpha \leq \pi$.

a Bereken $\cos(\alpha)$ en $\sin(\alpha)$ exact.

b Bereken een mogelijke waarde voor $\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ en $\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$

c Voor welke getallen z geldt: $z^2 = b$?

Complexe e-machten

Definitie

Voor een reëel getal φ definiëren we $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ en voor een complex getal z: $e^z = e^{Re(z)} \cdot e^{i\arg(z)}$.

Opmerking

Als k geheel is, dan $e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)} = e^{i\varphi}$.
Dit volgt uit de periodiciteit van sin en cos.

41

a Toon aan $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$ voor reële getallen α en β.

b Toon aan: $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ voor complexe getallen z en w.

c Schrijf $e^{\pi i}$ in de vorm $\ldots + \ldots \cdot i$.

Formule van Euler

$e^{i\cdot\pi} = -1$

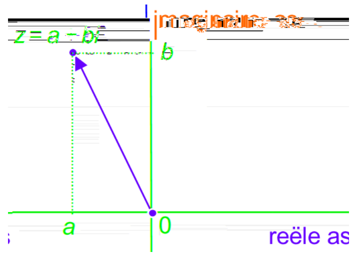
Euler 1707-1783

Leonhard Euler (Bazel, 15 april 1707 – Sint-Petersburg, 18 september 1783) was een Zwitserse wiskundige en natuurkundige die het grootste deel van zijn leven doorbracht in Rusland en Duitsland. Hij wordt algemeen beschouwd als de belangrijkste wiskundige van de 18e eeuw en als een van de belangrijkste aller tijden. Bovendien was hij de meest productieve wiskundige ooit: zijn verzameld werk beslaat zo'n zeventig delen.
Euler ontwikkelde veel nieuwe concepten en heeft zeer veel bijgedragen aan de moderne wiskundige notatie: de symbolen i en e voor de imaginaire eenheid en het grondtal van de natuurlijke logaritme zijn door hem geïntroduceerd. De huidige namen van bijvoorbeeld de goniometrische functies: sinus, cosinus en tangens heeft hij ook bedacht.
Uit Wikipedia

Opmerking

De functie $z \rightarrow e^z$ speelt een grote rol in de natuurkunde, bijvoorbeeld de electriciteitsleer en quantummechanica.

5.5 Meetkunde met complexe getallen

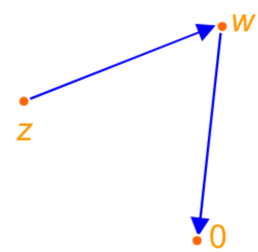


Rekenen met complexe getallen kent vele toepassingen. In veel gevallen werk je met complexe e-machten en moet je complex differentiëren. Wiskundig gezien is dit niet eenvoudig. Een toepassingsgebied waarbij je minder theorie over complexe getallen nodig hebt, is de meetkunde.
Eerst even het volgende. Af en toe komt het ons goed uit een complex getal als vector (pijl) te beschouwen.
Het getal $z = a + b \cdot i$ (met a en b reëel, vatten we op als de vector die een verplaatsing van a eenheden in de 'reële' richting en b eenheden in de 'imaginaire' richting aangeeft. (In de getekende situatie is a negatief en b postitief).

Wat we in de analytische meetkunde met vectoren, parametervoorstellingen enzovoort gedaan hebben, kunnen we kopiëren naar de complexe getallen.
In het vervolg kun je zien hoe dat gaat.

We noteren het punt horend bij het complexe getal a met A.

42



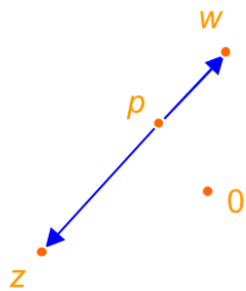
z en w zijn twee getallen in het complexe vlak.

a Welk complex getal wordt voorgesteld door de vector die z naar w verplaatst? En die van w naar 0 wijst? Druk je antwoorden uit in z en w.

b Neem het plaatje hiernaast over en teken hierin (als punten) de complexe getallen $z + w$, $z - w$, $w - z$, $z + \frac{1}{2}w$.

c Druk het getal dat midden tussen z en w ligt uit in z en w.

d Wat merk je op over de ligging van de complexe getallen $t \cdot w$, waarbij t alle mogelijke reële waarden aanneemt?



Het getal p ligt op het verbindingslijnstuk van z en w zó, dat het twee keer zo ver van z als van w ligt, zie plaatje.

e Druk p uit in z en w.

We bekijken alle complexe getallen $z + t(w - z)$, waarbij t alle mogelijke reële waarden aanneemt.

f Wat kun je zeggen over de ligging van die complexe getallen?

g Wat kun je zeggen over de ligging als $0 \leq t \leq 1$?

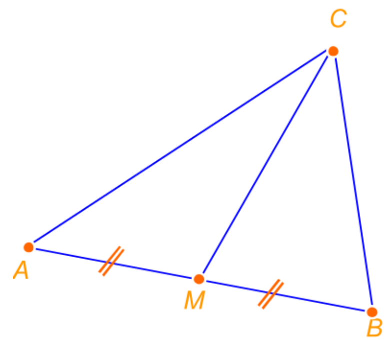
Gegeven twee complexe getallen a en b.
Voor het getal c geldt: $c = \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b$. Dan ligt C op lijnstuk AB.

h Bereken $AC : CB$.

$z + t(w - z) = (1 - t)z + tw$, dus uit de onderdelen f en g van opgave 42 volgt:

Stelling
Gegeven twee complexe getallen z en w.
De complexe getallen $s \cdot z + t \cdot w$ met s en t reëel en $s + t = 1$ vormen de lijn door z en w.
Voor $s \geq 0$ en $t \geq 0$ (en $s + t = 1$) krijg je de punten op het lijnstuk met eindpunten z en w.
We noemen $u = z + t\,(w - z)$ een **parametervoorstelling** (pv) van de lijn door z en w, dat wil zeggen:
als je voor t alle mogelijke reële getallen neemt, dan vormen de complexe getallen u precies de lijn door de punten z en w.
Een andere pv van de lijn door z en w is dus $u = s \cdot z + t \cdot w$, met s en t reëel en $s + t = 1$.

Een **zwaartelijn** in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde.



In de figuur hiernaast is M het midden van zijde AB.
Lijn CM is de zwaartelijn uit C van driehoek ABC.

43 Gegeven is een driehoek ABC. De complexe getallen bij de hoekpunten van de driehoek zijn a, b en c. Het midden van het verbindingslijnstuk van A en B is M en het complexe getal dat bij M hoort is m.

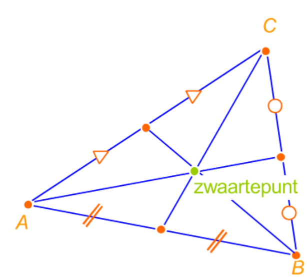
- **a** Druk m uit in a en b.
- **b** Toon aan dat $v = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\,(a + b) + \frac{1}{3}c$ op de zwaartelijn vanuit C ligt.
- **c** Schrijf v zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.
- **d** Hoe zie je met behulp van onderdeel c dat v ook op de andere zwaartelijnen van driehoek ABC ligt?

Het bij v horende punt is V.

- **e** Bereken $CV : VM$.

We hebben nu de volgende stelling bewezen. (In vwo5 wiskunde b heb je deze stelling ook al bewezen.)

Stelling
De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt. Dat punt heet het zwaartepunt van de driehoek. Het zwaartepunt ligt twee keer zo ver van een hoekpunt als van het midden van de tegenoverliggende zijde.



5.5 Meetkunde met complexe getallen

44

a Teken een willekeurige vierhoek.
Teken het verbindingslijnstuk van de middens van de diagonalen van de vierhoek en de twee medianen van de vierhoek (een mediaan verbindt de middens van twee tegenover elkaar liggende zijden).

Het snijpunt van medianen ligt op het verbindingslijnstuk van de middens van de diagonalen.

b Bewijs dat.

Hint 5.

45

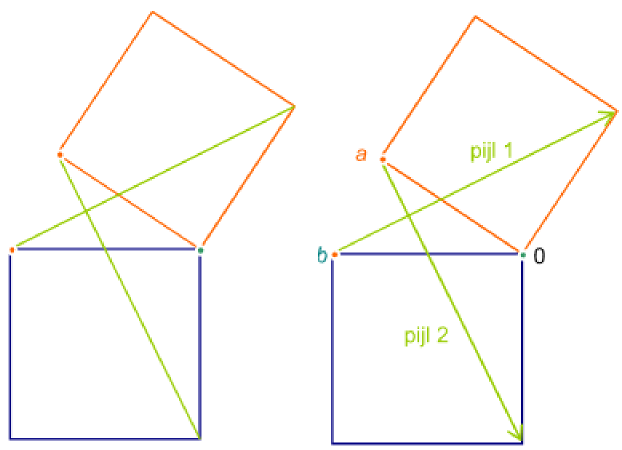
a Teken een getal z in het complexe vlak. Teken hierbij het getal iz en $z + iz$.

b Wat kun je zeggen over de vierhoek met hoekpunten: 0, z, iz en $z + iz$?

c En wat kun je zeggen over de vierhoek met hoekpunten: 0, z, $-iz$ en $z - iz$?

46

Hieronder links zijn twee vierkanten getekend met een gemeenschappelijk hoekpunt. Twee hoekpunten van het kleine vierkant zijn verbonden met twee hoekpunten van het grote vierkant, zie het plaatje hieronder.



De verbindingslijnstukken zijn even lang en staan loodrecht op elkaar. Je kunt een bewijs geven met congruentie.
Het kan ook met complexe getallen. Dat gebeurt nu.
Kies het getal 0 in het gemeenschappelijke hoekpunt van de vierkanten en de getallen a en b als in het plaatje hierboven rechts.

a Druk de getallen bij de start- en eindpunten van de pijlen uit in a en b.

b Welke getal p hoort dus bij pijl 1? En welk getal q bij pijl 2??

