vwo wiskunde d

continue dynamische modellen

de Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen

Homepage www.wageningse-methode.nl

ISBN xxx

Illustraties Wilson Design Uden

Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit hoofdstuk gaat over continue dynamische modellen.
Hierin bekijken we modelmatig hoe iets zich ’vloeiend’ (vandaar: continu) ontwikkelt (vandaar: dynamisch).
Het hoofdstuk behoort tot de stof van het vak 456 vwo wiskunde d.
Alles draait eigenlijk om **differentiaalvergelijkingen** en de oplossingen daarvan. Die oplossingen zijn functies. Dat is wennen.
In de eerste negen paragrafen wordt alleen maar gevraagd om te controleren dat bepaalde functies oplossingen van een differentiaalvergelijking zijn.
In de laatste paragraaf **Rekentechniek** kun je leren een beperkt aantal differentiaalvergelijkingen ’op te lossen’.

Bekend verondersteld wordt hoe je op de grafische rekenmachine met rijen werkt.
Verder moet je ook kunnen primitieveren, zie bijvoorbeeld hoofdstuk 12 wiskunde B van de Wageningse Methode.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

In deze versie van 17 november 2020 zijn fouten in de vorige versie verbeterd.

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad
op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

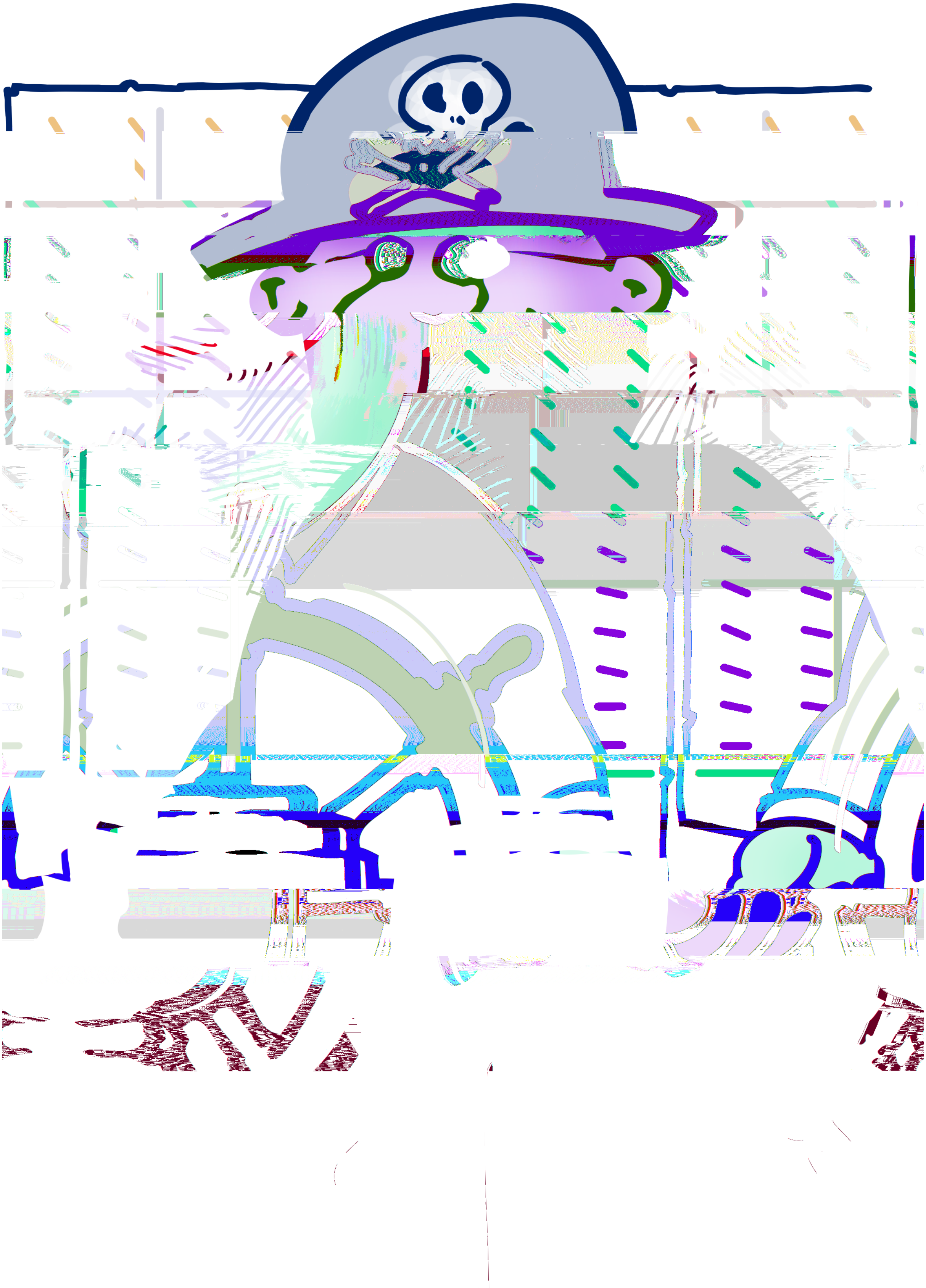
Echt, moet kunnen
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen los-sen.

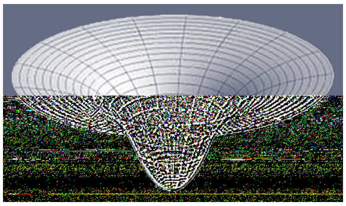
Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.



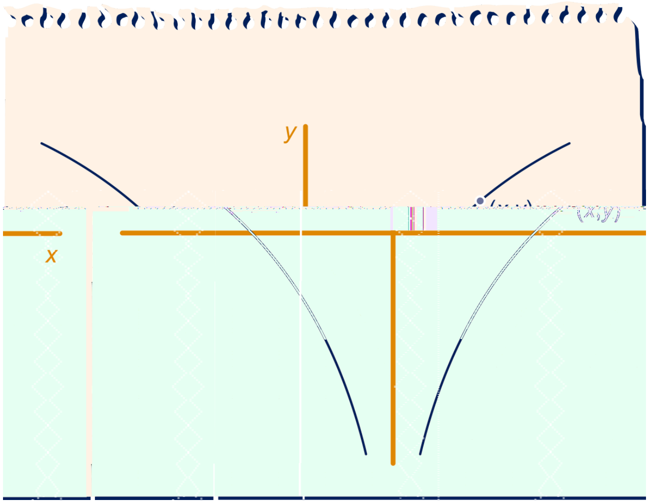


De gravitatieput is een trechter waarin je een munt kunt laten ronddraaien. De munt zal in een spiraal naar het midden rollen om ten slotte in het gat in het midden te verdwijnen.

Nevenstaande foto en onderstaande tekst komen van *Technopolis* in Mechelen.

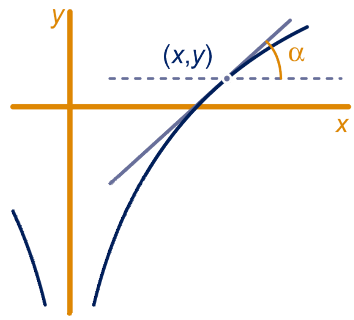
Het muntje wordt net-niet-evenwijdig met de bovenrand van de put gelanceerd, zodat het een naar binnen spiraliserende baan beschrijft. Uiteindelijk, na een opmerkelijk lange tijd, valt het muntje in het gat onderin de put. De put heet gravitatieput omdat de baan van het muntje goed vergelijkbaar is met de baan van een komeet of een ander stuk ruimtegruis dat naar de Zon toevalt. Ook dat zal in steeds kleinere kringen om de Zon heen spiralen, om uiteindelijk verzwolgen te worden. In een nog extremere vorm is dit ook de baan van een ster die in een zwart gat gezogen wordt. De baan van de komeet naar de Zon en van de ster naar het zwarte gat zijn uiteindelijk allebei toepassingen van de wet van de zwaartekracht, ook wel de wet van de gravitatie genaamd. De baan van het muntje is ook een toepassing van die gravitatie: het gaat steeds dieper de put in door de aantrekkingskracht van de Aarde. Het muntje beweegt steeds sneller. Of lijkt het alleen maar zo, omdat de kringen die het beschrijft steeds kleiner worden?

Wat is de vorm van de gravitatieput? Welke grafiek moet je om de y-as wentelen om de gravitatieput te krijgen?

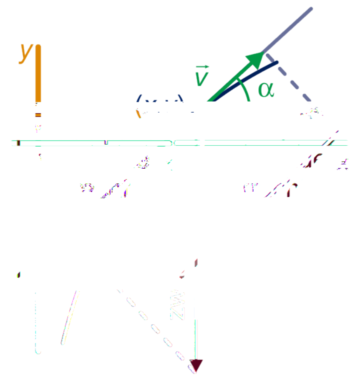


1 Stel dat de ronddraaiende munt zich in het punt (x, y) bevindt; noem de hellingshoek aldaar α. Er werken twee krachten op de munt:

- de verticale zwaartekracht: $m \cdot g$,
- de horizontale middelpuntvliedende kracht: $m \cdot \frac{v^2}{x}$



Hierbij is m de massa van de munt in kg, v de snelheid van de munt in m/s en g de gravitatieconstante.
Als we willen dat het muntje op elke hoogte perfecte horizontale cirkels gaat draaien, moeten de componenten van beide krachten langs de raaklijn in het punt (x, y) tegengesteld zijn.



a Leg uit dat daarvoor moet gelden:

$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot \frac{v^2}{x} \cdot \cos(\alpha)$$

b Leg uit dat hieruit volgt: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{x}$.

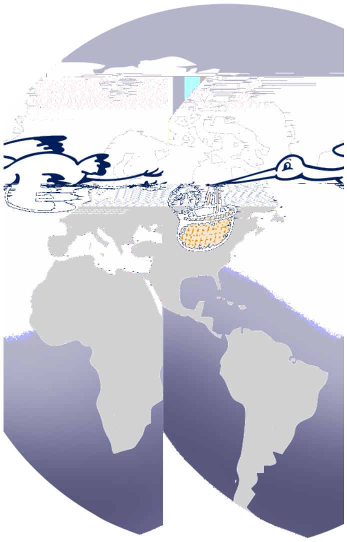
Als de munt in een horizontale baan draait en dus niet naar beneden spiraalt, is de snelheid v constant.

c Ken je een functie waarvoor de formule in **b** geldt?

De formule in onderdeel **b** is een zogenaamde **differentiaalvergelijking**. De formule geeft een verband tussen de functie $x \to y(x)$ en zijn afgeleide $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
Over dergelijke verbanden gaat dit hoofdstuk.
De functie in onderdeel **c** heet een oplossing van de differentiaalvergelijking.
In de gravitatieput krijgt het muntje niet een horizontale beginsnelheid, maar is die iets naar beneden gericht. Daardoor zal het muntje niet in een horizontale cirkelbaan bewegen, maar zal het steeds lager komen. Daarbij neemt de snelheid van het muntje toe; het valt immers naar de aarde. Dus is v niet constant. De differentiaalvergelijking wordt dan ingewikkelder.

2

De wereldbevolking 1



Op 1 januari 2010 telt de wereld 6,84 miljard mensen en groeit jaarlijks met 1,1 %. Veronderstel dat dit percentage de komende jaren hetzelfde blijft.

a Bereken dan de wereldbevolking 1 januari van de jaren 2011 tot en met 2015.

Merk op dat in dit model de wereldbevolking niet lineair groeit.

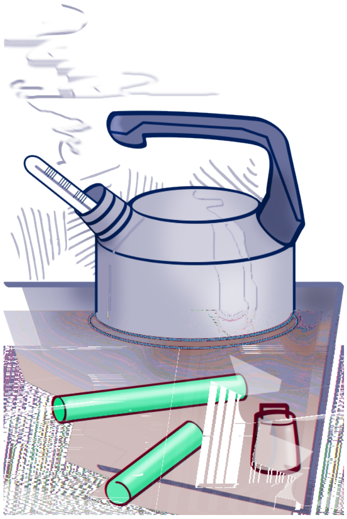
b Leg dat uit.

c Geef een formule voor de wereldbevolking in het jaar $2000+t$.

Opmerking
De Verenigde Naties gaat ervan uit dat de bevolkingsgroei na 2020 zal afzwakken.

3

Een ketel kokend water



Een ketel kokend water wordt in de buitenlucht geplaatst. Volgens een principe uit de natuurkunde is het temperatuurverlies van de ketel per minuut evenredig met het temperatuurverschil tussen de ketel en zijn omgeving. De buitenlucht heeft een temperatuur van 0°C. Wij nemen voor de evenredigheidsconstante $0{,}2$. Dus na 1 minuut is de temperatuur $100 - 0{,}2 \cdot 100 = 80°$ C.

a Bereken de temperatuur na 2, 3, 4 en 5 minuten.

b Geef een formule voor de temperatuur T van het water in de ketel in °C na t minuten.

Je laat dezelfde ketel kokend water in de kamer afkoelen. De kamertemperatuur is 20°C.

c Geef een formule voor de temperatuur U van het water in de ketel in °C na t minuten.

Discussie

- Hoe snel de temperatuur afneemt hangt af de grootte van de temperatuur op dat moment.
- Hoe snel een bevolking toeneemt, hangt af van de grootte van de bevolking op dat moment.
  Zoiets komt vaker voor:
- Hoe snel een spaarkapitaal groeit, hangt af van de grootte van het kapitaal.
- Hoe snel een griep om zich heen grijpt, hangt af van het aantal mensen dat de griep al heeft en van het aantal mensen dat de griep nog niet heeft (de vatbaren)

Dit zijn voorbeelden van een dynamisch model. Hiermee heb je in het hoofdstuk *Discrete dynamische modellen* al kennis gemaakt.

We spreken van een model omdat de werkelijkheid (sterk) wordt vereenvoudigd.
Bij de afkoeling van de ketel water is bijvoorbeeld de buitenlucht op constant $0°$ C gesteld.
Bij de bevolkingsgroei zijn de aannames erg twijfelachtig dat het percentage geboortes en door migratie constant zijn.
Een model beschrijft de werkelijkheid zelden helemaal goed. Toch is het zinvol om met modellen te werken, omdat ze inzicht geven hoe het proces zich globaal zou kunnen ontwikkelen.
We hebben de bevolkingtoename per heel jaar bekeken en de afkoeling per minuut. Maar de bevolking groeit voortdurend en de ketel water koelt voortdurend af. In feite zijn dit dus continue processen. Zo gaan we ze nu bekijken.
De Nederlandse bevolking neemt weliswaar steeds met één mens toe of af, maar omdat het over zulke grote aantallen gaat, kunnen we het toch als (nagenoeg) continu beschouwen.

De Engelse dominee Malthus publiceerde in 1798 het boek *An Essay on the principle of population*. In dat boek beschreef hij een model voor bevolkingsgroei. Binnen een gesloten bevolking zal zowel het aantal geboorten als het aantal sterfgevallen gedurende een zeker tijdsinterval evenredig zijn:
- met het aantal leden van de bevolking op het tijdstip t, zeg $N(t)$ of kortweg N, en
- met de lengte van het tijdsinterval, zeg Δt.

4 **De wereldbevolking 2**

Als dat het geboortepercentage per jaar gelijk is aan g en het sterftepercentage aan s, dan wordt de toename ΔN van de bevolking gedurende een tijdsinterval van lengte Δt gegeven door: $\Delta N = \frac{g-s}{100} \cdot N \cdot \Delta t$.

a Ga dat na.

Het getal $\frac{g-s}{100}$ heet de groei-index, ook wel het bevolkingsoverschot genoemd.
De groei-index korten we af met k. Als we Δt tot 0 laten naderen, dan gaat $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ naar $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$. De bevolkingsgroei volgens Malthus wordt dan beschreven door: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = k \cdot N$, Het bevolkingsoverschot is 17 per duizend mensen. Dat wil zeggen dat de wereldbevolking in één jaar tijd met 17duizendste deel toeneemt. We rekenen de tijd t in jaren sinds 1900 en de bevolking N in miljarden ($t = 0$ in 1900).
Er geldt dus: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0{,}017 \cdot N$.

b Ga na dat de functie $N = a \cdot \mathrm{e}^{0{,}017t}$ voor elke getal a hieraan voldoet.

In 1987 werd de vijfmiljardste aardbewoner geboren.

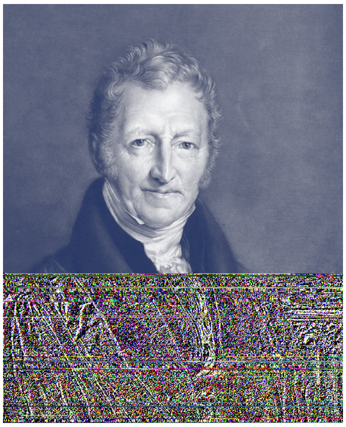
c Bereken a.

d Voorspel op grond van dit model wanneer de wereld haar tienmiljardste bewoner kan verwelkomen.

Het is duidelijk dat er maar één functie t is waarvoor geldt: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0{,}017N$ en $N(87) = 5$.
$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0{,}017N$ is weer een differentiaalvergelijking.
Tezamen met de waarde $N(87) = 5$ beschrijft de differentiaalvergelijking het continue dynamische proces.

Het volgende schrijft Peter Ekamper in het blad *Demos* in 2017.
Stond de teller in 2011 nog op 7 miljard, inmiddels is de wereldbevolking de grens van $7\frac{1}{2}$ miljard mensen gepasseerd. En hoewel het groeitempo daalt verwachten de Verenigde Naties nog een verdere bevolkingsgroei, op de lange termijn mogelijk tot ruim 11 miljard mensen.

