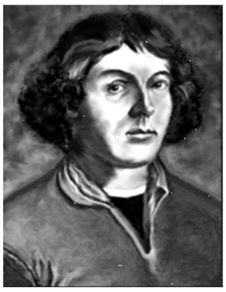
De wetten van Kepler



De wetten van Kepler

Inhoudsopgave

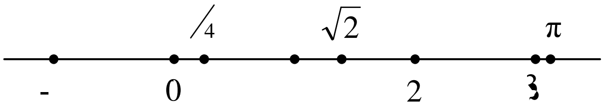
[illegible]

1 Vectoren in de ruimte

s nde s een aa .
Josiah Willard Gibbs (839- 903)

In de e s e d e a ag a en ge en e een n e d ng n de ee nde, d e doo de e se s nd ge c des n de de de ee v oo s s e d besc e en n de e en en, een de ende gv e za e e o e ee n-de en e en nde. eze ee nde o d daa o oo e c d sc e ee nde genoe d. e c d sc e ee nde an o den ondev e dee d nv a e ee nde en e ee nde. z en ons be e en o de e ee nde, o da e d e v oo a nod g z en ebben. e es e conce en nmen ec e zonde en ge oe ev e aa d o den naa dev a - e ee nde, o e o en da de b o e e s. nze ns ee s de o-de me an e e coo d na en. e a sv oo dee da de e d ec o een cons c e e an e v oo anden s, en bo end en da naas ee nd g edeme en de a geb a een n g en c en ge eed sc a s. e s abso noodza e o deze aa e e en s e en, e de s nde ac e de amee bamen nmen beg en.

e gaa e v an da de ge a en n, bes aande de ee e ge a en, be-end s. e s een aa e $\tfrac{1}{4} = 0.25$, $\sqrt{2} = .4 \ldots$, $\pi = 3. 4\ldots$ e c.

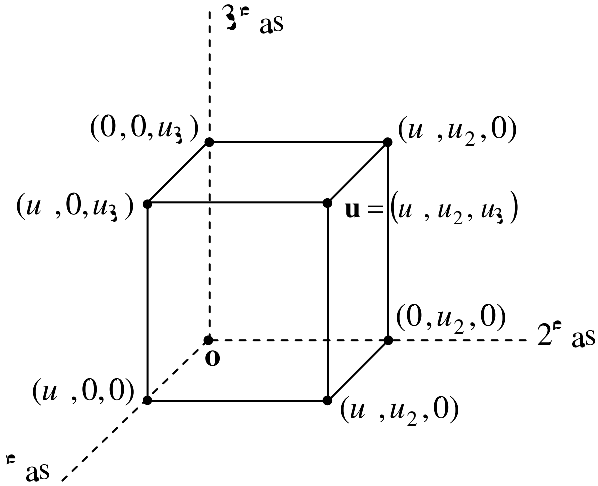


e co ec ev an de ee e ge a en o d genoe d e e sy boo $\mathbb{R}$. e nmen ee e ge a en b e aa o e en en e e aa v e en g d gen, en de e ge s daav oo z n be end.

In na o g ngv an de anse s nd ge ene esca es n z n eo e a 637v oe en e de a es sc e e $\mathbb{R}^3$ n o a geb a sc e ze: $\mathbb{R}^3$ bes aa a e d e a en (u_1, u_2, u_3) aa b u_1, u_2, u_3 ee e ge a en z n.

e a es sc e e an o den geb o de e, aa n ons be nden, e besc v en. gaa a sv o g es ac e ee o gens d e on-de ng ood ec e men d e doo een n gaan. e sn n v an de d e men e de oo s ong en deze no e en e e **o** (an oo s ong). e d e men z n de e s e, e ede en de d as (o x-as, y-as en z-as). oo z e de menv an een ze de sc aav e de ng, aa b n de oo s ong e ge a n.

s aa n g n n de ood o c s o v an de d assen. ze g n de s c coo d na env an n d a $(u\ , u_2, u_3)$ no en so s o $\mathbf{u}$ en z en $\mathbf{u}$ a s en n n de d d ens ona . ge d o en b n $\mathbf{u}$ n de d d ens ona d ge a en $u\ , u_2$ en u_3. ge a u de s coo d naa v an $\mathbf{u}$, u_2 de de coo d naa v an $\mathbf{u}$ en u_3 de de de co- o d naa v an $\mathbf{u}$. n $\mathbb{R}^3$ ebben en v o en n $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$.
onde s en aa ge endv an en oe g b o en oe - n $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$ en en oe n $\mathbf{u} = (u\ , u_2, u_3)$. eng v an b o s u , de b ed s u_2 en d oog s u_3, aa b aanm en da deze d ge a en os z n.



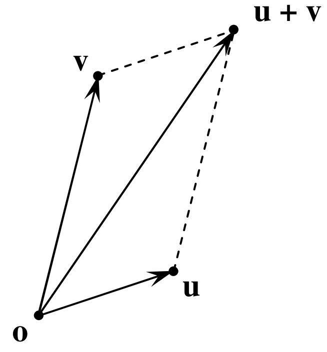
de n en n $\mathbb{R}^3$ b ngen, en o ng en en sca a v - n g d g ng. o ng v an n en $\mathbf{u} = (u\ , u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v\ , v_2, v_3)$ en n n $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ o v a de o $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u\ + v\ , u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.
v en g d g ngv an en n $\mathbf{u} = (u\ , u_2, u_3)$ en ge a λ o d sca a v en g d g ng genoe d en sca a s en ge a) en en n n $\lambda\mathbf{u}$ o v a de o $\lambda\mathbf{u} = (\lambda u\ , \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Me o da en se geb ebben oo de sca a ge a) en n en ge ome . doen en eden: o deze an z n sca a en (ge a en) nog b onde s denv anv ec o en (d a dv e o den ged) en da o de eesbaa e d en goede. z n oo ande e gangba e an e en o v ec o en e no e en. B v oo bee d e een e bo en: $\vec{u}$ of e een s ee e onde : $\underline{u}$. n andgesc e en s - env e d emen deze sc zen de v oo e .

e o e ng en de sca a e v e en g d g ng e en d s coo d naa sge- s. eze be e ngen ebben een aan oo e e gensc a en, zoa s:

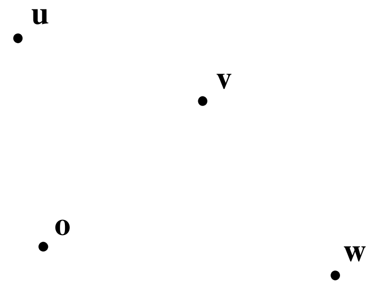
$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$
$$\mathbf{u}+\mathbf{o}=\mathbf{o}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$$
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$
$$\mathbf{u}=\mathbf{u}$$
$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{u})=(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}$$
$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}$$
$$(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}+\boldsymbol{\mu}\mathbf{u}$$

e s e en daa o so s e e v an v ec o en dan v an n en. B een v ec o den en e aan een (e aa s ng) v an de oo s ong haa e b b o- ende n e z en be de o v a ngen geb en en d s de eme e s e- en o e n en en de ande e ee o e v ec o en. Beiden e da v ec o en b ons a d aang en (s a en) n de oo s ong, d n egens e hg o de n ande e con ex en geb e zogenaa de " e" v ec o en, d e n e n nnen aang en. n e e den ce en e een v ec o e z n e nd n n de a e d d n o v e a ng. e ee nd ge b e e en s v an o - e en s zo da de e nd n en v an de v ec o en $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}$ (n de v o go de) de o e n en v o een v an een a a e og a .



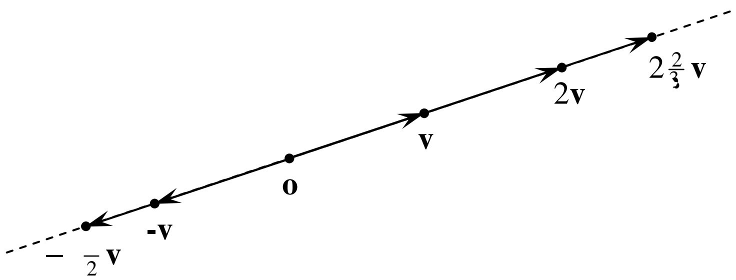
A s $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ o een n ggen, dan noe en e e a a e og a on aa d.

Opgave 1.1. *In de figuur hieronder staan de punten* **o, u**, **v** *en* **w.** *Het punt* **o** *is de oorsprong. Neem de figuur over en bepaal met de parallellogram-constructie de punten* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ en $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ en ga na dat deze punten samenvallen.



Opgave 1.2. *Laat met een algebraïsche berekening zien dat voor elk drietal punten* **u**, **v** *en* **w** *ten opzichte van een gekozen oorsprong* **o** *geldt:* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. Schrijf hiervoor **u**, **v** *en* **w** uit in coördinaten: $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3)$.

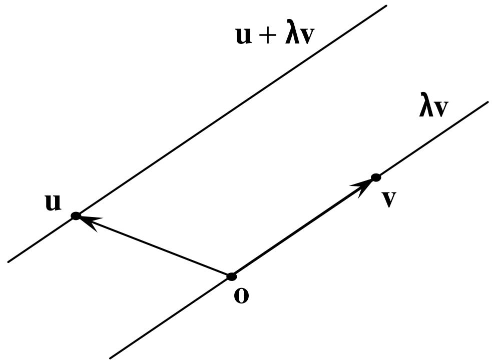
Bij de scalaire vermenigvuldiging van een vector **v** met een positief getal λ ontstaat een vector $\lambda\mathbf{v}$, die in dezelfde richting wijst als **v** en λ keer zo lang is. Bij vermenigvuldiging met een negatief getal λ is de vector $\lambda\mathbf{v}$ $|\lambda|=-\lambda$ keer zo lang als **v**, en is zijn richting tegengesteld aan die van **v**.



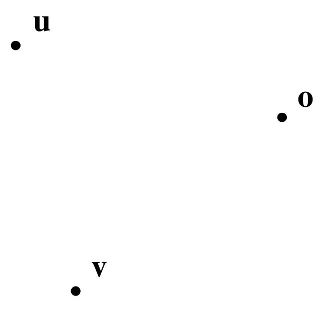
Opgave 1. . *Laat met een algebraïsche berekening zien dat voor elk getal* $\boldsymbol{\lambda}$ *en elk tweetal punten* $\mathbf{u}$ *en* $\mathbf{v}$ *ten opzichte van een gekozen oorsprong* $\mathbf{o}$ *geldt:* $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}$. Sch ... ev oo $\mathbf{u}$ *en* $\mathbf{v}$ *weer* ... n coo d na en.

e sch v en ees a $-\mathbf{v}$ n aa sv an $-\ \mathbf{v}$. env oo $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$ sch v en e o eg $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. e b be o ende e en ege s doenv e o d aan. o s $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{u} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}$, $-(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = -\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}-\mathbf{u}$ en $\mathbf{u}-(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}$.

s $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, danv o en a ev eev o den $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}$ (aa b $\boldsymbol{\lambda}$ oo doo $\mathbb{R}$) een n, genaa d de **drager**v an $\mathbf{v}$. e en e b ede n v an de n $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}$ eenv as- ev ec o $\mathbf{u}$ o , dan gen e de n $\mathbf{u}+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}$, d e doo $\mathbf{u}$ gaa en a a e s aan de d age v an $\mathbf{v}$.



Opgave 1. . *Hieronder staan de punten* $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$ *en* $\mathbf{v}$. *Punt* $\mathbf{o}$ *is de oorsprong. Neem de figuur over en teken de punten* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ *en* $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ *erbij.*



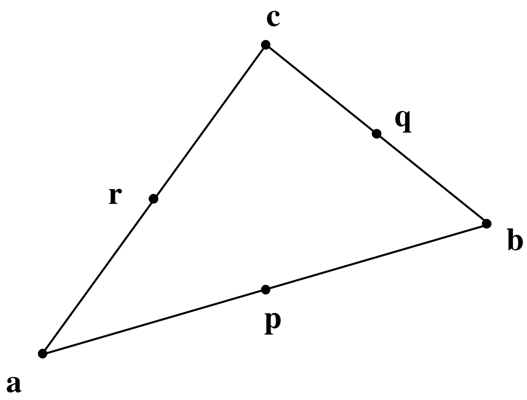
Opgave 1.5. *Hieronder staan twee punten* **a** *en* **b**.

a. *Neem de figuur over en kies zelf een plaats voor de oorsprong* **o**. *Zet vervolgens de punten* $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}$ *en* $3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ *erbij.*
b. *Neem de figuur nogmaals over en kies nu een andere plaats voor de oorsprong. Zet vervolgens weer de punten* $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}$ *en* $3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ *erbij.*
c. *Vergelijk de figuren die je bij a. en bij b. hebt gekregen. Valt je iets op?*
d. *Teken in beide figuren ook het punt* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *erbij? Krijg je weer hetzelfde punt?*
e. *Voor welke getallen* λ *en* μ *zal de plaats van het punt* $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ *niet afhangen van de plaats van de oorsprong? Formuleer een vermoeden.*
f. *Leg uit dat elk punt van de vorm* $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}$ *op de lijn door* **a** *en* **b** *ligt.*
g. *Leg uit dat de plaats van een punt van de vorm* $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}$ *niet afhangt van de plaats van de oorsprong.*

Opgave 1.6. *Gegeven is een driehoek met hoekpunten* **a**, **b** *en* **c**. *We kiezen een zekere oorsprong* **o** *in het Euclidische vlak*[2] *(alhoewel alles wat we verder in deze opgave opschrijven onafhankelijk is van deze keuze). Het punt dat midden tussen* **a** *en* **b** *ligt is* **p**, *het punt dat midden tussen* **b** *en* **c** *ligt is* **q** *en het punt dat midden tussen* **a** *en* **c** *ligt is* **r**. *Hierna is deze driehoek getekend.*

---

[2] Of we het Euclidische vlak (2-dimensionaal) of de Euclidische ruimte (3-dimensionaal) nemen, doet niet ter zake.



a. Druk de middens **p**, **q** *en* **r** *uit in de hoekpunten* **a**, **b** *en* **c**.

b. Druk ook de hoekpunten **a**, **b** *en* **c** *uit in de middens* **p**, **q** *en* **r**. *Hint: Teken de drie middenparallellen.*

c. Toon aan dat het punt $\mathbf{z} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ *ligt op de zwaartelijn*[3] *door* **a**.

d. Toon aan dat de drie zwaartelijnen van de driehoek door één punt gaan. (Dit punt wordt het zwaartepunt van de driehoek genoemd.)

---

[3] Een zwaartelijn van een driehoek is de lijn door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde.

Het inwendig product

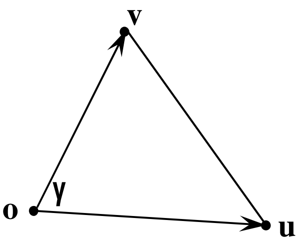
Toen a geb a en ee nde gesc e den v a en a en, as n v oo gang angzaa en n n be e . Maa s nds be de v a en z nv e en gd, ebben ze e aa onde ngv e s e en z n ze geza- en o ge o en naa e fec e.
Joseph-Louis Lagrange (73 - 8 3)

e eng e v an eenv ec o $\mathbf{u} = (u\ ,u_2,u_3)$ s $\sqrt{u^2 + u_2^2 + u_3^2}$. s n e zen doo de s e ngv an Py ago as ee aa oe e assen n de b o g o ag na 2. e eng e v anv ec o **u** no e en e e $|\mathbf{u}|$.

Opgave 1. *Bereken in elk van de volgende gevallen de lengtes van de twee genoemde vectoren en de afstand tussen hun eindpunten.*

a. $\mathbf{a} = (\ ,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (2,2,-2)$
b. $\mathbf{c} = (\ ,-2,4)$ *en* $\mathbf{d} = (3,2,\ )$
c. $\mathbf{e} = (0,2,3)$ *en* $\mathbf{f} = (\ ,2,-\ )$

Opgave . *Gegeven is een driehoek in de ruimte met hoekpunten* **o**, **u** *en* **v**. *De hoek tussen de vectoren* **u** *en* **v** *noemen we* γ. *Hierbij is* $0 \le \gamma \le\ 80^\circ$.



a. Ga na dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma = 90^\circ$.

b. Ga na dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 < |\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma > 90^\circ$

en ook dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 > |\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma < 90^\circ$.