In de tekening kun je ‘zien’ dat $iq = p$.

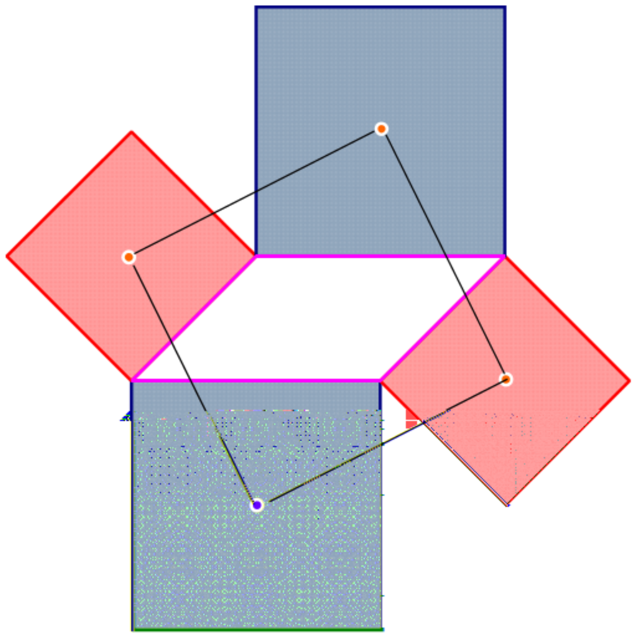
c Reken na dat dat juist is.

d Waarom heb je het bewijs nu gegeven?

47

Een Sangaku uit Pythagoras

In Pythagoras, jaargang 48, nummer 5 staat de volgende Sangaku op de achterkant.

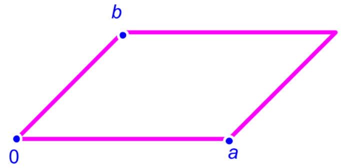


De Sangaku is ontworpen door Hans van Lint, de winnaar van de NWD-sangakuwedstrijd 2009.

Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.

a Welke stelling?

Hiernaast is het parallellogram in het midden van de sangaku getekend. We kiezen de getallen 0, a en b als in het plaatje hiernaast.



b Laat zien dat $b + \frac{1}{2}(a + ai)$ één van middens van de vierkanten op de zijden van het parallellogram is.

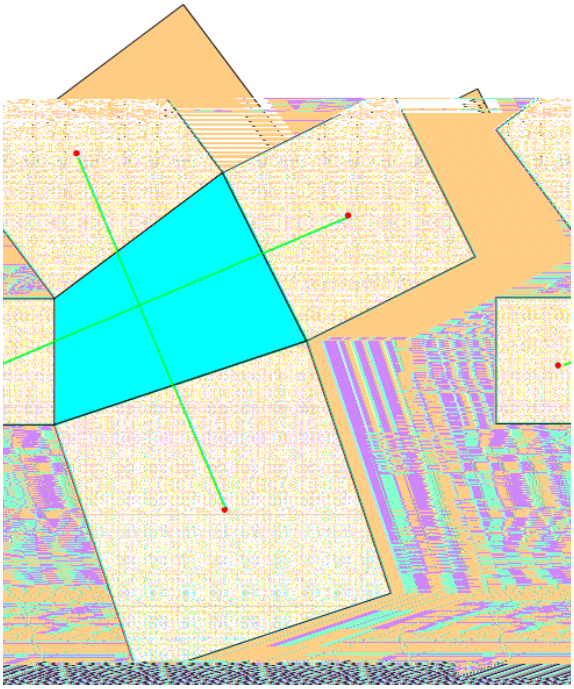
c Druk de middens van de andere vierkanten ook in a en b uit.

d Bewijs de stelling.

48

De stelling van Aubel

Op de zijden van een willekeurige vierhoek zijn vierkanten gezet. De middens van de vierkanten op tegenover elkaar liggende zijden worden met elkaar verbonden, zie plaatje.

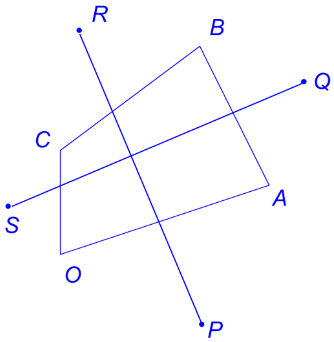


De verbindingslijnstukken zijn even lang en staan loodrecht op elkaar.

De stelling is genoemd naar Henricus Hubertus van Aubel (geboren op 20 november 1830 te Maastricht; overleden op 3 februari 1906 te Antwerpen), oa. leraar wiskunde aan het Koninklijk Atheneum van Antwerpen. Bron Wikipedia

We gaan de stelling bewijzen.

We geven de hoekpunten van de vierhoek en de middens van de vierkanten namen, zie het plaatje hiernaast.



a Druk p, q, r en s in a, b, c en d.

Hint 6.

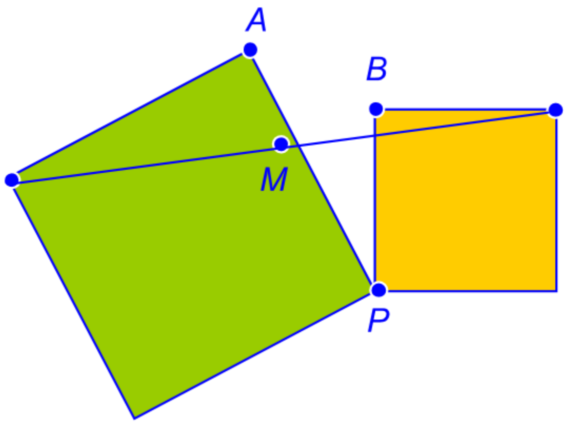
b Druk nu $r - p$ en $s - q$ uit in a, b, c en d.

c Bewijs de stelling.

49

De stelling van Bottema

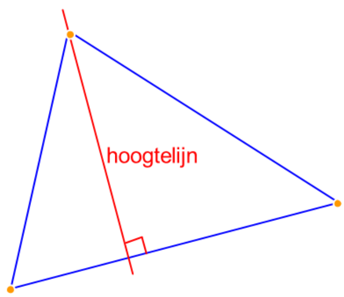
A en B zijn twee punten in het vlak. We kiezen een punt P.
Op de lijnstukken PA en PB worden vierkanten gezet, zie plaatje.



Het hoekpunt tegenover P van het ene vierkant wordt verbonden met het hoekpunt tegenover P van het andere vierkant. Het midden van het verbindingslijnstuk noemen we M.
De plaats van M hangt niet van P af.
Dit kun je mooi zien in een 'applet'. Misschien kun je zo'n applet zelf wel maken.
Bewijs de stelling.

Definitie

Een **hoogtelijn** van een driehoek gaat door een hoekpunt en staat loodrecht op de zijde tegenover dat hoekpunt.
De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt. Dit punt heet het **hoogtepunt** van de driehoek.



50

De rechte van Euler

a Teken een willekeurige driehoek, met het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek.

Het lijkt wel of de drie punten op één lijn liggen. Dit gaan we in het volgende bewijzen. De lijn door de drie punten heet **de rechte van Euler**. Je kunt dit mooi zien in de volgende 'applet'.
We kiezen het middelpunt van de omgeschreven cirkel als de oorsprong van het complexe vlak. Noem de hoekpunten van de driehoek A, B en C.
Stel $h = a + b + c$.

b Waarom staat de verbindingslijn van 0 met $a + b$ loodrecht op AB?

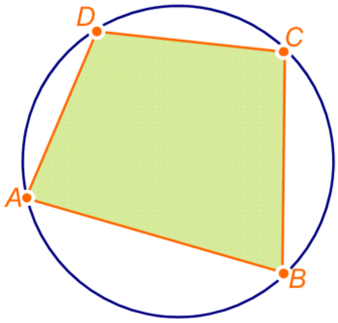
c Leg uit dat hieruit volgt dat de lijn die h met c verbindt, loodrecht op AB staat.

d Hoe volgt nu dat h bij het hoogtepunt van driehoek h hoort?

Het hoogtepunt van driehoek ABC noemen we H en het zwaartepunt Z.

e Hoe volgt dat de punten O, Z en H op een lijn liggen en dat $OZ : ZH = 1 : 2$?

51 Gegeven is een koordenvierhoek $ABCD$.
Dan is de vierhoek met als hoekpunten de hoogtepunten van de driehoeken ABC, ABD, ACD en BCD congruent met vierhoek $ABCD$.



We bewijzen de stelling in deze opgave.
Als oorsprong$ABCD$ nemen we het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de vierhoek.

a Druk de complexe getallen bij die hoogtepunten uit in a, b, c en d.

Hint 7.

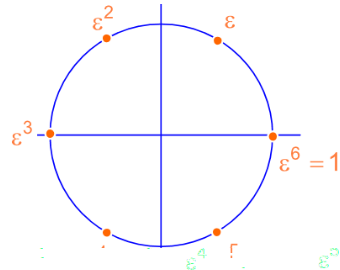
b Bewijs de stelling.

52 **Stelling**
Gegeven is een vierhoek $ABCD$.
Dan vormen de zwaartepunten van de driehoeken ABC, ABD, ACD en BCD een vierhoek die gelijkvormig is met vierhoek $ABCD$.
Bewijs de stelling en bepaal de bijbehorende vergrotingsfactor.

In de voorgaande bewijzen werd vaak gebruik gemaakt van de draaiing over $90°$, dus in de complexe getallen met de vermenigvuldiging met i. In de laatste opgaven heb je de draaiing over $60°$ nodig, dus vermenigvuldigen met ε $=$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, zie ook opgave 24.
Hierover gaat de volgende opgave, die voor een deel herhaling is.