Malthus was een pessimistisch econoom. Hij voorspelde dat de wereldbevolking exponentieel zou groeien en dat de voedselproductie lineair zou groeien. Er zouden daarom hongersnoden uitbreken, tenzij er maatregelen werden getroffen om de bevolkingsgroei af te remmen.
Malthus profeteerde dus overbevolking. Achteraf bleek zijn theorie niet te kloppen. De landbouw is namelijk zo sterk gegroeid dat veel meer mensen konden worden gevoed dan Malthus dacht. Maar het idee dat de bevolkingsgroei en de groei van de landbouw op elkaar moeten worden afgestemd blijft overeind.
Het befaamde Rapport van de Club van Rome uit 1972 is daarop gebaseerd.



Thomas Malthus 1766-1834

5 **Afkoeling**

De temperatuur van de ketel water in opgave 3 noemen we T (in °C), de tijd t (in minuten). In het begin is de temperatuur van de ketel 100°C, dus $T(0) = 100$.
Het verlies aan warmte tussen de tijdstippen t en $t + \Delta t$ is evenredig met Δt en met $T(t)$. Hierbij is c een negatieve constante.
Dus $T(t + \Delta t) - T(t) = c \cdot T(t) \cdot \Delta t$.

a Laat zien dat hieruit volgt dat $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = c \cdot T$.

b Toon aan dat de functie $T = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot t}$ hieraan voldoet voor elk getal a.

c Bereken hoe groot in dit geval a is.

Veronderstel dat de temperatuur na 5 minuten 30°C is.

d Bereken de evenredigheidsconstante c.

e Na hoeveel minuten is de temperatuur 10°C?

Het is duidelijk dat er maar één functie T is waarvoor geldt: $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}24 \cdot T$ en $T(0) = 100$.

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}24 \cdot T$ is een differentiaalvergelijking. Tezamen met met de waarde $T(0) = 100$ beschrijft de differentiaalvergelijking het continue dynamische proces.

Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking voor een functie waarin, naast eventueel de functie zelf, de afgeleide van die functie voorkomt. Als er bovendien één waarde van de functie gegeven is, is de functie in het algemeen helemaal bepaald. Het is zaak die ene functie te vinden: dat is de **oplossing** van de differentiaalvergelijking.

Differentialen

In een differentiaalvergelijking wordt een verband gelegd tussen twee differentialen, hierboven dT en dt. Differentialen werden geïntroduceerd door Duitse wiskundige G.W.Leibniz (1646-1716); zie ook wiskunde B, hoofdstuk 6 Inleiding differentiëren.

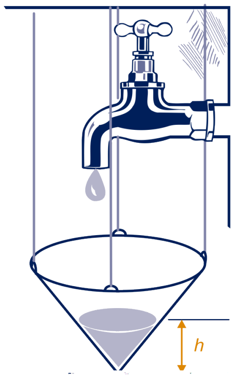
In de opgaven komt steeds een verhouding van differentialen voor, zoals $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. Die kun je, zoals je gewend bent, steeds lezen als de afgeleide van T als functie van t.

Uit Wikipedia

Leibniz

6

Een trechter vullen



We laten een kegelvormige trechter vol water lopen. De vulsnelheid is constant, dat wil zeggen dat er elke minuut evenveel water uit de kraan stroomt. Als we beginnen is de trechter nog leeg. We bekijken de hoogte h (in dm) van de vloeistofspiegel als functie van de tijd t (in minuten).

$\frac{dh}{dt}$ is de snelheid waarmee de hoogte van de waterspiegel toeneemt (in dm/min). Die snelheid is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de hoogte. Immers, als de hoogte 3 keer zo groot is, is de oppervlakte van de vloeistofspiegel 9 keer zo groot en neemt de hoogte dus 9 keer zo langzaam toe.)

In formule: $\frac{dh}{dt} = c \cdot \frac{1}{h^2}$.

De evenredigheidsconstante c hangt af van de vulsnelheid en van de tophoek van de kegel. We nemen $c = 4$.

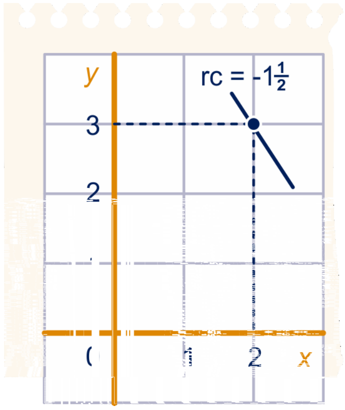
a Bereken $\frac{dh}{dt}$ als $h = 1$, $h = 2$, $h = 3$ en $h = 4$.

b Wat is de groeisnelheid van h, als $h = 0$?
Wat betekent dit voor de grafiek van h?

$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{h^2}$ is een differentiaalvergelijking.
De differentiaalvergelijking legt tezamen met de beginwaarde $h(0) = 0$ het continue dynamische proces vast. In dit voorbeeld kun je niet zo gemakkelijk een oplossing vinden. Hoe dat kan zullen we in het vervolg zien.

7

We bekijken een functie y van x waarvoor geldt: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}xy$.



Door deze formule is de functie y nog niet helemaal vastgelegd. We gaan de grafieken van mogelijke functies y benaderen.
Stel dat de grafiek door $(2,3)$ gaat. Dan is in het punt met eerste coördinaat 2 de groeisnelheid $\frac{dy}{dx}$ gelijk aan $-1\frac{1}{2}$.

a Ga dat na.

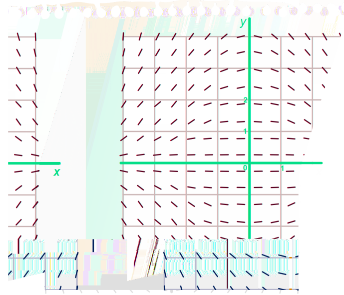
Dit is hiernaast aangegeven met een stukje raaklijn. De lengte van het stukje doet niet ter zake.

b Bereken zo ook de groeisnelheid van y als de grafiek door de punten $(2,2)$, $(2,1)$, $(2,0)$ en $(2,-1)$.

c Teken de raaklijnstukjes uit het vorige onderdeel en ook de raaklijnstukjes in de volgende punten: $(-1,3)$, $(-1,2)$, $(-1,0)$, $(0,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ en $(0,-1)$.

Als je genoeg raaklijnstukjes tekent, krijg je een aardig beeld van de grafieken van de mogelijke functies y.

d Schets op het werkblad de grafiek van enkele mogelijke functies die voldoen aan de differentiaalvergelijking.



In GeoGebra kun je een heleboel raaklijnstukjes tekenen met het commando: **Raakveld**<f(x,y)>. Zo'n plaatje heet ook wel een **richtingsveld**.
De lengte van de lijnstukjes kun je regelen met de 'Length Multiplier a'. Voor a kun je een getal tussen 0 en 1 invullen.
Tenslotte kun je een oplossing tekenen door een punt tekenen met het commando **MeetkundigePlaats(**<Slopefield>, <Punt>).

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4} \cdot xy$ is een differentiaalvergelijking. Als je de functiewaarde y bij een zekere waarde van x kent, kun je de groeisnelheid $\frac{dy}{dx}$ uitrekenen.
Als je de waarde van y voor een bepaalde waarde van x kent, bijvoorbeeld $y(2) = 3$, heb je een startpunt (in dit geval $(2,3)$). En met de differentiaalvergelijking kun je de groeisnelheid $\frac{dy}{dx}$ in dat punt uitrekenen. Het verloop van de functie is dan door de differentiaalvergelijking meestal vastgelegd.
Deze gegeven waarde van y voor een zekere x heet de **beginwaarde** (ook als hij niet aan het begin van het domein van de functie ligt). Verderop in dit hoofdstuk zullen we zien welke de formules van de mogelijke functies zijn.

Een differentiaalvergelijking geeft de groeisnelheid van een functie in een punt als je de coördinaten van dat punt kent.
Een functie die in elk punt van de grafiek de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven groeisnelheid heeft, dus in het richtingsveld 'past', is een **oplossingsfunctie** van de differentiaalvergelijking.

8

De vrije val

Een steen valt van een toren. Hierbij verwaarlozen we de wrijving: er is sprake van een "vrije val". Neem aan dat de steen na t seconden y meter gevallen is.
Galileï heeft twee modellen voor de vrije val beschouwd.
Eerste model: de valsnelheid is evenredig met de valweg.
Tweede model: de valsnelheid is evenredig met de valtijd.
Een differentiaalvergelijking die bij het eerste model past is van de vorm: $\frac{dy}{dt} = -c \cdot y$, voor een of ander getal $c > 0$.
(Het minteken staat er omdat de beweging naar beneden gaat.)

Galileo Galilei, 1564-1642

a Schrijf een differentiaalvergelijking op die bij het tweede model hoort.

b Ga na dat functies van de vorm $y = a \cdot e^{-c \cdot t}$ aan de differentiaalvergelijking bij het eerste model voldoen.

Galileï had zich vergist: het eerste model kan onmogelijk goed zijn. We komen hier nog op terug.

De differentiaalvergelijking bij het tweede model is: $\frac{dy}{dt} = -c \cdot t$, waarbij c de valversnelling is. We ronden c af op 10, zodat de differentiaalvergelijking bij het tweede model wordt: $\frac{dy}{dt} = -10 \cdot t$.

c Bedenk oplossingsfuncties y die aan de differentiaalvergelijking bij het tweede model voldoen.

Het tweede model blijkt correct te zijn.

De toren is 50 meter hoog. De oplossingsfunctie heeft dus startpunt $(0,50)$.

d Bepaal de formule voor y bij het tweede model met startpunt $(0,50)$.

e Bereken met welke snelheid de steen de grond raakt.

9 Bekijk opnieuw de differentiaalvergelijking van opgave 5:
$\frac{dy}{dx} = -0{,}24 \cdot y$.

a Teken het richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking.

b Schets een oplossingsfunctie met startpunt $(0,4)$.

10 Bekijk de functies f met de eigenschap: $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

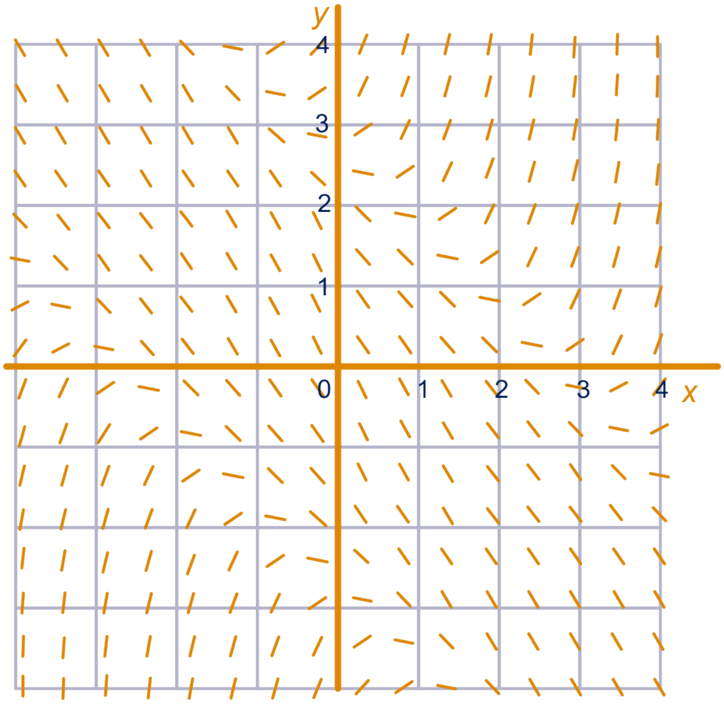
a Schrijf op aan welke differentiaalvergelijking de functies met die eigenschap voldoen: $\frac{dy}{dx} = \ldots$.

b Teken het richtingsveld van de differentiaalvergelijking.

c Lees uit het richtingsveld af welke functies f kan zijn.

d Ga na dat voor deze functies f inderdaad geldt: $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

11 Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(x+y)^2 - 2$.
Hieronder is het richtingsveld van deze differentiaalvergelijking getekend.



Twee oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking zijn lineair, namelijk $y = -x + 2$ en $y = -x - 2$.

a Controleer dat in het richtingsveld op het werkblad.

Dat de lijn $y = -x + 2$ inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet, kun je als volgt controleren.
Enerzijds: in elk punt van de grafiek van $y = -x + 2$ geldt dat de

richtingscoëfficiënt van de raaklijn -1 is.

Anderzijds: in elk punt van de lijn $y = -x + 2$ geldt: $\frac{1}{4}(x + y)^2 - 2 = \frac{1}{4}(x + -x + 2)^2 - 2 = -1$.

Dus in elk punt van de functie $y = -x + 2$ is de groeisnelheid gelijk aan de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven groeisnelheid.

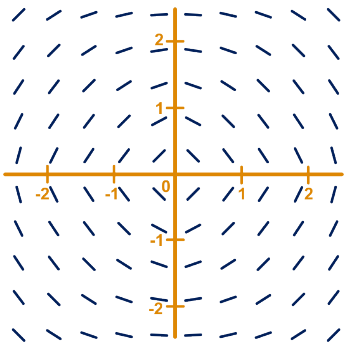
We noemen dit **controle door substitutie**.

b Controleer zo ook door substitutie dat $y = -x - 2$ aan de differentiaalvergelijking voldoet.

c Wat is de kleinste waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijnstukjes? In welke punten is de richtingscoëfficiënt gelijk aan deze minimale waarde?

d Schets op het werkblad van enkele oplossingsfuncties de grafiek.

12 Hiernaast staat het richtingsveld van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$.



a Ga voor enkele raaklijnstukjes na dat ze de juiste richting hebben.

b Hoe zien de oplossingskrommen eruit?

We bekijken de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 4. Een vergelijking van de cirkel is: $x^2 + y^2 = 16$.

De bovenste helft van de cirkel is de grafiek van de functie f.

c Geef een formule van de functie f en ga door substitutie na dat deze functie oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is.

g is de functie waarvan de onderste helft van de cirkel de grafiek is.

d Geef de formule van g.

e Controleer ook door substitutie dat de functie g oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is.

13 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x^2 + 4x$.

a Teken de verzameling punten (x, y) waarin het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt 0 heeft.

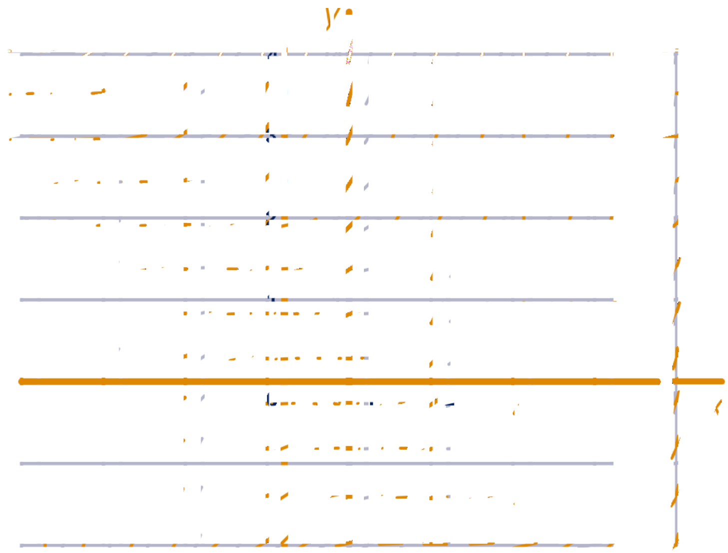
Een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking heeft als grafiek een parabool.

b Geef een vergelijking van die parabool.

Hint 1.

14

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 0{,}2(x + y)^2$.
Hieronder staat het richtingsveld van deze differentiaalvergelijking.



a Schets op het werkblad van enkele oplossingsfuncties de grafiek.

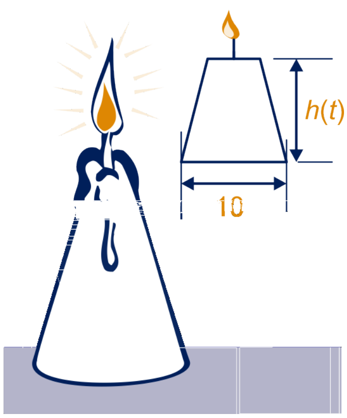
Alle oplossingsfuncties zijn stijgend.

b Hoe zie je dat aan de differentiaalvergelijking?

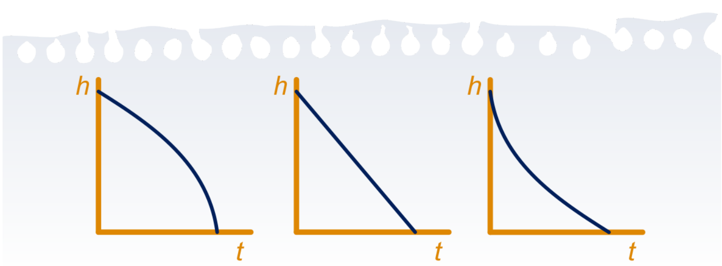
c In welke punten is de richtingscoëfficiënt van het raaklijnstukje gelijk aan 1? En waar is de richtingscoëfficiënt gelijk aan 4?

15

Een kegelvormige kaars is 20 cm hoog en aan de onderkant 10 cm breed. Hiernaast staat ook het zijaanzicht van de kaars na t branduren. We beschouwen de hoogte h van de kaars (in cm) als functie van de tijd t dat de kaars brandt (in uren).



a Welke van de drie grafieken hieronder past het best bij deze functie?



$r(h)$ is de straal van de doorsnede van de kaars op hoogte h.

b Toon aan dat $r(h) = 5 - \frac{1}{4}h$.

$O(h)$ is de oppervlakte van de doorsnede van de kaars op hoogte h. Er geldt: $O(h) = \pi(r(h))^2$.

Een redelijke veronderstelling is: de snelheid waarmee de kaars korter wordt is omgekeerd evenredig met $O(h)$.

c Laat zien dat h voldoet aan het beginwaardeprobleem $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c \cdot \frac{1}{(20-h)^2}$ en $h(0) = 20$. Hierbij is c een positieve constante die bijvoorbeeld afhangt van de kwaliteit van de was van de kaars.

d Toon aan dat $h = 20 - \sqrt[3]{3ct}$ oplossingsfunctie van het beginwaardeprobleem is.