Opgave . *Ga in elk van de volgende gevallen na of de hoek tussen de twee genoemde vectoren recht, scherp of stomp is.*

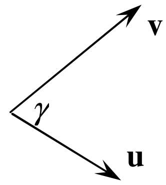
a. $\mathbf{a} = (\ ,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (2,2,-2)$
b. $\mathbf{c} = (\ ,-2,4)$ *en* $\mathbf{d} = (3,2,\ )$
c. $\mathbf{e} = (0,2,3)$ *en* $\mathbf{f} = (\ ,2,-\ )$

Opgave 2.4. *Gegeven zijn de vectoren* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *en* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. *Neem aan dat* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. *De hoek tussen* **u** *en* **v** *noemen we* γ. *Toon aan dat het volgende geldt:*

$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$ *precies dan als* $\gamma = 90^\circ$

$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 < 0$ *precies dan als* $\gamma > 90^\circ$

$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 > 0$ *precies dan als* $\gamma < 90^\circ$



In opgave 2.4 bleek dat het getal $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ iets zegt over de hoek γ tussen de vectoren **u** en **v**. We schrijven hiervoor ook wel kortweg $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ voor $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ en noemen $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ het **inwendig product** of kortweg **inproduct** van de vectoren **u** en **v** in $\mathbb{R}^3$. Merk op dat het inproduct $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ geen vector is, maar een getal. Omdat getallen ook scalairen genoemd worden, wordt het inproduct ook wel het **scalaire product** genoemd. Het [illegible] vinden we terug in de volgende stelling:

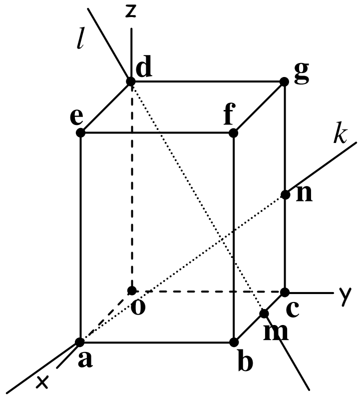
Stelling 2.1. *Als* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, *dan geldt het volgende:*
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ *precies dan als* **u** *loodrecht staat op* **v**,
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$ *precies dan als de hoek tussen* **u** *en* **v** *stomp is,*
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ *precies dan als de hoek tussen* **u** *en* **v** *scherp is.*

Opgave 2.5. *Ga in elk van de gevallen van opgave 2.3 met behulp van het inproduct na of de hoek tussen de twee vectoren recht, scherp of stomp is.*

Beschouw de lijn k door het punt **u** die parallel is aan een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. Elk punt van de lijn k kan worden geschreven als $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (voor zekere λ in $\mathbb{R}$). Omgekeerd ligt elk punt van de vorm $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ op de lijn k. We noemen $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (met λ in $\mathbb{R}$) een **parametervoorstelling** van lijn k. De vector **u** wordt een **steunvector** van k genoemd en de vector **v** een **richtingsvector**. Het getal λ is de **parameter**.

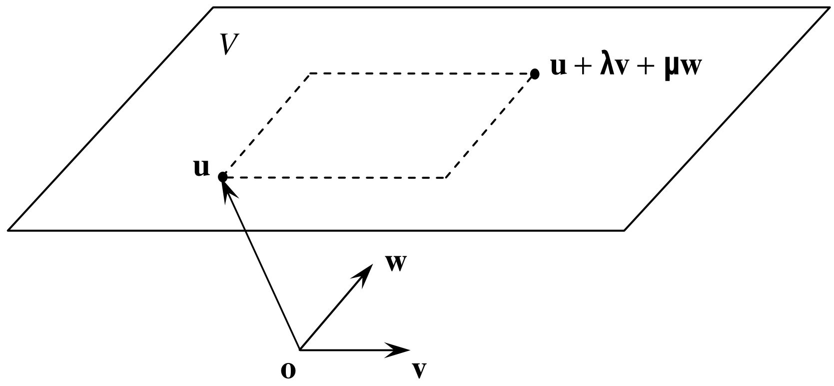
We stellen een parametervoorstelling op van de lijn m door de punten **a** = (2, 1, 4) en **b** = (4, 3, 0). Een steunvector van deze lijn is bijvoorbeeld **a** = (2, 1, 4). Een richtingsvector van deze lijn is bijvoorbeeld **b** – **a** = (2, 2, -4). Een parametervoorstelling van lijn m is (2, 1, 4) + λ·(2, 2, -4). Maar er zijn veel meer mogelijkheden. Ook (4, 3, 0) + λ·(1, 1, -2) is een parametervoorstelling van m. Geef zelf nog een [illegible] andere parametervoorstellingen van m.

Opgave [illegible]. *De punten* $\mathbf{a} = ([illegible],0,0)$, $\mathbf{c} = (0,4,0)$ *en* $\mathbf{d} = (0,0,[illegible])$ *zijn hoekpunten van een balk* **oabc.defg**. *Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bc** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **cg**. *Lijn k gaat door de punten* **a** *en* **n** *en lijn l gaat door de punten* **d** *en* **m**.

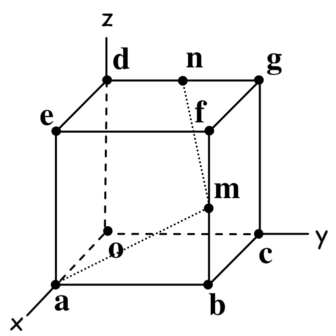


a. Stel parametervoorstellingen op van de lijnen k en l.
b. Ga met een algebraïsche berekening na dat de lijnen k en l elkaar snijden en bereken de coördinaten van hun snijpunt.

[illegible] $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ [illegible] V [illegible] $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ [illegible] λ [illegible] μ [illegible] $\mathbb{R}$ [illegible] V.



Opgave [illegible] . *Gegeven is een kubus* **oabc.defg** *met ribbe 4. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.



a. *Laat zien dat de lijnen* **ac** *en* **db** *loodrecht op elkaar staan.*
b. *Is de hoek tussen de lijnstukken* **am** en **nm** *scherp, recht of stomp?*

Een punt **p** *ligt zodanig op de z-as, dat lijnstuk* **bp** *loodrecht staat op het vlak door* **a**, **m** *en* **c**.

c. *Bereken de coördinaten van punt* **p**. *Hint: een lijn staat loodrecht op een vlak, als hij loodrecht staat op twee niet-proportionele richtingsvectoren van dat vlak.*

Het inproduct heeft een aantal mooie eigenschappen. Het inproduct is **symmetrisch**, dat wil zeggen dat voor alle vectoren **u** en **v** geldt: **u** · **v** = **v** · **u** . Het inproduct is ook **bilineair**, dat wil zeggen dat voor alle vectoren **u** en **v** en voor alle reële getallen **λ** geldt:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$
$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$$
$$(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$
$$\mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{v})=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

Het bewijs van deze regels gaat door $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ en $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$ te schrijven en vervolgens linker- en rechterleden uit te schrijven in coördinaten.

Opgave 2.8. *Controleer door middel van uitschrijven dat:*
a. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
c. $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

Een andere mooie eigenschap van het inproduct is, dat hiermee de lengte van een vector kan worden berekend. Er geldt namelijk voor een vector $\mathbf{u}$ dat $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2$ ofwel $|\mathbf{u}|=\sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})}$.

Opgave 2.9. *Controleer het bovenstaande door middel van uitschrijven.*

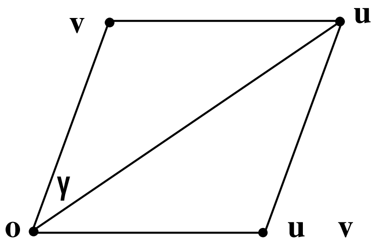
Opgave 2.10. *Gegeven zijn twee vectoren* **u** *en* **v** *in* $\mathbb{R}^3$. *Bewijs met behulp van de regels voor inproducten de volgende formules:*
a. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
b. $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
c. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{v}|^2$
d. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2$

Opmerking. *Uit opgave 2.10 c volgt dat de diagonalen in een parallellogram loodrecht op elkaar staan, precies dan als het parallellogram een ruit is. Ga dit na. De formule bij onderdeel d staat bekend als de parallellogramwet. Als je van een parallellogram de lengtes van de zijden en de lengte van één van de diagonalen kent, dan kun je met deze formule de lengte van de andere diagonaal berekenen.*

ev o gende s e ng ge een an oo d o de v aag naa de e nd ge be e en sv an e n end g od c

Stelling 2.2. *Als* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, *dan geldt* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\gamma$, *waarbij* γ *de hoek is tussen* **u** *en* **v**.

Bewijs. e e emen ee s een gesc aa e.



ev o gens be en e de eng esv an de z denv an de d oe e oe - n en **o**, **u** en **v**. e a s andv an **o** o **u** s ge aan $|\mathbf{u}|$ en de a s andv an **o** o **v** s ge aan $|\mathbf{v}|$. e a s andv an **u** o **v** s ge aan de a s andv an **o** o **u** v en d e s ge aan $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$. Passen e n de cos n s ege o deze d oe , danv nden e da $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\cdot|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\gamma$.

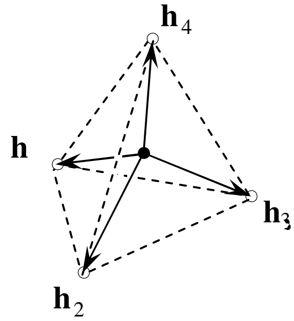
e n e d sv o gens o ga e 2. 0 b ge aan: $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$. s ge d $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\cdot|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\gamma$, aa de s e ng een o d g (doo sc a en)v o g □

Opgave 2.11. *Bereken de hoek die de vectoren* $\mathbf{a} = (\ ,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (4,5,[illegible])$ *met elkaar maken in graden nauwkeurig.*

Opgave 2.12. *Bereken de hoek tussen de lijnstukken* **am** en **nm** *in de kubus van opgave 2.7 in graden nauwkeurig.*

Opgave 2.13. *Leg uit hoe Stelling 2.1 direct volgt uit Stelling 2.2.*

Opgave [illegible]1 . *Een model van het CH_4-molecuul ziet er als volgt uit. Het koolstofatoom zit in het zwaartepunt van een (regelmatige) tetraëder waarbij de waterstofatomen in de hoekpunten zitten. Kies de oorsprong zo, dat deze bij het C-atoom ligt. Noem de vectoren vanuit het C-atoom naar een van de H-atomen respectievelijk* $\mathbf{h}$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ *en* $\mathbf{h}_4$. *De lengtes van de vier vectoren* $|\mathbf{h}_i|$ *zijn gelijk en de zes hoeken tussen* $\mathbf{h}_i$ *en* $\mathbf{h}_j$ $(i \neq j)$ *zijn ook gelijk. Omdat het koolstofatoom in het zwaartepunt zit, is* $\mathbf{h} + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4$ *gelijk aan de nulvector.*

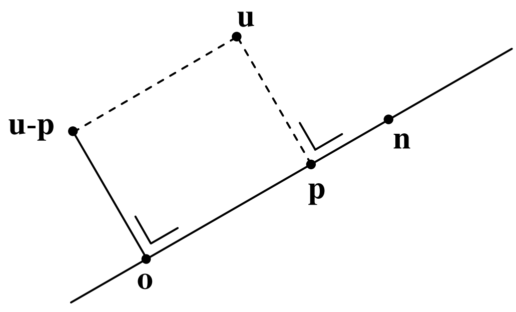


Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen $\mathbf{h}_i$ *en* $\mathbf{h}_j$ $(i \neq j)$.
Hint: Bekijk $\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4)$.

[illegible] $\mathbf{p}$ [illegible] $\mathbf{u}$ [illegible] $\mathbf{n}$ ([illegible] $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$) [illegible] $\mathbf{n}$ [illegible] $\mathbf{n}$. [illegible] $\mathbf{p}$ [illegible] $\mathbf{n}$, [illegible] $\mathbf{p} = \lambda \cdot \mathbf{n}$ [illegible] λ. [illegible]

Stelling [illegible] . *Gegeven zijn een vector* $\mathbf{u}$ *en een vector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. *De loodrechte projectie* $\mathbf{p}$ *van* $\mathbf{u}$ *op de drager van* $\mathbf{n}$ *wordt gegeven door* $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \cdot \mathbf{n}$.

Bewijs. [illegible]



[4] [illegible] $\mathbb{R}^2$ [illegible] $\mathbb{R}^3$.

De vector $\mathbf{p}$ is de loodrechte projectie van $\mathbf{u}$ op $\mathbf{n}$, dus de vector $\mathbf{u}-\mathbf{p}$ staat loodrecht op $\mathbf{n}$. Dus $(\mathbf{u}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}=0$. We weten dat $\mathbf{p}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{n}$, dan vinden we dat $(\mathbf{u}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}=0$. Dus $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}-\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0$, zodat $\boldsymbol{\lambda}=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$.

De projectievector $\mathbf{p}$ is dus gelijk aan $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$. □

Een vector $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$ in $\mathbb{R}^3$ heet een **normaalvector** van een vlak V, als $\mathbf{n}$ loodrecht staat op alle richtingen in het vlak V.

Opgave 1.15. *Laat U het vlak zijn met normaalvector* $\mathbf{n}=(1, 1, 0)$*, dat gaat door de oorsprong* **o**.

a. *Bepaal het beeld* **p** *van* $\mathbf{u}=(4, 5, [illegible])$ *bij loodrechte projectie op de drager van* **n**.

b. *Bepaal het beeld* **q** *van* $\mathbf{u}=(4, 5, [illegible])$ *bij loodrechte projectie op vlak U.*
Hint: Ga na dat $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{u}$ *en maak daar gebruik van.*

c. *Bepaal het beeld* **s** *van* $\mathbf{u}=(4, 5, [illegible])$ *bij spiegeling in vlak U.*

Opgave 1.16. *Laat V het vlak zijn door een punt* **q** en *met normaalvector* $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$. *Bewijs dat voor een vector* **v** *geldt:*

a. *Als* **v** *in vlak V ligt, dan is* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$.

b. *Als* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$, *dan ligt* **v** *in vlak V.*

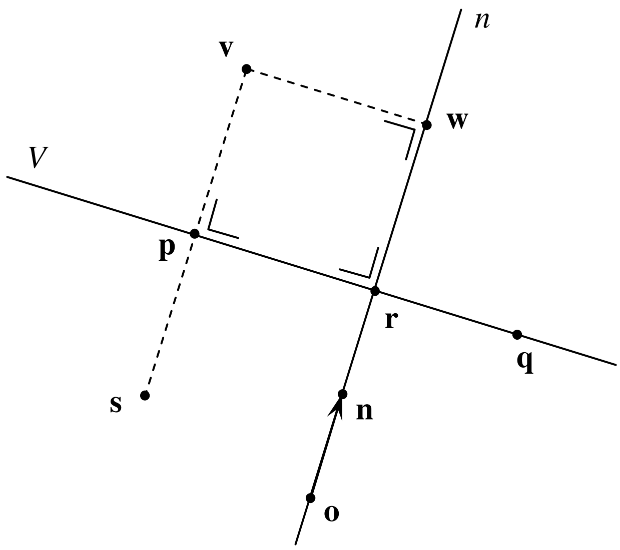
Opgave 1.17. *Laat W het vlak zijn met normaalvector* $\mathbf{n}=(1, 2, -1)$, *dat gaat door het punt* $\mathbf{q}=(2, 1, 3)$. *Er zijn reële getallen a, b, c en d zo dat voor een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *geldt:* **v** *ligt in vlak W, precies dan als* $av_1+bv_2+cv_3=d$. *Bepaal de getallen a, b, c en d.*

Opgave 1.18. *Laat V het vlak zijn dat gegeven wordt door de vergelijking* $3v_1+2v_2-5v_3=8$, *d.w.z. een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *ligt in vlak V, precies dan als* $3v_1+2v_2-5v_3=8$. *Vind vectoren* **q** *en* **n** *zo dat geldt: een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *ligt in vlak V, precies dan als* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$.

Stelling [illegible]. *Laat V het vlak zijn door een punt* **q** en *met normaalvector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. *Laat* **p** *de loodrechte projectie van een punt* **v** *op vlak V zijn en* **s** *het spiegelbeeld van* **v** *in vlak V.*

Dan geldt $\mathbf{p} = \mathbf{v} - \frac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$ *en* $\mathbf{s} = \mathbf{v} - \frac{2\cdot((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$.

Bewijs. [illegible] en o [illegible] en zodan ge[illegible] ze naa de s[illegible] a[illegible], da[illegible] V v an o z z en. [illegible] doo z en [illegible] V a s een n. L n n s de d age v an de no aav ec o **n**. [illegible] ood [illegible] o ec es v an **v** en **q** o n n noe en [illegible] **w** es ec [illegible] **r**. [illegible] aa z [illegible] dan zo [illegible]



Me[illegible] v an s[illegible] ng 2.3 z en [illegible] da $\mathbf{w}-\mathbf{r} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n} - \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$. [illegible] de

b mea [illegible] v an [illegible] n od c v o g n da $\mathbf{w}-\mathbf{r} = \frac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$.

[illegible] z en [illegible] aa da $\mathbf{v}-\mathbf{p} = \mathbf{w}-\mathbf{r}$ en da $\mathbf{v}-\mathbf{s} = 2\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{r})$.

[illegible]s $\mathbf{p} = \mathbf{v} - (\mathbf{w}-\mathbf{r}) = \mathbf{v} - \frac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$

en $\mathbf{s} = \mathbf{v} - 2\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{r}) = \mathbf{v} - \frac{2\cdot((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$ □

Opgave 2.19. *Laat V het vlak zijn door het punt* $\mathbf{q} = (1, 2, 3)$ *en met normaalvector* $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$. *Verder is gegeven het punt* $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$.
a. Bereken de coördinaten van de loodrechte projectie van $\mathbf{v}$ *op V.*
b. Bereken de coördinaten van het spiegelbeeld van $\mathbf{v}$ *in V.*
c. Bereken de afstand van punt $\mathbf{v}$ *tot vlak V.*

Opgave 2.20. *Laat V het vlak zijn door een punt* $\mathbf{q}$ en *met normaalvector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$ *en laat* $\mathbf{v}$ *een willekeurig punt in de ruimte zijn.*
Laat zien dat de afstand van punt $\mathbf{v}$ *tot vlak V gelijk is aan* $\dfrac{|(\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$.

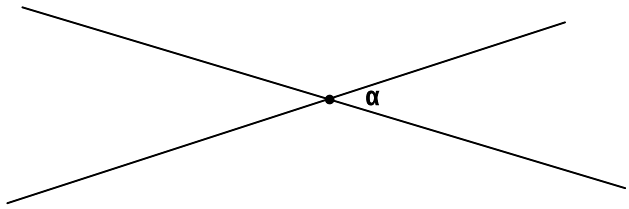
Opgave 2.21. *Laat W het vlak zijn met vergelijking* $3v_1 + 4v_2 - 5v_3 = 20$ *en* $\mathbf{u} = (6, 5, 2)$ *een punt. Bereken de afstand van punt* $\mathbf{u}$ *tot vlak W.*

Opgave 2.22. *Laat V het vlak zijn met vergelijking* $av_1 + bv_2 + cv_3 = d$. *Toon aan dat de afstand van punt* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *tot vlak V gelijk is aan*
$$\frac{|au_1 + bu_2 + cu_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Met behulp van het inproduct kunnen we de hoek tussen twee vectoren berekenen. Met een gradenboog kunnen we ook de grootte van de hoek tussen twee lijnen meten, de hoek tussen een lijn en een vlak en de hoek tussen twee vlakken kan ook berekend worden. We geven de resultaten zonder bewijs. Ze kunnen als oefening worden ingevuld in opgave 2.23 tot en met 2.24.