53

5.5 Meetkunde met complexe getallen



Gegeven het getal $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, zie opgave 24.

a Laat zien de getallen 1, ε^2, $\varepsilon^3 = -1$, ε^4, ε^5 in het complexe vlak hoekpunten van een regelmatige zeshoek op de eenheidscirkel zijn.

b Wat stelt vermenigvuldigen met ε^5 meetkundig voor?

c Leg uit dat $\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon$.

d Druk ε^4 en ε^5 uit in ε zonder machten van ε te gebruiken.

54 ε is als in opgave 53 en a een willekeurig complex getal $\neq 0$.

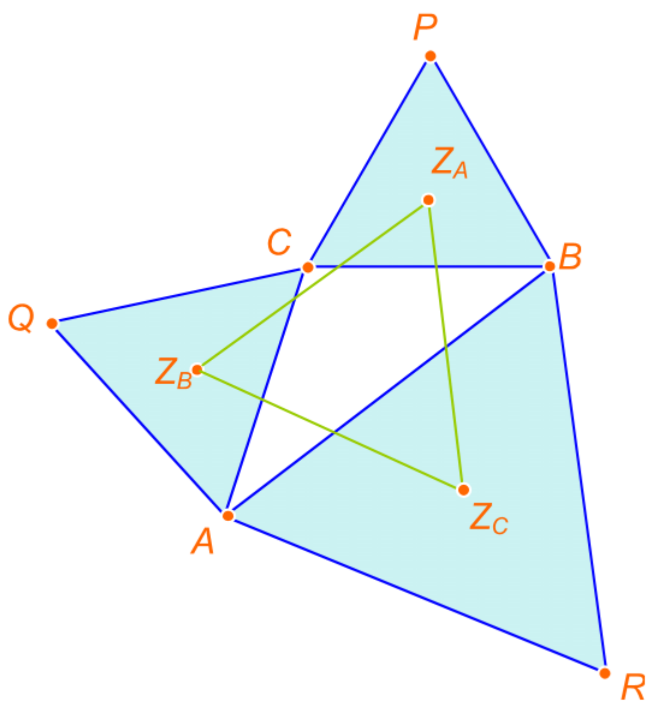
a Teken de driehoek met hoekpunten 0, a en ε

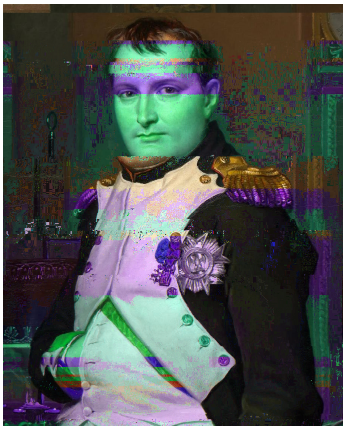
56

De stelling van Napoleon

ABC is een willekeurige driehoek. De driehoeken PBC, AQC en ABR zijn gelijkzijdig met zwaartepunten Z_A, Z_B en Z_C.
Dan is driehoek $Z_A Z_B Z_C$ gelijkzijdig.
Bewijs de stelling met een berekening met complexe getallen.

Hint 8.





Napoleon Bonaparte 1769-1821
Keizer der Fransen
Hij werd de machtigste man van Europa en een van de bekendste en meest invloedrijke figuren in de wereldgeschiedenis. Napoleon bleek als militair in opleiding uitzonderlijk goed te zijn in rekenen en kaartlezen. Het rekenen paste hij o.a. toe in de artillerie bij het berekenen van de baan van een kanonskogel, het kaartlezen gebruikte hij zijn leven lang om vanaf (vaak slordige en foute) kaarten een goede positie en opstelling na te streven.
Bron: Wikipedia

invalid xml file - parsed text

1 Los de volgende vergelijkingen in z exact op.

$(i+1)\,z+2=i$ $\quad$ $(1-3i)\,z+10i=20$

$z^2+4z+13=0$ $\quad$ $z^2-2iz+15=0$

2 Gegeven een complex getal z.

a Wat is het verband tussen $\arg(z)$ en $\arg(\overline{z})$?

We bekijken de vergelijking $z^5 = 1$. De oplossing van deze vergelijking met het kleinste positieve argument noemen we γ.

b Druk $\overline{\gamma}$ en $\overline{\gamma}^2$ uit in machten van γ.

We schrijven $\delta = i\cdot\gamma^4$

c Toon 'meetkundig' en 'algebraïsch' aan dat δ oplossing is van de vergelijking $z^{20}=1$.

d Druk de oplossingen van $z^{10}=1$ in machten van δ uit.

3 Gegeven zijn de getallen z en w met:

$\arg(z)=\frac{1}{3}\pi$, $\arg(w)=\frac{1}{12}\pi$, $|z|=3$ en $|w|=\sqrt{2}$.

a Schrijf $z\cdot\overline{w}$ in de vorm $a+b\cdot i$ met a en b exact.

b Bereken exact: $|z-w|$.

c Schrijf $\overline{w}^3$ in de vorm $a+b\cdot i$ met a en b exact.

4 Er geldt: $(3+2i)^4 = -119+120i$.

a Reken dat na.

b Geef alle oplossingen van de vergelijking $z^4 = -119+120i$ exact in de vorm$\ldots+\ldots i$.

c Bereken exact $(1+i)^{10}$.

Hint 9.

5 Gegeven is de vergelijking $z^3-2z+4=0$.

a Laat zien: als het complexe getal w aan de vergelijking voldoet dus $w^3-2w+4=0$, dan voldoet ook $\overline{w}$, dus dan ook $\overline{w}^3-2\,\overline{w}+4=0$.

Hint 10.

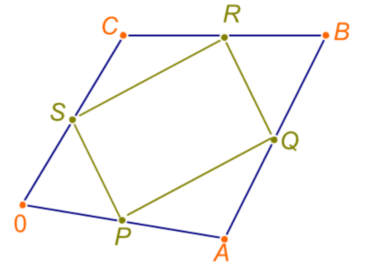
Je kunt narekenen dat $1+i$ oplossing van de vergelijking is, dus ook $1-i$.
Volgens de hoofdstelling van de algebra geldt dan:
$z^3-2z+4=(z-1+i)(z-1-i)(z+a)$.

b Bereken a exact.

c Wat zijn de oplossingen van de vergelijking $z^3-2z+4=0$?

De volgende opgave komt ook voor in 4vb hoofdstuk 5.
Nu moet je de oplossing zoeken met behulp van complexe getallen.

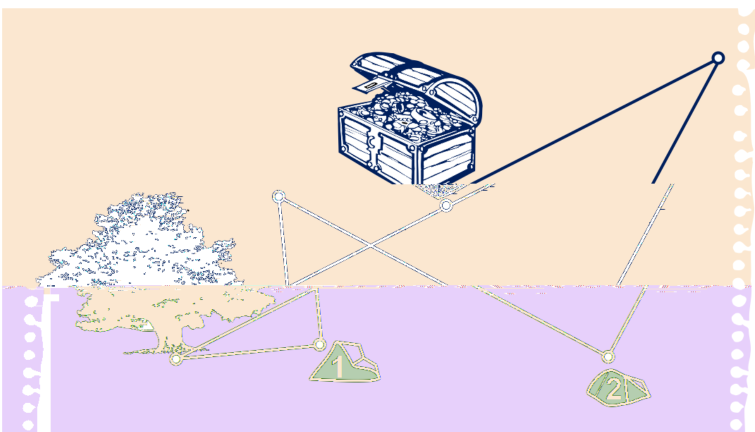
6 $OABC$ is een vierhoek, de middens van de zijden zijn P, Q, R en S.
Toon met een berekening met complexe getallen aan dat vierhoek $PQRS$ een parallellogram is.



7 **Schatgraven op Teleurstellingseiland**
Op een onooglijk stukje vergeeld papier dat Anne in een oude kist vindt, staat het volgende.

.....igt begraven op TELEURSTELLINGS EILAND
Ga op de stronk van de oude eik st....n. oop....... de eerste steen, sla
lood....cht linksaf en loop nog.... als dezelfde afstand.
Van dit p...t loop je naar de tw.... ...en, j.... ...at weer loodrecht link... f
je lo..... laatste afstand nog eens.
Gr...f precies midden tussen waar je nu bent en de stron

Ze trekt zich niets aan van de gruwelverhalen op Wikipedia.
Het eiland ligt op $50^\circ\ 36'$ ZB, $165^\circ\ 58'$ OL.: Disappointment Island; een van de onbewoonde Auckland Islands ten zuiden van Nieuw Zeeland. Onbewoond? Op 65.000 visverwerkende witkopalbatrossen na!
Anne heeft vast een plan gemaakt, voor als ze de stenen en de stronk eenmaal heeft gevonden.



Op Teleurstellingseiland aangekomen, vindt ze wel de twee stenen, maar de stronk van de oude eik is vergaan.

a Neem een stuk papier en teken daarop twee punten. Daar liggen de stenen. Kies nu een willekeurig derde punt voor de positie van de stronk en voer de zoekactie uit met je geodriehoek.

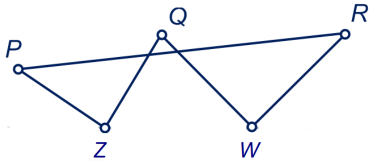
Kies nog een ander punt voor de stronk en voer de zoekactie nog eens uit.

Je kunt de zoekactie ook bekijken met de GeoGebra applet "Schatzoeken".
Het lijkt wel of de plaats van de schat niet van de plaats van de stronk afhangt!

Dat dit inderdaad zo is, kun je als volgt inzien. Neem een assenstelsel zo dat de stenen in de punten Z en W liggen.

b Druk de getallen q en r (zie plaatje) in z, w en p uit.

c Laat zien dat het midden van PR niet afhangt van de keuze van P.