De kaars is na 8 uur opgebrand.

e Bereken c.

16

Een leegstromend vat

Een cilindervormig vat is gevuld met water. Onderin zit een gaatje waardoor water wegstroomt. We bekijken de hoogte h (in cm) van de waterspiegel als functie van de tijd t (in minuten). Een wet uit de hydrodynamica zegt:

$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -c\sqrt{h}$. Hierbij hangt de positieve evenredigheidsconstante c af van de vorm en grootte van het gaatje en van de straal van het vat. Voor c nemen we 2.

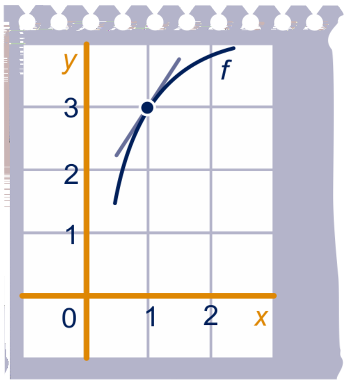
a Hoe snel daalt de waterspiegel als het water nog maar 25 cm hoog staat?

b Laat zien dat voor elke $p > 0$ de functie $h = (p-t)^2$ oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is voor $0 \leq t \leq p$.

Op tijdstip 0 staat het water 1 meter hoog.

c Bereken p.

d Na hoeveel minuten is het vat leeg?



17 Van een functie f is gegeven $f(1) = 3$ en $f'(1) = 2$.
Hoe groot schat je op grond hiervan $f(1{,}01)$?

In hoofdstuk 6 wiskunde B **Inleiding differentiëren** heb je gezien:
$f'(a) = \lim\limits_{\Delta a \to 0} \dfrac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a}$.

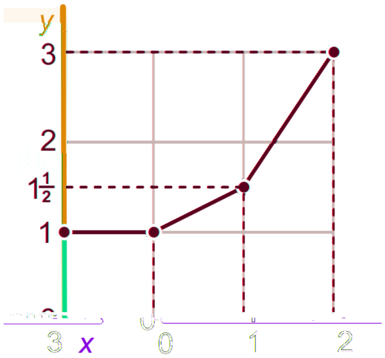
Dus $f'(a) \approx \dfrac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a}$ en die benadering is beter naarmate Δa dichter bij 0 ligt.
Hieruit vind je het volgende.

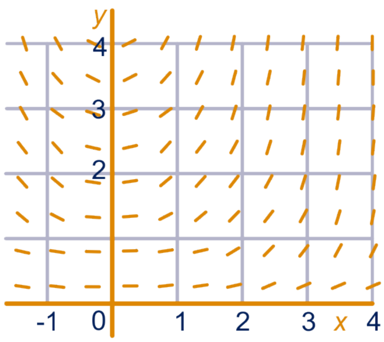
$f(a + \Delta a) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta a$ voor kleine waarden van Δa

Bovenstaande gebruiken we om oplossingen van differentiaalvergelijkingen te benaderen.

18 We bekijken de volgende differentiaalvergelijking: $\dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2}xy$.
Het richtingsveld van de differentiaalvergelijking is hiernaast getekend en staat ook op het werkblad.
f is de oplossingsfunctie met $f(0) = 1$.

a Schets de grafiek van f op het werkblad.





We gebruiken de regel $f(a + \Delta a) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta a$, waarbij we voor Δa steeds 1 nemen om uitgaande van $f(0)$ achtereenvolgens $f(1)$, $f(2)$, ... enzovoort te benaderen.
In $(0{,}1)$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt 0, dus $f(1) \approx f(0) + 0 \cdot 1 = 1$.
In $(1{,}1)$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$, dus $f(2) \approx f(1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1\frac{1}{2}$.
In $\left(2{,}1\frac{1}{2}\right)$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$, dus $f(3) \approx 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot 1 = 3$.

b Geef, op dezelfde manier verder gaand, een benadering voor $f(4)$.

c Zijn de benaderingen die we hierboven voor $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ en $f(4)$ gegeven hebben groter of kleiner dan de echte functiewaarden van f in 1, 2, 3 en 4?

We hebben benaderingen van de functiewaarden van f gekregen door stappen van lengte 1 in de x-richting te nemen. Je krijgt betere benaderingen, door in de x-richting stappen kleiner dan

1 te nemen, bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$. Je gaat dn vervolgens zó verder,
$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 1$.
In $\left(\frac{1}{2},1\right)$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëffiënt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$, dus $f(1) \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{8}$.

d Welke benadering vind je zo voor $f\left(1\frac{1}{2}\right)$ en $f(2)$?

In de voorgaande opgave hebben we de oplossingsfunctie f van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}xy$ met beginwaarde $f(0) = 1$ benaderd met een rij punten (a_n, b_n) $n = 0, 1,...$, met $(a_0, b_0) = (0,1)$.
Als de stapgrootte in de x-richting 1 is, dan is $a_{n+1} = a_n + 1$ en $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} \cdot a_n b_n \cdot 1$ voor $n = 0, 1,...$.

De rijen a_n en b_n, $n = 0, 1,...$ kun je met de GR berekenen.

19 We gaan verder met opgave 18.

a Voer de bovenstaande berekening uit op je GR.
Controleer of je uitkomsten in overeenstemming zijn met je antwoord op vraag 18b

Veronderstel dat je de oplossingsfunctie van het beginwaardeprobleem uit opgave 18 met een rij punten (a_n, b_n) benadert, waarbij de stapgrootte in de x-richting $\frac{1}{2}$ is.

b Schrijf de recursieve betrekkingen voor de rijen a_n en b_n op.

Controleer of je dezelfde waarde voor $f(2)$ vindt.

Hoe kleiner de stapgrootte genomen wordt, hoe beter de benaderingen zijn.
Deze manier om de oplossingsfunctie te benaderen, heet de **methode van Euler**.

Leonard Euler 1707-1783

Veronderstel dat je de oplossingsfunctie van het beginwaardeprobleem met een rij punten (a_n, b_n) benadert, waarbij de stapgrootte in de x-richting $\frac{1}{100}$ is.

c Schrijf de recursieve betrekkingen voor de rijen a_n en b_n op.
Welke waarde vind je voor $f(2)$ (afgerond op drie decimalen)?

g is de oplossingsfunctie van het beginwaardeprobleem:
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}xy$ en $g(2) = 1$.

d Schets de grafiek van g op het werkblad van opgave 18.

e Schrijf de recursieve betrekkingen voor de rijen a_n en b_n met stapgrootte $\frac{1}{2}$ op.

20 We gaan verder met opgave 18.

Voor elk getal c definiëren we: $y_c = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{4}x^2}$. de functie

a Toon aan dat de functie y_c voor elke waarde van c aan de differentiaalvergelijking $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}xy$ voldoet.

b Geef formules voor de functies f en g uit de voorgaande twee opgaven.

Uit je antwoord op vraag **b** volgt dat $f(2) = \mathrm{e}$.

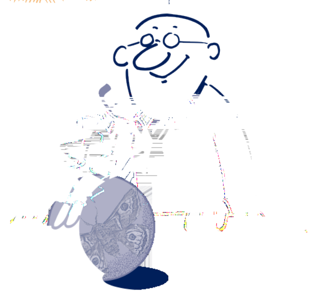
c Vergelijk dit met je benadering van $f(2)$ in opgave 19**c**.

Opmerking

Je kunt de rijen (a_n, b_n) $n = 0, 1, \ldots$ op de GR plotten. Het resultaat is een stippengrafiek die de oplossingsfunctie benadert.

21 **Mottenbal**

Een mottenbal is een bolletje kamfer. Door verdamping wordt het bolletje steeds kleiner.



a Wat is de oppervlakte (in mm^2 nauwkeurig) van een mottenbal met een volume van $1{,}2$ cm^3?

Hint 2.

b Stel een formule op voor de oppervlakte O van een mottenbal (in cm^2) als functie van zijn volume V (in cm^3).

Het gewicht van de mottenbal noemen we G (in grammen), de tijd noemen we t (in weken). Hoe groter de oppervlakte van de mottenbal, hoe groter de verdamping. We nemen aan dat de snelheid waarmee het gewicht afneemt evenredig is met de oppervlakte van het bolletje. Deze aanname leidt tot de volgende differentiaalvergelijking: $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \text{-}c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ voor een of ander getal positief getal c.

c hangt af van de omstandigheden en kan experimenteel bepaald worden. We nemen voor $c = 0{,}3$.

Een mottenbal weegt 8 gram.

c Bepaal met de methode van Euler hoeveel gram de mottenbal weegt na 1week. Neem stapgrootte $0{,}1$.
Licht je antwoord toe.

De methode van Euler

Gegeven een differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c(x, y)$ met beginwaarde (p, q).
Een benadering van de oplossingsfunctie met stippen (a_n, b_n) met waarbij $(a_0, b_n) = (p, q)$ met stapgrootte Δ in de x-richting vind je met:
$a_{n+1} = a_n + \Delta$ en $b_{n+1} = b_n + c(a_n, b_n) \cdot \Delta$.

Opmerking

In opgave 18 en 19 iss $c(x, y) = \frac{1}{2}xy$.
Bij de functie f is $(p, q) = (0{,}1)$ en de stapgrootte Δ achereenvolgens 1, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{100}$.
Bij de functie g is $(p, q) = (2{,}1)$.
In opgave 21 is $c(x, y) = -0{,}3y^{\frac{2}{3}}$.

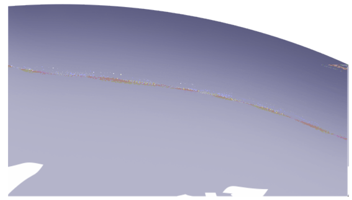
22 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1\frac{1}{3}\sqrt{xy}$, met x en y positief.
De oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking door het punt $(1{,}4)$ noemen we f.

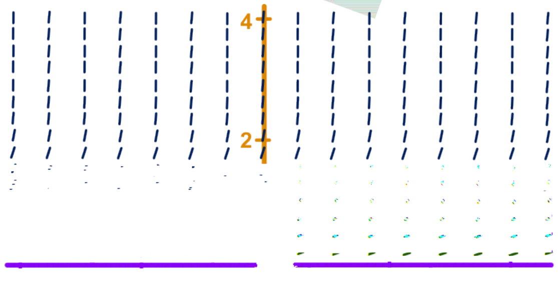
a Benader $f(2)$ met de methode van Euler met stapgrootte $0{,}01$.
Schrijf je werkwijze op.

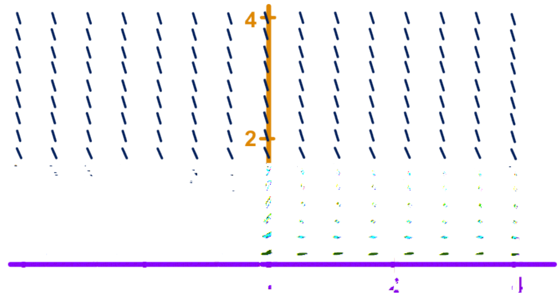
b Toon aan dat de functies $x \to \left(x\sqrt{x} + c\right)^2$ met c positief aan de differentiaalvergelijking voldoen.

c Geef een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking die door $(1{,}4)$ gaat.

23 In paragraaf 2 hebben we de bevolkingsgroei volgens Malthus bekeken. De bijbehorende differentiaalvergelijking was van de vorm: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y$, waarbij c een of andere constante is. Een oplossingsfunctie van deze differentiaalvergelijking is een voorbeeld van ongeremde groei.
Hieronder zie je richtingsvelden van de differentiaalvergelijking als $c = 1{,}2$ (figuur 1) en als $c = \text{-}0{,}8$ (figuur 2).
We nemen y positief.







a Wat kun je zeggen over oplossingsfuncties bij $c = 1{,}2$ in vergelijking met oplossingsfuncties bij $c = \text{-}0{,}8$?

Oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y$ door $(0{,}1)$ zijn van de vorm $y = \mathrm{e}^{c \cdot x}$.

b Controleer dat.

c Ga na dat de functies $y = a \cdot \mathrm{e}^{1{,}2 \cdot x}$ met a positief, oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1{,}2 \cdot y$ zijn.
Geef een formule van de oplossingsfunctie die door het punt $(3{,}2)$ gaat.

d Geef een formule van de oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \text{-}0{,}8 \cdot y$, die door $(1{,}1)$ gaat.

We bekijken de functies $y_k = \mathrm{e}^{1{,}2 \cdot (x-k)}$ voor elke waarde k. Omdat $y_0 = \mathrm{e}^{1{,}2 \cdot x}$ aan de differentiaalvergelijking voldoet, voldoet elk van de functies y_k.

e Hoe zie je dat aan het richtingsveld in figuur 1?

24 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y$, voor alle mogelijke waarden van c en de functies $y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x}$ voor alle mogelijke waarden van a.

a Ga na dat de functie $y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x}$ oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking is, voor elke waarde van a.

We nemen $c = 1{,}5$.

b Geef een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking die door $(1{,}2)$. Ook een die door $(1{,}\text{-}2)$ en een die door $(\text{-}1{,}\text{-}2)$ gaat.

Het zal duidelijk zijn dat je bij gegeven waarde van c bij elk punt van het vlak de waarde van a berekenen, zó dat de functie $y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x}$ door dat punt gaat.

Ongeremde groei

De differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y$ hoort bij ongeremde groei.
Oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking zijn van de vorm $y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x}$, voor alle mogelijke waarden van a.
Door elk punt van het vlak gaat een functie van deze vorm. Een oplossingsfunctie met domein $\mathbb{R}$ (de verzameling van alle reële getallen) is door zijn startpunt vastgelegd.

De laatste bewering bewijzen we in opgave 25.

Opmerking

Neem de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot y$.
Functies die ontstaan door "knippen en plakken" uit de oplossingsfuncties $y = a \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot x}$ bijvoorbeeld de functie:
$\begin{cases} y = 3 \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot x} \text{ als } x > 0 \\ y = 2 \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot x} \text{ als } x < 0 \end{cases}$
voldoen ook aan de differentiaalvergelijking.
Die 'plakfunctie' heeft niet als domein $\mathbb{R}$ en de functie:
$\begin{cases} y = a \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot x} \text{ als } x \geq 0 \\ y = 2 \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot x} \text{ als } x < 0 \end{cases}$ heeft $\mathbb{R}$ wel als domein maar is niet differentieerbaar in 0.

25 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y$. Neem aan dat f een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is met domein $\mathbb{R}$.

a Toon aan dat de functie $y = f(x) \cdot \mathrm{e}^{\text{-}c \cdot x}$ als afgeleide de 0-functie heeft.

Uit het vorige onderdeel volgt dat de functie $y = f(x) \cdot \mathrm{e}^{\text{-}c \cdot x}$ constant is.

b Hoe volgt nu dat f een functie van de vorm $y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x}$ is?

26

Radioactief verval

Radioactieve stoffen worden naarmate de tijd verstrijkt minder radioactief. Experimenteel is vastgesteld dat de snelheid waarmee de radioactiviteit afneemt (de vervalsnelheid) evenredig is met de hoeveelheid aanwezige stof. Als h de hoeveelheid radioactive stof (in gram) is, geldt dus: $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \text{-}c \cdot h$.
We rekenen de tijd t in dagen.

a Verklaar het minteken in de differentiaalvergelijking.

In de geneeskunde wordt vaak jodium-125 gebruikt. De halveringstijd hiervan is 60 dagen.

b Toon aan dat $c = \frac{\ln(2)}{60}$.

De differentiaalvergelijking die het verval van een andere radioactieve stof beschrijft luidt: $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}0035 \cdot h$.

c Wat is de halveringstijd van deze radioactieve stof?

27

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y$.
De oplossingsfuncties zijn exponentiële-groeifuncties.
Wat is het verband tussen c en de groeifactor?

28

Afkoeling

De eerste opgave van dit hoofdstuk ging over het afkoelen van een ketel water in een omgeving van 0°C. Voor de temperatuur T in °C t minuten afkoelen, gold: $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}2 \cdot T$.
Veronderstel dat de begintemperatuur 80°C is.

a Bepaal de temperatuur van de ketel na 5 minuten afkoelen.
Doe dit ook als de begintemperatuur 60°C is.

De afkoelingswet van Newton zegt dat de snelheid waarmee de temperatuur T afneemt evenredig is met het *verschil* met de omgevingstemperatuur. Dus als de omgevingstemperatuur 20° is, luidt de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}2 \cdot (T - 20)$.

De omgevingstemperatuur is 20°C.

b Bepaal de temperatuur van de ketel na 5 minuten afkoelen.
Doe dit ook als de begintemperatuur van de ketel 100°C is.
En ook als die 80°C en als die 60°C is.

c Geef de oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}2 \cdot T$ met $T(0) = 100$.
Geef ook de oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}2 \cdot (T - 20)$ met $T(0) = 100$.

7.5 Ongeremde groei

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c(y - p)$, waarbij p en c gegeven constanten zijn.
De oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking zijn:
$y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x} + p$ voor alle waarden van a.

29 Toon aan dat de functies $y = a \cdot \mathrm{e}^{cx} + p$ voor elke waarde van a oplossing zijn van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot (y - p)$

30 **Haringvangst**

Internationaal is afgesproken hoeveel haring er jaarlijks gevangen mag worden: elk land heeft een zekere hoeveelheid (quotum) toegewezen gekregen. Dit om te voorkomen dat de Noordzee overbevist wordt en er na een paar jaar geen haring meer over is. In 1988 zat er 700.000 ton haring in de Noordzee. $H(t)$ is de haringstand (in honderdduizenden tonnen) t jaar na 1988.
Als er geen haring zou worden gevangen is de groeisnelheid van H evenredig met H zelf, met evenredigheidsconstante $0{,}5$. Het totale jaarlijkse quotum bedraagt q (in honderdduizenden tonnen).