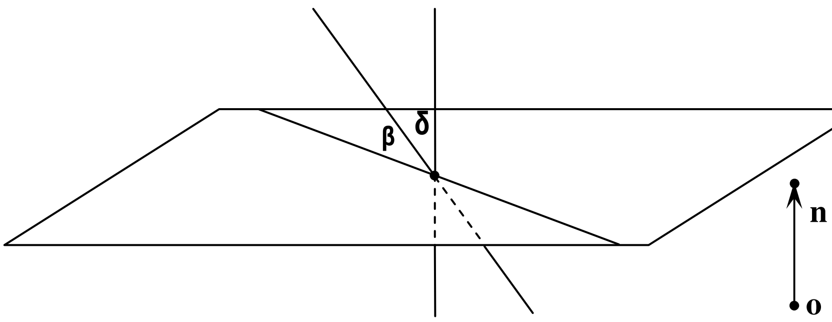
Beschouw twee snijdende lijnen met richtingsvectoren $\mathbf{v}$ respectievelijk $\mathbf{w}$. Deze lijnen snijden elkaar onder vier hoeken die twee aan twee gelijk zijn. Onder de hoek tussen de twee lijnen verstaan we de kleinste van deze vier hoeken. Voor deze hoek α geldt: $\cos\alpha = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}$.

Als de twee lijnen elkaar niet snijden, dan kunnen we een van de lijnen zodanig verschuiven dat deze de andere lijn snijdt. Onder de hoek van de twee lijnen verstaan we dan de hoek tussen de verschoven lijn en de andere lijn.



Opgave [illegible]. *Waarom staat in de formule, waarmee de hoek tussen twee lijnen wordt berekend, het inproduct tussen absolute waarde strepen?*

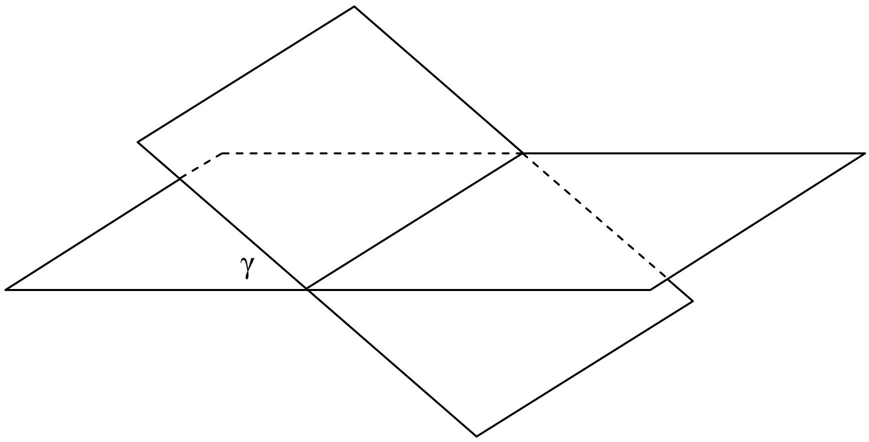
Bekijk een lijn met richtingsvector **v** en een vlak met normaalvector **n**. Tenzij de lijn loodrecht staat op het vlak, verstaan we onder de hoek tussen de lijn en het vlak de hoek tussen de lijn en zijn projectie op het vlak. Voor deze hoek β geldt: $\sin\beta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$.



Opgave [illegible]. *In de figuur hierboven is door het snijpunt van lijn en vlak een lijn getekend met de normaalvector* **n** als richtingsvector. *Leg uit dat voor de hoek* δ *tussen die twee lijnen geldt:* $\cos\delta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$ en dat $\sin\beta = \cos\delta$.

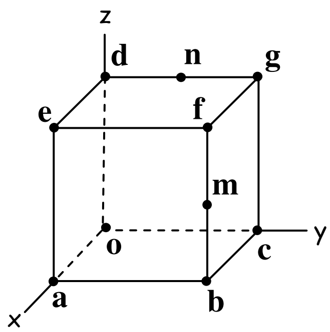
Opgave [illegible]5. Leg uit dat de formule $\sin\beta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$ ook klopt als de lijn loodrecht staat op het vlak.

[illegible] $\mathbf{m}$ [illegible] $\mathbf{n}$. [illegible] γ [illegible]: $\cos\gamma = \dfrac{|\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|}$.



Opgave [illegible]. *Leg uit dat de hoek tussen twee snijdende vlakken gelijk is aan de hoek tussen de dragers van de normaalvectoren van die vlakken.*

Opgave [illegible]. *Gegeven is een kubus* **oabc.defg** *met ribbe 4. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.



a. Bereken de afstand van punt **n** *tot vlak* **afc**.
b. Bereken de afstand van punt **m** *tot lijn* **on**.

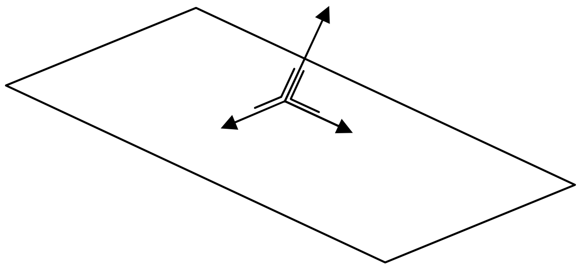
Bereken in graden nauwkeurig:

c. de hoek tussen de lijnen **an** *en* **md**.
d. de hoek tussen lijn **mn** *en vlak* **afc**.
e. de hoek tussen vlak **abgd** *en vlak* **bcde**.
f. de hoek tussen vlak **afc** *en vlak* **bge**.

Het uitwendig product

Wees niet bezorgd over je moeilijkheden met wiskunde.
Ik kan je verzekeren dat de mijne nog groter zijn.
Albert Einstein (1879-1955)

In onze laatste schets uit de $\mathbb{R}^3$ hebben we nu en dan behoefte aan een vector, niet de nulvector, die loodrecht staat op twee gegeven vectoren (die niet elkaars veelvoud zijn). Bijvoorbeeld wanneer we een normaalvector zoeken van een gegeven vlak.



Intuïtief is duidelijk dat zo'n vector altijd wel bestaat, maar in de praktijk valt het vaak niet mee om hem direct te vinden. Hij moet dan berekend worden, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

We zoeken een vector $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$ met $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$ die loodrecht staat op de vectoren $\mathbf{a}=(2,-2,3)$ en $\mathbf{b}=(3,4,-5)$.

Voor de gezochte vector $\mathbf{n}$ moet gelden: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}=0$ en $\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}=0$. Dit houdt in dat: $2n_1-2n_2+3n_3=0$ en $3n_1+4n_2-5n_3=0$. Dit zijn twee vergelijkingen met drie onbekenden. We gaan eerst één van de onbekenden elimineren, bijvoorbeeld n_1. Door de eerste vergelijking met 3 te vermenigvuldigen en de tweede vergelijking met 2 en daarna het verschil van beide vergelijkingen te nemen, vinden we: $-14n_2+19n_3=0$. Nu zien we dat we $n_2=19$ en $n_3=14$ kunnen nemen. Vullen we dit in in de eerste vergelijking, dan krijgen we: $2n_1-2\cdot19+3\cdot14=0$ oftewel $n_1=-2$. Dus vinden we $\mathbf{n}=(-2,19,14)$. Een controle bewijst dat $\mathbf{n}=(-2,19,14)$ loodrecht staat op de vectoren **a** en **b**. Kun je nog meer vectoren geven die loodrecht staan op zowel **a** als **b**

Opgave .1. *Bepaal in elk van de volgende gevallen een vector* **n** *e*, $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$, *die loodrecht staat op de twee gegeven vectoren.*

a. $\mathbf{a} = (\;,3,2)$ en $\mathbf{b} = (\;,0,\;)$

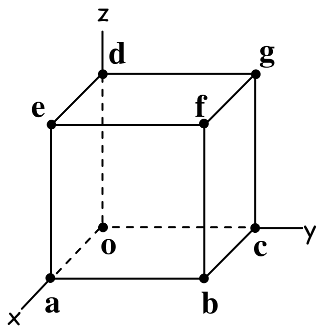
b. $\mathbf{c} = (0,5,2)$ en $\mathbf{d} = (2,0,-5)$

c. $\mathbf{e} = (4,3,- \;)$ en $\mathbf{f} = (\;,2, \;)$

Opgave . *Gegeven is een kubus* **oabc.defg**, *die in een assenstelsel is geplaatst, zoals aangegeven in de onderstaande figuur.*

Bepaal (algebraïsch of meetkundig) van elk van de volgende vlakken een normaalvector.

a. vlak **abgd**
b. vlak **beg**
c. vlak **acf**



e nmen e bo ens aande ocede o eenv ec o ev nden, d e ood-ec s aa o e gegev env ec o en, oo n e a ge een v oe en. B eev ec o en $\mathbf{u} = (u \;, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v \;, v_2, v_3)$, be de onge aan de n - v ec o , zoe en e eenv ec o $\mathbf{n} = (n \;, n_2, n_3)$, oo onge aan de n v ec o , d e ood ec s aa o zo e **u** a s **v**. oe dan ge den: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ en $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. gesc e en n coo d na en: $u \cdot n + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 = 0$ en $v \cdot n + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 = 0$. e ezen e v oo o de onbe ende n e - me en. ev oo v e en g d gen e de ee s ev e ge ng e v en de eede v e ge ng e u. ge : $u \, v \cdot n + u_2 v \cdot n_2 + u_3 v \cdot n_3 = 0$ en $u \, v \cdot n + u \, v_2 \cdot n_2 + u \, v_3 \cdot n_3 = 0$. e en e v ev o gens e v e sc v an be de v e ge ngen, dan v nden e:

$(u_2 v - u \, v_2) \cdot n_2 + (u_3 v - u \, v_3) \cdot n_3 = 0$ o e

$(u_3 v - u \, v_3) \cdot n_3 = (u \, v_2 - u_2 v \;) \cdot n_2$.

s eenv e ge ng aa n de onbe ende n n e ee v oo o e nnen n me en: $n_2 = u_3 v - u \, v_3$ en $n_3 = u \, v_2 - u_2 v$. ev o gensv en e de ge ozen aa den n n de ee s ev e ge ng:

$u \cdot n + u_2 \cdot (u_3 v - u \, v_3) + u_3 \cdot (u \, v_2 - u_2 v \;) = 0$, o e

$u_1 \cdot n_1 + u_2u_3v_1 - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 = 0$, of wel
$u_1 \cdot n_1 = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2$, delen door u_1 (!) geeft
$n_1 = u_2v_3 - u_3v_2$.

We vinden zo de vector $\mathbf{n} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$. Maar in de berekening hierboven hebben we ergens gedeeld door u_1, en dat getal zou weleens 0 kunnen zijn. Het is echter een eenvoudige opgave om na te gaan dat de zo gevonden vector $\mathbf{n}$ loodrecht staat op de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$, ook in het geval dat $u_1 = 0$.

Opgave . . *Ga met een rechtstreekse berekening na dat de vector* $\mathbf{n} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ *inderdaad loodrecht staat op de vectoren* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *en* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Maar de vector $\mathbf{n}$ zou weleens de nulvector kunnen zijn. Dat is inderdaad het geval als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ **proportioneel** zijn, d.w.z. veelvouden van elkaar zijn, zoals men eenvoudig kan nagaan. Maar kan het ook gebeuren, als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ geen veelvouden van elkaar zijn, [illegible]. [illegible] de oplossing van dit probleem nog even uit en gebruiken de gevonden uitdrukking als definitie van het uitwendig product.

Het **uitwendig product** of **uitproduct** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ van de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ wordt gedefinieerd door: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.
Merk op dat het uitproduct van twee vectoren weer een vector in $\mathbb{R}^3$ is, dit in tegenstelling tot het inproduct van twee vectoren, dat een getal is. Het uitproduct heeft een aantal voor de hand liggende eigenschappen, die we niet zullen bewijzen. Net als het inproduct is het uitwendig product bilineair, zodat:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$
$$(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$
$$\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}) = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

In tegenstelling tot het symmetrische inproduct is het uitproduct **anti-symmetrisch**, dat wil zeggen: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

[illegible] v o g d ec da $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{o}$, e ande e oo den e od c v an een v ec o e z [illegible] s de n v ec o . [illegible] e s $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{u})$, d s $2(\mathbf{u}\times\mathbf{u})=\mathbf{o}$ en d s s $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{o}$.

o v o g v [illegible] e d ec da $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{o}$, a s $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ o o one z n. [illegible] e s v e onde s e da $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$, dan s $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(\lambda\mathbf{v})\times\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{v}\times\mathbf{v})=\mathbf{o}$.

Opgave . . *Controleer door middel van uitschrijven dat:*

a. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

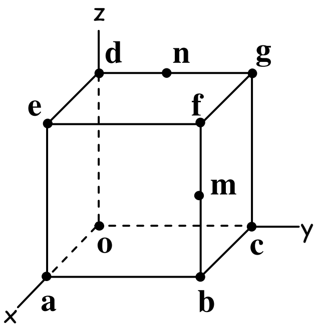
c. $(\lambda\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

Opgave .5. *Bereken voor elk van de drie paren vectoren in opgave 3.1 het uitproduct. Vergelijk de antwoorden met de antwoorden op opgave 3.1.*

Opgave [illegible]. *Bekijk weer de kubus* **oabc.defg** *van opgave 3.2. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.

Bereken van elk van de volgende vlakken een normaalvector.

a. vlak **amc**
b. vlak **amn**
c. vlak **emn**
d. vlak **amg**



[illegible] o n od c en od c ge den de v o gende e od c o es.

Stelling .1. *Voor* ***u****,* ***v*** *en* ***w*** *gelden de formules:*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$
$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Bewijs. [illegible] s s een es ev an n e - en [illegible] d [illegible] v en n coo d na en, aa b $\mathbf{u}=(u\ ,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v\ ,v_2,v_3)$ en $\mathbf{w}=(w\ ,w_2,w_3)$. B v oo bee dv oo de ee s e o ev nden e:

$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=u\ (v_2w_3-v_3w_2)+u_2(v_3w\ -v\ w_3)+u_3(v\ w_2-v_2w\ )$

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)w\ \ + (u_3v\ \ - u\ v_3)w_2 + (u\ v_2 - u_2v\ )w_3$

en bede d ngen n e ec e d z n nde daad ge . e be s v an de eede o e e g a ee sc e , aa gaa me zo. □

Opgave . *Bewijs de tweede formule van Stelling 3.1.*

Opgave . . *Bewijs met behulp van de eerste formule van Stelling 3.1. dat* $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$ *en* $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = 0$*, ofwel* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *staat loodrecht op* **u** *en op* **v.**

Stelling . *Voor* **u** *en* **v** *(beide* $\neq \mathbf{o}$*) geldt:* $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot \mathrm{s\ n}\,\gamma$*, waarbij* γ *de hoek is tussen de vectoren* **u** *en* **v.**

Bewijs. e a en z en da $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot \mathrm{s\ n}^2\,\gamma$. aa b o den be de o esv an e ng 3. geb a b e ezenv an e be s ec es na e e o e e b e e s a o d oege as. Beden da de ee s e o ev an s e ng 3. oo v an ec s naa n s an o den ge ezen.

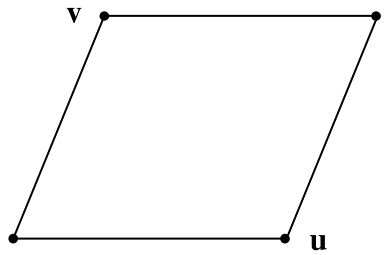
$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})) =$

$\mathbf{u}\cdot((\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) =$

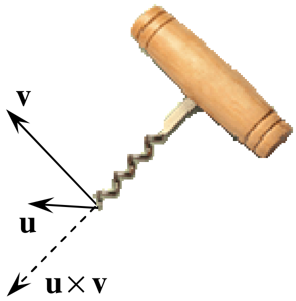
$|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - \left(|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\gamma\right)^2 =$

$|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot\cos^2\gamma = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot(\ \ - \cos^2\gamma) = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot \mathrm{s\ n}^2\,\gamma$. □

een d ec ge o gv an e ng 3.2 s da de eng ev an dev ec o $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ge s aan de o ev a ev an e a a e og a da o d o ges anmen doo de v ec o en **u** en **v**, d. .z. e a a e og a e de n en **o, u, u+v** en **v** (n d ev o go de).



Be n twee vectoren **u** en **v**, die niet o o onee zijn. e lengte van de vector **u**×**v** wordt gegeven door de lengtes van de vectoren **u** en **v** en de hoek tussen deze twee vectoren. da de vector **u**×**v** loodrecht staat op zowel **u** als **v**, geldt dat deze vector b na vast ligt. r zijn nog twee mogelijkheden voor **u**×**v**, die elkaars tegengestelde zijn. e daadwerkelijke richting van **u**×**v** wordt vervolgens bepaald door de zogenaamde **kurkentrekkerregel**: **u**×**v** wijst in de richting waarin een kurkentrekker zich verplaatst wanneer deze van **u** naar **v** wordt gedraaid. Een beetje van draaiing speelt overigens geen rol: als we ... hebben we de volgende ... hd ge b sch v ngv an ... end g od c



Stelling . . *Het uitwendig product* **u**×**v** *staat loodrecht op zowel* **u** *als* **v**. *Zijn lengte is gelijk aan de oppervlakte* $|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot \mathrm{s\,n}\,\gamma$ *van het parallellogram, opgespannen door* **u** *en* **v**. *Zijn richting wordt gegeven door de kurkentrekkerregel. Deze meetkundige eigenschappen leggen* **u**×**v** *eenduidig vast.*

Opgave .9. *Laat* $\mathbf{x}=(\ ,0,0)$, $\mathbf{y}=(0,\ ,0)$ *en* $\mathbf{z}=(0,0,\ )$. *Bereken* $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\times\mathbf{z}$ *en* $\mathbf{x}\times\mathbf{z}$ *en ga na dat hun richtingen overeenstemmen met de kurkentrekkerregel.*

Opgave .10. *Bewijs dat als* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{o}$, *dan zijn* **u** *en* **v** *proportioneel.*
Hint: Gebruik Stelling 3.2.