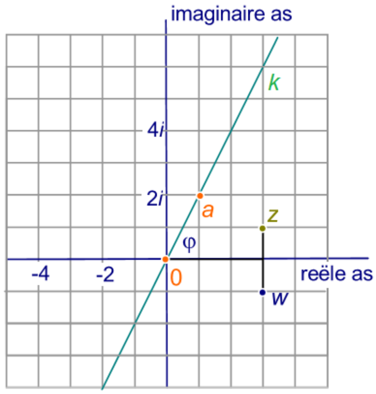
Lijnspiegelen in het complexe vlak

8 De punten A, Z en W zijn roosterpunten. $a = 1 + 2i$ en het spiegelbeeld van Z in de reële as is W.
k is de lijn door de punten O en A.
Vermenigvuldigen met a is linksom draaien over hoek $\varphi = \arg(a)$ om 0 gevolgd door een puntvermenigvuldiging ten opzichte van 0.

a Met welke factor?

b Teken de beelden az en aw van z en w 'meetkundig', dus met behulp van het voorgaande.

c Ga na of je het beeld van z goed getekend hebt door az te berekenen.



az en aw zijn elkaar spiegelbeeld in k.

d Bereken (schrijf in de vorm $\ldots + \ldots i$) het spiegelbeeld van $p = 5 - 7i$ in k.

Hint 11.

Wat we in Extra opgave 8 gedaan hebben geldt ook voor andere complexe getallen a.

Gegeven zijn de complexe getallen $a \neq 0$ en z, dan is $a\,\overline{z}$ het spiegelbeeld van az in de lijn OA.

Neem aan dat a unitair is, dan $a^{-1} = \overline{a}$.
Het spiegelbeeld van een complex getal p vind je als volgt.
Zoek het getal s met $as = p$, dan is het spiegelbeeld van p:
$a\,\overline{s} = a\,\overline{a^{-1} \cdot p} = a^2 \cdot \overline{p}$.

Gegeven de complexe getallen $a \neq 0$ en p.
Dan is het spiegelbeeld van p in lijn OA: $a^2 \cdot \overline{p}$.

9

a Ga na dat bovenstaande juist is voor de spiegeling in de imaginaire as.

b Ga na dat bovenstaande juist is voor de spiegeling in de lijn $Re(z) = Im(z)$ (de lijn $y = x$).

Bij spiegelen in de lijn $Im(z) = -\sqrt{3} \cdot Re(z)$ is het beeld van z gelijk aan $e^{-\frac{2}{3}\pi i}\,\overline{z}$.

c Toon dat aan.

Bij een lijnspiegeling in een lijn door 0 is $3\sqrt{2}$ het spiegelbeeld van $3 + 3i$.

d Druk het beeld van $a + bi$ uit in a en b en ga na dat je formule $3\sqrt{2}$ als beeld van $3 + 3i$ oplevert.

Vergelijkingen van graad 3

1 Dan heeft de vergelijking één oplossing.

2
- **a** $x^2 = 2$ want de oppervlakte van het grote vierkant is twee keer zo groot als de oppervlakte van het kleine vierkant.
- **b** $\frac{p^2}{q^2} = x^2 = 2$, dus $p^2 = 2q^2$.
- **c** De twee kleine vierkanten hebben zijden $p - q$ en het vierkant in het midden heeft zijden $q - (p - q) = 2q - p$.
- **d** Omdat de twee rose vierkanten dezelfde oppervlakte hebben als het blauwe, moet de 'overlap' dezelfde oppervlakte hebben als het deel van het grote vierkant dat niet bedekt is.

3
- **a** In opgave 2 is $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Uit onderdeel c en d volgt dan dat $\frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$.
- **b** $\frac{2q-p}{p-q} = \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2}}{2-1} = \sqrt{2}$

4
- **a** Bijvoorbeeld $2x + 6 = 0$.
- **b** Bijvoorbeeld $2x - 7 = 0$.
- **c** Bijvoorbeeld $x^2 - x = \frac{1}{4}$
- **d** $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 3$. De vergelijking heeft twee niet-rationale oplossingen $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Deze zijn reëel.
- **e** $x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -1$; deze vergelijking heeft geen oplossingen.

5
- **a** De vergelijkingen kwamen voort uit praktische problemen.
- **b** Anders heb je hooguit een kwadratische vergelijking.
- **c** Linker en rechter lid van de vergelijking delen door a.
- **d** $(y+4)^3 - 12(y+4) - 4(y+4) + 48 = 0 \Leftrightarrow$
  $y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - 12y^2 - 96y - 192 - 4y - 16 + 48 = 0 \Leftrightarrow$
  $y^3 - 52y - 96 = 0$.
- **e** Vul maar in.
- **f** $x = y + 4$, dus $x = 2$, $x = -2$ en $x = 12$.

6
- **a** $y - 1$, je krijgt dan
  $(y-1)^3 + 3(y-1)^2 + 3(y-1) + 9 = 0 \Leftrightarrow$
  $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 + 3y - 3 + 9 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 8 = 0$.
  Dus $u = 0$ en $v = 8$.
- **b** De vergelijking $y^3 + 8 = 0$ heeft één oplossing, namelijk $y = -2$, dus de vergelijking $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$ heeft één oplossing $x = y - 1 = -3$.

7
- **a** $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ is negatief.
- **b** De grafiek moet de x-as dan minstens één keer snijden, want de grafiek loopt van linksonder naar rechtsboven.

c $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \infty$, dus de grafiek van g loopt van linksboven naar rechtsonder, snijdt de x-as dus minstens één keer.

8

a $f'(x) = 3x^2 - 12$, dus $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
$f'(x)$ wisselt twee keer van teken, dus $f(x)$ heeft twee extremen, een maximum $f(-2) = -4$ en een minimum $f(2) = -36$.

b Verder $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, dus de grafiek van f gaat één keer door de x-as.
Omdat het maximum en het minimum onder de x-as liggen, snijdt de grafiek van f de x-as maar één keer.

c Klopt

d $\left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}\right)^3 = 16 + 3\left(\sqrt[3]{16}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{4} + 3 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^2 + 4 =$
$16 + 3 \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{16} + 3 \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{4} + 4 = 12 \cdot \left(\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{4}\right) + 20.$

e Bekijk de functie $f_a : x \to x^3 - 12x - a$, dan $f_a'(x) = 3x^2 - 12$
en $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$.
Twee oplossingen als de grafiek de x-as raakt, dus als $f_a(2) = 0 \Leftrightarrow a = -16$ of $f_a(-2) = 0 \Leftrightarrow a = 16$.
Drie oplossingen als het maximum boven de x-as ligt en het minimum eronder $\Leftrightarrow f_a(-2) > 0$ en $f_a(2) < 0 \Leftrightarrow 16 < a < 16$.

9

a $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = 169$, dus volgens de formule van Cardano: $x = \sqrt[3]{14 + 13} + \sqrt[3]{14 - 13} = 4$ is een oplossing.

b Definieer $f : x \to x^3 - 9x - 28$.
Je kunt de grafiek van f tekenen met de GR en je ziet dat die de x-as één keer snijdt.
Het kan ook anders.
Je kunt ook de extremen berekenen met behulp van de afgeleide. Het blijkt dan dat het maximum en het minimum onder de x-as liggen, dus de grafiek snijdt de x-as maar één keer.
Het kan nog anders.
Uit hoofdstuk 3 van klas 4vb weet je dat $x^3 - 9x - 28$ deelbaar is door $x - 4$. Je vindt: $x^3 - 9x - 28 = (x - 4)\left(x^2 + 4x + 7\right)$; de vergelijking $x^2 + 4x + 7 = 0$ heeft geen oplossingen.

10

a $\left(1 - \sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1 - \sqrt{-1}\right) + 2 = 1 - 2\sqrt{-1} + -1 - 2 + 2\sqrt{-1} + 2 = 0$

b $\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} = \sqrt[3]{1 - \sqrt{-7}^2} = \sqrt[3]{1 - -7} = 2$

c $x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}}$

d $\left(\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}}\right)^3 =$
$-1 + \sqrt{-7} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} + -1 - \sqrt{-7} =$

$$6\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{-7}}\right)-2$$

11 $x+y=2+3i+1-4i=3-i$; $x\cdot y=(2+3i)\cdot(1-4i)=2-8i+3i-12i^2=14-5i$

12

a -

b $-8i$ $\quad -2i \quad -1$

$2 \quad 3+4i \quad 4-3i$

$25 \quad 2i \quad -2+2i$

c $2i$ en $-2i$

d z

13

a $(z-1)^2=-1 \Leftrightarrow z^2-2z+1=-1 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$

b $z-1=\pm i$, dus $z=1\pm i$.

c Van links naar rechts

- $(z-3)^2=-25 \Leftrightarrow z-3=\pm 5i \Leftrightarrow z=3\pm 5i$
- $z^2-10z+29=0 \Leftrightarrow (z-5)^2=-4 \Leftrightarrow z-5=\pm 2i \Leftrightarrow z=5\pm 2i$
- $z^2-10z+27=0 \Leftrightarrow (z-5)^2=-2 \Leftrightarrow z-5=\pm i\sqrt{2} \Leftrightarrow z=5\pm i\sqrt{2}$
- $z^2-2iz+3=0 \Leftrightarrow (z-i)^2=-4 \Leftrightarrow z-i=\pm 2i$, dus $z=3i$ of $z=-i$.