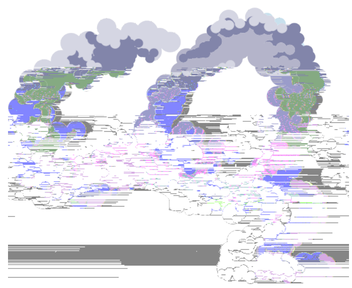
a Leg uit dat geldt: $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}q} = 0{,}5H - q$.

b Bepaal de functie H, uitgedrukt in q.

Neem aan dat elk jaar het quotum q even groot is.

c Bij welke waarden van q zal de haring in de Noordzee uitsterven?

31 In een kamer van $50\ \mathrm{m}^3$ is de concentratie CO_2-gas $0{,}2$ volumeprocent. Op zeker ogenblik zet iemand de ventilator aan. Zo wordt er per minuut $5\ \mathrm{m}^3$ van de lucht in de kamer vervangen door buitenlucht met slechts $0{,}05$% CO_2-gas. $C(t)$ is de concentratie CO_2 na t minuten in %. De toename van C gedurende de tijd Δt noemen we ΔC.



a Toon aan: $\Delta C = -0{,}1C \cdot \Delta t + 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot \Delta t$ voor kleine Δt.

b Welke differentiaalvergelijking voor C volgt uit **a**?

c Geef de formule van C, uitgedrukt in t.

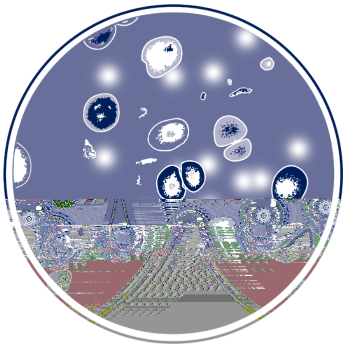
d Hoe lang duurt het voordat de CO_2-concentratie is teruggelopen tot $0{,}07$%?

32 Een kapitaal K groeit met 10% per jaar. In het begin van elk jaar wordt 10.000 euro opgenomen.
$K(t)$ is het kapitaal (in euro) na t jaar.

a Vul in: het kapitaal voldoet aan de differentiaalvergelijking;
$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \ldots \cdot (K - \ldots)$

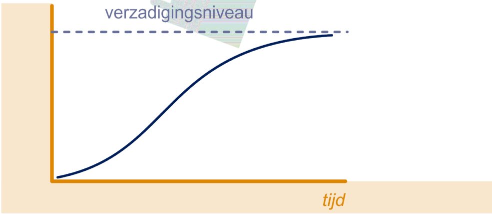
b Geef een formule voor $K(t)$, als $K(0) = 100.000$.

33



Petrischaal

Onder ideale omstandigheden (voldoende voedsel en warmte) breiden gistcellen zich exponentieel uit.
Op een petrischaal wordt een kolonie gistcellen geënt. Aanvankelijk zijn de omstandigheden nog ideaal: de kolonie groeit exponentieel. De schaal raakt vol, de omstandigheden worden slechter, de groei remt af. Op een gegeven moment is de schaal zo goed als vol: het verzadigingsniveau is nagenoeg bereikt.
Een grafiek bij zo'n groei heeft de volgende vorm.



Een dergelijke grafiek heet S-kromme of sigmoïde. De hoeveelheid gistcellen (in grammen) op de schaal na t uur noemen we $G(t)$.
We bekijken een model voor de groeisnelheid van G. Veronderstel dat de petrischaal maximaal 500 gram gistcellen kan bevatten, dus dat het verzadigingsniveau 500 is.

- Van de ene kant is de groeisnelheid van G evenredig met de al aanwezige hoeveelheid gistcellen, dus met G (als er tweemaal zoveel gistcellen zijn, groeit de kolonie tweemaal zo hard).
- Van de andere kant is de groeisnelheid. van G evenredig met de ruimte die er nog op de schaal is (als er half zoveel ruimte (voedsel) is, groeit de kolonie half zo hard).

Dit leidt tot de volgende differentiaalvergelijking:
$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = c \cdot G(500 - G)$. Hierbij is c een evenredigheidsconstante. Groei die zich volgens deze differentiaalvergelijking gedraagt, heet **logistische groei**. We nemen voor $c = 0{,}003$.
De differentiaalvergelijking wordt: $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = 0{,}003 \cdot G(500 - G)$

a Ga door substitutie na dat de functie $G = \frac{500}{1 + 100 \cdot \mathrm{e}^{-1{,}5 \cdot t}}$ aan de differentiaalvergelijking voldoet.

b Hoe kun je het verzadigingsniveau uit de formule van G afleiden?

Logistische groei

De hoeveelheid y groeit logistisch met verzadigingsniveau M als de groeisnelheid evenredig is met $y \cdot (M - y)$, dus $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y \cdot$

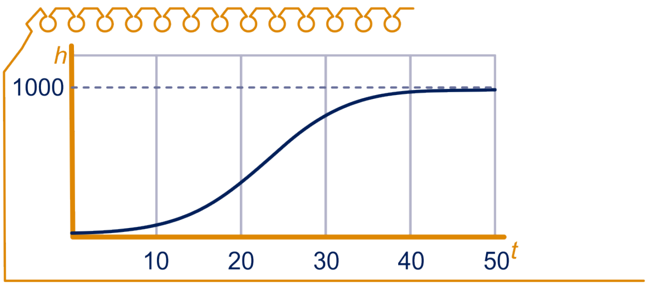
$(M - y)$ voor een of ander positief getal c.
De oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking zijn: $y = \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}$
Hierbij wordt b bepaald door het beginwaarde van de oplossingsfunctie.

34 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y \cdot (M - y)$

a Laat door substitutie zien dat de functies $y = \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}$ voor willekeurige waarden van b aan de differentiaalvergelijking voldoen.

b Druk b uit in de startwaarde $y(0)$.

35 $H = \frac{1000}{1 + 99 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}}$ is een voorbeeld van een logistische groeifunctie. Hieronder staat de grafiek.



a Wat moet je in de formule $H = \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}$ voor M, b en c invullen om de gegeven functie te krijgen?

b Schrijf de bijbehorende differentiaalvergelijking op.

Waarom ligt het buigpunt van de grafiek op hoogte $H = 500$?

c Voor welke H is $0{,}0002 \cdot H \cdot (1000 - H)$ maximaal?

d Bereken de bij het buigpunt behorende waarde van t.

Je kunt de differentiaalvergelijking waaraan H voldoet schrijven als: $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0{,}2H - 0{,}0002H^2$.
Aan het begin van het proces ($t = 0$) is H klein. Dan speelt de term $0{,}0002H^2$ bijna geen rol, dus dan is voldoet H bij benadering aan de dv $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0{,}2H$.
De groei van H gaat dan ongeveer exponentieel.

e Bepaal de groeifactor van de oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0{,}2y$.

Er geldt: $H(0) = 10$.

f Vergelijk op de GR de grafiek van H met die van de exponentiële groeifunctie G met beginhoeveelheid 10 en groeifactor

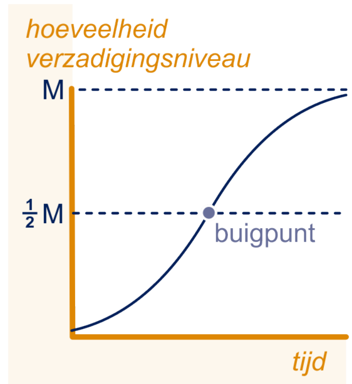
$e^{0,2}$.

Je ziet dat de grafieken van G en H aan het begin nagenoeg gelijk lopen.

Het buigpunt bij een logistische groeifunctie ligt half zo hoog als het verzadigingsniveau.
Logistische groei bij de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (M - y)$$

is aanvankelijk nagenoeg exponentiëel met groeifactor e^{cM}.



36 **De bevolkingsgroei in de VS**

De tabel hieronder geeft informatie over de bevolkingsgroei in de VS.

jaar	aantal inwoners (x1000)	jaar	aantal inwoners (x1000)	jaar	aantal inwoners (x1000)
1790	3929	1850	23.192	1910	91.972
1800	5308	1860	31.443	1920	105.711
1810	7240	1870	38.558	1930	122.775
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1940	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Met de GR kun je een plaatje bij deze gegevens maken.

a Zoek uit hoe dat op jouw machine gaat.

De grafiek heeft een S-vorm. We proberen de bevolkingsgroei in de VS met een logistische groeifunctie te benaderen:

$$B = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-cMt}}.$$

Hierbij is B het aantal inwoners in duizendtallen en t de tijd in tientallen jaren vanaf 1790.
Aanvankelijk (tot 1840), is de groei van de bevolking nagenoeg exponentieel.

b Bepaal de groeifactor per 10 jaar uitgaande van exponentiële groei van B, waarbij $B = 3929$ in 1790 en $B = 17069$ in 1840.

Neem aan dat het buigpunt van de grafiek bij 1920 ligt.

c Wat is het verzadigingsniveau M?

d Bepaal nu met behulp van de onderdelen **b** en **c** de waarde van c.

e Bereken nu ook b met behulp van de beginwaarde.

f Vergelijk de logistische groeifunctie met de waarden uit de tabel hierboven.

Opmerking

De differentiaalvergelijking bij logistische groei:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y \cdot (M - y)$$

kom je ook wel in de volgende gedaante tegen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right).$$

37 Gegeven is de differentiaalvergelijking: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}3y \cdot \left(1 - \frac{1}{200}y\right)$ met beginwaarde $y(10) = 80$.

a Geef een formule voor $y(t)$.

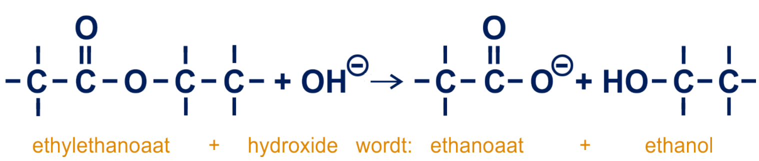
Zoals in het theorieblok hierboven vermeld, kun je de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y \cdot (M - y)$ schrijven als: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$.

b Geef het verband tussen k en c.

c Geef een formule voor de oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$.

38 **Verzeping**

Een ester en een loog geven een zuurrest en een alcohol. Hieronder zie je een voorbeeld.



De concentraties (in mol per liter) van de ester en van het loog op tijdstip t noemen we respectievelijk $E(t)$ en $L(t)$. De reactiesnelheid (dat is de groeisnelheid van E) is evenredig met de concentratie van de ester en met de concentratie van het loog. Dus $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -c \cdot E \cdot L$ waarbij c een positieve evenredigheidsconstante is.

De beginconcentraties zijn gegeven: $E(0) = 0{,}005$ en

$L(0) = 0{,}01$.
Op elk tijdstip is er evenveel van de ester als van het loog omgezet: $E(0) - E(t) = L(0) - L(t)$.
Bij een zekere temperatuur is $c = 0{,}06$ liter per mol sec.
Uit de gegevens valt het volgende beginwaardenprobleem af te leiden:
$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}06 \cdot E \cdot (0{,}005 + E)$ met beginwaarde $E(0) = 0{,}005$.

a Leg dat uit.

b Los dit beginwaardenprobleem op, dat wil zeggen geef de formule van $E(t)$.

c Teken de grafiek van E op de GR. Waarom lijkt die niet op een logistische groeikromme?

d Na hoeveel tijd is 50% van de ester omgezet?
Deze tijdsduur wordt de *halfwaardetijd* van de reactie genoemd.

39

Afbraak van penicilline

Ter bestrijding van een infectie begint een patiënt aan een penicillinekuur die bestaat uit het innemen van pillen. Iedere keer na het innemen van een pil stijgt de concentratie penicilline in het bloed met 350.000 eenheden per milliliter. Aan het begin van de kuur zit er geen penicilline in het bloed van de patiënt. De penicilline wordt afgebroken met een snelheid die evenredig is met de concentratie:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \text{-}0{,}3P.$$

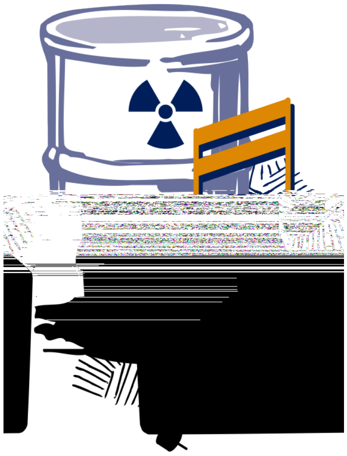
Hierbij is t de tijd (in uren) en P de concentratie penicilline (in eenheden per milliliter). De concentratie penicilline mag niet onder de 100.000 eenheden per milliliter komen

Bereken hoeveel uur na het innemen van de eerste pil de tweede, derde en vierde pil moeten worden ingenomen. Geef je antwoorden in gehele uren.

Profi wiskunde B 1998I

40

Radioactief verval



Een manier om de ouderdom van organisch materiaal vast te stellen is de zogenaamde koolstof-14 methode. In levende organismen zit koolstof-12 en koolstof-14 in een vaste verhouding. Zodra het organisme sterft, vervalt het radioactieve koolstof-14. Het gehalte koolstof-14 noemen we K (in procenten van de oorspronkelijke hoeveelheid), de tijd t rekenen we in jaren vanaf het moment van sterven van het organisme.

De groeisnelheid van K is evenredig met K zelf.

De evenredigheidsconstante noemen we c.

a Welke differentiaalvergelijking volgt hieruit voor K?

b Is de evenredigheidsconstante c in de differentiaalvergelijking positief of negatief?

c Wat is de beginwaarde $K(0)$ van K?

d Stel een formule op voor $K(t)$ uitgedrukt in c.

De halfwaardetijd is de tijd waarin K wordt gehalveerd. Voor koolstof-14 is de halfwaardetijd 5730 jaar.

e Bereken c.

41 **Liften**

Een student lift elke dag naar de universiteit. De ene dag heeft hij snel een lift, de andere dag duurt dat langer. De kans dat hij langer dan t minuten moet wachten om een lift te krijgen, noemen we $w(t)$.

a Leg uit dat $w(0) = 1$.

b Maak aannemelijk dat voor alle getallen a en b geldt: $w(a) \cdot w(b) = w(a+b)$.

Uit **b** volgt:

$$\frac{dw}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{w(t+\Delta) - w(t)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{w(t) \cdot w(\Delta) - w(t)}{\Delta} = w(t) \cdot \lim_{\Delta \to 0} \frac{w(\Delta) - w(0)}{\Delta} = w'(0) \cdot w(t).$$

Dus $\frac{dw}{dt} = c \cdot w$ met $c = w'(0)$.

De ervaring leert dat de wachttijd in een kwart van de gevallen langer is dan 10 minuten.

c Geef een formule voor $w(t)$.

42 **Luchtdruk**

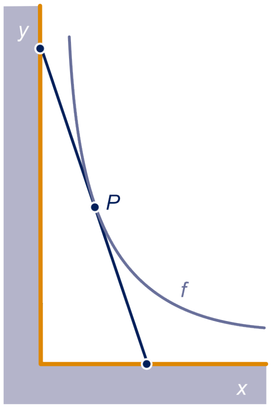
De luchtdruk (in pascal) is gelijk aan het gewicht van de kolom lucht die zich boven een vierkante meter oppervlak bevindt. Volgens de wet van Boyle is de snelheid waarmee de luchtdruk afneemt bij toenemende hoogte boven het zeeniveau evenredig met de luchtdruk.

Dit leidt tot de differentiaalvergelijking $\frac{dp}{dh} = c \cdot p$ waarbij p de luchtdruk in hectopascal is en h de hoogte boven het zeeniveau in meters.

De luchtdruk op zeeniveau is 1030 hectopascal en op 5 km boven het zeeniveau 570 hectopascal.

Bepaal de hoogte met luchtdruk 770 hectopascal.

43 In elk punt P van de grafiek van de functie f hiernaast geldt: de raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de x-as in X en de y-as in Y en P is het midden van lijnstuk XY.



Gegeven is de differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

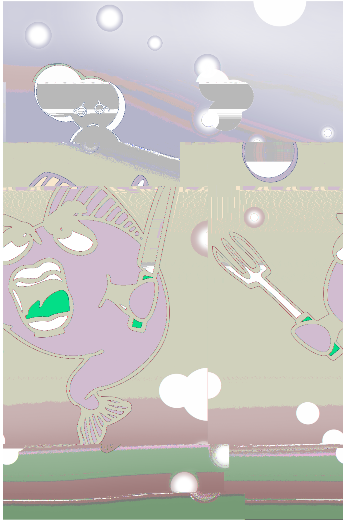
a Laat zien dat f oplossingsfunctie is van de differentiaalvergelijking.

b Toon aan dat de functies $f : x \to \frac{c}{x}$, waarbij c een willekeurig getal is, oplossingsfuncties zijn van de differentiaalvergelijking

c Teken op de GR de grafiek van een oplossingsfunctie die door $(2,3)$ gaat.

44

Algen



In een poel leeft een algenpopulatie. De hoeveelheid algen die in de poel kan leven kent een natuurlijke bovengrens, zeg M. Hierdoor vindt geremde groei plaats. Noem $A(t)$ de omvang van de algenpopulatie op dag t, uitgedrukt in procenten van M. De groei wordt geremd doordat in de poel visjes leven die algen eten. Hierdoor verdwijnt een constante hoeveelheid algen per dag uit de poel. Er geldt nu: $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = c \cdot A\left(1 - \frac{A}{100}\right) - v$, waarbij c en v positieve constanten zijn. Neem aan dat $A(0) = 70$, $c = 0{,}5$ en $v = 10$.

a Benader $A(10)$ met de methode van Euler. Neem 1 als stapgrootte. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken uit de gegeven differentiaalvergelijking op welk percentage van M de algenpopulatie zich zal stabiliseren. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Wiskunde B Profi 1998II

45

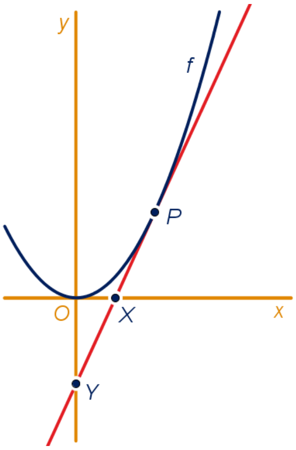
Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - y^2$.
f is de oplossingsfunctie met $f(3) = 1$.

a Geef een formule voor f.

b Hoe kun je aan de differentiaalvergelijking zien dat $(3{,}1)$ een buigpunt van de grafiek van f is?