Opgave .11. *Bewijs dat* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.
Merk op dat je dit op twee manieren aan kunt pakken: linker- en rechterlid uitschrijven in coördinaten (veel schrijfwerk) of gebruik maken van de formules van Stelling 3.1.

Opgave .1. *Bewijs dat* $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{o}$.
Hint: Gebruik de tweede formule van Stelling 3.1.

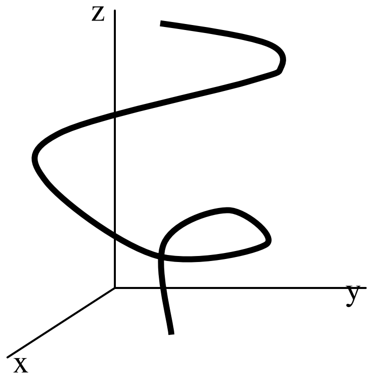
Opgave .1 . *Maak een samenvatting en een formulekaart over de begrippen inproduct en uitproduct in* $\mathbb{R}^3$.

Krommen in de ruimte

Alles stroomt en niets blijft.
Herakleitos (circa 500 v. Chr.)

De baan van een bewegend deeltje in het vlak of in de ruimte is een **vlakke kromme** respectievelijk een **ruimtekromme**. In deze [illegible] zullen we ons in dit hoofdstuk beperken tot ruimtekrommen. Voor vlakke krommen geldt een vrijwel analoog verhaal.

Na de keuze van een rechthoekig assenstelsel wordt een ruimtekromme **f** gegeven door de coördinaatfuncties $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$, zo dat $(x(t), y(t), z(t))$ de plaats is van het bewegende deeltje op tijdstip t. Met andere woorden: $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ is de **positievector** van het deeltje op tijdstip t. We noemen $(x(t), y(t), z(t))$ een **parametrisering** of **parametervoorstelling** van de kromme **f**. Je spreekt ook wel van een **geparametriseerde kromme**. Eén en dezelfde kromme kan verschillende parametriseringen hebben (zie opgave 4.2).



We veronderstellen dat de collectie van alle tijdstippen t waarop de beweging gedefinieerd is, een deelinterval is van $\mathbb{R}$ of de gehele $\mathbb{R}$. Als niets nader is aangegeven, dan is de beweging gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

Voorbeelden van geparametriseerde krommen zijn:

$\mathbf{f}(t) = (2t, 4t, -4t)$

$\mathbf{g}(t) = (3, 2t, t^2 - 2t)$

$\mathbf{h}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

Opgave 4.1.

a. *Wat is het snijpunt van de baan van* **f** *met het vlak* $z = -7$?
b. *Wat is het laagste punt van de baan van* **g** ?
c. *Wat is het snijpunt van de baan van* **h** *met het vlak* $z = 5$?
d. *Wat is het snijpunt van de baan van* **h** *met het vlak* $x = 0{,}5$?

Opgave [illegible]. *Ga na hoe de baan van het deeltje er bij elk van de drie bovenstaande voorbeelden uitziet. Je kunt daarvoor op je grafische rekenmachine eerst een geschikte projectie tekenen. Teken bijvoorbeeld bij* **g** *de vlakke kromme geparametriseerd door:* $x(t) = 2t$ *en* $y(t) = t^2 - 2t$.

Opgave [illegible]. *Gegeven zijn drie geparametriseerde ruimtekrommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$, $\mathbf{q}(t) = (2t-4, 4t-8, -4t+8)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$.

a. *Ga na dat de deeltjes bij deze drie parametriseringen dezelfde baan doorlopen.*
b. *Hoe bewegen de deeltjes bij* **p** *en* **q** *ten opzichte van elkaar?*
c. *Doorloopt het deeltje bij de parametrisering* $\mathbf{s}(\tau) = (2\tau^2, 4\tau^2, -4\tau^2)$ *ook de zelfde baan als bij* **p**, **q** *en* **r**?

[illegible]

[illegible] $\mathbf{f}(t) = (f(t), f_2(t), f_3(t))$ [illegible] $\mathbf{g}(t) = (g(t), g_2(t), g_3(t))$ [illegible] $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ [illegible] $(\mathbf{f}+\mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$. [illegible] λ [illegible] $\lambda\mathbf{f}$ [illegible] $(\lambda\mathbf{f})(t) = \lambda \cdot \mathbf{f}(t)$. [illegible] $-\mathbf{f} = - \cdot \mathbf{f}$ [illegible] $\mathbf{f} - \mathbf{g} = \mathbf{f} + (-\mathbf{g})$.

Opgave [illegible]. *Beschouw nogmaals de ruimtekrommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$, $\mathbf{q}(t) = (2t-4, 4t-8, -4t+8)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$. *Geef parametriseringen van de ruimtekrommen* $\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $-3\mathbf{r}$ *en* $2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}$.

[5] [illegible]

Bes o de o e $\mathbf{f}(t) = (f\ (t), f_2(t), f_3(t))$. e afs andv an de aas v an e b b o ende dee e o de oo s ong o ds t s $|\mathbf{f}(t)|$. e af-s ands nc e, d e o d geno e d e $|\mathbf{f}|$, o d d s gede n ee d doo : $|\mathbf{f}|(t) = |\mathbf{f}(t)| = \sqrt{(f\ (t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}$.

Opgave .5. *Bekijk de kromme* $\mathbf{k}(t) = (\cos^2(t), \mathrm{s\ n}(t)\cdot\cos(t), \mathrm{s\ n}(t))$.

a. *Laat zien dat de afstandsfunctie* $|\mathbf{k}|$ *constant gelijk is aan* .

b. *Wat betekent dit voor de baan van het bijbehorende deeltje?*

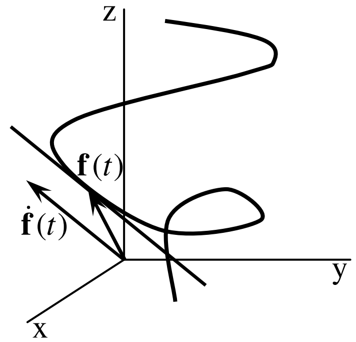
en dee e be eeg v o gens de o e $\mathbf{f}(t) = (f\ (t), f_2(t), f_3(t))$. e **snel-heidsvector** o eg **snelheid** v an e dee e o ds t nnen e be a en doo de ge dde de sne e d o een e n ds n ev a $[t,\ t+\Delta t]$ e be e emen en daa na Δt o n e a en nade en. e ge dde de sne e dv an e dee e o e ds n ev a $[t,\ t+\Delta t]$ s ge aan $\frac{}{\Delta t}(\mathbf{f}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t))$. e sc v en e o :

$$\frac{}{\Delta t}\left(f\ (t+\Delta t) - f\ (t), f_2(t+\Delta t) - f_2(t), f_3(t+\Delta t) - f_3(t)\right) =$$

$$\left(\frac{f\ (t+\Delta t) - f\ (t)}{\Delta t}, \frac{f_2(t+\Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}, \frac{f_3(t+\Delta t) - f_3(t)}{\Delta t}\right).$$

La en ev ev o gens Δt o n nade en, danv nden e de sne e dsv ec o o ds t: $(f\ '(t), f_2'(t), f_3'(t))$. e d e en e env an een e o e gebe d s (me a sv an eenv a e o e) coo d naa ge s. [1]

e sne e dsv ec o be o ende b de aa v ec o $\mathbf{f}(t)$ no e en e e $\dot{\mathbf{f}}(t)$. e sne e dsv ec o $\dot{\mathbf{f}}(t)$ s a a e e de aa n aan de o e n e n $\mathbf{f}(t)$. e nc e $\dot{\mathbf{f}}(t) = (f\ '(t), f_2'(t), f_3'(t))$ noe en e de **snelheidskromme** v an de o e **f**.



[1] e sne e dsv ec o $\dot{\mathbf{f}}(t)$ s a een dan gede n ee d, a s de coo d naa nc es f_1, f_2 en f_3 n t d e en ee baa z n. o d s z gendv e onde s e d. Mee nog: e gaan e v an da a e d e de coo d naa nc es onbe e aa d e en ee baa z n n a e ds en t.

Opgave [illegible]. *Bereken voor de krommen* **f**, **g** *en* **h** *van opgave 4.1 de bijbehorende snelheidskrommen* $\dot{\mathbf{f}}$, $\dot{\mathbf{g}}$ en $\dot{\mathbf{h}}$

Opgave .9. *Een platte klaverbladknoop kan worden beschreven door de kromme:* $\mathbf{f}(t) = \big((2+\cos(3t))\cdot\cos(2t), (2+\cos(3t))\cdot\sin(2t)\big)$.
Teken deze knoop eerst op de grafische rekenmachine.

a. *Toon aan dat* $|\mathbf{f}(t)| = 2+\cos(3t)$.
b. *Welke waarden kan de afstandsfunctie aannemen?*
c. *Geef een parametrisering van de snelheidskromme.*
d. *Toon aan dat* $|\dot{\mathbf{f}}(t)| = \sqrt{25+16\cos(3t)-5\cos^2(3t)}$.
e. *Wat is de laagste snelheid tijdens het doorlopen van de kromme.*

Opgave .10. *Een ruimtelijke klaverbladknoop kan worden beschreven door de kromme:* $\mathbf{g}(t) = \big((2+\cos(3t))\cdot\cos(2t), (2+\cos(3t)$ [redacted]

a. Toon aan dat $|\mathbf{g}(t)| = \sqrt{5+4\cos(3t)}$.
b. *Welke waarden kan de afstandsfunctie aannemen?*
c. *Geef een parametrisering van de snelheidskromme.*
d. *Toon aan dat* $|\dot{\mathbf{g}}(t)| = \sqrt{9+4\cdot(2+\cos(3t))^2}$.
e. *Welke waarden kan de snelheid aannemen?*

Bij twee krommen $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ en $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ noemen we een inproductfunctie $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ dat gedefinieerd wordt door $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\,(t) = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)$. De functie $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ geeft voor elke t de waarde van het inproduct van de vectoren $\mathbf{f}(t)$ en $\mathbf{g}(t)$. Dus $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\,(t) = f_1(t)\cdot g_1(t) + f_2(t)\cdot g_2(t) + f_3(t)\cdot g_3(t)$ of kortweg $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = f_1\cdot g_1 + f_2\cdot g_2 + f_3\cdot g_3$.

Voorbeeld. Als $\mathbf{f}(t) = (2t, 4t, -4t)$ en $\mathbf{g}(t) = (3, 2t, t^2-2t)$, dan is $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\,(t) = 2t\cdot 3 + 4t\cdot 2t + -4t\cdot(t^2-2t) = -4t^3 + 16t^2 + 6t$.

Voor het differentiëren van het inproduct van twee krommen bestaat een regel, die veel lijkt op de productregel voor gewone functies. Er geldt namelijk: $\dfrac{d(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})}{dt} = \dfrac{d\mathbf{f}}{dt}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\dfrac{d\mathbf{g}}{dt}$ of wel $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})^{\cdot} = \dot{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{g}}$.

Het bewijs is [illegible] dat van de productregel voor gewone functies. $\frac{d(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})}{dt}(t)$ is namelijk de limiet van $\frac{1}{\Delta t}[(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t+\Delta t)-(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)]$ als Δt tot nul nadert. [illegible]

$$\frac{1}{\Delta t}[(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t+\Delta t)-(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)]=\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{f}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)]$$

$$=\frac{1}{\Delta t}[(\mathbf{f}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t))+(\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t))]$$

$$=\left[\frac{(\mathbf{f}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t))}{\Delta t}\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)+\mathbf{f}(t)\cdot\frac{(\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{g}(t))}{\Delta t}\right].$$

De laatste uitdrukking nadert tot $\frac{d\mathbf{f}}{dt}(t)\cdot\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}(t)$ als Δt nadert tot nul. Dit geeft het gewenste resultaat.

[illegible] voor functies $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3)$ en $\mathbf{g}=(g_1,g_2,g_3)$ ook een uitproduct[7] $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ definiëren door $(\mathbf{f}\times\mathbf{g})(t)=\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)$. De functie $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ geeft voor iedere t het uitproduct van de vectoren $\mathbf{f}(t)$ en $\mathbf{g}(t)$. Dus $(\mathbf{f}\times\mathbf{g})(t)=$

$$(f_2(t)\cdot g_3(t)-f_3(t)\cdot g_2(t)\ ,\ f_3(t)\cdot g_1(t)-f_1(t)\cdot g_3(t), f_1(t)\cdot g_2(t)-f_2(t)\cdot g_1(t))$$

of korter: $\mathbf{f}\times\mathbf{g}=(f_2\cdot g_3-f_3\cdot g_2\ ,\ f_3\cdot g_1-f_1\cdot g_3\ ,\ f_1\cdot g_2-f_2\cdot g_1)$.

Voor het differentiëren van het uitproduct van twee vectorfuncties bestaat een soortgelijke productregel als voor het differentiëren van het inproduct: $\frac{d(\mathbf{f}\times\mathbf{g})}{dt}=\frac{d\mathbf{f}}{dt}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{d\mathbf{g}}{dt}$ of kort $(\mathbf{f}\times\mathbf{g})^{\cdot}=\dot{\mathbf{f}}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\dot{\mathbf{g}}$. Het bewijs van de productregel voor het uitproduct is vrijwel hetzelfde als dat van de productregel voor het inproduct.

Opgave .11. *Schrijf het bewijs van de productregel voor het uitproduct netjes uit.*

Opgave .12. *Een deeltje beweegt over een kromme* **k** *gedefinieerd door* $\mathbf{k}(t)=(\sin t+\cos t, \sin t, \sin t-\cos t)$.

a. *Toon aan dat $\mathbf{k}(t)\times\dot{\mathbf{k}}(t)$ een constante vector is.*

b. *Zeg in woorden wat het resultaat van onderdeel a. betekent.*

[7] Het uitproduct is niet gedefinieerd voor vlakke vectoren.

Opgave 4.13 . *Een deeltje beweegt over een bol met straal r. Zijn baan wordt beschreven door de kromme* **f**.
Bewijs dat de snelheidsvector van het deeltje steeds loodrecht staat op de straal (ofwel $\mathbf{f}(t) \perp \dot{\mathbf{f}}(t)$ *voor elke t).*
Hint: ga na dat $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) = r^2$ *en differentieer deze uitdrukking naar t.*

Bekijken we een deeltje dat beweegt over de kromme $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. We vinden de **versnellingsvector** (of vaak kortweg **versnelling**) van het deeltje op tijdstip t door de gemiddelde versnelling $\frac{1}{\Delta t}\left(\dot{\mathbf{f}}(t+\Delta t) - \dot{\mathbf{f}}(t)\right)$ op een tijdsinterval $[t, t+\Delta t]$ te berekenen en daarna Δt tot nul te laten naderen. Deze versnellingsvector wordt ook genoteerd door $\ddot{\mathbf{f}}(t)$ en is gelijk aan: $\left(f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t)\right)$.

De functie $\ddot{\mathbf{f}}(t) = \left(f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t)\right)$ noemen we de **versnellingskromme** van het deeltje dat beweegt langs de kromme **f**. De grootte van de versnellingsvector wordt ook **versnelling** genoemd (notatie $|\ddot{\mathbf{f}}|$) en wordt gegeven door $|\ddot{\mathbf{f}}|(t) = |\ddot{\mathbf{f}}(t)| = \sqrt{\left(f_1''(t)\right)^2 + \left(f_2''(t)\right)^2 + \left(f_3''(t)\right)^2}$. We zullen in een aantal voorbeelden de versnellingsvector nader onderzoeken.

Opgave 4.14 . *Bereken zowel de versnellingsvector als de versnelling van de krommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$.

Opgave 4.15. *Bekijk de kromme* **k**, *die wordt gedefinieerd door* $\mathbf{k}(t) = (\sin t + \cos t, \sin t, \sin t - \cos t)$. *Toon aan dat* $\ddot{\mathbf{k}}(t) = -\mathbf{k}(t)$.

Opgave 4.16 . *Een deeltje beweegt met constante snelheid over een kromme. Toon aan dat de snelheidsvector loodrecht staat op de versnellingsvector. Hint: kijk nog eens goed naar opgave 4.13.*

In de kl an ca s e geb e o b een be aa de o e de os e-v ec o e no e en e $\mathbf{r}(t)$, de sn e d v ec o e $\mathbf{v}(t)$ en de v e sn e ngs-v ec o e $\mathbf{a}(t)$. e s aa v oo ad s (a v oe s aa be e en), de v s aa v oo v e oc y (sn e d) en de av oo acce e a on (v e sn e ng). aa a en e ge a s av e e oo d v ec o eg en ebben e e o e de os e $\mathbf{r}(t)$, de sn e d $\mathbf{v}(t)$ en de v e sn e ng $\mathbf{a}(t)$. Aan de no a e s e z en da e s a e s v an een v ec o en n e v an een ee ge a . e s geb e o de eng e v an een v ec o aan e ge en e deze de e e ; aa dan n e v e ged ; de a s and o de oo s ong s $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, de sn e d s $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ en de v e sn e ng s $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$. eze no a e s bond g en bo-v end en ond bbe z nn g. e oe e e en aan enmen, aa na en ge d besp e aa sc n e de v oo de en v an deze no a e.

e be en een v e a assen v an b zonde e e o en.