14

a $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=1+3i\sqrt{3}+3\left(i\sqrt{3}\right)^2+\left(i\sqrt{3}\right)^3=1+3i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3}=-8$;

$\left(1-i\sqrt{3}\right)^3=1-3i\sqrt{3}+3\left(i\sqrt{3}\right)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^3=1-3i\sqrt{3}-9+3i\sqrt{3}=-8$

b $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^3=-\frac{1}{8}\cdot -8=1$;

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(1\sqrt{3}\right)^3=-\frac{1}{8}\cdot -8=1$s

c $z^3=1$

d $2\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)=-1-i\sqrt{3}$ en $2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)=-1+i\sqrt{3}$

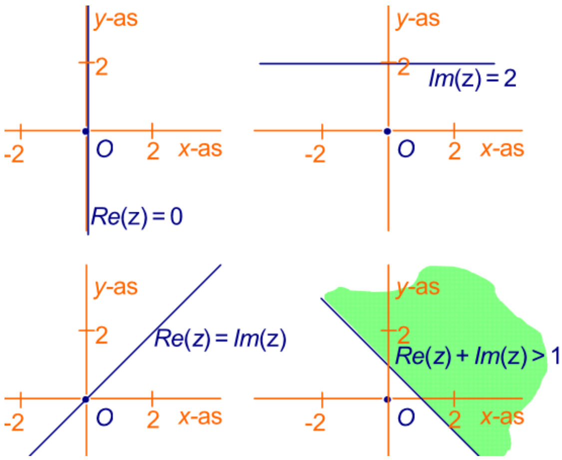
15

a $\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3=-4$, dus $\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}=\pm 2i$ (welke van de twee we nemen, doet er niet toe).

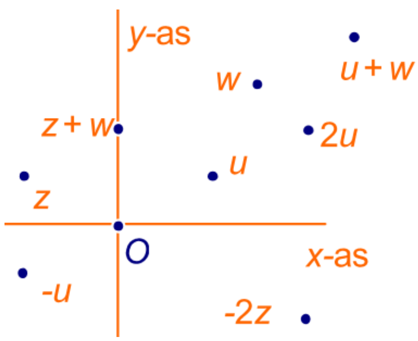
b $(-1+i)^3=-1+3i+-3i^2+i^3=-1+3i+3-i=2+2i$; $(-1-i)^3=-1-3i-3i^2-i^3=-1-3i+3+i=2-2i$

Het complexe vlak

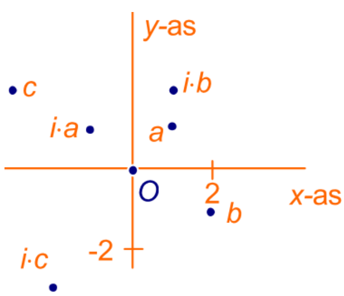
16 Zie figuur.



17 Zie figuur.



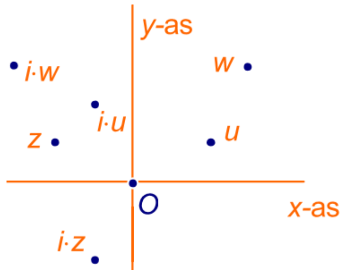
18 **a** Zie figuur.



b Zie figuur op de volgende bladzijde.

c Als $z = a + bi$, dan $iz = -b + ai$, dus het punt (a, b) wordt afgebeeld op $(-b, a)$. In paragraaf 5.6 van 4vb staat dat dit neerkomt op het linksom draaien om O over 90°.

19 **a** $1\frac{1}{4}\pi$; de afstand is $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.



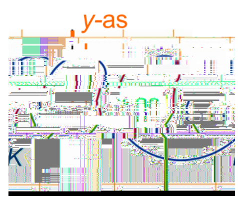
b Voor w: $\varphi = 1\frac{2}{3}\pi$ en de afstand is $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$.
Voor u: $\varphi = \pi$ en de afstand is 10.

c Die hoek is $\varphi = 2\pi - \alpha$, waarbij $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}$; je vindt: $\varphi = 5{,}3$.

20 **a** Dit volgt meteen uit het feit dat $a = r \cdot \cos(\varphi)$ en $b = r \cdot \sin(\varphi)$ als z correspondeert met (a, b).

b De punten z met: $\arg(z) = \frac{3}{4}\pi$ vormen de eenheidscirkel.
De punten z met: $|z| = 1$ liggenop de halve lijn met beginpunt 0 die door $-1 + i$ gaat.

c $0 < z \leq 4$, dus $0 < \arg(z) \leq 2\pi$. De snijpunten met de assen en de lijnen $y = x$ en $y = -x$ hebben de eigenschap dat $\arg(z) = k \cdot \frac{1}{4}\pi$ met k geheel, nu dus $k = 1, 2, \ldots, 8$.
Je vindt: $z = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}i\sqrt{2}$, $z = i$, $z = -\frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{4}i\sqrt{2}$, $z = -2$, $z = -1\frac{1}{4}\sqrt{2} - 1\frac{1}{4}i\sqrt{2}$, $z = -3i$, $z = 1\frac{3}{4}\sqrt{2} - 1\frac{3}{4}i\sqrt{2}$ en $z = 4$.



d Neem $t = |z|$ als parameter, dan $\varphi = \frac{1}{2}\pi t$ en
$(x, y) = \left(t \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right), t \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)\right)$.

21 **a** -

b Uit de somformules volgt:
$\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta) + i \cdot \cos(\alpha)\sin(\beta) =$
$\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot i$, dus $z \cdot w = rs \cdot (\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot i)$.

22 **a** Als je twee getallen met absolute waarde 1 vermenigvuldigt is de absolute waarde van het product ook 1. Dit volgt uit stelling 1.1.

b $\left|z^2\right| = |z|^2$, dit volgt ook uit stelling 1.1.

c $\arg\left(z^2\right) = 2 \cdot \arg(z)$ op een veelvoud van 2π na. Dit volgt direct uit stelling 1.2.

d Dan is z unitair, dit volgt direct uit stelling 1.1.

e In het eerste geval geldt: $|z| = z$, dus $Im(z) = 0$ en $Re(z) \geq 0$.
In het tweede geval geldt: $|z| = -z$, dus $Im(z) = 0$ en $Re(z) \leq 0$.

f $\arg(i) = \frac{1}{2}\pi$, dus $\arg(iz) = \arg(z) + \frac{1}{2}\pi$ op een veelvoud van 2π na.
$|i| = 1$, dus $|iz| = |z|$.
Dus iz ligt op dezelfde cirkel met middelpunt 0 en de hoek met de positieve reële as is $\frac{1}{2}\pi$ groter.

23 **a** Uit stelling 1.1 volgt dat $|z|^3 = 1$, dus $|z| = 1$.

b $\arg(1) = 0$, dus $\arg\left(z^3\right) = 3 \cdot \arg(z) = 0$ op een veelvoud van 2π na.

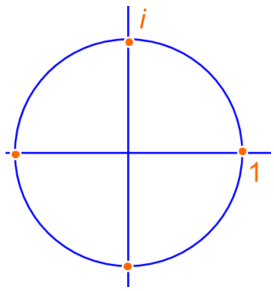
c $z = 1$, $z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $z = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

d Er geldt $|z| = 1$ en $4 \cdot \arg(z) = 0$ op een veelvoud van 2π na. Voor de tekening, zie figuur 1 hieronder.
De oplossingen zijn: $z = 1$, $z = i$, $z = -1$, $z = -i$

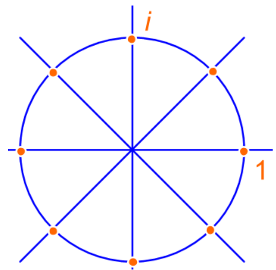
e Er geldt $|z| = 1$ en $8 \cdot \arg(z) = 0$ op een veelvoud van 2π na. Voor de tekening, zie figuur 2 hieronder.
De oplossingen zijn:
$z = 1$, $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$, $z = i$, $z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$, $z = -1$, $z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$,
$z = -i$, $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$.

24

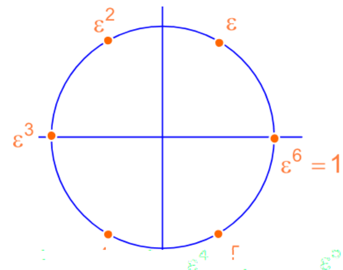
a Zie figuur 3 hieronder.



figuur 1 opgave 23



figuur 2 opgave 23



figuur 3 opgave 24

b $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

c Draaien over $60°$ in tegenwijzerrichting om 0.

d $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6 = 1$.

e $\varepsilon + \varepsilon^5 = 1$, $\varepsilon^2 + \varepsilon^4 = -1$, dus $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 = -1 + 1 + -1 = -1$.
Of: $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 = 0$, dus $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 = -\varepsilon^6 = -1$.

f Zie de figuur in onderdeel a. $-\varepsilon = \varepsilon^4$ en $\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon$.

g Zie figuur. Dat is de afstand van ε^2 tot 1, dus de lengte van de 'basis' van een gelijkbenige driehoek met tophoek $120°$ en twee zijden van lengte 1. Dus $\sqrt{3}$.

25

a $\arg(-1) = \pi$, dus $8 \cdot \arg(z) = \pi$ op een veelvoud van 2π na.

b Er geldt $|z| = 1$ en $\arg(z) = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$, met k geheel. Dus de oplossingen zijn:
$\cos\left(\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi\right)$, met $k = 0, 1, \ldots, 7$.

26

a $3 \cdot \arg(z) = \pi$ op een veelvoud van 2π na. Dus $\arg(z) = \frac{1}{3}\pi$, $\arg(z) = \pi$ of $\arg(z) = -\frac{1}{3}\pi$.

b $|z|^3 = 8$, dus $|z| = 2$.

c $z = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + 2i \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right)$ met k geheel, dus $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z = -1$, $z = 1 - i\sqrt{3}$.
Je kunt ook ook zeggen: je krijgt de oplossingen door die van $z^3 = 1$ met -2 te vermenigvuldigen.

27

a $3 \cdot \arg(z) = \arg(i) = \frac{1}{2}\pi$ op een veelvoud van 2π na, dus $\arg(z) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$.
Dus $z = \cos\left(\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right)$. Je vindt: $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$,
$z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ en $z = -i$.

b $3 \cdot \arg(z) = \arg(-i) = -\frac{1}{2}\pi$ op een veelvoud van 2π na, dus $\arg(z) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$.
Dus $z = \cos\left(-\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right)$. Je vindt: $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$,
$z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ en $z = i$.
Je kunt ook zeggen: het zijn de tegengestelden van de oplossingen uit a.