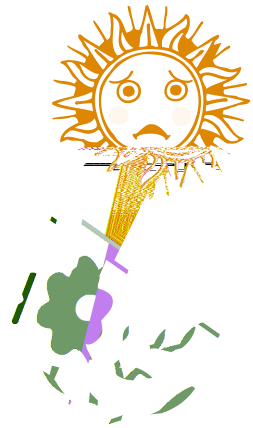
46

In elk punt P van de grafiek van de functie f hiernaast geldt: de raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de x-as in X en de y-as in Y, dat X het midden van lijnstuk PY



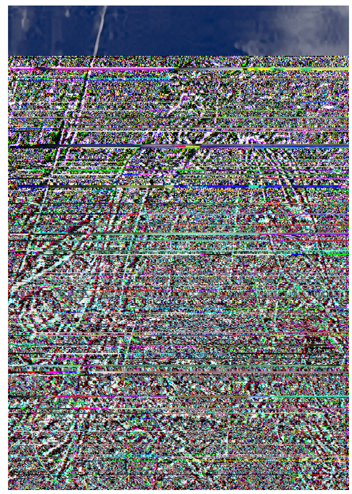
47

Glas



In de glastuinbouw is bekend dat licht aan intensiteit verliest wanneer het door een glasplaat valt. De afstand die het licht door het glas aflegt in mm noemen we s en de intensiteit i die voldoet aan de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s} = \text{-}k \cdot i$. Hierbij is k de uitdovingscoëfficiënt.
Een glasplaat van 3 mm dik laat 40% van het (loodrecht) erop vallende licht door.
Bereken k.

48



De Italiaan Volterra (1860-1940) heeft wiskundige modellen opgesteld die gebruikt worden bij populatievoorspellingen in de biologie. In een van deze modellen ging hij uit van twee vissoorten: R roofdieren en P prooidieren in een zeker gebied.
Volterra nam aan dat bij afwezigheid van roofdieren, het aantal prooidieren exponentieel zou toenemen, dus: $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k \cdot P$, waarbij k een evenredigheidsconstante is.
Als er wel roofdieren zijn, zal de factor k afhankelijk zijn van het aantal roofdieren: hoe groter het aantal roofdieren, hoe kleiner de factor k.
Volterra ging uit van een lineair verband: $k = a - b \cdot R$. Dit geeft de differentiaalvergelijking: $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (a - b \cdot R) \cdot P$.
Op dezelfde manier vond hij voor de groei van het aantal roofdieren: $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = (c \cdot P - d) \cdot R$.
We kiezen $a = 50$, $b = 2$, $c = 0{,}04$ en $d = 3$.

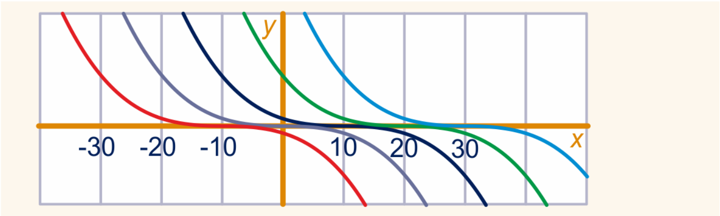
a Verklaar waarom $c > 0$ genomen moet worden.

Op een gegeven moment zijn er 20 roofdieren en 60 prooidieren.

b Geef een schatting van het aantal prooidieren en het aantal roofdieren $0{,}1$ tijdseenheid later.

c Bij welk aantal prooi- en roofdieren zullen beide populaties volgens dit model constant blijven?

49 We bekijken opnieuw de differentiaalvergelijking bij de mottenbal uit opgave 21: $\frac{dy}{dx} = -0{,}3y^{\frac{2}{3}}$.
We definiëren de functies y_k door $y_k = (k - 0{,}1x)^3$.
Hieronder staan de grafieken van y_k voor $k = -1, 0, 1, 2, 3$.



a Laat zien dat de functies y_k oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking zijn.

b Ga na dat de nulfunctie (dat is de functie die constant de waarde 0 heeft) ook een oplossing is.

En er zijn nog meer oplossingen. Bijvoorbeeld de functie f die ontstaat door een stuk van bijvoorbeeld y_2 in het snijpunt met de x-as aan een stuk van de nulfunctie te 'plakken':

$$f(x) = \begin{cases} (2 - 0{,}1x)^3 \text{ als } x < 20 \\ 0 \text{ als } x \geq 20 \end{cases}.$$

En deze functie beschrijft voor $x \geq 0$ precies het gewicht y van de mottenbal van opgave 21 als functie van de tijd x. Op tijdstip 20 wordt het gewicht 0 en blijft het 0! Bij deze differentiaalvergelijking gaan er door alle punten van de x-as meer dan één oplossingsfunctie. In deze punten kun je van de ene oplossingsfunctie "overstappen" op de andere. Er zijn dus meerdere oplossingen van hetzelfde beginwaardeprobleem. Uit de context volgt welke oplossingsfunctie het fysische proces beschrijft.

50 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 4x$.
Zoek een kwadratische functie die oplossing is van de differentiaalvergelijking.

Hint 3.

Differentiaalvergelijkingen

Een differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c(x, y)$ schrijft in elk punt (x, y) een richting voor: $c(x, y)$.

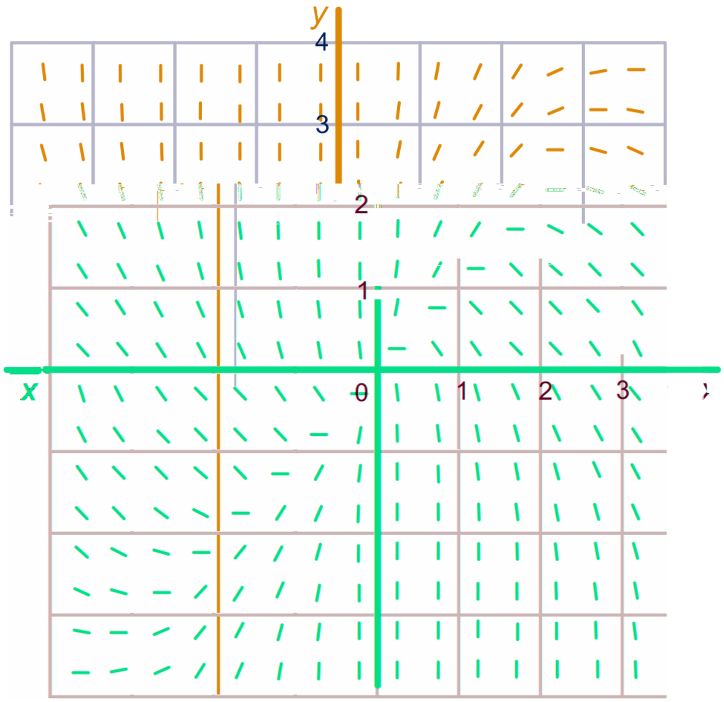
Een functie die in elk punt van zijn grafiek de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven richting (groeisnelheid) heeft, is een **oplossingsfunctie** van de differentiaalvergelijking.

Voorbeeld

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x} - 2$.
Hier is dus $c(x, y) = \frac{2y}{x} - 2$. Een **oplossingsfunctie** van deze differentiaalvergelijking is bijvoorbeeld de functie
$f : x \to 2x$.
Dat kun je controleren door **substitutie** als volgt.
De richtingscoëfficiënt $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (groeisnelheid) van de functie f is in elk punt 2. In elk punt van de grafiek van f is de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven richting: $\frac{2y}{x} - 2 = \frac{2 \cdot 2x}{x} - 2 = 2$.
De functie f heeft dus in elk punt van zijn grafiek de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven richting.
Andere oplossingsfuncties zijn de functies $g_c : x \to c \cdot x^2 + 2x$ voor elke waarde van c.
Enerzijds is de richtingscoëfficiënt van de functie g_c in een punt (x, y) van de grafiek $\frac{\mathrm{d}g_c}{\mathrm{d}x} = 2c \cdot x + 2$.
Anderzijds is de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven richting in (x, y) de richting $\frac{2y}{x} - 2 = \frac{2cx^2 + 4x}{x} - 2 = 2cx + 2$.
Deze zijn gelijk, dus zijn de functies g_c oplossing van de differentiaalvergelijking.

Als er naast de differentiaalvergelijking ook een punt gegeven wordt dat op de grafiek van gezochte de oplossingsfunctie moet liggen, spreekt men van een **beginwaardenprobleem**.
Een oplossingsfunctie h van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x}$ met beginwaarde $h(1) = 10$ is: $h : x \to 8 \cdot x^2 + 2x$.

Bij een gegeven differentiaalvergelijking kan een **richtingsveld** getekend worden. Hieronder is die bij de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x} - 2$ getekend: de lijnstukjes hebben in elk punt de voorgeschreven richting.



De methode van Euler

De oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c(x, y)$ met beginwaarde (p, q)

kun je benaderen met een grafiek van punten die in de x-richting op afstand Δ van elkaar liggen met de **methode van Euler**.

Het zijn de punten (a_n, b_n) waarbij $(a_0, b_0) = (p, q)$ en

$a_{n+1} = a_n + \Delta$ en $b_{n+1} = b_n + c(a_n, b_n) \cdot \Delta$.

Hoe kleiner Δ, hoe beter de grafiek van de oplossingsfunctie benaderd wordt.

Ongeremde groei

De differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y$ hoort bij ongeremde groei. Hierbij is c een willekeurige constante.

Oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking zijn van de vorm $y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x}$, voor alle mogelijke waarden van a.

Door elk punt van het vlak gaat een functie van deze vorm.

Een oplossingsfunctie met domein $\mathbb{R}$ (de verzameling van alle reële getallen) is door zijn startpunt vastgelegd.

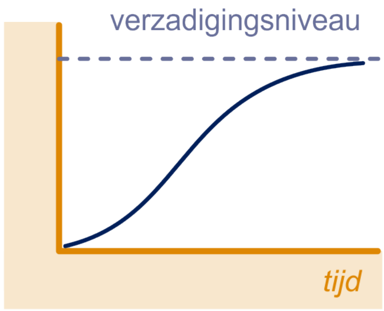
Logistische groei

De hoeveelheid y groeit logistisch met verzadigingsniveau M als de groeisnelheid evenredig is met $y(M-y)$, dus $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y(M-y)$ voor een of ander positief getal c.

De oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking zijn: $y = \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}$.

Hierbij wordt b bepaald door het beginwaarde van de oplossingsfunctie.

Een grafiek bij zo'n groei heeft een vorm zoals hiernaast getekend is.



Een logistische groeifunctie heeft een buigpunt. Dat ligt half zo hoog als het verzadigingsniveau.

Logistische groei bij de differentiaalvergelijking

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y(M-y)$$

is aanvankelijk nagenoeg exponentiëel met groeifactor e^{cM}.

1 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{2(y-4)}{x}$.

Als een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking een extreme waarde heeft, dan is die 4.

a Hoe zie je dat aan de differentiaalvergelijking?

b Toon aan dat alle kwadratische functies met top $(0,4)$ oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking zijn.

2 **Val met wrijving**

Een kogeltje valt in een bak met een of andere vloeistof. De snelheid van het kogeltje, t seconden nadat het in die vloeistof is gekomen, is $v(t)$ m/s. De val van het kogeltje wordt versneld door de gravitatiekracht en vertraagd door een wrijvingskracht. We nemen aan dat die evenredig met de snelheid is. Dit leidt tot de differentiaalvergelijking: $\frac{dv}{dt} = -f \cdot v + 10$, waarbij f een positieve evenredigheidsconstante is. Hierbij hebben we de valversnelling op 10 m/s^2 afgerond.

De wrijvingsconstante f is afhankelijk van de "stroperigheid" van de vloeistof. (De opwaartse druk is verwaarloosd.)

a Geef de algemene formule voor een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking.

De snelheid van het kogeltje wordt na enige tijd nagenoeg constant: 5 m/s.

b Bereken hieruit f.

De snelheid waarmee het kogeltje in de vloeistof komt is 3 m/s.

c Geef de formule van de oplossingsfunctie.

De in de vloeistof afgelegde weg na $t$seconden noemen we $s(t)$.

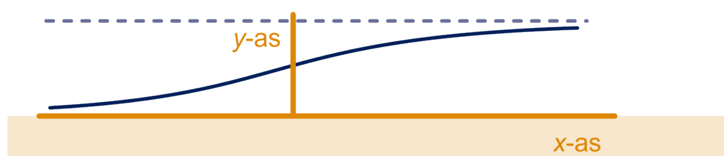
d Geef een formule van $s(t)$ en bereken hiermee hoe diep het kogeltje na 20 seconden gevallen is.

e Teken de grafiek van s op de GR of in GeoGebra.

f Hoe zie je dat aan de grafiek van s?

g Geef een formule van de rechte lijn waarop de grafiek van s steeds meer lijkt.

3 Hieronder is de grafiek van de functie $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ getekend.



a Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek. Schrijf de bijbehorende limieten op.

b Ga langs algebraïsche weg na dat $y(x)$ en $y(-x)$ gemiddeld $\frac{1}{2}$ zijn.
Wat betekent dat voor de grafiek?

Dit is (de meest eenvoudige) logistische groeifunctie.

c Geef de bijbehorende differentiaalvergelijking.

4 Een logistische groeifunctie voldoet aan de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8y - 2y^2$.

a Wat is het verzadigingsniveau?

b Wat is de grootste groeisnelheid?

De enige oplossingsfuncties waarvan de grafiek een horizontale raaklijn heeft, zijn twee constante functies.

c Welke functies?
Hoe zie je dat aan de differentiaalvergelijking?

Elke oplossingsfunctie met een buigpunt, heeft daar dezelfde groeisnelheid.

d Toon dat aan.
Welke waarde is dat?

5 In deze opgave bewijzen we: de oplossingsfunctie van een logistische groeifunctie ligt vast door zijn startwaarde.
Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y(M - y)$.
Voor een oplosingsfunctie f van de differentiaalvergelijking geldt:
$f'(t) = c \cdot f(t)(M - f(t))$.

a Laat zien dat daar uit volgt: $\frac{f'(t)}{(f(t))^2} = \frac{c \cdot M}{f(t)} - c$.

We bekijken de functie $g : t \to \frac{1}{f(t)}$.

b Laat zien dat $g'(t) = -\frac{f'(t)}{(f(t))^2}$.

c Uit **a** en **b** volgt dat g oplossingsfunctie is van de differentiaalvergelijking: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -c \cdot M\left(y - \frac{1}{M}\right)$.

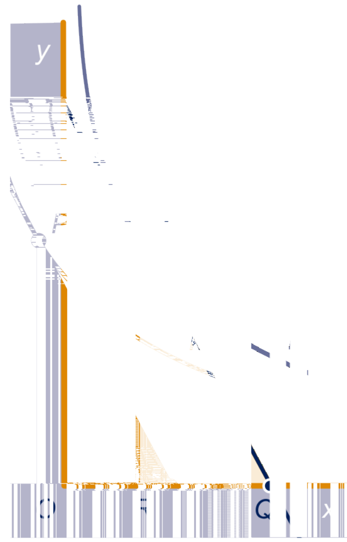
In paragraaf 5 **Ongeremde groei** hebben we gezien dat g dan een formule moet hebben van de vorm:

$$g(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-cMt} + \frac{1}{M}$$

d Laat zien dat hieruit volgt: $f(t) = \frac{M}{1 + aM \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}$.

6

In de figuur is een functie k getekend met daarop een punt P. De raaklijn in P aan k snijdt de x-as in Q. De projectie van P op de x-as is R. Dan is de oppervlakte van driehoek $PQR = 2$. De functie k voldoet dan aan de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \text{-}\frac{1}{4}y^2$ of aan de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}y^2$.



a Toon dat aan.

Gegeven zijn de functies $y = \frac{4}{x+a}$, voor alle mogelijke waarden van a.

b Toon aan dat deze functies aan de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \text{-}\frac{1}{4}y^2$ voldoen.

c Geef een oplossingsfunctie f van de differentiaalvergelijking met beginwaarde $f(3) = 2$.

7

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x + 3 - y}{x}$. Een lineaire functie is oplossing van de differentiaalvergelijking. Bepaal een formule van deze functie.

In deze paragraaf zoeken we oplossingen van differentiaalvergelijkingen waarvan de variabelen te scheiden zijn.

Gegeven is de differentiaalvergelijking: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c(x,y)$.
Als er functies p en q (van één variabele) zijn zó, dat $c(x,y) = p(x) \cdot q(y)$, dan is de differentiaalvergelijking een **differentiaalvergelijking met te scheiden variabelen**.

Voorbeeld
Als $c(x,y) = x\sqrt{y+1}$ zijn de variabelen te scheiden met $p(x) = x$ en $q(y) = \sqrt{y+1}$.
Als $c(x,y) = \sqrt{xy+1}$ zijn de variabelen niet te scheiden.

Opmerking
Dat *jij* de variabelen van $c(x,y) = \sqrt{xy+1}$ niet kunt scheiden, betekent nog niet dat ze niet te scheiden zijn.
Veronderstel dat ze wel te scheiden zijn, dan zijn er functies p en q zó, dat $p(x) \cdot q(y) = \sqrt{xy+1}$.
Voor $x = 0$ invullen geeft: $p(0) \cdot q(y) = 1$, dus is q een constante functie. Evenzo vind je door voor $y = 0$ in te vullen dat p een constante functie is. Maar dan zou c ook constant zijn en dat is een tegenspraak, dus zijn de variabelen niet te scheiden.