De eenparig rechtlijnige beweging

oo $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ n $\mathbb{R}^3$ besc de o e $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}$ een ec e n. e n $\mathbf{u}$ s de os e o ds $t = 0$. e sn e d s $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}$ en de v e sn e ng s $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{o}$. da de sn e d cons an s, o d de n een a g doo o en.

De eenparig versnelde beweging

oo ee e ge a en a, b en c e a 0 besc de v a e o e $\mathbf{r}(t) = (t, -\frac{1}{2}at^2 + bt + c)$ een be g a aboo . e sn e d s $\mathbf{v}(t) = (, -at + b)$ en de v e sn e ng s $\mathbf{a}(t) = (0, -a)$.

Opgave .1 . *Laat zien dat voor de eenparig versnelde beweging geldt:* $v(t) = \sqrt{a^2t^2 - 2abt + b^2 + }$ *en* $a(t) = a$.

De eenparig cirkelvormige beweging

oo $r > 0$ en $\omega \neq 0$ besc de v a e o e $\mathbf{r}(t) = (r\cos\omega t, r\,\mathrm{s\ n}\,\omega t)$ een c e e s aa r e oe sn e d ω. e sn e d en de v e sn e ng z n $\mathbf{v}(t) = (-r\omega\,\mathrm{s\ n}\,\omega t, r\omega\cos\omega t)$ en $\mathbf{a}(t) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\,\mathrm{s\ n}\,\omega t)$.

Opgave .1 . *Laat zien dat voor een eenparig cirkelvormige beweging met hoeksnelheid* ω *over een cirkel met middelpunt* **o** *en straal R geldt:*

a. $\mathbf{v}(t) \perp \mathbf{r}(t)$

b. $v(t) = v = \omega R$

c. $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$

d. $a(t) = \omega^2 R$

e. $a(t) = v^2 / R$

[illegible] 4. 8 [illegible] v^2/R. [illegible] 59 [illegible]

[illegible]

Opgave .19. *Laat* $\mathbf{r}(t)$ *een eenparige beweging zijn met snelheid* v *over een cirkel met middelpunt* **o** *en straal R. De periode van de beweging is T.*

a. *Ga na dat* $\mathbf{v}(t) = \frac{v}{R}\mathbf{r}(t + \frac{}{4}T)$.

b. *Toon aan dat* $\mathbf{a}(t) = -\frac{v^2}{R^2}\mathbf{r}(t)$. *Hint: differentieer de uitdrukking bij a.*

c. *Toon aan dat de versnelling gericht is naar het middelpunt en gelijk is aan v^2/R.*

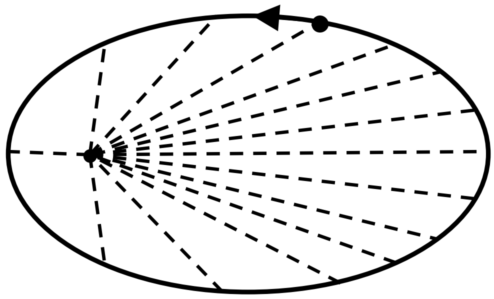
De harmonische beweging

[illegible] $a \geq b > 0$ [illegible] $\mathbf{r}(t) = (a\cos\omega t, b\sin\omega t)$ [illegible] a [illegible] b. [illegible]

Opgave .40. *Laat zien dat voor de harmonische beweging geldt:*

a. $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$

b. $(r(t))^2 + (v(t)/\omega)^2 = a^2 + b^2$



Stelling .1. (De Perkenwet) *Als een beweging* $\mathbf{r}(t)$ *een versnelling* $\mathbf{a}(t)$ *heeft die proportioneel is met* $\mathbf{r}(t)$ *(d.w.z. op elk tijdstip t zijn* $\mathbf{r}(t)$ *en* $\mathbf{a}(t)$ *veelvouden van elkaar), dan geldt het volgende:*

- *De baan van de beweging ligt in een vlak door de oorsprong* $\mathbf{o}$.
- *De oppervlakte van het perk dat per tijdseenheid wordt uitgeveegd door het lijnstuk met eindpunten* $\mathbf{o}$ *en* $\mathbf{r}(t)$ *is constant, met andere woorden, in gelijke tijden worden gelijke perken doorlopen.*

Bewijs. Be de o e $\mathbf{n}(t)$ gede n ee d doo $\mathbf{n}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$. an s $\dot{\mathbf{n}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) = \mathbf{o}$.
e aa s e s a ge d o da $\mathbf{r}(t)$ en $\mathbf{a}(t)$ v eev o den z n v an e aa . Maa a s $\mathbf{n}(t)$ v oo d end s e d o e dan o e e een cons an ev ec o z n. Noe deze v ec o $\mathbf{n}$. da $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ ood ec s aa o $\mathbf{r}(t)$, s ee de be eg ng z a n e v a doo de oo s ong e no aa - v ec o $\mathbf{n}$. be s e ee s e dee v an de s e ng.

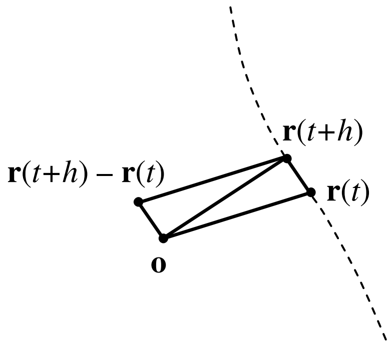
Nee v oo t_0 een e e ge beg n d en aa t een ds z n a e dan t_0. e o ev a ev an e e da o d ge eegd doo e ns e e nd n en $\mathbf{o}$ en $\mathbf{r}(s)$ n e ds n ev a $[t_0, t]$, noe en e $O(t)$. e onen aan da $O'(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)|$.

e n , v oo een e n os e ge a s: $O'(t) \approx \dfrac{O(t+h) - O(t)}{h} \approx$

$\frac{1}{h} \cdot$ o ev a ev an de d e oe e oe n en $\mathbf{o}$, $\mathbf{r}(t)$ en $\mathbf{r}(t+h)$ =

$\frac{1}{2h} \cdot$ o ev a ev an e a a e og a o ges annen doo $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ en

$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2h} \cdot \left|\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\mathbf{r}(t) \times \dfrac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}\right| \approx \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)|$.



Laten we nu vervolgens h naar nul gaan, dan zien we dat $O'(t) = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t)\right|$.

Omdat $\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t) = \mathbf{n}$ een constante vector is, is $O'(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{n}|$ een constant getal. Maar dan is $O(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{n}|(t - t_0)$ (opgave 4.21). Dus worden in gelijke tijden gelijke perken doorlopen. □

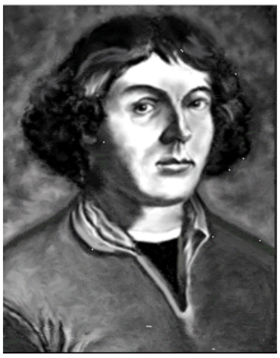
Opgave 4.21. *Laat zien dat voor de oppervlaktefunctie in het bewijs van de Perkenwet geldt:* $O(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{n}|(t - t_0)$.

5 De reuzen van Newton

A s v de on zen, dan as da doo da o de sc o de sv an zen s ond.
Isaac Newton (642- 727)

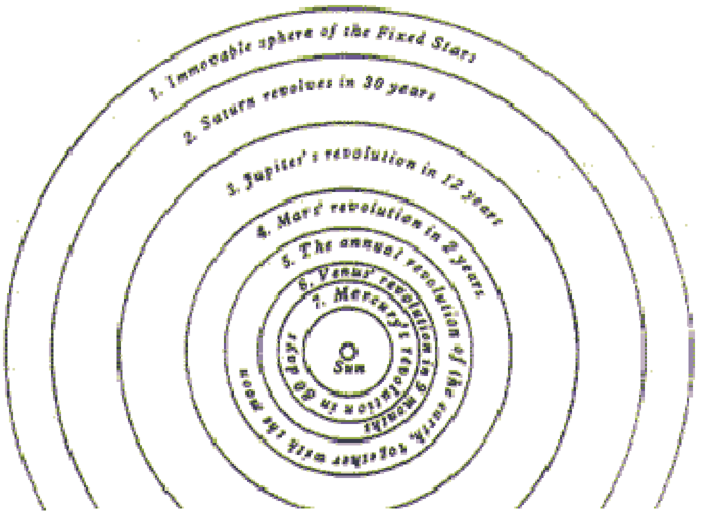
Me de on de ngenv an N co a s o n c s, o annes e en Ga eo Ga e d n de ede v an de zes ende en de e s v an de ze en ende e a ass e G e se e dbee d, da s nds de ede n a s s onaan as baa as ge es dg n v dv oo ode me dbee d. as dan z deze on de ngen, da saac Ne - on n 687 n s aa as o n z n nc a Ma a ca de ngv an de z aa ac o s nd ge ze a de n de aa me ngen. Ne on s a dan oo de oo den, da z n o de z aa ac a een ad nnen doen, o da o de sc o de sv an zen s ond. n deze a ag aa z en v an v an deze d " zen" be en.

Nicolaus Copernicus (1 -15)



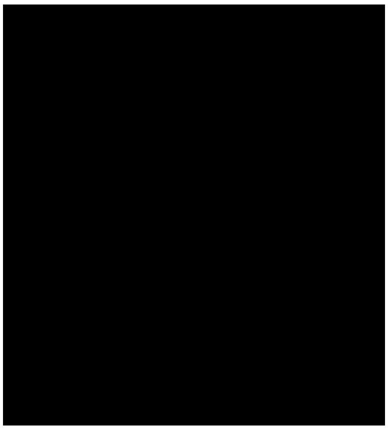
Gebase d o de aa me ngenv an ame banen de ass G se o d o de de oo s- se es en as onoo N co a s o- n c s n z n oo d o on b s - b o es (v de o env an de - c a en) 54 zogenaa de ocen sc e dbee d. zeg da a ame en (nc s de Aa de) n c v o ge banen een a g o de s - s aande on be egen. o dan o e s an- geocen sc dbee d v an o s (besc en n z n boe A ages aa 50). Vo gens o s be egen de ame en o de Aa dev o gens c s d angs de o v an ande c s o en (zogenaa de cy s). v oo zo gen da z n ode zo goed oge de aa me ngen o - een a , ad o sv oo z n ode en a n cy s nod g. a geocen sc dbee d b na 400 aa s and en o den, a eme z ds doo da de ensc a n o a n deze ode na - sv o de ngen aa en ande z ds doo de ac ge os ev an de a- o . Vo gens de b be s de aa de s dde n v an a , een bee d da een a da v an o s. o d bee d d n geoo oo d en so s bes a

Tren de v an o re n cu s rende ren naas de Aa de de b nnen ame ren Me c s en Ven s (d e b nnen de Aa dbaan be egen) en de b en ame- en Ma s, e en Sa n s (d e b en de Aa dbaan be egen). o e n- c s s ee n z n boe o e z en s e en e n e dde n de s - s aande zon. e ee s e en b ens e s ee s de onbe eeg e s ee v an de v as e s e en. aa b nnen ee e e ame z n e gen s ee , d e o d doo - o eh n eenv as e d, a an e v an de g bo e v an de s ee (z e f g).



Johannes Kepler (15 1-1 0)

aa 00 s be ang v oo de gesc eden s v an de as onoo e. e e gd ge se s nd ge o annes e e on oe n da aa de o de e eense as onoo Tyc o B a e (54 - 0), en o d aangeste d a s z n ass sten. e ex o e e B a e as een e men ex e en e as onoo . e des ds eense e and e en ad een obsev a o aa , (zonde v an e esco- en) e e sac ge sex an en n s aa as zee na e g de os es v an s e en en amen aa e me en. B a e eeg ec e con c en e de e en oes eme a env e a en. n 599 e d aangeste d n aag aan e q v an e ze do v an os en . e n o e e e e daa en egen as een b an eo e sc as onoo e een g o e enn s v an en n ev oo s nde. n 59 a z n ee s e boe e a s e Myse os og a c (os o og sc aadse). e e s e de z c v agen a s: aa o z n e zes amen en Me c s, en s, Aa de, Ma s, e en a n s aa o z n de a s andenv an de amen o de on zo a s z z n e e eeg de an as sc e nge ng da de an oo den o be dev agen ge onden on o den n de e ndev an dev a on - sc e c a en oc aede (ac v a), cosaede (n g a), dodecaede (aa a), e aede (ev a) en exaede (b s), n dezev o go de e a sse end ngesc e en en o gesc e en bo en.



[illegible]

[illegible]

[illegible]

Eerste wet van Kepler (De Ellipsbanenwet) *De planeten bewegen over ellipsen met de Zon in een van de brandpunten van de ellips.*

Tweede wet van Kepler (De Perkenwet) *De oppervlakte van het perk dat per tijdseenheid wordt uitgeveegd door de voerstraal van een planeet vanuit de Zon, is constant.*

[illegible]

[illegible]

Derde wet van Kepler (De Harmonische wet) *Voor alle planeten is de verhouding T^2/a^3 gelijk. Hierbij is T de omlooptijd en a de lengte van de halve lange as van de ellipsbaan van de planeet.*

[illegible]

Opgave 5.1. *Een vlakke figuur E wordt gegeven door de vergelijking* $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$.

a. *Bereken de coördinaten van E met de x-as en de y-as.*

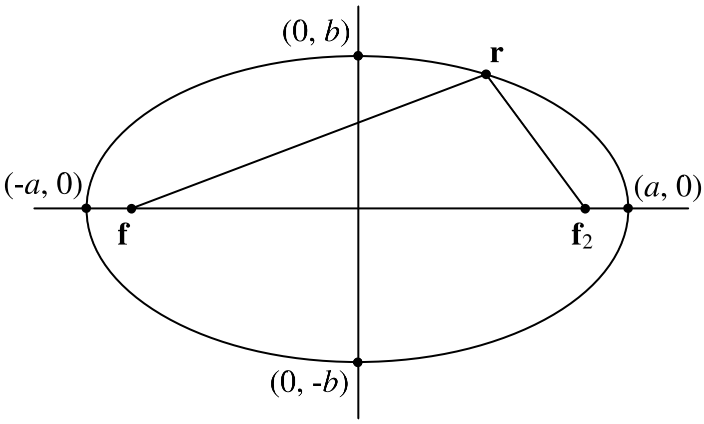
b. *Ga na dat voor punten van E geldt:* $y = \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$ *of* $y = -\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$.

c. *Teken de grafiek van E op een grafische rekenmachine.*

d. *Leg uit dat E ontstaat uit cirkel C met vergelijking* $x^2 + y^2 = 9$ *door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor* $\frac{2}{3}$.

[illegible] **ellips**. [illegible] $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. [illegible] **lange as** [illegible] **korte as** [illegible] $a > b$, [illegible] $2a$ [illegible] o e as $2b$. Laa c een os e ge a z n, zo da $a^2 = b^2 + c^2$. e n en $\mathbf{f}\ = (-c, 0)$ en $\mathbf{f}_2 = (c, 0)$ e en de **brandpunten** van de e s. a deze e e n en b zonde z nv oo de e s, b e dev o gende o ga e.

Opgave 5. *Laat a en c positieve getallen zijn met $a > c$. Gegeven zijn de punten $\mathbf{f}\ = (-c, 0)$ en $\mathbf{f}_2 = (c, 0)$. Bekijk de figuur bestaande uit de punten $\mathbf{r} = (x, y)$ waarvoor $|\mathbf{r} - \mathbf{f}\ | + |\mathbf{r} - \mathbf{f}_2| = 2a$. We gaan bewijzen dat deze figuur een ellips is, met vergelijking $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 =$ waarbij $b^2 = a^2 - c^2$.*



Deze(pittige) berekening kan het best als volgt worden uitgevoerd.

a. *Herschrijf de vergelijking als $|\mathbf{r} - \mathbf{f}\ | = 2a - |\mathbf{r} - \mathbf{f}_2|$, druk hierin de vectoren in coördinaten uit en kwadrateer linker- en rechterlid.*

b. *Herschrijf het resultaat van onderdeel a. als $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$ en kwadrateer wederom linker- en rechterlid.*

c. *Bedenk dat $b^2 = a^2 - c^2$ en maak het bewijs af.*

e a a e ze ngv an een e s a s de co ec ev an n en aav oo de so v an de a s anden o e gegev en n en cons an s, o d oo e de n ande n ev an een e s genoe d. e n na e een e s o g b oe e aan eggen doo e nen n de g ond e s aan en een o , bev es gd aan be de nen, s a e be egen.

Galileo Galilei (15 -1)

een v o gende c c a e s a n de on e ng v an de ech an ca e d gez e doo de a aanse na e ensch a e Ga eo Ga e . Ga e as een v an de e s en d e de e e ch a en e een e escoo onde zoch o on de e n 0 de v e amen o, o a, Gany edes en a s o v an de ame e . n onze d ge d e en e da e e zo'n 70 amen e aav an s ech s de v e amen v an Ga e e een e me e escoo goed z n aa e me en.

Ga e as een o e gd aan ange v an e e-ocen sch e e dbee dv an o e n c s. n 2 v e sch een z n boe a-ogo so a d e Mass s e de Mondo o e a co e o e n cano (een eeges e o e de ee be ang s e e dsys e en, e o e e sch e eh o e n caanse). n ges e en ssen d e e somen, av a (de ge ee de d e na ens Ga e s ee), ag edo (de v e s and ge ee o ge oe d e v e s e ng v an av a) en c o (de aan ange v an e an e e e-e dbee dv an o e e s en A s o e es) aa Ga e z n n o n e s e v e s ame ze d de . e a o e e e , ge e d doo a s ban s , z e aa gedach e goed ge d c see d ee gege en doo c o en daag Ga e v oo de n s e . e d een aa a e o z nv e oo de ng. o gens e v onn s d en Ga e z n en ng e e de en en g v oo de es v an z n e en sa es .