28

a $3 \cdot \arg(z) = \arg(2 + 2i) = \frac{1}{4}\pi$ op een veelvoud van 2π na, dus $\arg(z) = \frac{1}{12}\pi$,
$\arg(z) = \frac{3}{4}\pi$ of $\arg(z) = -\frac{7}{12}\pi$.
$|z|^3 = |2 + 2i| = \sqrt{8}$, dus $|z| = \sqrt{2}$.

b $z = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1 + i$

c $3 \cdot \arg(z) = \arg(2 - 2i) = -\frac{1}{4}\pi$ op een veelvoud van 2π na, dus $\arg(z) = -\frac{1}{12}\pi$,
$\arg(z) = \frac{7}{12}\pi$ of $\arg(z) = 1\frac{1}{4}\pi$ (ofwel $-\frac{3}{4}\pi$).
De oplossing is: $\sqrt{2} \cdot \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sqrt{2} \cdot \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -1 - i$.

29

$|z|^2 = \left|2 - 2i\sqrt{3}\right| = 4$, dus $|z| = 2$.
$2\arg(z) = \arg\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{3}\pi$ op een veelvoud van 2π na, dus $\arg(z) = -\frac{1}{6}\pi$ of
$\arg(z) = \frac{5}{6}\pi$.
De oplossingen zijn dus $2 \cdot \cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) + 2i \cdot \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - i$ en
$2 \cdot \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + 2i \cdot \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + i$.

De formule van de Moivre

30

a $|z| = 1$, dus $|z|^n = 1$.
$\arg\left(z^n\right) = n \cdot \arg(z) = n \cdot \varphi$ op een veelvoud van 2π na.

b De linkerkant zonder haakjes schrijven:
$(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^2 = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) + 2i \cdot \sin(\varphi)\cos(\varphi)$.
De rechterkant is $\cos(2\varphi) + i \cdot \sin(2\varphi)$.
Je krijgt de verdubbelingsformules: $\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)$ en
$\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$.

31

a $\arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\pi$, dus $\arg\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10}\right) = -\frac{2}{3}\pi$, dus
$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10} = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.
$\arg\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{3}\pi$, dus $\arg\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10}\right) = \frac{2}{3}\pi$, dus
$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

$\arg\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right) = \text{-}\frac{1}{4}\pi$, dus $\arg\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)^{10}\right) = \text{-}\frac{1}{2}\pi$, dus
$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)^{10} = \cos\left(\text{-}\frac{1}{2}\pi\right)+i\sin\left(\text{-}\frac{1}{2}\pi\right) = \text{-}i$.

b $1+i\sqrt{3} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$, dus $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10} = 2^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10} =$
$\text{-}512-512i\sqrt{3}$.

32

a Regel 1 is flauw.
Regel 2.
$\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i$ en
$\overline{(a+bi)}\cdot\overline{(c+di)} = (a-bi)\cdot(c-di) = (ac-bd)-(ad+bc)i$.
Dus: $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$.
Regel 3.
$(a+bi)\cdot\overline{(a+bi)} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2$, dus $z\cdot\overline{z} = |z|^2$.
Regel 4 en 5 zijn flauw.

b Als z oplossing is, dan $z^3 = 11z-20$, dus ook $\overline{z^3} = \overline{11z-20}$, dus $\overline{z}^3 =$
$\overline{11z}-\overline{20} = 11\,\overline{z}-20$.

c $(2+i)^3 = i^3+6i^2+12i+8 = 11i+2 = 11(i+2)-20$.
$\overline{2+i} = 2-i$ is ook oplossing.

33

Spiegelen in de reële as

34

a $z\cdot\dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{z\cdot\overline{z}}{|z|^2} = 1$

b $(1+i)^{-1} = \dfrac{1-i}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$;
controle: $(1+i)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}(1+i)(1-i) = \frac{1}{2}\left(1-i^2\right) = 1$.
$\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i}{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}} = \dfrac{12+18i}{4+9} = \frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$;
controle: $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i\right) = \frac{36}{13}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{36}{13}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right) = 1$.

c Dan $z^{-1} = \overline{z}$, dus spiegelen in de reële as.

d $\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\cdot i$

35

a $z = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

b $(2+i)^{-1} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$, dus $z = (2+i)^{-1}(4+3i) = \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)(4+3i) = 2\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.

c $(2+3i)\,z+3+i = \text{-}2+13i \Leftrightarrow (2+3i)\,z = \text{-}5+12i$, dus $z = (2+3i)^{-1}(\text{-}5+12i) =$
$\left(\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right)(\text{-}5+12i) = 2+3i$.

36

a $1\to 1$, $1+i\to\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ en $1-i\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

b De straal is $\frac{1}{2}$ en het middelpunt $\frac{1}{2}$ (dus $\frac{1}{2}+0\cdot i$.

c Een punt op de lijn $Re(z) = 1$ zijn van de vorm $1+t\cdot i$, met t uit $\mathbb{R}$. De inverse van zo'n punt is: $\dfrac{1}{t^2+1}-\dfrac{t}{t^2+1}\cdot i$.

Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $\frac{1}{2}$ en straal $\frac{1}{2}$ is: $\left(Re(z) - \frac{1}{2}\right)^2 +$ $(Im(z))^2 = \frac{1}{4}$.
We onderzoeken of de inverse hieraan voldoet.
$\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{t^2+1}\right)^2 = \frac{1}{(t^2+1)^2} - \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{4} + \frac{t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{4}$. Dus de punten z^{-1} met $Re(z) = 1$ liggen op de cirkel.

d $Re\left(z^{-1}\right)$ neemt alle waarden uit het interval $\langle\ 0, 1]$ aan en $Im\left(z^{-1}\right)$ alle waarden uit het interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, (teken de grafiek!).
Je krijgt één punt niet, namelijk 0. Je komt er wel van twee kanten dichtbij namelijk als $t \to \infty$ en als $t \to -\infty$.

Complex worteltrekken

37

a $c^2 = b$, want $\left|c^2\right| = r$ en $\arg\left(c^2\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}\varphi = \varphi$.

b $-c$ (of $-\sqrt{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right)$).

38

a $\arg(b) = \frac{1}{3}\pi$ en $|b| = 4$, we nemen dus c zó, dat $\arg(c) = \frac{1}{6}\pi$ en $|c| = 2$, dan $c = 2\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + 2i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{3} + i$.
Controle: $\left(\sqrt{3} + i\right)^2 = 3 + 2i\sqrt{3} - 1 = 2 + 2i\sqrt{3}$.

b We nemen c zó, dat $\arg(c) = \frac{1}{2}\arg(b) = \frac{1}{3}\pi$ en $|c| = \sqrt{|b|} = \sqrt{2}$.
Dan $c = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{6}$.
Controle: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{6}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{12} - \frac{6}{4} = -1 + i\sqrt{3}$.

c We nemen c zó, dat $\arg(c) = \frac{1}{2}\arg(b) = -\frac{1}{4}\pi$ en $|c| = \sqrt{|b|} = 1$.
Dan $c = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$.
Controle: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{4} - \frac{1}{2} = -i$.

39

Een verdubbelingsformule is: $\cos(2\beta) = 2\cos^2(\beta) - 1$.
Als je voor $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ invult krijg je: $\cos(\alpha) = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - 1$. Hieruit volgt de eerste formule.
Een andere verdubbelingsformule is: $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2(\beta)$. Hieruit vind je de tweede formule door weer $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ in te vullen.

40

a $|b| = 25$, dus $\cos(\alpha) = -\frac{7}{25}$ en $\sin(\alpha) = -\frac{24}{25}$.

b $\left|\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\alpha)} = \frac{3}{5}$ en $\left|\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\alpha)} = \frac{4}{5}$.
Omdat $-\pi < \arg(b) < -\frac{1}{2}\pi$ is bijvoorbeeld $\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{4}{5}$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = -\frac{3}{5}$.

c $c = \sqrt{|b|} = 5$, dus een oplossing $c = 5\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + 5i\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = -3 + 4i$.
De andere oplossing is $3 - 4i$.

Controle: $(3-4i)^2 = 9 - 24i - 16 = b$.

41

a $\mathrm{e}^{i\alpha} \cdot \mathrm{e}^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i\sin(\beta)) =$ $(\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)) + i\cdot(\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)) =$ $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}$.

b $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{Re(z+w)} \cdot \mathrm{e}^{i\arg(z+w)} = \mathrm{e}^{Re(z)} \cdot \mathrm{e}^{Re(w)} \cdot \mathrm{e}^{i\arg(z)} \cdot \mathrm{e}^{i\arg(w)} = \mathrm{e}^{z} \cdot \mathrm{e}^{w}$.
Dat $\mathrm{e}^{Re(z+w)} = \mathrm{e}^{Re(z)} \cdot \mathrm{e}^{Re(w)}$ volgt uit de eigenschappen van machten in $\mathbb{R}$ ne dat $\mathrm{e}^{i\arg(z+w)} = \mathrm{e}^{i\arg(z)} \cdot \mathrm{e}^{i\arg(w)}$ volgt uit onderdeel a.

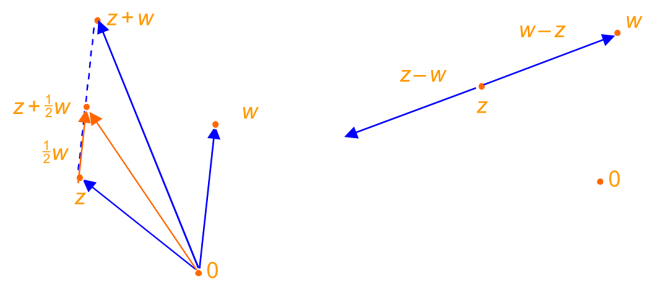
c $\arg(i\pi) = \frac{1}{2}\pi$, dus $\mathrm{e}^{i\cdot\pi} = (\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1$

Meetkunde met complexe getallen

42

a $w - z$, $-w$

b Zie figuur.



c $\frac{1}{2}(z+w)$

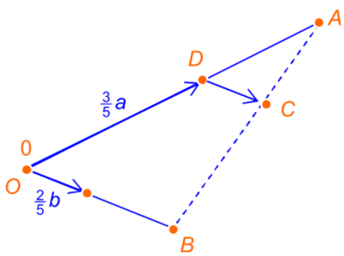
d Ze vormen de lijn door 0 en w.

e $z + \frac{1}{2}(w - z) = \frac{1}{2}(z+w)$

f Ze vormen de lijn door w en z.

g Die getallen vormen het lijnstuk met eindpunten z en w.

h Zie figuur.
Het punt bij $\frac{3}{5}a$ noemen we D. Dan zijn de driehoeken ADC en AOB gelijkvormig, dus $AC : CB = AD : DO = 2 : 3$.