1 Ga van de volgende functies c na of de variabelen te scheiden zijn.
Zoja, laat zien hoe.

- $c(x,y) = \sqrt{xy}$ (met x en y positief)
- $c(x,y) = \sqrt{x+y}$
- $c(x,y) = -\frac{x}{y}$
- $c(x,y) = x + xy$

Stelling
Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x) \cdot q(y)$.
Neem aan: P is een primitieve functie van p en R een primitieve van de functie $\frac{1}{q}$.
Dan zijn de functies y met $R(y) = P(x) + k$ voor elke constante k oplossing van de differentiaalvergelijking.

Voordat we de stelling in opgave 3bewijzen, eerst een voorbeeld.

Voorbeeld
Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy$.
Van deze differentiaalvergelijking kun je de variabelen scheiden:

$c(x,y) = p(x) \cdot q(y)$ met $p(x) = x$ en $q(y) = y$.

Dan $\dfrac{1}{q(y)} = \dfrac{1}{y}$ en $p(x) = x$, dus je kunt bijvoorbeeld nemen: $R(y) = \ln|y|$ en $P(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Volgens de stelling zijn de functies y met $\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + k$ oplossing van de differentiaalvergelijking.

Je kunt deze functies schrijven als: $y = \pm e^k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$. Door d te schrijven voor de constante e^k, vind je:

de functies $y = d \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ met $d \neq 0$ zijn oplossing van de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dx} = xy$.

Als $d = 0$, krijg je ook een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking.

2 Controleer door substitutie dat de functies $y = d \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ aan de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dx} = xy$ voldoen.

3 Gegevens zijn als in de stelling.

a Toon aan: $\dfrac{dR}{dx} = \dfrac{1}{q(y)} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

b Waarom geldt: $\dfrac{dR}{dx} = p(x)$?

c Hoe volgt uit de twee vergelijkingen dat voor de functies y met $R(y) = P(x) + k$ volgt: $\dfrac{1}{q(y)} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p(x)$?

Notatie

Vaak wordt een primitieve van een functie f genoteerd met $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Zo is $\displaystyle\int 3\sqrt{x}\,dx = 2x\sqrt{x} + c$ en $\displaystyle\int 3y^2\,dy = y^3 + c$, waarbij c een constante is.

Het oplossing van de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dx} = xy$ in het vorige voorbeeld ziet er in deze notatie zó uit.

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

Deel door y (variabelen scheiden)

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x$$

Vermenigvuldig met dx (variabelen scheiden)

$$\frac{1}{y} \cdot dy = x \cdot dx$$

Zet er 'vleeshaken' voor.

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int x \cdot dx$$

Uitrekenen

$$\ln(|y|) = \tfrac{1}{2}x^2 + c$$

Opmerking
dx en dy zijn eerder genoemd bij het intermezzo over Leibniz in paragraaf 2. Ook komen ze in de integraalnotatie voor.

Voorbeeld
Geef een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + 2xy$ met beginwaarde (0,2).

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^2 + 2xy^2 && \text{Delen door } y^2 \text{ (variabelen scheiden)}\\
\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 + 2x && \text{Vermenigvuldigen met d}x\\
\frac{1}{y^2} \cdot \mathrm{d}y &= (1 + 2x) \cdot \mathrm{d}x && \text{Vleeshaken zetten}\\
\int \frac{1}{y^2} \cdot \mathrm{d}y &= \int (1 + 2x) \cdot \mathrm{d}x && \text{Uitrekenen}\\
-\frac{1}{y} &= x^2 + x + c
\end{aligned}$$

Dus $y = -\frac{1}{x^2 + x + c}$.
Uit $y(0) = 2$ volgt: $c = -\frac{1}{2}$, dus $y = -\frac{1}{x^2 + x - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{2x^2 + 2x - 1}$.

4 Geef een oplossingsfunctie van de volgende beginwaardeproblemen.

a $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{h^2}$ en $h(0) = 0$.
Zie opgave 6: een trechter vullen.

b $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$ en $y(0) = 4$.
Zie opgave 12.

c $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2\sqrt{h}$ met $h(0) = 100$.
Zie opgave 15: een leegstromend vat.

d $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1\frac{1}{3}\sqrt{xy}$ en $y(1) = 4$.
Zie opgave 22.

e $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -0{,}3 \cdot G^{\frac{2}{3}}$ en $G(0) = 8$.
Zie opgave 21 over de mottenbal.

f $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0{,}2 \cdot (T - 20)$ en $T(0) = 100$ (afkoeling).

5 In opgave 15 brandde in 8 uur een kaars af.
Er geldt: $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c \cdot \frac{1}{(20 - h)^2}$ en $h(0) = 20$.
Hierbij is h de lengte van de kaars (in cm), t de tijd in uur en c een constante die onder andere van de kwaliteit van de was afhangt.

a Laat zien dat de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c \cdot \frac{1}{(20 - h)^2}$ leidt tot: de oplossingen $-\frac{1}{3}(20 - h)^3 = c \cdot t + d$, waarbij d constant is.

b Schrijf h als functie van t, zonder de constanten c en d.

6

Geremde groei

In deze opgave lossen we de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = cy(a-y)$ op voor willekeurige getallen a en c.

Variabelen scheiden geeft: $\int \frac{1}{y(a-y)}\,\mathrm{d}y = \int c\,\mathrm{d}x$.

Het probleem is een primitieve te vinden van $\frac{1}{y(a-y)}$.

a Welke primitieve vind je als $a = 0$?

Als $a \neq 0$, moet je *breuksplitsen*: je kunt $\frac{1}{y(a-y)}$ schrijven als $\frac{1}{y(a-y)} = \frac{\dots}{y} + \frac{\dots}{a-y}$.

b Zoek uit welke getallen op de stippellijnen moeten staan.

Hint 4.

Uit het antwoord op het vorige onderdeel volgt:
$\ln(|y|) - \ln(|a-y|) = acx + C$ voor willekeurige C.

c Ga dat na.

Uit $\ln(|y|)$- $\ln(|y-a|) = acx+C$ volgt: $\ln(|\frac{y-a}{y}|) =$ -$(acx+C)$,
dus $\left|1-\frac{a}{y}\right| = \mathrm{e}^{-(acx+C)}$, dus $1-\frac{a}{y} = d \cdot \mathrm{e}^{-acx}$, met $d \neq 0$.

d Laat zien dat deze laatste vorm te herschrijven is als $y = \frac{a}{1-d\cdot \mathrm{e}^{-acx}}$

e Ga na dat hieruit de formule voor de oplossingsfuncties $y = \frac{M}{1+b\cdot \mathrm{e}^{-cMx}}$ voor geremde groei volgt.

7

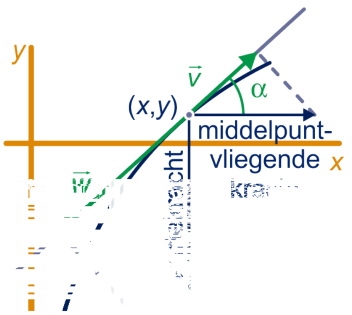
Geef oplossingsfuncties van de volgende beginwaardeproblemen.

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \cdot \mathrm{e}^{-y}$, beginwaarde $(0{,}0)$
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos(x)}{y}$, beginwaarde $\left(\frac{1}{2}\pi{,}1\right)$
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + xy$, beginwaarde $(0{,}3)$
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + xy$, beginwaarde $(0{,}\text{-}3)$
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x+y}$ beginwaarde $(0{,}1)$
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\cdot \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$, beginwaarde $(0{,}\text{-}2)$

Intro

1

a Zie figuur.
Noem de projectie van de middelpuntvliedende kracht op de raaklijn $\vec{v}$ en de projectie van de zwaartekracht op de raaklijn $\vec{w}$, zie figuur. Dan $\left|\vec{v}\right| = m \cdot \frac{v^2}{x} \cdot \cos(\alpha)$ en $\left|\vec{w}\right| = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$.



b Deel de factor m in beide leden weg. Deel door $\cos(\alpha)$, dan krijg je in het linkerlid $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$. Deel nog door g en je vindt het gewenste resultaat.

c $y = \frac{v^2}{g} \cdot \ln|x| + c$, voor elke constante c.

Differentiaalvergelijkingen

2

a 1 jan 2011: 6,915 miljard
1 jan 2012: 6,992 miljard
1 jan 2013: 7,068 miljard
1 jan 2014: 7,146 miljard
1 jan 2015: 7,217 miljard

b Elk jaar wordt de bevolking 0,011 keer zo groot. Het volgend jaar komt er 1,1% bij van een groter aantal dan dit jaar.

c $y = 6{,}84 \cdot 1{,}011^{t-10}$

3

a Na 2 min.: $80 - 0{,}2 \cdot 80 = 64$°C
Na 3 min.: $64 - 0{,}2 \cdot 64 = 51{,}2$°C
Na 4 min.: $51{,}2 - 0{,}2 \cdot 51{,}2 = 40{,}96$°C
Na 5 min.: $40{,}96 - 0{,}2 \cdot 40{,}96 = 32{,}768$°C

b $T = 100 \cdot 0{,}8^t$

c $U = 80 \cdot 0{,}8^t + 20$

4

a Er komt per jaar bij $\dfrac{g}{100} \cdot N$ (geboortes);
er gaat per jaar vanaf: $\dfrac{s}{100} \cdot N$ (sterftes);
Netto is dat $\dfrac{g-s}{100} \cdot N$ per jaar. InΔt jaar is het Δt keer zo veel.

b $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = a \cdot 0{,}017 \cdot \mathrm{e}^{0{,}017t} = 0{,}017 \cdot N$

c $5 \cdot 10^9 = a \cdot \mathrm{e}^{0{,}017 \cdot 87}$, dus $a = 1{,}139 \cdot 10^9$.

d $10 \cdot 10^9 = 1{,}139 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0{,}017t}$ geeft $t = \frac{1}{0{,}017} \cdot \ln\left(\frac{10}{1{,}139}\right) \approx 128{,}6$. Dus in 2029.

5

a Deel beide leden van $T(t+\Delta t) - T(t) = c \cdot T(t) \cdot \Delta t$ door Δt en laat Δt tot 0 naderen.

b Kettingregel: $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = c \cdot a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot t} = c \cdot T$

c $100 = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot 0}$, dus $a = 100$

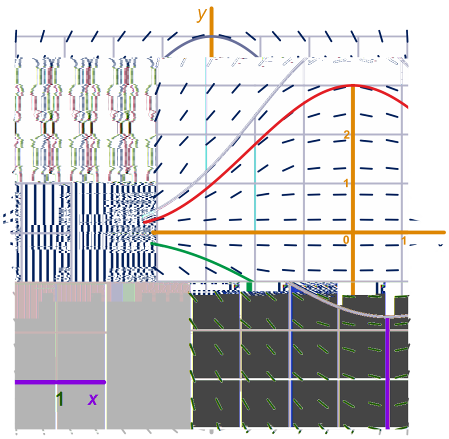
d $30 = 100 \cdot \mathrm{e}^{c \cdot 5} \Leftrightarrow c = \dfrac{\ln\left(\frac{30}{100}\right)}{5} \approx -0{,}24$

e $10 = 100 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}24 \cdot t} \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln\left(\frac{10}{100}\right)}{-0{,}24} \approx 9{,}6$, dus na ongeveer tien minuten

6 **a** $4, 1, \frac{4}{9}$ en $\frac{1}{4}$
b ∞; de grafiek heeft in de oorsprong een verticale raaklijn.

7 **a** $-\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3 = -1\frac{1}{2}$
b $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$
c Zie figuur 1
d Zie figuur 2.

figuur 1



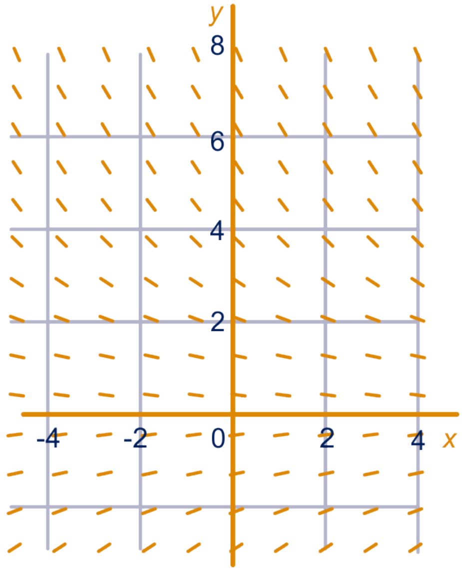
figuur 2

8 **a** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -c \cdot t$
b Volgens de kettingregel: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -c \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot t} = -c \cdot y$
c $y = -5 \cdot t^2 + a$, voor alle mogelijke getallen a.
d $y = -5 \cdot t^2 + 50$
e $-5 \cdot t^2 + 50 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{10}$, dus de grond wordt geraakt als $t = \sqrt{10}$.
De snelheid $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ is dan $-10\sqrt{10}$.

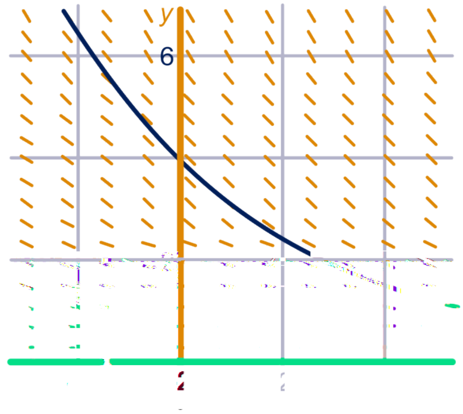
Richtingsvelden

9 **a** Zie figuur 1 op de volgende bladzijde .
b Zie figuur 2 op de volgende bladzijde.

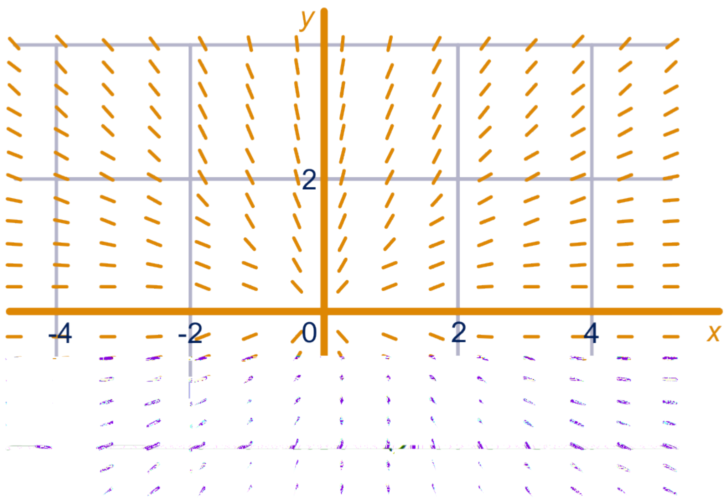
10 **a** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$
b Zie figuur op de volgende bladzijde.
c $f(x) = ax$, waarbij a een willekeurig getal is.
d Enerzijds geldt voor deze functies $f'(x) = a$; anderzijds: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{ax}{x} = a$. Klopt dus.



figuur 1 opgave 9



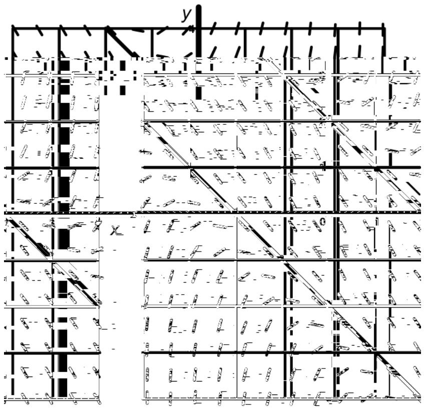
figuur 2 opgave 9



figuur bij opgave 10

11

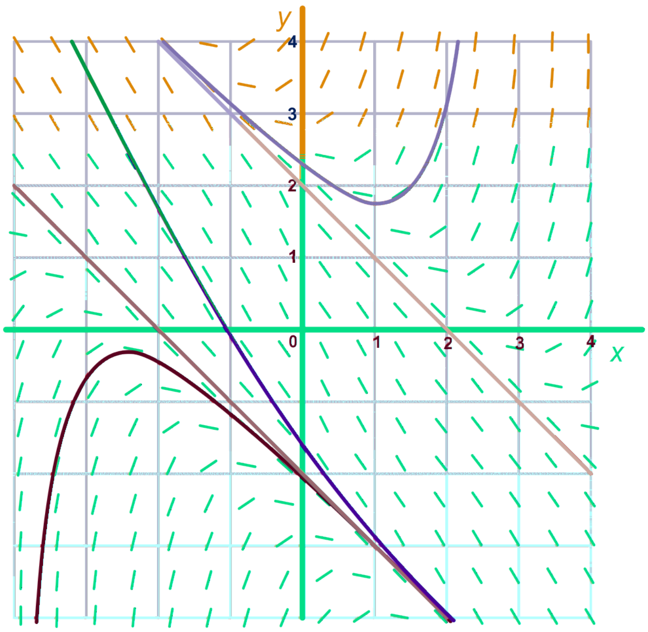
a Zie figuur.
De lijnen passen in het richtingsveld.



b Enerzijds: in elk punt van de grafiek van $y = \text{-}x - 2$ geldt dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn -1 is.
Anderzijds: in elk punt van de lijn $y = \text{-}x - 2$ geldt: $\frac{1}{4}(x+y)^2 - 2 = \frac{1}{4}(x + \text{-}x - 2)^2 - 2 = \text{-}1$.
Dus in elk punt van de functie $y = \text{-}x - 2$ is de groeisnelheid gelijk aan de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven groeisnelheid.

c $\frac{1}{4}(x+y)^2 - 2$ is minimaal -2 als $(x+y)^2 = 0$, dus in alle punten van de lijn $x + y = 0$.

d Zie figuur.



12

a -

b Cirkels met middelpunt $O(0,0)$.