[illegible]

Propositie 5.1. *Projectielen op Aarde bewegen over bergparabolen met de symmetrieas loodrecht op het aardoppervlak.*

Propositie 5.[illegible] *Projectielen op Aarde leggen in gelijke tijden gelijke horizontale afstanden af.*

[illegible] $x = at + b$ en $y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$ voor zekere constanten a, b, c, d en $g > 0$.

Propositie 5. . *De constante g (zijnde de grootte van de versnelling van de beweging van het projectiel) hangt niet af van de massa van het projectiel.*

[illegible] 50 [illegible] 50 [illegible] g. [illegible]

Propositie 5. . *De constante g (van Galilei) is de grootte van de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht aan het aardoppervlak in vacuüm (d.w.z. als er geen luchtweerstand is). Deze constante hangt niet af van de vorm van het projectiel.*

s nv ac gen en de be eg ngv an een oge of een ganzenveer deze f-
de aa dev an g. b adz de v an de sco s aa a e dev e baasde
c o zeggen: " s een o e e e be e ng, av a . Maa za
noo ge o en da zef s nv ac (zo be eg ng o zo'n e oge s)
een o en een s e ood e deze f de snel e d nnenv a en." e
nv e sa e y an de cons an e gv oo de be eg ngv an o ec e en o Aa -
de nv ac s een aa n e gedach egoedv an a e . eze aa s e
o os ev an a e as n e e e ge o gv an een ex e en , e
as een gedach e-ex e en gebasee d o e bes aanv an e v ac
v oo be eg ngenv an een o ec e o Aa de.

e g oo ev an dev e sne ngv an de z aa e ach o Aa de b ex e -
en e ongeve ge e z n aan g = 9,8 *m/s*^{2}. a en a end o en e
o dev o gende conc s e, oo e de a e y an a e genaa d.

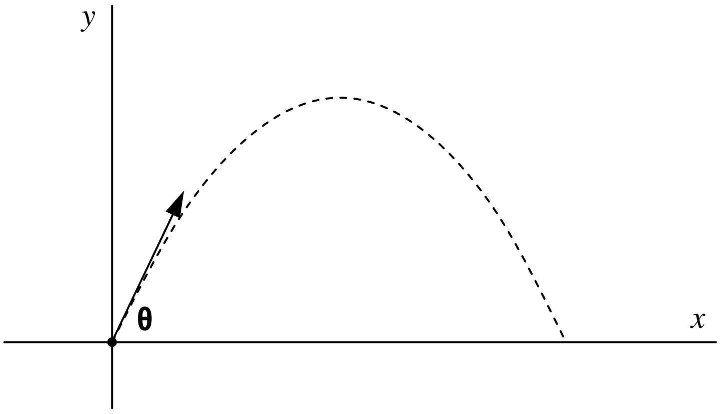
Valwet van Galilei. *De beweging van een projectiel op Aarde in vacuüm heeft een constante versnelling* **g**, *onafhankelijk van de massa en de vorm van het projectiel. Deze versnelling* **g** *is neerwaarts gericht, loodrecht op het aardoppervlak en heeft als grootte g = 9,8 m/s^2.*

dev a e v an a e nnen e o os e 5. as v o g a e den. B
een be eg ng nv ac v an een o ec e o e aa do ev a e zen e
coo d na en (x, y) e x de o zon a e os e en y de oog e bo en e
aa do ev a . o gens de a e v an a e s $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g}$, q e
$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (0,-g)$. e y o g da $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (a, -gt + c)$ v oo ze e e
cons an en a en c d e an e z nv an de beg nsne e dv an e o ec-
e . v o gens zen e da $\mathbf{r}(t) = (at + b, -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d)$ v oo ze e e
cons an en b en d d e an e z nv an de beg n os ev an e o ec e .

La e e na e ge be e en ngen ebben om d da de Aa de n e e f ec
bov o g s, aa en gsz ns af ge a aan de oo d o en de d o . e
v e sne ngv an de z aa e ach b enzo aan de be de o en e s g o e
e z n dan aan de e enaa .
oo de e za a e v oo na e e nne d o denv an ege z n con-
f c e de a o e e e . con c s aa ode v oo de s ann ng s-
sen e ensch a en e g e. n be ang s e v oo de na e en-
sch a s ech e z n a e . B za genoeg ogen e de a o e e e
ev oo "e en e " z n, o da a e v an ege z n con c e d af ge-

o denv an de as ono en g de naa z n s d v a b eg n-gen. v an o ame banen en v an a o v a b eg ngen z n de s, aa o de a syn se doo on as gebase d.

Opgave 5. . *Een kogel wordt vanaf de grond met een vaste snelheid onder een bepaalde hoek afgeschoten. Door de hoek te variëren, verandert ook de horizontale afstand die de kogel aflegt, voordat hij weer de grond raakt. Gevoelsmatig weet je dat de kogel bij een grote hoek wel hoog komt, maar niet ver. Bij een kleine hoek is de kogel niet lang in de lucht en komt daardoor ook niet ver. We gaan onderzoeken onder welke hoek we de kogel moeten afvuren om hem zo ver mogelijk te krijgen.*



De beweging van de kogel wordt gegeven door $x = at$ *en* $y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct$ *voor zekere getallen a en c. De vaste beginsnelheid noemen we v. De hoek in graden waaronder de kogel wordt afgevuurd, noemen we* θ*. We gaan uit van een ideale situatie zonder enige vorm van wrijving.*

a. *Leg uit dat* $a = v\cos\theta$ *en* $c = v\sin\theta$.

b. *Laat zien dat de tijd dat de kogel in de lucht is gelijk is aan* $\frac{2c}{g}$.

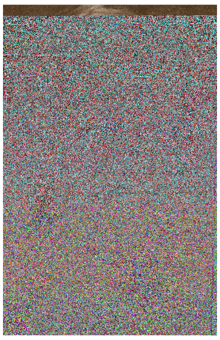
c. *Laat zien dat de overbrugde afstand gelijk is aan* $\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$.

d. *Bepaal de optimale afvuurhoek.*

e. *Laat zien dat de overbrugde afstanden bij afvuurhoeken* θ *en* $90° - \theta$ *gelijk zijn.*

De wetten van Newton

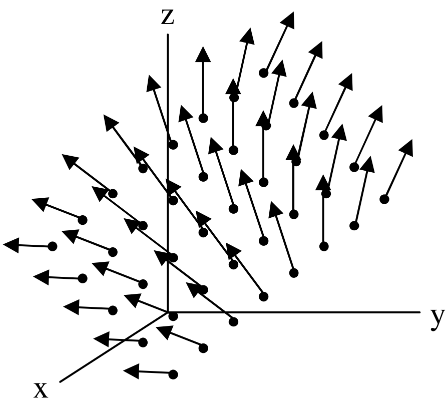
boe v an de na s gesc en n de aa v an de s nde.
Galileo Galilei (5 4- 42)



saac on
42- 727

o sc onde bo ngv an de o ex en- en gebase de env an en a zo o- den ge d doo nge se ensc a saac on z n o z aa ac oo ass c an ca genaa d. on b cee de deze o n 87 n z n oo d osc a Na a s nc a Ma a ca (s nd ge Beg n- se v an de Na ensc a). beg nnen een d n .

Definitie. *Een krachtveld* **F** *op* $\mathbb{R}^3$ *is een afbeelding* **F** : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *die aan (bijna) ieder punt* **u** *in* $\mathbb{R}^3$ *een ac v ec o* **F**(**u**) *in* $\mathbb{R}^3$ *toekent.*



F sv an nge se oo d o ce v oo ac z en b **F** ees a den en aan een z aa ac v d. on s de z c v oo da een n dee assa *m* en g o ge v an de ass de ng n de ys sc $\mathbb{R}^3$ de oed v aa v an een z aa ac v d **F** o $\mathbb{R}^3$. oo d n dee assa *m* a d s een oge z n z aa ac v d v an de Aa de, een anee d be eeg n z aa ac v d v an de on, o een o d be eeg n z aa ac v d v an ons onnes se . v n oo d "dee " s aa d s n zoze o de assa *m*, d oo

Bewegingsvergelijking. *Een puntdeeltje met massa m en positie* $\mathbf{r}$ *op tijd t, dat beweegt onder invloed van een zwaartekrachtveld* $\mathbf{F}$ *op* $\mathbb{R}^3$ *ondervindt op tijdstip t een versnelling* $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, *ofwel* $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$ *met* $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$.

Traagheidswet. *Een vrij deeltje is in rust of beweegt eenparig rechtlijnig.*

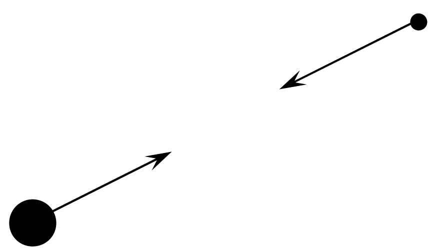
o en a s de o en a e e een aa n gang eeg geze . Vandaa de naa ech an ca oo deze eo e.

e Be eg ngsv e ge ng $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ o d as ech eenv e ge ng a s e e en a e z aa e ach v e d **F** s nv oo o ende ys sch e s a es. e c c a e ge a s e zogenaa de e e ch a en ob e , oo e e e - ob e genaa d.

on o e de nog een de de e d e zeg da ach en noo a een v oo o en, aa a d o eden n a en. eze e d e ee a o d aangeged d e de e : ac e = − eac e, d a sv o g

Actie = − reactie. *Als een voorwerp A een kracht* **F** *op een voorwerp B uitoefent, dan gaat deze kracht gepaard met een even grote, maar tegengestelde kracht* −**F** *van B op A.*

eze e s e baa n de a v an a edag: a s e o een a o me s ng dan d de a o me e de ze de ach e g. A s e een ba on o b aas dan d de ba on de ch me zo a d e g. Maa ge d oo v oo de z aa e ach en ssen ee assa's: a s een assa A doo een ande e assa B o d aange o en e een ze e e z aa e ach dan o d de assa B doo de assa A aange o en e een z aa e ach d e ec es egengeste d s.



eenv an de c c a e gedach env an on s da e deze de z aa e ach s, d e een a e doe v a en o Aa de eh d e de Maan aa baan o de Aa de o d e e aa gaa da on deze ng ng eeg oen een a e zagv a env an de a e boo n z n n n oo o e Mano . Voo de g oo e v an de z aa e ach ssen ee n assa's s e de on de v o gende o e o .

Zwaartekrachtformule. *Twee puntdeeltjes met massa M en m op afstand $r > 0$ trekken elkaar aan met krachten ter grootte van GMm/r^2, waarbij G een universele constante is.*

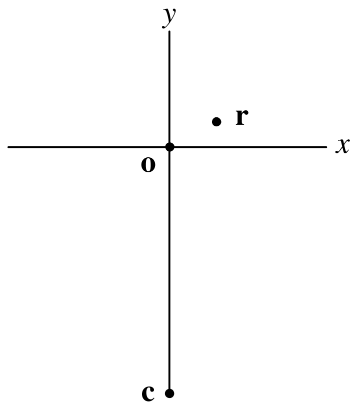
[illegible] $1/r^2$ [illegible] G [illegible] G [illegible] $N \cdot m^2/kg^2$, [illegible] N [illegible] $N = kg \cdot m/s^2$. [illegible] 1798, [illegible] G [illegible] G [illegible]

Stelling [illegible].1. *Het zwaartekrachtveld voor een projectiel met massa m aan het aardoppervlak wordt in de gebruikelijke vlakke coördinaten gegeven door $\mathbf{F}(x, y) = m\mathbf{g} = (0, -mg)$, met $g = GM/R^2$.*

Hierbij is $M = 5{,}97[illegible] \cdot [illegible]0^{24}$ kg de massa van de Aarde en $R = [illegible],37[illegible] \cdot [illegible]0^{[illegible]}$ m de straal van de Aarde.

Bewijs. [illegible] $\mathbf{o}$ [illegible] $\mathbf{o}$ [illegible] $\mathbf{c}$ [illegible] $\mathbf{o}$ [illegible] $\mathbf{r}$ [illegible] $\mathbf{o}$. [illegible] $|\mathbf{o} - \mathbf{c}|$ [illegible] R [illegible]

[illegible] $1/r^2$ [illegible] M [illegible] $\mathbf{c}$.



[illegible] $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{c})$ [illegible] λ, [illegible] $|\mathbf{F}(\mathbf{r})| = |\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{c})| = \dfrac{GMm}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|^2}$.

[illegible] $\mathbf{r}-\mathbf{c} \approx \mathbf{o}-\mathbf{c} = (0,R)$ en [illegible] $|\mathbf{r}-\mathbf{c}| \approx |\mathbf{o}-\mathbf{c}| = R$.

[illegible] $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\lambda(0,R)$ en dat $\lambda R = \dfrac{GMm}{R^2}$, [illegible] $\lambda = \dfrac{GMm}{R^3}$. [illegible] $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\dfrac{GMm}{R^3}(0,R) = m\left(0, -\dfrac{GM}{R^2}\right)$.

dat [illegible] $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}$, [illegible] dat $\mathbf{g} = (0, -\dfrac{GM}{R^2})$ en $g = |\mathbf{g}| = \dfrac{GM}{R^2}$. □

[illegible]

Opgave [illegible].1. *Voor een projectiel met massa m op Aarde heeft het zwaartekrachtveld* $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ *voor de bewegingsvergelijking* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ *als oplossingen bewegingen met* $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) = \mathbf{g}$.

Laat zien dat deze oplossingen van de vorm $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{g}$ *zijn, voor zekere beginpositie* $\mathbf{u}$ *en beginsnelheid* $\mathbf{v}$ *in* $\mathbb{R}^3$.

Opgave [illegible]. *Voor een fysische grootheid P noteren we met [P] de eenheden waarin P wordt uitgedrukt. Bijvoorbeeld [r] = m, [v] = m/s, [a] = m/s^2 en [F] = N = kg · m/s^2. Controleer met behulp van de Gravitatiewet van Newton dat [G] = N · m^2/kg^2.*

Opgave [illegible]. *De universele gravitatieconstante G en de constanten g, M en R voor de Aarde zijn te vinden in deze paragraaf.*

a. *Controleer de relatie* $g = GM/R^2$ *met de getallen in deze paragraaf.*
b. *Leg uit dat de soortelijke massa van de Aarde gelijk is aan* $3M/4\pi R^3$.
c. *Bepaal de soortelijke massa van de Aarde.*
d. *Had je dit getal verwacht, en welke conclusie kun je hieraan verbinden?*

De wetten van Kepler

aa a s, daa s nde.
Johannes Kepler (57 - 30)

In deze a ag aa z en de d env an a den ons z aa be en s de s a v an een ane en een zon env onde s en da de assa m v an de ane v aa oosbaa s en o z v an de assa M v an de zon. be en da de baan v an de a- ne o d be oed doo de zon, aa da de baan v an de zon n o d be oed doo de ane da de zon gen v e sme ng onde v nd s ze n s be eeg een a g n g. ogen v onde s en da de zon s s aa o da een assens se nnen ezen da be eeg de zon. ezen d assens se zo, da de zon n de oo s ong g a ge eme ge a, aa b de assa v an de ane n v aa oosbaa s en o z v an de assa v an de zon, o d n de a ag aa 8 be ande d.

e gaan v an da de g e assa v an een bo sy e s ob ec z n e dde n be nd a d v oo bo sy e s e ob ec en nde daad geoo oo d s, s een d e s e ng d e a doo on o e nd ge ze e d be ezen. een ode n ana y s be s e d een ee a doo de anse s nd ge La ace ge onden. ogen d s zo de zon a s de ane o v a en a s n dee es.

v e sme ng a d de zon o en o de ane anne deze z n os e $\mathbf{r}$ be nd s ge aan $-\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$, G de nv e se g a econ- s an e. z aa e a v e d da de ane onde v nd v an de zon o d d s geg en doo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$. oo e ge a s v en e $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$, aa b k een os e cons an e s.

Opgave .1. Leg da de eng e v an deze $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en ed g s e $/r^2$.

e noe en d z aa e a v e d daa o e een $/r^2$-z aa e a v e d.

Definitie. *Een krachtveld* $\mathbf{F}$ *heet* ***centraal*** *als* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{r}$ *proportioneel zijn.*

Opgave 7.2. *Leg uit dat een zwaartekrachtveld* $\mathbf{F}$ *gedefinieerd door* $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\dfrac{k}{r^3}\mathbf{r}$ *een centraal krachtveld is.*

Definitie. *Beschouw een deeltje met massa m, dat zich bevindt op positie* $\mathbf{r}$ *en beweegt met snelheid* $\mathbf{v}$. *De* ***impuls*** $\mathbf{p}$ *van dit deeltje wordt gedefinieerd door* $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. *Het* ***impulsmoment*** $\mathbf{L}$ *van dit deeltje wordt gedefinieerd door* $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

Een deeltje in een krachtveld beweegt langs een kromme $\mathbf{r}(t)$. De snelheid wordt dan gegeven door $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ en de versnelling door $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$. De kracht werkend op het deeltje is [illegible] gegeven door $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$. Ook de impuls en het impulsmoment zijn [illegible] en gegeven door respectievelijk $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)$ en $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$.