43

a $m = \frac{1}{2}(a+b)$

b Dit volgt uit bovenstaande stelling met $z = \frac{1}{2}(a+b)$, $w = c$, $s = \frac{2}{3}$ en $t = \frac{1}{3}$.

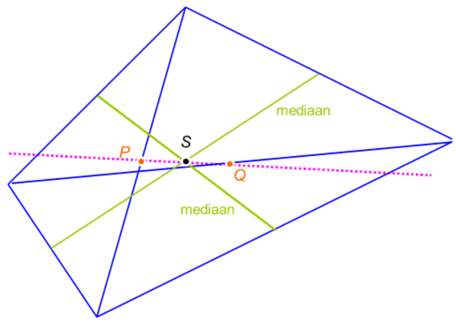
c $v = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$

d Omdat $v = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ symmetrisch in a, b en c is.

e Uit onderdeel b van deze opgave en onderdeel h van opgave 42 volgt:
$CV : VM = 2 : 1$.

44

a Zie figuur.
P en Q zijn middens van diagonalen;
S is het snijpunt van de medianen.



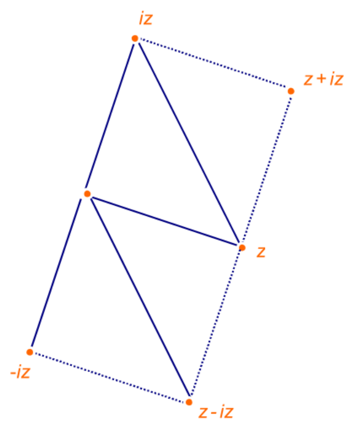
b Noem de hoekpunten van de vierhoek A, B, C en D en de bijbehorende complexe getallen a, b, c en d.
Bij het midden M van AB hoort het complexe getal $m = \frac{1}{2}(a+b)$.
Bij het midden N van CD hoort het complexe getal $n = \frac{1}{2}(c+d)$.
Het midden van M en N ligt op mediaan MN. Het complexe getal dat hierbij hoort is: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)\right) = \frac{1}{4}(a+b+c+d)$.
Vanwege de symmetrie in deze uitdrukking ligt dit punt ook op de andere mediaan.
Het getal dat bij het midden P van AC hoort is $\frac{1}{2}(a+c)$ en bij het midden Q van BD: $\frac{1}{2}(b+d)$.
Het getal bij het midden van PQ is $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(b+d)\right) =$
$\frac{1}{4}(a+b+c+d)$. Dit getal hoort bij het snijpunt van de medianen.

45

a Zie figuur.
b Een vierkant
c Een vierkant

46

a Eindpunt pijl 1: $-ia$; eindpunt pijl 2: ib.
b $p = -ia - b$ en $q = ib - a$,
c Klopt
d p krijg je door q een kwartslag tegen de wijzers van de klok in te draaien. Dus p en q zijn even lang en staan loodrecht op elkaar.

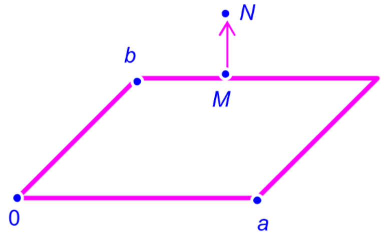


figuur bij opgave 45

47

a Zet op de zijden van een parallellogram vierkanten. De middens van die vierkanten zijn hoekpunten van een vierkant.

b Zie figuur.
M is het midden van een zijde van het parallellogram en N het midden van van een vierkant op de zijden.
Dan $m = b + \frac{1}{2}a$ en $n - m = \frac{1}{2}ia$, dus
$n = b + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}ia$.
c De middens van de vierkanten op de zijden van het parallellogram vanaf N met de klok mee noemen we P, Q en R.



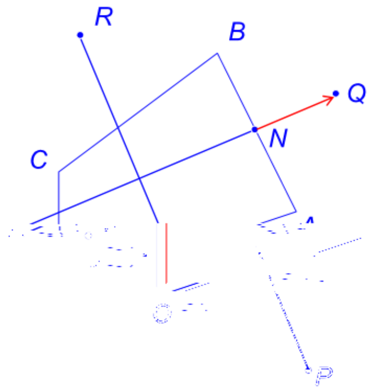
figuur bij opgave 47

Dan $p = a + \frac{1}{2}(b - ib)$, $q = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ia$ en $r = \frac{1}{2}(b + ib)$.

d Uit onderdeel c volgt:
$n - p = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}ia + \frac{1}{2}ib$,
$p - q = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}ia - \frac{1}{2}ib$,
$q - r = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}ia - \frac{1}{2}ib$ en
$r - n = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}ia + \frac{1}{2}ib$.
Dus: $p - q = -i(n - p)$, , $q - r = -i(p - q)$, $r - n = -i(q - r)$.
Hieruit volgt: bij draaiing over een kwartslag in wijzerrichting is
lijnstuk QP het beeld van lijnstuk PN,
lijnstuk RQ het beeld van lijnstuk QP,
lijnstuk NR het beeld van lijnstuk RQ.
Dus is $NPQR$ een vierkant.

48

a Zie figuur.
N is het midden van zijde AC. Dan $n = a + \frac{1}{2}(c - a)$ en $\overrightarrow{NQ} = \frac{1}{2}i(a - c)$, dus $q = a + \frac{1}{2}(c - a) + \frac{1}{2}i(a - c) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}ia - \frac{1}{2}ic$.
Op soortgelijke wijze vind je:
$p = \frac{1}{2}(a - ia)$, $s = \frac{1}{2}(b + ib)$ en $r = \frac{1}{2}(b + c) + \frac{1}{2}i(c - b)$.



b $r - p = \frac{1}{2}(-a + b + c) + \frac{1}{2}i(a - b + c)$ en
$s - q = \frac{1}{2}(-a + b - c) + \frac{1}{2}i(-a + b + c)$

c Er geldt: $i(r - p) = s - q$, dus lijnstuk QS krijg je uit lijnstuk PR door een kwartslag linksom te draaien.

49

Het hoekpunt tegenover A hoort bij $a + i(a - p)$; het hoekpunt tegenover B bij $b - i(b - p)$. Dan $m = \frac{1}{2}(a + i(a - p) + b - i(b - p)) = \frac{1}{2}(a + b + ia + ib)$, onafhankelijk van p.

50

a -

b Het punt in het vlak bij $a+b$ noemen we D. Dan is $OADB$ een ruit omdat $OA = OB$. Het gevraagde volgt uit het feit dat de diagonalen in een ruit loodrecht op elkaar staan.

c $\overrightarrow{HC}$ representeert $c - h = a + b$, dus uit onderdeel a volgt dat CH loodrecht op AB staat.

d Omdat de formule voor h symmetrisch is in a, b en c, is H het hoogtepunt van driehoek ABC.

e De punten bij 0, $h = a + b + c$ en $z = \frac{1}{3}(a + b + c)$ liggen op één lijn en $h = 3z$.

51

a Noem de hoogtepunten van de vier driehoeken achtereenvolgens H_1, H_2, H_3 en H_4.
In opgave 50 hebben we bewezen:
$h_1 = a + b + c$, $h_2 = a + b + d$, $h_3 = a + c + d$ en $h_4 = b + c + d$.

b Uit onderdeel a volgt: $h_1 - h_2 = c - d$, dus H_1H_2 is evenwijdig met en even lang als CD enzovoort.

52

Noem de zwaartepunten van de vier driehoeken achtereenvolgens Z_1, Z_2, Z_3 en Z_4.
Dan is $z_1 = \frac{1}{3}(a + b + c)$, , $z_2 = \frac{1}{3}(a + b + d)$, $z_3 = \frac{1}{3}(a + c + d)$ en $z_4 = \frac{1}{3}(b + c + d)$.

Dan $z_1 - z_2 = \frac{1}{3}(c - d)$, dus Z_1Z_2 is evenwijdig met CD en de lengte van Z_1Z_2 is $\frac{1}{3}$ van de lengte van CD enzovoort.

53

a $|\varepsilon| = 1$ en $\arg(\varepsilon) = \frac{1}{3}\pi$, dus vermenigvuldigen met ε is linksom draaien over 60°. Bovendien geldt: $|\varepsilon^n| = 1$ voor elke postitieve gehele waarde van n.

b Rechtsom draaien over 60°.

c ε^2 is het spiegelbeeld van ε in de imaginaire as, dus $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en dus $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$.

d $\varepsilon^4 = -\varepsilon$ en $\varepsilon^5 = -\varepsilon^2 = -\varepsilon - 1$.

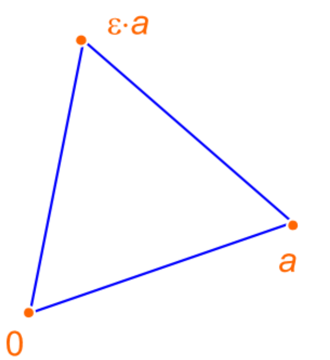
54

a Zie figuur 1 hieronder.