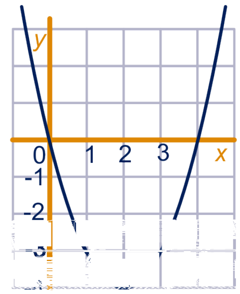
c $x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = 16 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$. Voor de functie f geldt: $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot \text{-}2x = \text{-}\frac{x}{f(x)}$.
Dus de functie f voldoet aan de differentiaalvergelijking.

d $g(x) = \text{-}\sqrt{16 - x^2}$

e $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \text{-}\frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot \text{-}2x = \text{-}\frac{x}{g(x)}$, dus ook de functie g is oplossing van de differentiaalvergelijking.

13

a Zie figuur.
Dat zijn de punten (x, y) met $y - x^2 + 4x = 0$. Die vormen een parabool met top (2,-4).



figuur bij opgave 13

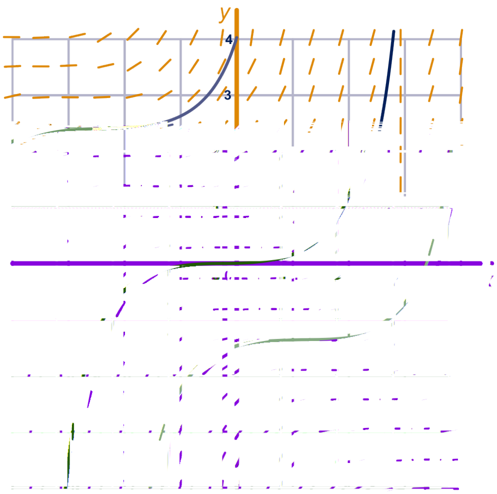
b Dan moet enerzijds $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2ax + b$.
Anderzijds: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x^2 + 4x = ax^2 + bx + c - x^2 + 4x = (a-1)\,x^2 + (b+4)\,x + c$.
Dus voor alle x moet gelden: $2ax+b = (a-1)\,x^2+(b+4)\,x+c$, dus dus links en rechts moet dezelfde uitdrukking in x staan. Dus $a-1 = 0$, $2a = b+4$ en $b = c$. Dit geeft $a = 1$, $b = -2$ en $c = -2$, de functie is dus: $y = x^2 - 2x - 2$.

14

a Zie figuur.

b $0{,}2(x+y)^2 > 0$ in elk punt behalve $O(0{,}0)$, dus elke oplossingsfunctie heeft een positieve helling behalve die door O, die heeft daar een horizontale raaklijn.

c Op de cirkel met middelpunt $O(0{,}0)$ en straal $\sqrt{5}$; op de cirkel met middelpunt $O(0{,}0)$ en straal $\sqrt{20}$.



15

a De derde

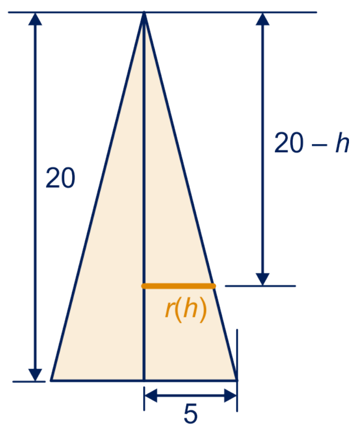
b Zie figuur.

Met gelijkvormigheid volgt: $\frac{r(h)}{5} = \frac{20-h}{20}$, dus $r(h) = 5 - \frac{1}{4}h$.

c $\frac{1}{O(h)} = \frac{1}{\pi\left(5 - \frac{1}{4}h\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{16}\pi(20-h)^2}$, dus $\frac{1}{O(h)}$ is evenredig met $\frac{1}{(20-h)^2}$.

d Enerzijds: $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}(3ct)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3c = -c \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3ct}\right)^2}$ en anderzijds: $-c \cdot \frac{1}{(20-h)^2} = -c \cdot \frac{1}{\left(20-\left(20-\sqrt[3]{3ct}\right)\right)^2} = -c \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3ct}\right)^2}$.
Dus h is oplossingsfunctie.

e $20 - \sqrt[3]{3c \cdot 8} = 0 \Leftrightarrow c = \frac{20^3}{8 \cdot 3} = 333\frac{1}{3}$



figuur bij opgave 15

16

a Dan $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2\sqrt{25} = -10$, dus met 10 cm per minuut.

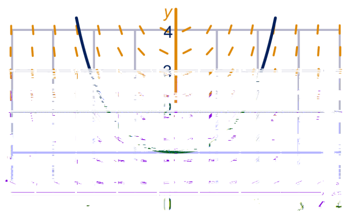
b Enerzijds: $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2(p-t)$.
Anderzijds: $-2\sqrt{(p-t)^2} = -2(p-t)$. Dus de functie $h = (p-t)^2$ is oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking.

c $100 = (p - 0)^2$, dus $p = 10$.
d $h = 0 \Leftrightarrow (10 - t)^2 = 0$, dus na 10 minuten.

De methode van Euler

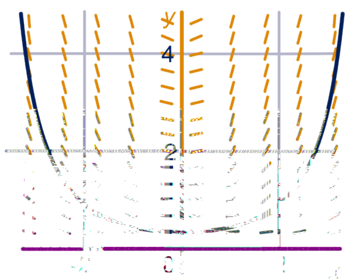
17 $f(1{,}01) = f(1) + 2 \cdot 0{,}01 = 3{,}02$

18
a Zie figuur.
b In (3,3) heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$, dus $f(4) \approx 3 + 4\frac{1}{2} \cdot 1 = 7\frac{1}{2}$.
c Kleiner, want het richtingsveld vertoont een toenemende stijging rechts van de y-as.
d In $f(2)$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\frac{1}{8} = \frac{9}{16}$, dus $f\left(1\frac{1}{2}\right) \approx 1\frac{1}{8} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{13}{32}$.
In $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{13}{32}\right)$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{13}{32} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{135}{128}$, dus $f(2) \approx 1\frac{13}{32} + \frac{135}{128} \cdot \frac{1}{2} = \frac{239}{256}$.



figuur bij opgave 18

19
a Opmerking: $f(2) \approx b_2$, $f(3) \approx b_3$ en $f(4) \approx b_4$.
b $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ en $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} \cdot a_n b_n \cdot \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$.
Opmerking: $f(2) \approx b_4$.
c $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{100}$ en $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} \cdot a_n b_n \cdot \frac{1}{100}$.
$f(2) \approx b_{200} = 2{,}6958\ldots$, dus in drie decimalen 2,696.
d Zie figuur.
e $a_0 = 2$ en en $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$;
$b_0 = 1$ en $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} \cdot a_n b_n \cdot \frac{1}{2}$.



figuur bij opgave 19

20
a Enerzijds: $\dfrac{dy_c}{dx} = c \cdot \frac{1}{4} \cdot 2x \cdot e^{\frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2}x \cdot c \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}$.
Anderzijds: $\frac{1}{2}x \cdot y_c = \frac{1}{2}x \cdot c \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}$.
Dus de functies y_c zijn oplossing van de differentiaalvergelijking.
b Uit $f(0) = 1$ volgt $c = 1$, dus $f : x \to e^{\frac{1}{4}x^2}$.
Uit $g(1) = 2$ volgt: $c = \dfrac{1}{e}$, dus $g : x \to e^{\frac{1}{4}x^2 - 1}$.
c -

21
a Noem de straal van de mottenbal r (cm). Dan $\frac{4}{3}\pi r^3 = 1{,}2 \Leftrightarrow r = \left(\frac{0{,}9}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$, dus de oppervlakte is $4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{0{,}9}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 5{,}4609\ldots$ mm^2, dus 5461 mm^2.
b $\frac{4}{3}\pi r^3 = V \Leftrightarrow r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$, dus $O = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{36\pi V}$.
c Neem voor a de rij met a_n met $a_0 = 0$ en $a_{n+1} = a_n + 0{,}1$.
Neem voor b de rij met $b_0 = 8$ en $b_{n+1} = b_n - 0{,}03 \cdot (b_n)^{\frac{2}{3}}$.
Na één week weegt de mottenbal $b_{10} = 6{,}853412257$ gram.

22

a Neem $a_n = 1 + 0{,}01n$. Neem $b_0 = 4$ en $b_{n+1} = b_n + 0{,}01 \cdot 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt{a_n \cdot b_n}$.
Dan is $f(2)$ te benaderen met b_{100}.

b Enerzijds (kettingregel): $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\left(x\sqrt{x}+c\right) \cdot \sqrt{x} = 1\frac{1}{3}\left(x\sqrt{x}+c\right) \cdot \sqrt{x}$.
Anderzijds: $1\frac{1}{3}\sqrt{xy} = 1\frac{1}{3}\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 1\frac{1}{3}\sqrt{x} \cdot \left(x\sqrt{x}+c\right)$.

c $x \to \left(x\sqrt{x}+1\right)^2$

Ongeremde groei

23

a De oplossingsfuncties bij $c = 1{,}2$ zijn stijgend en oplossingsfuncties bij $c = \text{-}0{,}8$ zijn dalend.

b Omdat $\mathrm{e}^0 = 1$, gaan de functies door $(0{,}1)$.
Als $y = \mathrm{e}^{c \cdot x}$, dan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x} = c \cdot y$.

c Als $y = a \cdot \mathrm{e}^{1{,}2 \cdot x}$, dan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1{,}2 \cdot \mathrm{e}^{1{,}2 \cdot x} = 1{,}2 \cdot y$.
De functie gaat door $(3{,}2) \Leftrightarrow 2 = a \cdot \mathrm{e}^{3{,}6} \Leftrightarrow a = 2 \cdot \mathrm{e}^{\text{-}3{,}6}$.

d Oplossingsfuncties zijn van de vorm $y = a \cdot \mathrm{e}^{\text{-}0{,}8 \cdot x}$.
Zo'n functie gaat door $(1{,}1)$ als $1 = a \cdot \mathrm{e}^{\text{-}0{,}8} \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^{0{,}8}$.

e De grafiek van y_k krijg je door een horizontale verschuiving van y_0. Het richtingsveld verandert ook niet bij een horizontale verschuiving.

24

a Als $y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x}$, dan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot c \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x} = c \cdot y$, onafhankelijk van a.

b De oplossingsfunctie gaat door $(1{,}2) \Leftrightarrow 2 = a \cdot \mathrm{e}^{1{,}5 \cdot 1} \Leftrightarrow a = 2 \cdot \mathrm{e}^{\text{-}1{,}5}$.
De oplossingsfunctie gaat door $(1{,}\text{-}2) \Leftrightarrow \text{-}2 = a \cdot \mathrm{e}^{1{,}5 \cdot 1} \Leftrightarrow a = \text{-}2 \cdot \mathrm{e}^{\text{-}1{,}5}$.
De oplossingsfunctie gaat door $(\text{-}1{,}\text{-}2) \Leftrightarrow \text{-}2 = a \cdot \mathrm{e}^{\text{-}1{,}5 \cdot 1} \Leftrightarrow a = \text{-}2 \cdot \mathrm{e}^{1{,}5}$.

25

a $y'(x) = f'(x) \cdot \mathrm{e}^{\text{-}c \cdot x} + \text{-}c \cdot f(x) \cdot \mathrm{e}^{\text{-}c \cdot x}$. Omdat f oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is geldt: $f'(x) = c \cdot f(x)$ dus $y'(x) = 0$ voor alle x.

b $\mathrm{e}^{\text{-}c \cdot x} f(x)$ is constant, zeg a, dan $f(x) \cdot \mathrm{e}^{\text{-}c \cdot x} = a$ voor alle x. Beide kanten met $\mathrm{e}^{c \cdot x}$ vermenigvuldigen geeft het gewenste resultaat.

26

a Er is sprake van afname.

b De oplossingsfuncties zijn van de vorm $h = a \cdot \mathrm{e}^{\text{-}c \cdot t}$. Uit de halveringstijd is 60 en beginhoeveelheid a volgt: $a \cdot \mathrm{e}^{\text{-}c \cdot 60} = \frac{1}{2}a$, dus $c = \text{-}\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{60} = \frac{\ln(2)}{60}$.

c Noem de halveringstijd T, dan $\mathrm{e}^{\text{-}0{,}0035 \cdot T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{-}0{,}0035 \cdot T = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, dus $T = \frac{\ln(2)}{0{,}0035} \approx$ 198 dagen.

27

De oplossingsfuncties zijn $y = a \cdot \mathrm{e}^{c \cdot x}$.
$\mathrm{e}^{c \cdot x} = (\mathrm{e}^c)^x$, dus de groeifactor is e^c.

28

a Er geldt: $T(t) = a \cdot \mathrm{e}^{\text{-}0{,}2 \cdot t}$.
Uit $T(0) = 80$ volgt $a = 80$, dus $T(5) = 80 \cdot \mathrm{e}^{\text{-}0{,}2 \cdot 5} \approx 29{,}43$.
Als de begintemperatuur 60°C is, dan $T(5) = 60 \cdot \mathrm{e}^{\text{-}0{,}2 \cdot 5} \approx 22{,}07$.

b Als de begintemperatuur 100°C, dan $T(5) = 80 \cdot \mathrm{e}^{\text{-}0{,}2 \cdot 5} + 20 \approx 49{,}43$;
als de begintemperatuur 80°C, dan $T(5) = 60 \cdot \mathrm{e}^{\text{-}0{,}2 \cdot 5} + 20 \approx 42{,}07$;
als de begintemperatuur 60°C, dan $T(5) = 40 \cdot \mathrm{e}^{\text{-}0{,}2 \cdot 5} + 20 \approx 34{,}72$.

c $T(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{-0,2 \cdot t}$; $T(t) = 80 \cdot \mathrm{e}^{-0,2 \cdot t} + 20$

29 Enerzijds: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot c \cdot \mathrm{e}^{c,-x}$.
Anderzijds: $c \cdot (y - p) = c \cdot (a \cdot \mathrm{e}^{cx} + p - p) = a \cdot c \cdot \mathrm{e}^{cx}$

30
a Het quotum wordt weggevist, dus met zoveel neemt de toename af.
b De differentiaalvergelijking is te schrijven als $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}q} = 0{,}5(H - 2q)$, dus de oplossingen zijn $H(t) = a \cdot \mathrm{e}^{cx} + 2q$.
$H(0) = 7$, dus $a = 7 - 2q$ en $H(t) = (7 - 2q) \cdot \mathrm{e}^{cx} + 2q$.
c Als $7 - 2q < 0$, dus als $q > 3{,}5$.

31
a Enerzijds wordt in 1 minuut 0,1 deel van de lucht weggezogen, dus ook 0,1 deel van de aanwezige hoeveelheid koolzuur, dus *vermindert* C met $0{,}1C$ m^3; anderzijds komt er per minuut $0{,}05 \cdot 0{,}1$ deel koolzuur *bij*, dus in Δt minuten is $\Delta C = -0{,}1C \cdot \Delta t + 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot \Delta t$.
b Deel beide kanten door Δt en neem $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$, dan vind je: $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = -0{,}1C + 0{,}005$.
c $C(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-0,1 \cdot t} + 0{,}05$; uit $C(0) = 0{,}2$ volgt: $a = 0{,}15$, dus $C(t) = 0{,}15 \cdot \mathrm{e}^{-0,1 \cdot t} + 0{,}05$.
d $0{,}15 \cdot \mathrm{e}^{-0,1 \cdot t} + 0{,}05 = 0{,}07 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,1 \cdot t} = \frac{0{,}02}{0{,}15}$, dus $t = -10(\ln(2) - \ln(15)) \approx 20$ minuten.

32
a $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = 0{,}1 \cdot (K - 10.000)$
b $K(t) = 90.000 \cdot \mathrm{e}^{-0,1 \cdot t} + 10.000$

Logistische groei

33
a Enerzijds $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{-500}{(1 + 100 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t})^2} \cdot 100 \cdot -1{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t} = \frac{75.000 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t}}{(1 + 100 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t})^2}$.
Anderzijds: $0{,}003 \cdot G(500 - G) = 0{,}003 \cdot \frac{500}{1 + 100 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t}} \cdot \left(500 - \frac{500}{1 + 100 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t}}\right) =$
$0{,}003 \cdot \frac{500}{1 + 100 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t}} \cdot \frac{500 \cdot 100 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t}}{1 + 100 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t}} = \frac{75.000 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t}}{(1 + 100 \cdot \mathrm{e}^{-1,5 \cdot t})^2}$.
b $\lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{e}^{-1,5t} = 0$, dus $\lim\limits_{t \to \infty} G(t) = 500$.