Opgave 7.4. *Bewijs dat voor een puntdeeltje in een krachtveld* $\mathbf{F}$ *geldt:*

a. $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}(t)$

b. $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t)$

c. $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{o}$ *als* $\mathbf{F}$ *een centraal krachtveld is.*

Stelling 7.1. *In een centraal krachtveld is het impulsmoment* $\mathbf{L}(t)$ *een constante vector. Het puntdeeltje beweegt in het vlak door de oorsprong loodrecht op het impulsmoment.*

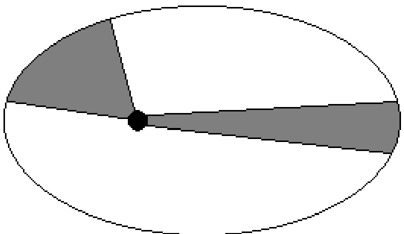
Bewijs. De eerste bewering volgt direct uit opgave 7.3 onderdeel c. De tweede bewering volgt uit het feit dat $\mathbf{r}(t)$ loodrecht staat op $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$. □

Het wordt tijd om de notatie wat bondiger te maken. Natuurlijk moet je wel degelijk beseffen dat al deze grootheden van de tijd afhangen, maar het is niet echt noodzakelijk om dit steeds in de notatie op te nemen. We schrijven daarom in het vervolg gewoon **r**, **v**, **a**, **p**, **F** en **L** in plaats van $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ en $\mathbf{L}(t)$. $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$ wordt $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}(t)$ wordt $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ en $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t)$ wordt $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Dit komt de leesbaarheid van de berekeningen ten goede.

Stelling [illegible]. *Een puntdeeltje met massa m beweegt in een centraal krachtveld in een vlak door de oorsprong, loodrecht op het impulsmoment* **L** *en zodanig dat de voerstraal in gelijke tijden gelijke perken doorloopt. De oppervlakte van het door de voerstraal per tijdseenheid uitgeveegde perk is gelijk aan L/2m.*

Bewijs. [illegible] ng 7. [illegible] doo de oo s ong [illegible] **F**(**r**) [illegible] **r** [illegible] $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{a}$, [illegible] **a** [illegible] **r** [illegible] ng 4. [illegible] $n/2$, [illegible] $\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$. [illegible] $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{n}$ [illegible] $L = mn$. [illegible] $n/2 = (L/m)/2 = L/2m$. □

Stelling [illegible] (De Perkenwet)
Een puntdeeltje beweegt in een $1/r^2$-zwaartekrachtveld in een vlak door de oorsprong, zodanig dat de voerstraal in gelijke tijden gelijke perken doorloopt.



Bewijs. [illegible] ng 7.2 [illegible] $/r^2$-[illegible] (z[illegible] 7.2). □

[illegible] cons[illegible] **behouden grootheid**. [illegible] $/r^2$-[illegible] **L** [illegible] $/r^2$-[illegible] $/r^2$-[illegible] 0 [illegible] **o** [illegible]

Opgave 7.4. Laat zien dat:

a. $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^{\cdot} = v^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$

b. $(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^{\cdot} = \mathbf{r}\times\mathbf{a}$

c. $(r^2)^{\cdot} = 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})$ (hint: schrijf $r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$)

d. $(r)^{\cdot} = \dfrac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r}$ (hint: schrijf $r = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{1}{2}}$ en gebruik de kettingregel)

e. $\left(\dfrac{1}{r}\right)^{\cdot} = -\dfrac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r^3}$ (hint: schrijf $\dfrac{1}{r} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}}$ en gebruik de kettingregel)

f. $(v^4)^{\cdot} = 4v^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$ (hint: schrijf $v^4 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^2$ en gebruik de kettingregel)

g. $(rv)^{\cdot} = \dfrac{v}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) + \dfrac{r}{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$ (hint: gebruik de (gewone) productregel)

Opgave 7.5. Differentieer $r(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}$ zonder gebruik van inproducten en ga na dat het resultaat overeenkomt met opgave 7.4d.

Vanaf dit moment zullen we ons in deze paragraaf beperken tot een $1/r^2$-zwaartekrachtveld.

Definitie. *In een $1/r^2$-zwaartekrachtveld wordt de* ***totale energie*** *H gedefinieerd door $H = \frac{1}{2}mv^2 - \dfrac{k}{r}$. De totale energie is de som van de* ***kinetische energie*** *$\frac{1}{2}mv^2$ en de* ***potentiële energie*** *$-\dfrac{k}{r}$.*

Opgave 7.6. Laat zien dat $H = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{r}$.

Stelling 7.7. *De totale energie H is een behouden grootheid.*

Bewijs. We schrijven eerst H m.b.v. inproducten. Uit opgave 7.5 volgt dat $H = \dfrac{1}{2m}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}) - \dfrac{k}{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{1}{2}}}$. Vervolgens gaan we na dat $\dot{H} = 0$.

$$\dot{H} = \frac{1}{m}(\dot{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{3}{2}}}\cdot 2(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{m}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{p}) + \frac{k}{r^3}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\left(-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\right)\cdot(m\mathbf{v})\right) + \frac{k}{r^3}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) + \frac{k}{r^3}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) = 0\,. \qquad \square$$

Opgave 4.4. Besch o een dee e e assa m da zich bev nd o af- s and r_0 v an de oo s ong e beg nsm e d 0.
a. Besch de be eg ngv an e dee e.
b. de snel e d o af s and r v an de oo s ong n k, r, r_0 en m.

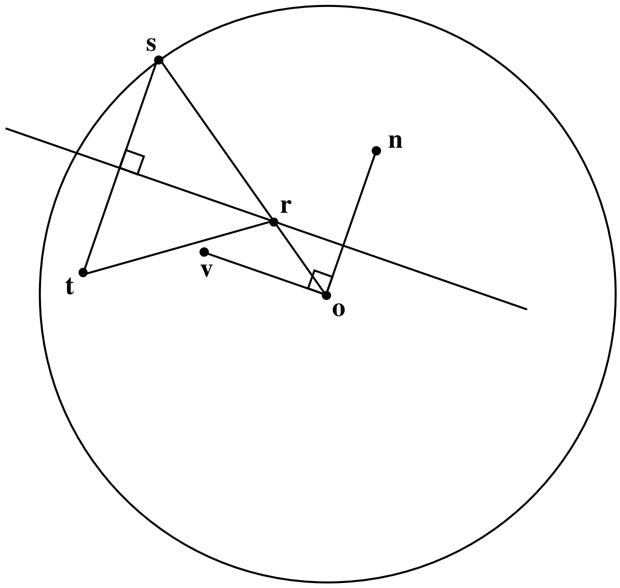
e be env an n ob ec en e nega e o a e ene g e, d. .z. $H < 0$. oo z e ob ec en s de be eg ng be e o eh c e sch , zoa s b dev o gende s e ng.

Stelling 4.5. *Als de totale energie $H < 0$, dan vindt de beweging plaats in het vlak door* **o** *loodrecht op het impulsmoment* **L** *begrensd tot het binnengebied van de cirkel* **C** *met middelpunt* **o** *en straal $-k/H$.*

Bewijs. Er geldt: $H = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \geq -\frac{k}{r}$. *Dus* $-H \leq \frac{k}{r}$. *Dus* $-Hr \leq k$. *Dus* $r \leq \frac{k}{-H} = -\frac{k}{H}$. *Merk op dat $-k/H > 0$, omdat $k > 0$ en $H < 0$.* $\square$

e c e *C* aa b nnen de anee z ch , ge e o de o a e ene g e, oe be nden o d oo e dev ac e genoe d. ev e a ngv oo de naa v ac e ” g n e e da een s s and ob ec da z ch o deze c e be nd dens z nv a naa de zon de anee baan sn d e ec es deze de snel e d aa ee de anee da n asse

Be n e v o gende aa ev an e v a ood ech o de s o en- v ec o **L**. ev ec o **s** s e v oe n v an **r** o dev ac e *C*. ev ec o **t** s e s ege bee dv an s n de n doo **r** e ch ngs ec o **v**. ev ec o $\mathbf{n} = \mathbf{p}\times\mathbf{L}$ g n e v a en s aa ood ech o **v**.



De tes aren van de volgende drie volgt en omvan as b be s van stelling 7.6.

Opgave 7.8. Laat zien dat $\mathbf{s} = -\dfrac{k}{rH}\mathbf{r}$.

Opgave 7.9. Ga na dat in aa de ng van de vector **n** n ree ens ng s de gg ng van de vector en **r** en **v**.

Opgave 7.10. Laat zien dat $p^2 = 2m(H + \dfrac{k}{r})$.

De Runge-Lenz vector **K** o d gedef n ee d door: $\mathbf{K} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \dfrac{km}{r}\mathbf{r}$.

Opgave 7.11. Laat zien dat $\mathbf{K} \cdot \mathbf{L} = 0$.

De Runge-Lenz vector **K** g d s n e v a v an be eg ngv an e n dee e, me a s de vector **t**. De volgende stelling ee ons dat de vector en **t** en **K** zelfs o o omee z n.

Stelling [illegible]. $\mathbf{t} = \frac{1}{mH}\mathbf{K}$

Bewijs. Volgens stelling 2.4 is $\mathbf{t} = \mathbf{s} - \frac{2((\mathbf{s}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n})}{n^2}\mathbf{n}$.

We berekenen eerst de teller: $(\mathbf{s}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = (-\frac{k}{rH}\mathbf{r}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = (-\frac{k}{rH}-1)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) =$

$-(1+\frac{k}{rH})(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L})) = -(1+\frac{k}{rH})((\mathbf{r}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{L}) = -(1+\frac{k}{rH})(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}) =$

$= -(1+\frac{k}{rH})\cdot L^2 = -(H+\frac{k}{r})\cdot\frac{L^2}{H}$.

En daarna de noemer: $n^2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = p^2L^2 = 2m(H+\frac{k}{r})\cdot L^2$.

Met het oog dat $\mathbf{p}\perp\mathbf{L}$ volgt dat $(\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = p^2L^2\cdot\sin^2(\frac{\pi}{2}) = p^2L^2$.

Dus $\mathbf{t} = -\frac{k}{rH}\mathbf{r} + \frac{1}{mH}\mathbf{n} = \frac{1}{mH}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{km}{r}\mathbf{r}) = \frac{1}{mH}\mathbf{K}$. □

Het is nog meer aan de hand, zoals blijkt uit de volgende twee stellingen.

Stelling [illegible]. *De Runge-Lenz-vector **K** is een behouden grootheid.*

Bewijs: We gaan na dat $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{o}$.

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{L} + \mathbf{p}\times\dot{\mathbf{L}} - \frac{km}{r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{km(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$\mathbf{F}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) + \mathbf{p}\times\mathbf{o} - \frac{km}{r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{km(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} - \frac{k}{r}\mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$(-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r} - (-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} - \frac{k}{r}\mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$-\frac{k}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r} + \frac{k}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} - \frac{k}{r}\mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$-\frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r}+\frac{k}{r}\mathbf{p}-\frac{k}{r}\mathbf{p}+\frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r}=\mathbf{o}\,. \qquad \square$$

Stelling/ . . *De vector **t** is ook een behouden grootheid.*

Bewijs. Van ege es ec e Ste ng 7.4 en 7.7 z n de o a e ene g e *H* en de nge-Lenzv ec o **K** be o den g oo eden. e assa *m* s oo con-s an anv o g Ste ng 7. da **t** oo een be o den g oo e d s. □

e e da de v ec o **t** een be o den g oo e d s, e g o e g o gen.

Stelling / .9. (De Ellipsbanenwet) *Als een puntdeeltje beweegt in een zwaartekrachtveld van de vorm* $\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$ *met een totale energie H < 0, dan beweegt het langs een ellips met brandpunten **o** en **t** met lange as gelijk aan –k/H.*

Bewijs: e so v an de a s anden v an **r** o **o** en **t** s cons an . Na e :
$|\mathbf{r}-\mathbf{o}|+|\mathbf{t}-\mathbf{r}|=|\mathbf{r}-\mathbf{o}|+|\mathbf{s}-\mathbf{r}|=|\mathbf{s}-\mathbf{o}|=-\frac{k}{H}$, an g o e ns e e nd n en **o** en **s**. e eng e v an de ange as v an de e s s ge aan so v an de a s anden o de b and n en, d s *–k/H*. □

Opgave/ .1 . a s de s aa v an de v a c e b een c e be eg ng

e de e s e e e e en be ezen ebben, nmen e e nog een n a e en e d de de e e a e den. n a ag a 5 (o ga e 5.2) ebben e gez en da een e s e ange as 2*a* en o e as 2*b* e b and n en e o a s and 2*c* v an e aa , aa b $b^2=a^2-c^2$.

Opgave/ .1 . een e s s een n een ng ge e e c e . Le e a da de o e v a e v an een e s e ange as 2*a* en o e as 2*b* ge s aan πab.

Vo gens s e ng 7.2 o d de e s doo o en e cons an e " e ensne-e d" $L/2m$, aa b *L* de eng e v an e s o en s. Noe en e de o oo d v an e n de e e *T*, dan s de o e v a e v an de e s ge aan de o ev a ev an e e da n d T o d doo o en, na e $LT/2m$. o ga e v o g n da $LT/2m = \pi ab$.

e be sv an de de de e ond e gen, oe en e zo e a a s b d en n be ende g oo eden. s e ng 7.9 v o g da de eng ev an de ange as v an de e sbaan v an e n dee e ge s aan $-k/H$. ge $2a = -k/H$ en d s $4a^2 = k^2/H^2$. oo b zo e d en e a ee v oe en n de aa de. e e ze s a sv o g e gaan ee s c d en n be ende g oo eden. A s d s ge dan z n e zo goed a s aa , o da $b^2 = a^2 - c^2$. s $2c$ de a s and ssen de ee b and n en en d e s oo ge aan de eng ev an de be o den v ec o $\mathbf{t} = \frac{}{mH}\mathbf{K}$. s oe en e ee s de eng ev an de nge-Lenz v ec o be e emen. s een n e e en a , zoa s b e be sv an de v o gende s e ng.

Stelling .10. *Voor de lengte K van de Runge-Lenz-vector geldt:*
$K^2 = 2mHL^2 + k^2m^2$.

Bewijs. $K^2 = \mathbf{K}\cdot\mathbf{K} = \left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{km}{r}\mathbf{r}\right)\cdot\left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{km}{r}\mathbf{r}\right) =$

$$(\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - (\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot\left(\frac{km}{r}\mathbf{r}\right) - \left(\frac{km}{r}\mathbf{r}\right)\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) + \left(\frac{km}{r}\mathbf{r}\right)\cdot\left(\frac{km}{r}\mathbf{r}\right) =$$

$$p^2L^2 - \frac{2km}{r}(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L})) + \frac{k^2m^2}{r^2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) =$$

$$p^2L^2 - \frac{2km}{r}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{L} + \frac{k^2m^2r^2}{r^2} =$$

$$\left(2mH + \frac{2km}{r}\right)L^2 - \frac{2km}{r}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}) + k^2m^2 =$$

$$2mHL^2 + \frac{2km}{r}L^2 - \frac{2km}{r}L^2 + k^2m^2 =$$

$$2mHL^2 + k^2m^2.$$

NB da $\mathbf{p}\perp\mathbf{L}$, ge d da $(\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = p^2L^2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = p^2L^2$. □

an e oogs en beg nnen:

Opgave/ .1 . Laa z en da $4c^2 = t^2 = \frac{2L^2}{mH} + \frac{k^2}{H^2}$.

Opgave/ .15. Laa z en da $4b^2 = 4a^2 - 4c^2 = -\frac{2L^2}{mH}$.

Opgave/ .1 . Le d $\frac{LT}{2m} = \pi ab$ a da $\frac{T^2}{a^2} = \frac{4\pi^2 b^2 m^2}{L^2}$.

Opgave/ .1/ . Le d o ga e 7. 5 en 7. a da $\frac{T^2}{a^2} = -\frac{2\pi^2 m}{H}$.

Opgave/ .1 . Le d $2a = -k/H$ en o ga e 7. 7 a da $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$.

e nmen n de de de e e be zen:

Stelling/ .11. (De Harmonische wet) *Voor een bewegend puntdeeltje is de verhouding T^2/a^3 constant. Hierbij is T de omlooptijd en a de lengte van de halve lange as van de ellipsbaan van het deeltje.*

Bewijs. e g end naa e beg n v an deze a ag a z en e da $k = GMm$. en e d n n de o ev an o ga e 7. 8, dan gen e $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$. e e d s cons an o da zo e de nv e se e g a- e cons an e a s de assa an e cen a e ob ec (een zon), cons an s.

Opgave/ .19. Leg da e n dee es e deze de assa en deze de mega e o a e e g e deze de o oo d ebben.

Opgave/ .20. on o e e de abe o b adz de 7 da de v o d ng T^2/a^3 v oo de ac a e en n ons onnes e se nagenoeg cons an s. e v oo e ge a T n a en en a n A A s aa v oo as ono sc e e e d, de ge d de de a s and v an de Aa de o de on (A ≈ 50 oen).

Opgave/ .21. e o e y an a ey be eg n een angge e e sbaan o de on e een o oo dv an ong e 75,3 aa . oon aan da de ax a e a s and v an de o e o de on oogs ens 3 A an z n.

Het Keplerprobleem

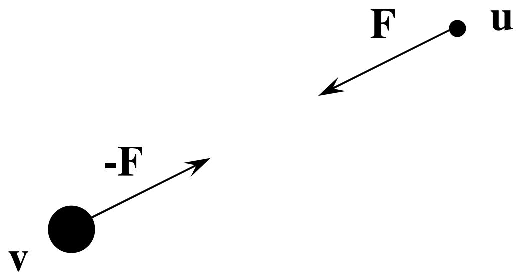
Wiskunde is onredelijk effectief in de natuurwetenschappen.
Eugene Wigner (1902-1995)

In deze paragraaf zullen we het tweelichamenprobleem, ook wel het Keplerprobleem genaamd, oplossen. We beschouwen daartoe twee puntdeeltjes met respectievelijke massa's m en M, die bewegen in de ruimte onder invloed van hun wederzijdse gravitatie. Denk hierbij aan een planeet (met massa m) en een zon (met massa M), waarbij de massa van de planeet veel kleiner is dan de massa van de zon. In dat geval zal de zon nauwelijks bewegen, ook al ondervindt hij dezelfde kracht van de planeet. Hoewel beide deeltjes een even grote kracht ondervinden, zal de versnelling van de zon veel kleiner zijn dan die van de planeet vanwege het grote verschil in massa.