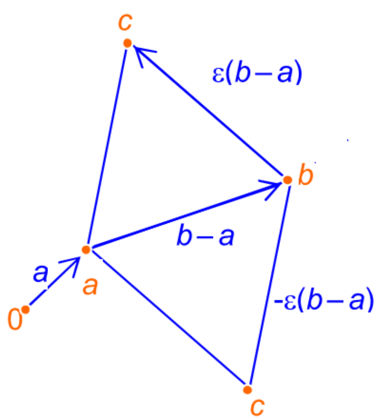
b Het is een regelmatige driehoek .

c $\varepsilon a + a$

d Zie figuur 2. $c = b + \varepsilon(b - a) = (1 + \varepsilon)b - \varepsilon a$ of $c = b - \varepsilon(b - a) = (1 - \varepsilon)b + \varepsilon a$.



figuur 1



figuur 2

55

We kiezen de oorsprong van het complexe vlak in T. Da: $b = \varepsilon a$ en $d = \varepsilon c$, dus $d - c = \varepsilon(b - a)$.

56

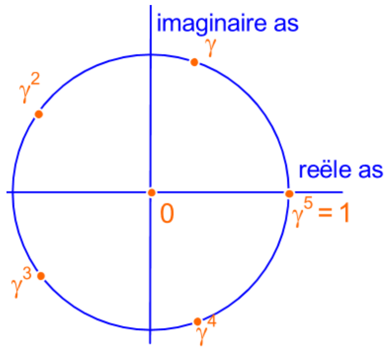
We nemen het punt A als oorsprong. Dan:
$p = c + \varepsilon(b - c) = c + \varepsilon b - \varepsilon c$,
$q = \varepsilon c$ en $r = \varepsilon^2 \cdot b$.
Verder: $z_A = \frac{1}{3}(p + b + c)$, $z_B = \frac{1}{3}(c + q)$ en $z_C = \frac{1}{3}(b + r)$.

We moeten aantonen dat:
$\left(z_C - z_B\right) = z_A - z_C \Leftrightarrow \left(\varepsilon - \varepsilon^3\right) b - \left(\varepsilon + \varepsilon^2\right) c = (\varepsilon + 1)\, b + (1 - 2\varepsilon)\, c \Leftrightarrow$
$\left(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1\right) c = 0.$
Dit laatste volgt uit opgave 53c.

Extra opgaven

1 Van links naar rechts.
$(i+1)\, z + 2 = i \Leftrightarrow z = (i+1)^{-1} \cdot (-2 + i) = \dfrac{1-i}{2} \cdot (-2+i) = 1\frac{1}{2}i - \frac{1}{2};$
$(1-3i)\, z + 10i = 20 \Leftrightarrow z = (1-3i)^{-1}\,(20 - 10i) = \left(\dfrac{1+3i}{10}\right)(20-10i) = -1 + 5i;$
$z^2 + 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow (z+2)^2 = -9 \Leftrightarrow z = 2 \pm 3i;$
$z^2 - 2iz + 15 = 0 \Leftrightarrow (z-i)^2 = -16 \Leftrightarrow z = i \pm 4i$, dus $z = 5i$ of $z = -3i$.

2
- **a** $\arg(z) = -\arg(\overline{z})$ op een veelvoud van 2π na.
- **b** Zie figuur.
  $\overline{z}$ is het spiegelbeeld van z in de reële as, dus
  $\overline{\gamma} = \gamma^4$ en $\overline{\gamma}^2 = \gamma^3$.
- **c** Meetkundig: als je γ^4 een kwartslag linksom om 0 draait, krijg je $i \cdot \gamma^4$, het punt op de eenheidscirkel met argument $\frac{1}{2}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{1}{5}\pi$ op een veelvoud van 2π na.
  Algebraïsch: $i^{20} \cdot \gamma^{80} = 1 \cdot 1$.
- **d** δ^2 heeft argument $\frac{2}{5}\pi$, dus de oplossingen zijn δ^{2k}, met $k = 0, 1, \ldots, 9, 10$.



3
- **a** $\arg(z \cdot \overline{w}) = \arg(z) - \arg(\overline{w}) = \frac{1}{4}\pi$ en
  $|z \cdot \overline{w}| = |z| \cdot |w| = 3\sqrt{2}$, dus $z \cdot \overline{w} =$
  $3\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + 3\sqrt{2} \cdot i \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 3 + 3i.$
- **b** In driehoek OZW geldt: $OZ = 3$, $OW = \sqrt{2}$ en hoek $WOZ = \frac{1}{4}\pi$.
  $|z - w| = WZ$ kun je met de cosinusregel in driehoek OZW berekenen:
  $WZ^2 = 9 + 2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 5$, dus $|z - w| = \sqrt{5}$.
- **c** $\arg\left(\overline{w}^3\right) = 3 \cdot \arg(\overline{w}) = -\frac{1}{4}\pi$ en $\left|\overline{w}^3\right| = |\,\overline{w}\,|^3 = 2\sqrt{2}$, dus
  $\overline{w}^3 = 2\sqrt{2}\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) + 2\sqrt{2} \cdot i \cdot \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = 2 - 2i.$

4
- **a** $(3+2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$ en $(5 + 12i)^2 = 25 + 120i - 144 = -119 + 120i$.
- **b** We noemen het getal $-119 + 120i$ even p. Dan zijn de oplossingen van de vergelijking p, ip, $i^2 p = -p$ en $i^3 p = -ip$.
  Dus de oplossingen zijn: $-119 + 120i$, $-120 - 119i$, $119 - 120i$ en $120 + 119i$.
- **c** $\arg\left((1+i)^{10}\right) = 10 \cdot \arg(1+i) = 2\frac{1}{2}\pi$ en $\left|(1+i)^{10}\right| = \sqrt{2}^{10} = 32$, dus
  $(1+i)^{10} = -32i$.

5

a $w^3 - 2w + 4 = 0$, dus $\overline{w^3 - 2w + 4} = 0$^.
Uit regel 1 en 2 vóór opgave 32 volgt hieruit dat $\overline{w}^3 - 2\,\overline{w} + 4 = 0$

b $(z - 1 + i)(z - 1 - i)(z - a) = \left(z^2 + 2\right)(z + a)$, dus (als je naar de constante term kijkt:) $a = 2$.

c $1 + i$, $1 - i$ en -$2z$

6

Er geldt: $p = \frac{1}{2}a$, $q = \frac{1}{2}(a + b)$, $r = \frac{1}{2}(b + c)$ en $s = \frac{1}{2}c$.
Dus $r - q = q - p = \frac{1}{2}b$.
Dus de zijden PQ en RS zijn evenwijdig en even lang, dus $PQRS$ is een parallellogram.

7

a -

b $q = z - i(p - z)$, $r = w - i(q - w) = w - iz - p + z - iw$.

c Het complexe getal bij het midden is: $\frac{1}{2}(p + r) = \frac{1}{2}(p + w - iz - p + z - iw) = \frac{1}{2}(w - iw + z - iz)$, dit hangt niet van p af.

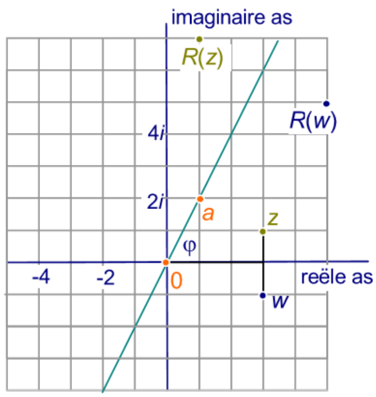
8

a Met $|a| = \sqrt{5}$.

b Zie figuur.

c $az = (1 + 2i)(3 + i) = 3 - 2 + i(6 + 1) = 1 + 7i$, klopt.

d We zoeken het getal s met $as = p$, dus $s = a^{-1} \cdot p = \dfrac{1 - 2i}{5} \cdot (5 - 7i) = s = -\frac{9}{5} - \frac{17}{5}i$.
Het spiegelbeeld van $p = as$ is dan $a\,\overline{s} = (1 + 2i)\left(-\frac{9}{5} + \frac{17}{5}i\right) = -\frac{26}{5} - \frac{1}{5}i$.



9

a Dan kun je voor $a = i$ nemen. Dan $a^2 \cdot \overline{p} = -\overline{p}$. Als $p = a + bi$, dan $-\overline{p} = -(a - bi) = -a + bi$, dat is het spiegelbeeld van p in de imaginaire as.

b Dan is a^2 linksom draaien om 0, dus vermenigvuldigen met i. Dus als $p = a + bi$, dan $i\,\overline{p} = i(a - bi) = b + ai$, dus het spiegelbeeld van (a, b) is (b, a).

c Een unitair getal op die lijn is $a = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}$. Dan $a^2 = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi i} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi i}$.

d De lijn waarin gespiegeld wordt is de middelloodlijn van de punten $3 + 3i$ en $3\sqrt{2}$.
Het kwadraat van het unitaire getal op deze lijn is $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$, dus het beeld van $a + bi$ is $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)(a - bi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(a + b + (a - b)i)$.
Als $a = b = 3$ levert dit $3\sqrt{2}$ op.

5 Inleiding complexe getallen

1. Voor alle a en b geldt: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. Gebruik de somformules goniometrie.
3. Gebruik onderdeel a en neem telkens twee machten van ε handig samen.
4. De punten op de lijn $Re\,(z) = 1$ zijn van de vorm $1 + t \cdot i$, met t uit $\mathbb{R}$.
5. Je kunt met complexe getallen bewijzen dat het midden van een mediaan ook op de andere mediaan ligt én op de verbindingslijn van de middens van de diagonalen.
6. Bijvoorbeeld $q = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}ia - \frac{1}{2}ic$
7. Gebruik opgave 50c.
8. Gebruik opgave 53.
9. Werk via $\left|(1+i)^{10}\right|$ en $\arg\left((1+i)^{10}\right)$.
10. Gebruik de regels 1 en 2 vóór opgave 32.
11. Zoek eerst het getal s met $as = p$.

Index