34
a Enerzijds $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{M}{(1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt})^2} \cdot -c \cdot M \cdot b \cdot \mathrm{e}^{-cMt} = \frac{c \cdot M^2 \cdot b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}{(1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt})^2}$.
Anderzijds $c \cdot y(M - y) = c \cdot \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}} \cdot \left(M - \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}\right) =$
$c \cdot \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}} \cdot \frac{M + M \cdot b \cdot \mathrm{e}^{-cMt} - M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}} = \frac{c \cdot M^2 \cdot b \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}{(1 + b \cdot \mathrm{e}^{-cMt})^2}$.
b $y(0) = \frac{M}{1 + b} \Leftrightarrow 1 + b = \frac{M}{y(0)} \Leftrightarrow b = \frac{M}{y(0)} - 1$

35
a $M = 1000$, $b = 99$ en $c = 0{,}0002$
b $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0{,}0002 \cdot H(1000 - H)$
c De grafiek van H heeft een buigpunt als $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ een extreme waarde heeft. De grafiek van de functie $H \to 0{,}0002 \cdot H(1000 - H)$ is een bergparabool met nulpunten $H = 0$ en $H = 1000$, dus maximaal als $H = 500$.
d $H = 500 \Leftrightarrow 1 + 99 \cdot \mathrm{e}^{-0,2t} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,2t} = \frac{1}{99} \Leftrightarrow t = 5\ln(99) \approx 22{,}98$

e $e^{0,2}$

f $G(t) = 10 \cdot e^{0,2t}$

36

a -

b $\left(\frac{17069}{3929}\right)^{0,2} \approx 1{,}34$

c $2 \cdot 105711 = 211422$

d $e^{cM} = 1{,}34 \Leftrightarrow c = \dfrac{\ln(1{,}34)}{211422} \approx 0{,}0000014$

e $B(0) = 3929 = \dfrac{211422}{1+b} \Leftrightarrow b \approx 52{,}8$

f -

37

a $0{,}3y\left(1 - \frac{1}{200}y\right) = 0{,}0015y(200-y)$, dus $M = 200$ en $cM = 0{,}3$, dus $y(t) = \dfrac{200}{1 + b \cdot e^{-0{,}3t}}$, dus $y(10) = 80 \Leftrightarrow \dfrac{200}{1 + b \cdot e^{-3}} = 80$, dus $b = e^3\left(\frac{200}{80} - 1\right) \approx 30$
Dus $y(t) = \frac{200}{1+30 \cdot e^{-3t}}$.

b $cM = k$

c $y(t) = \dfrac{M}{1 + b \cdot e^{-kt}}$

38

a $L(t) = L(0) - E(0) + E(t) = 0{,}01 - 0{,}005 = 0{,}005 + E(t)$;
Dus $L = 0{,}005 + E$ invullen in de differentiaalvergelijking geeft het gevraagde.

b We passen de formules van logistische groei toe: $E = \dfrac{-0{,}005}{1 + b \cdot e^{0{,}0003t}}$.
$E(0) = 0{,}005 \Leftrightarrow 1 + b = -1$, dus $b = -2$, dus $E = \dfrac{0{,}005}{2 \cdot e^{0{,}0003t} - 1}$.

c Bij logistische groei staat in de dv de factor $M - y$, dus met 'min' y. Hier staat in de dv de factor $M + y$, dus met een 'plus'.

d Dan $2 \cdot e^{0{,}0003t} - 1 = 2$, dus $t = \dfrac{\ln(1{,}5)}{0{,}0003} \approx 1352$ sec.

Gemengde opgaven

39

$P(t) = a \cdot e^{-0{,}3t}$
Na het innemen van de eerste pil: $P(t) = 350.000 \cdot e^{-0{,}3t}$. dan $P(t) = 100.000 \Leftrightarrow e^{-0{,}3t} = \frac{10}{35} \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln\left(\frac{10}{35}\right)}{-0{,}3} \approx 4{,}18$, dus 4 uur.
Na het innemen van de tweede pil: $P(t) = 450.000 \cdot e^{-0{,}3t}$, dan $P(t) = 100.000 \Leftrightarrow e^{-0{,}3t} = \frac{10}{45} \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln\left(\frac{10}{45}\right)}{-0{,}3} \approx 5$ uur.
Daarna steeds 5 uur.

40

a $\dfrac{dK}{dt} = c \cdot K$

b Negatief

c 100

d $K(t) = 100.e^{ct}$

e $100.e^{c \cdot 5730} = 50 \Leftrightarrow c = -\dfrac{\ln(2)}{5730} \approx -0{,}00012$

41

a De kans dat je minstens 0 minuten moet wachten is 1.

b De tijd die je al gewacht hebt is onafhankelijk van de tijd die je nog moet wachten.

c Er geldt: $w(t) = a \cdot e^{c \cdot t}$; uit $w(0) = 1$ volgt: $a = 1$. Verder geldt: $w(10) = \frac{1}{4}$, dus $e^{c \cdot 10} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow c = 0{,}1 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right)$, dus $w(t) = e^{0{,}1 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) \cdot t} = 4^{-0{,}1t}$.

42 Er geldt: $p(h) = 1030 \cdot e^{c \cdot h}$. Uit $p(5000) = 570$ volgt: $e^{c \cdot 5000} = \frac{570}{1030}$, dus $c = 0{,}0002 \cdot \ln\left(\frac{570}{1030}\right) \approx$ -0,00012, dus $p(h) = 770 \Leftrightarrow e^{-0{,}00012 \cdot h} = \frac{770}{1030} \Leftrightarrow h = -\frac{\ln\left(\frac{770}{1030}\right)}{0{,}00012} \approx 2424$ (m). (Tussendoor c niet afronden geeft $h \approx 2458$ (m).)

43
- **a** De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P is die van lijn XY en die is: $-\frac{y}{x}$
- **b** Enerzijds: $f'(x) = -\frac{c}{x^2}$, anderzijds $-\frac{y}{x} = -\frac{\frac{c}{x}}{x} = -\frac{c}{x^2}$.
  Klopt.
- **c** Teken de functie $x \to \frac{6}{x}$.

44
- **a** Voer de rijen a_n en b_n, $n = 0, 1, \ldots$ in in de GR met
  $a_{n+1} = a_n + 1$ met $a_0 = 0$ en
  $b_{n+1} = b_n + 0{,}5 \cdot b_n\left(1 - \frac{b_n}{100}\right) - 10$ en met $b_0 = 70$.
  Gevraagd is b_{10}. Daarvoor vind je: 72,16%.
- **b** Je kunt b_n voor steeds grotere waarden van n uitrekenen. Op den duur verandert het antwoord nauwelijks nog: het blijft dan 72,36%.

45
- **a** $\frac{dy}{dx} = 2y - y^2 = 1 \cdot y(2 - y)$: dus logistische groei met $c = 1$ en $M = 2$, dus de oplossingsfuncties zijn van de vorm $y = \frac{2}{1 + b \cdot e^{-2x}}$.
  Uit $y(3) = 1$ volgt: $b = e^6$, dus $f : x \to \frac{2}{1+e^{-2x+6}}$
- **b** Het verzadigingsniveau is 2, dus de oplossingsfuncties hebben een buigpunt op het halve niveau, dus met y-coördinaat 1.

46
- **a** De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $P(x, y)$ is: de richtingscoëfficiënt van de lijn PX.
  De coördinaten van X zijn $\left(\frac{1}{2}x, 0\right)$, dus de richtingscoëfficiënt van lijn PX is: $\frac{y}{x - \frac{1}{2}x} = \frac{2y}{x}$.
- **b** Die functies hebben formule $y = p \cdot x^2$, met $p \neq 0$.
  Enerzijds $\frac{dy}{dx} = 2px$, anderszijds $\frac{2y}{x} = \frac{2px^2}{x} = 2px$.

47 Oplossingsfuncties zijn: $i = c \cdot e^{-ks}$, met c een constante. Als $s = 0$, dan $i = 100$, dus $i = 100 \cdot e^{-ks}$.
Als $s = 3$ dan $i = 40$, dus $k = -\frac{\ln(0{,}4)}{3} \approx 0{,}3$.

48
- **a** Hoe meer prooidieren, hoe sneller het aantal roofdieren groeit.
- **b** $\frac{dP}{dt} = 600$ en $\frac{dR}{dt} = -12$, dus dus P wordt 120 en R wordt 19
- **c** Als $a - b \cdot R = 0$ en $c \cdot P - d = 0$, dus $R = 25$ en $P = 75$.

49
- **a** Enerzijds $\frac{dy_k}{dx} = 3 \cdot -0{,}1 \cdot (k - 0{,}1x)^2 = -0{,}3(k - 0{,}1x)^2$,
  anderszijds $-0{,}3y_k^{\frac{2}{3}} = -0{,}3\left((k - 0{,}1x)^3\right)^{\frac{2}{3}} = -0{,}3(k - 0{,}1x)^2$, klopt dus.
- **b** Voor deze functie geldt enerzijds $\frac{dy}{dx} = 0$ voor alle x. Anderzijds geldt dat $-0{,}3y^{\frac{2}{3}} = 0$ voor alle x.

50 Substitueer $y = ax^2 + bx + c$.
Dan: $2ax + b = ax^2 + bx + c - x^2 + 4x \Leftrightarrow 2ax + b = (a-1)x^2 + (b+4)x + c$.
Links en rechts moet je dezelfde uitdrukking in x krijgen, dus $a - 1 = 0$, $2a = b + 4$ en $b = c$.
Dus $a = 1$, $b = -2$ en $c = -2$, dus de oplossingsfunctie is: $y = x^2 - 2x - 2$.

Extra opgaven

1
- **a** Omdat de oplossingsfunctie differentieerbaar is, is de afgeleide 0 in een punt waar de functie een extreem heeft. Als $y = 4$, dan $\frac{2(y-4)}{x} = 0$.
- **b** Zo'n functie heeft formule $y = ax^2 + 4$.
  Enerzijds geldt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2ax$ en anderzijds geldt $\frac{2(y-4)}{x} = \frac{2(ax^2+4-4)}{x} = 2ax$. Dus klopt.

2
- **a** $v(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-f \cdot t} + \frac{10}{f}$
- **b** $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = \frac{10}{f} = 5$, dus $f = 2$
- **c** $v(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot t} + 5$; uit $v(0) = 3$ volgt $c = -2$, dus $v(t) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot t} + 5$.
- **d** $s(t) = \int_0^t v(u) \cdot \mathrm{d}u = \left[\mathrm{e}^{-2 \cdot u} + 5u\right]_0^t = \mathrm{e}^{-2 \cdot t} + 5t - 1$
- **e** -
- **f** De grafiek wordt nagenoeg recht.
- **g** $s = 5t - 1$

3
- **a** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 0$, dus de asymptoten zijn $y = 0$ en $y = 1$.
- **b** $y(x) + y(-x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} = \frac{1+\mathrm{e}^{-x}+1+\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^{x})} = \frac{2+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}+1} = 1$, dus het gemiddelde is $\frac{1}{2}$.
  De grafiek is puntsymmetrisch in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- **c** De differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$ heeft als oplossingsfunctie $y = \frac{M}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-kx}}$. Dus $k = b = M = 1$. De bijbehorende differentiaalvergelijking is: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1-y)$

4
- **a** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8y - 2y^2 = 2y(4-y)$, dus het verzadigingsniveau is 4.
- **b** $2y(4-y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ of $y = 4$, dus $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ is maximaal als $y = 2$, dan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8$.
- **c** $y = 0$ en $y = 4$; de helling van een constante functie is in elk punt 0, dus $8y - 2y^2 = 2y(4-y) = 0$. Dus $y = 0$ en $y = 4$.
- **d** Een buigpunt ligt op hoogte $\frac{1}{2}$·verzadigingsniveau, dusop hoogte 2. Voor alle punten met $y = 2$ geldt: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8$.

5
- **a** Werk de haakjes weg en deel beide kanten door $(f(t))^2$.
- **b** Dit volgt direct uit de kettingregel, g is de ketting: $t \to f(t) = u \to \frac{1}{u}$.
- **c** Dit volgt meteen uit de twee voorgaande onderdelen.

d $\frac{1}{f(t)} = a \cdot \mathrm{e}^{-cMt} + \frac{1}{M} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{a \cdot \mathrm{e}^{-cMt} + \frac{1}{M}} \cdot \frac{M}{M} = \frac{M}{1 + aM \cdot \mathrm{e}^{-cMt}}$

6

a Er geldt: $PR \cdot RQ = 4$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{PR}{RQ}$. Omdat $PR = y$ volgt hieruit: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{4}y^2$.
Aan de tweede differentiaalvergelijking wordt voldaan als de functie k stijgend is in P.

b Enerzijds $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{4}{(x+a)^2}$, anderzijds $-\frac{1}{4}y^2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{(x+a)^2} = -\frac{4}{(x+a)^2}$. Klopt dus.

c $\frac{4}{3+a} = 2 \Leftrightarrow a = -1$, dus die functie is: $f : x \rightarrow \frac{4}{x-1}$.

7

De formule is van de vorm $y = ax + b$. Substitutie in de differentiaalvergelijking geeft:
$a = \frac{2x + 3 - (ax + b)}{x} \Leftrightarrow ax = (2 - a)\,x + 3 - b$. Dus $a = 2 - a$ en $3 - b = 0$. Dus $a = 1$ en $b = 3$.
De functie heeft formule $y = x + 3$.

Rekentechniek

1

- $p(x) = \sqrt{x}$ en $q(x) = \sqrt{y}$
- Niet te scheiden
- $p(x) = x$ en $q(y) = -\frac{1}{y}$
- $p(x) = x$ en $q(y) = y + 1$

2

Enerzijds $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = d \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \cdot x$, anderszijds $x \cdot y = x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$. Klopt.

3

a Volgens de kettingregel geldt: $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{q(y)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; maar

b $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = p(x)$

c Uit de antwoorden van de vorige onderdelen volgt:
$\frac{1}{q(y)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)$, dus $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x) \cdot q(y)$.

4

a Variabelen scheiden: $h^2 \cdot \mathrm{d}h = 4 \cdot \mathrm{d}t$, dus $\frac{1}{3}h^3 = 4t + c$.
$(t, h) = (0{,}0)$ invullen levert: $c = 0$, dus $h = \sqrt[3]{4t}$.

b Variabelen scheiden: $y \cdot \mathrm{d}y = -x \cdot \mathrm{d}x$, dus $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$.
$(x, y) = (0{,}4)$ invullen geeft: $c = 8$, dus $x^2 + y^2 = 16$.
Een oplossingsfunctie met $y(0) = 4$ is: $y = \sqrt{16 - x^2}$.

c $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2\sqrt{h}$ geeft: $-\frac{1}{2\sqrt{h}}\mathrm{d}h = \mathrm{d}t$, dus $\sqrt{h} = -t + c$, dus $h = (-t + c)^2$. Uit $h(0) = 100$ volgt: $h = (-t + 10)^2$.

d Variabelen scheiden: $\frac{3}{\sqrt{y}} \cdot \mathrm{d}y = 4\sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x$.
Dus:

e Dan $G^{-\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{d}G = -0{,}3 \cdot \mathrm{d}t$, dus $G^{\frac{1}{3}} = -0{,}3 \cdot t + c$ voor een of ander getal c. Dus $G = (-0{,}3 \cdot t + c)^3$; uit $G(0) = 8$ volgt: $c = 2$, dus $G = (-0{,}3 \cdot t + 2)^3$.

f Variabelen scheiden: $\frac{1}{T - 20} \cdot \mathrm{d}T = -0{,}2 \cdot \mathrm{d}t$, dus $\ln|T - 20| = -0{,}2 \cdot t + c$, dus $|T - 20| = \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot t + c}$, dus $T = 20 \pm \mathrm{e}^c \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot t}$. Uit $T(0) = 100$ volgt: $T(t) = 20 + 80 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot t}$.

5

a Dus $(20-h)^2 \cdot \mathrm{d}h = c \cdot \mathrm{d}t$ (variabelen scheiden). Hieruit volgt: $-\frac{1}{3}(20-h)^3 = c \cdot t + d$ waarbij d een constante is.

b $-\frac{1}{3}(20-h)^3 = c \cdot t + d \Leftrightarrow (20-h)^3 = p \cdot t + q \Leftrightarrow 20 - h = \sqrt[3]{p \cdot t + q}\ h = 20 - \sqrt[3]{p \cdot t + q}$.
Uit $h(0) = 20$ volgt $q = 0$ en uit $h(8) = 0$ volgt dan vervolgens $p = 1000$, dus $h = 20 - 10\sqrt[3]{t}$.

6

a $-\frac{1}{y} + C$, voor willekeurige getallen C.

b $\frac{1}{y} + \frac{1}{a-y} = \frac{a-y+y}{y(a-y)} = \frac{a}{y(a-y)}$, dus op de stippellijnen moet $\frac{1}{a}$ staan.

c Een primitieve van $\frac{1}{y}$ is $\ln(|y|)$ en een primitieve van $\frac{1}{a-y}$ is $-\ln(|y-a|)$.

d $1 - \frac{a}{y} = d \cdot \mathrm{e}^{-acx} \Leftrightarrow \frac{a}{y} = 1 - d \cdot \mathrm{e}^{-acx} \Leftrightarrow y = \frac{a}{1 - d \cdot \mathrm{e}^{-acx}}$

e Substitueer $a = M$ en $d = -b$.

7

- $\int \mathrm{e}^y \cdot \mathrm{d}y = \int 2x \cdot \mathrm{d}x$
  $\mathrm{e}^y = x^2 + c$, beginwaarde $(0,0)$,
  oplossingsfunctie $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.
- $\int y \cdot \mathrm{d}y = \int \cos(x) \cdot \mathrm{d}x$,
  $\frac{1}{2}y^2 = \sin(x) + c$, beginwaarde $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$,
  oplossingsfunctie $y = \sqrt{2\sin(x) - 1}$.
- $\int \frac{1}{y+2} \cdot \mathrm{d}y = \int x \cdot \mathrm{d}x$
  $\ln(|y+2|) = \frac{1}{2}x^2 + c$, beginwaarde $(0,3)$
  oplossingsfunctie $y = 5 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - 3$
- $\int \frac{1}{y+2} \cdot \mathrm{d}y = \int x \cdot \mathrm{d}x$
  $\ln(|y+2|) = \frac{1}{2}x^2 + c$, beginwaarde $(0,-3)$
  oplossingsfunctie $y = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - 2$
- $\int \mathrm{e}^{-y} \cdot \mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}x$
  $-\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x + c$, beginwaarde $(0,0)$,
  oplossingsfunctie $y = -\ln(2 - \mathrm{e}^x)$
- $\int \frac{1}{y} \cdot \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \cdot \mathrm{d}x$
  $\ln(|y|) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) + c$, beginwaarde $(0,-2)$,
  oplossingsfunctie $y = -\mathrm{e}^x - 1$

7 Continue dynamische modellen

1. Je zoekt een oplossingsfunctie van de vorm: $y = ax^2 + bx + c$, voor zekere a, b en c, met $a \neq 0$.
2. De inhoud van een bol met straal r en de oppervlakte is is $4\pi r^2$.
3. Substitueer $y = ax^2 + bx + c$.
   Links en rechts moet je dezelfde uitdrukking in x krijgen.
4. Schrijf $\frac{1}{y} + \frac{1}{a - y}$ onder één noemer.

Index