We zullen in deze paragraaf steeds veronderstellen dat het systeem aan een $1/r^2$-zwaartekracht voldoet. Voor het gemak zullen we voortaan spreken van de kleine puntmassa (met massa m) en de grote puntmassa (met massa M). De positie van de kleine puntmassa noemen we $\mathbf{u}$ en de positie van de grote puntmassa noemen we $\mathbf{v}$. Volgens de zwaartekrachtwet trekken de twee puntmassa's elkaar aan met een kracht ter grootte van k/r^2, waarbij $k = GMm$ met G de universele gravitatieconstante.

Stelling .1. De zwaartekracht $\mathbf{F}$ die de kleine puntmassa in positie $\mathbf{u}$ ondervindt, is gelijk aan $-\frac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ en de zwaartekracht die de grote puntmassa in positie $\mathbf{v}$ ondervindt, is gelijk aan $-\mathbf{F} = \frac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

Bewijs. Het is eenvoudig te concluderen dat de genoemde krachten de juiste richting en de juiste grootte hebben. Zie hiervoor ook figuur 8.1. □

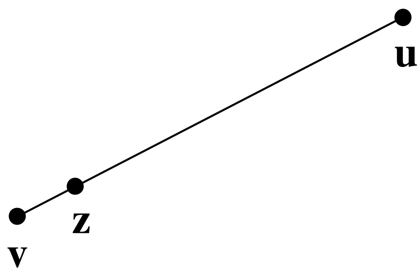


Opgave .1. Laa zen da de g oo e n de ngv an de z aa e ac - en d e de e n assa's v o gens s e ng 8. ondev nden, n o e een- s e ng z n e de z aa e ac o e.

o gens ons ede e v o doe de v e sne ng $\mathbf{\ddot{u}}(t)$ v an de e me n assa aan de be eg ngs e ge ng $\mathbf{F} = m\mathbf{\ddot{u}}(t)$. s e ng 8. v o g n da $\mathbf{\ddot{u}}(t) = -\dfrac{k/m}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = -\dfrac{GM}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$. deze de zev nden

dev e sne ngv an de g o e n assa: $\mathbf{\ddot{v}}(t) = \dfrac{Gm}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

e z aa e n $\mathbf{z}$ v an de n assa's g o een zodan ge os e o e ns ssen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ da $|\mathbf{u}-\mathbf{z}| : |\mathbf{v}-\mathbf{z}| = M : m$. e z aa e n g e d s b de n assa e de g oo s e assa, zo d e e s.



Opgave . Maa een aa ev an e n assa's en n z aa e n aa b de assa o d ng $M : m$ ge s aan $5:2$.

Het zwaartepunt van twee puntmassa's blijkt in fysisch opzicht een bijzonder punt te zijn, zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 8.2. *Het zwaartepunt* $\mathbf{z}$ *van twee puntmassa's is in rust of beweegt eenparig rechtlijnig.*

Bewijs. We zullen aantonen dat het zwaartepunt geen versnelling ondervindt, d.w.z. $\ddot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{o}$. [illegible] (zie [illegible] 4) zegt dan dat het zwaartepunt in rust is of een eenparig rechtlijnige beweging uitvoert. De positie van het zwaartepunt wordt gegeven door $\mathbf{z}=\dfrac{m}{M+m}\mathbf{u}+\dfrac{M}{M+m}\mathbf{v}$. Als we deze uitdrukking twee maal differentiëren naar de tijd, krijgen we:

$$\ddot{\mathbf{z}}=\frac{m}{M+m}\ddot{\mathbf{u}}+\frac{M}{M+m}\ddot{\mathbf{v}}=\frac{}{M+m}\left(m\ddot{\mathbf{u}}+M\ddot{\mathbf{v}}\right)=\frac{}{M+m}\left(\mathbf{F}+-\mathbf{F}\right)=\mathbf{o}. \qquad \square$$

Opgave [illegible]. Leg uit dat de snelheid van het zwaartepunt *van twee puntmassa's* een behouden grootheid is.

We gaan nu kijken naar de positie van de kleine puntmassa gezien vanuit de grote puntmassa, oftewel de positie van $\mathbf{u}$ gezien vanuit $\mathbf{v}$. Deze positie noemen we $\mathbf{r}$. Dus $\mathbf{r}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$. De bewegingsvergelijking van $\mathbf{r}$ voldoet aan de volgende verrassend eenvoudige vergelijking.

Stelling [illegible]. Voor $\mathbf{r}$ geldt de bewegingsvergelijking $\mu\ddot{\mathbf{r}}=-\dfrac{k}{r^3}\mathbf{r}$, waarbij $\mu=\dfrac{Mm}{M+m}$ de zogenaamde gereduceerde massa is.

Bewijs. Uit $\ddot{\mathbf{z}}=\mathbf{o}$ (stelling 8.2) volgt dat $\mathbf{F}=m\ddot{\mathbf{u}}=m(\ddot{\mathbf{u}}-\ddot{\mathbf{z}})=m(\mathbf{u}-\mathbf{z})^{\cdot\cdot}$.
Twee maal differentiëren van de uitdrukking $\mathbf{u}-\mathbf{z}=\dfrac{M}{M+m}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ geeft
$(\mathbf{u}-\mathbf{z})^{\cdot\cdot}=\dfrac{M}{M+m}(\mathbf{u}-\mathbf{v})^{\cdot\cdot}=\dfrac{M}{M+m}\ddot{\mathbf{r}}$. Dus $\mathbf{F}=m(\mathbf{u}-\mathbf{z})^{\cdot\cdot}=\dfrac{Mm}{M+m}\ddot{\mathbf{r}}=\mu\ddot{\mathbf{r}}$.
[illegible] dat $\mathbf{F}=-\dfrac{k}{r^3}\mathbf{r}$, vinden we dat $\mu\ddot{\mathbf{r}}=-\dfrac{k}{r^3}\mathbf{r}$. $\square$

ng 8.3 zeg da **r** oo v o doe aan een be eg ngs e ge ngv an de v o d e n de v o ge a ag aa s bes o en. be e en da v oo $\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ de d e e e e en ge den. s de baanv an **r** s een e s (ee - s e e) en de be eg ngv an **r** v o doe aan de e en e (e ede e). e de de e d e zeg a e v e band s ssen de o oo d en de eng ev an de av e ange asv an de baan, gee e v o gende es aa

Stelling . . *Tussen de omlooptijd T en de lengte van de halve lange as a van de ellipsbaan van* **r** bes aa e v o gendev e band: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m)}$.

Bewijs. oo e be s me en e o ga e 7. 8 a s gangs n . o gens deze o ga e s $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2\mu}{k}$. bs ev an $k = GMm$ en $\mu = \dfrac{Mm}{M+m}$ gee e v e angde es aa . □

e a on s e e (s e ng 7.) an o den gez en a s een e ge a (oo $m \to 0$) v an s e ng 8.4.

Opgave . . e s e s e s e enbee d o e ond s na de on de e de s e s e aan de e e . n e e e d s s een d bbe s e , bes aande een zee e de e s e (s A) en een e d e g (s B). e e d e g sv oo ons onz c baa , o da deze doo de e de e s e o d o e s aa d. e assav an s A s 2,02 onne assa's en de assav an s B s 0,99 onne assa's. e assav an de on s ,99 · 0^30 g . s B d aa o s A n een e sbaan e een e odev an 50, aa . Laa e be v an s e ng 8.4 z en da de eng ev an de av e ange asv an d e e sbaan onge ee 20 A s (A s onge ee 50 oen).

9 Tabellen

[illegible]
Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926)

In deze bijlage staan [illegible] tabellen [illegible]. [illegible]

Planeet	Massa	Diameter	a	e	T	P
[illegible]	10^{24} kg	km	AE		d, a	d, h, m, s
Mercurius	0,33	4878	0,39	0,206	88 d	59 d
Venus	4,86	12102	0,72	0,007	225 d	-243 d
Aarde	5,97	12756	1,00	0,017	365,26 d	23h 56m [illegible] s
Mars	0,64	6792	1,52	0,093	687 d	24h 37m 23 s
Jupiter	1899	[illegible]	5,20	0,048	11,86 a	9h 50m 30 s
Saturnus	568,5	120660	9,58	0,052	29,46 a	10h 14
Uranus	86,8	50800	19,3	0,050	84,01 a	17h 42
Neptunus	102,4	48600	30,20	0,004	164,79 a	16h 24

a is de [illegible] in AE
e is de excentriciteit (e = c/a, [illegible])
T is de omlooptijd [illegible] in dagen (d) of jaren (a)
P is de [illegible] in dagen (d), [illegible] (h), minuten (m) en seconden (s)

De planeten Mercurius, Venus, Mars, [illegible] en Saturnus zijn [illegible] met het blote oog zichtbaar [illegible]. [illegible] Uranus [illegible] 1781 [illegible]. [illegible] Neptunus [illegible] 1846 [illegible]. [illegible] 1930 [illegible] 40 AE [illegible] 1949 [illegible].

95 b cee de de Nede andse as onoo Ge a d e een be ang e z s a e e on s aanv an ons onnes e se , e daa n e dee da z n e b engeb edv an ons onnes e se een e e ngv an ane o- den zo oe en b nden. b z nde daad een ngv an e ne z ge o a esv an a e e b en de baanv an e n s e b nden. eze ng o d de e go de genoe d en b nd z o 0 A o 50 A v an de on. Aan e beg nv an de eenen n gs ee e den n a e - o ne e ob ec en n de e go de aa geno en. e be ang s e daav an s aan n dev o gende abe .

Dwergplaneet	Diameter	Jaar	a	e	T
e n e d			A		a
o	2300	930	39,54	0,249	248,
a na	900	2000	43, 3	0,05	283,2
x on	800	200	39,68	0,242	250,0
Q aoa	300	2002	43,6	0,034	286,0
edna	500	2003	525,86	0,855	2050
c s	00	2004	39,42	0,225	247,5
s	2400	2005	67,67	0,442	557

3 aa s e aa v an on de ng
a s de eng ev an de av e ange as n A
e s de excen c e (e = c/a, aa b c de av e b and n sa s and s)
T s de o oo d o de on n a en (a)

e ob ec en n de e go de o den d e g ane en q sd e gen ge- noe d. T dens een cong esv an de n e na ona e As ono sc e e n aag n 2006 e d v oe g ged sc ssee d en e nde ges e d e een goede de n ev an e beg anee. e es aa as da de ob ec en n de e go de s e s d e g ane en e den. ns onnes e se e ac ane en en daa ee bas a. A s g o g daav an oes o z n s a s v an anee n e e en. A s e s e o de onde e d de naa no nge- v oe dv oo ob ec en n de e go de d e een baan esonan e e - n s ebben n eenv e o d ngv an 3:2 (da zeggen da n o oo d onge ee ,5 aa zo g oo s a s dev an e n s). aas o ze z n x on en c sv oo bee denv an no's. s s de G e se god nv an de s e e nne ng aan de s d d e on s ond e de s a sv an o a s anee e d e g ane Sedna s een c e s obec n de e go de . e baan s zee excen sc , en de a s and v an e a e [8] o de on bed aag aa e s 972 A . Sedna e en s ec s nmen aa e en n deze sd e g z c e e e [9] bev nd o zo n 7 A v an de on.

e ees e ane en en oo so ge d e g ane en n ons onnes e se ebben anen, oo e sa e e en genaa d, een e d e a o s g sv an e e . e be ends e sa e e en z n n dev o gende abe ev nden.

Planeet	Satelliet	Diameter	Jaar	R	T
e d					d
Aa de	Maan	347		3,84· 0^5	27,32
Ma s	obos	22,2	877	9,38· 0^3	0,32
	e os	2,	877	2,35· 0^4	,2
e	o	3 0	0	4,22· 0^5	,7 9
	o a	3 20	0	,7 · 0^5	3,55
	any edes	52 0	0	,07· 0	7, 55
	a s o	4820	0	,88· 0	,9
Sa n s	ea	530	72	5,27· 0^5	4,52
	T an	5 50	55	,22· 0	5,95
	a e s	470	7	3,5 · 0	79,32
an s	T an a	580	787	4,3 · 0^5	8,70
	be on	520	787	5,84· 0^5	3,4
e n s	T on	27 0	84	3,55· 0^5	-5,88
o	a on	2 0	978	,9 · 0^4	,39
s	ysno a	50	2005	3,74· 0^4	5,77

aa s e aa v an on de ng
s de ge dde de a s and v an de sa e o e dde n v an de ane n
T s de o oo dv an de sa e o de ane h dagen (d)

T on d aa e og ade o z n as (d. .z. egenges e d aan de d aa c ng v an de ane e n s). e assa v an de sa e a on v an de sd e g o bed aag zo'n 2% v an de assa v an o, zoda en ee de an s e en e een d bbe ane o de.

[8] e v e s e n n de baan v an een ane o de zon
[9] e d c s b z nde n n de baan v an een ane o de zon

De wetten van Kepler   Antwoorden

1 Vectoren in de ruimte

.2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = ((u\ ,u_2,u_3)+(v\ ,v_2,v_3))+(w\ ,w_2,w_3) =$
$(u\ +v\ ,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3)+(w\ ,\ w_2,\ w_3) =$
$((u\ +v\ )+w\ ,\ (u_2+v_2)+w_2,\ (u_3+v_3)+w_3) =$
$(u\ +(v\ +w\ ),\ u_2+(v_2+w_2),\ u_3+(v_3+w_3)) =$
$(u\ ,u_2,u_3)+(v\ +w\ ,\ v_2+w_2,\ v_3+w_3) =$
$(u\ ,u_2,u_3)+((v\ ,v_2,v_3)+(w\ ,w_2,w_3)) = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

.3. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda((u\ ,u_2,u_3)+(v\ ,v_2,v_3)) =$
$\lambda(u\ +v\ ,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3) =$
$(\lambda(u\ +v\ ),\lambda(u_2+v_2),\lambda(u_3+v_3)) =$
$(\lambda u\ +\lambda v\ ,\lambda u_2+\lambda v_2,\lambda u_3+\lambda v_3) =$
$(\lambda u\ ,\lambda u_2,\lambda u_3)+(\lambda v\ ,\lambda v_2,\lambda v_3) =$
$\lambda(u\ ,u_2,u_3)+\lambda(v\ ,v_2,v_3) = \lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

.5 c. e n en ggen (b aen b) o dezefde aas.
d. e n en ggen n n e o dezefde aas.
e. $\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu} =$
f. $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}+(\ -\boldsymbol{\lambda})\mathbf{b} = \mathbf{b}+\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$
g. naa de d ng $\mathbf{b}+\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$. e os ev an $\mathbf{b}$ ang n e v an de aasv an de oo s ong af en oo de v ec o $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ ang daa n e v anaf.

. a. $\mathbf{p} = \mathbf{a}+\frac{}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{}{2}\mathbf{a}+\frac{}{2}\mathbf{b}$
$\mathbf{q} = \mathbf{b}+\frac{}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \frac{}{2}\mathbf{b}+\frac{}{2}\mathbf{c}$
$\mathbf{r} = \mathbf{a}+\frac{}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \frac{}{2}\mathbf{a}+\frac{}{2}\mathbf{c}$
b. $\mathbf{a} = \mathbf{p}+(\mathbf{r}-\mathbf{q}) = \mathbf{p}-\mathbf{q}+\mathbf{r}$
$\mathbf{b} = \mathbf{p}+(\mathbf{q}-\mathbf{r}) = \mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{r}$
$\mathbf{c} = \mathbf{r}+(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}$
c. en n o de zw aa e n doo **a** sv an de v o : $\mathbf{a}+\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{q}-\mathbf{a}) =$

$\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}) = (\; - \lambda)\mathbf{a} + \frac{}{2}\lambda\mathbf{b} + \frac{}{2}\lambda\mathbf{c}$. Voo $\lambda = \frac{2}{3}$ s d n

$\mathbf{z} = \frac{}{3}\mathbf{a} + \frac{}{3}\mathbf{b} + \frac{}{3}\mathbf{c}$. s $\mathbf{z}$ g o de z aa n doo $\mathbf{a}$.

d. deze de ze a s b cv nd da $\mathbf{z}$ g o de z aa men doo $\mathbf{b}$ es ec e $\mathbf{c}$. s de d z aa men gaan doo één n na $\mathbf{z}$.

Het inwendig product

2. a. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\;4}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{\;2}$ en $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{2}$.

b. $|\mathbf{c}| = \sqrt{2\;}$, $|\mathbf{d}| = \sqrt{\;4}$ en $|\mathbf{c} - \mathbf{d}| = \sqrt{29}$.

c. $|\mathbf{e}| = \sqrt{\;3}$, $|\mathbf{f}| = \sqrt{\;}$ en $|\mathbf{e} - \mathbf{f}| = \sqrt{\;7}$.

2.2 a. v o g de ngv an y ago as.

b. v o g de geb de ngv an y ago as.

2.3 a. ech an $4 + \; 2 = 2$.

b. sc e , an $2 \; + \; 4 > 29$.

c. sc e , an $3 + \; > \; 7$.

2.4. v o g doo sc v en n coo d na env an de es a env an o g e 2.3.

2.5 a. ech an $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

b. sc e , an $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 3 > 0$.

c. sc e , an $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = \; > 0$.

2. a. : $(3,0,0) + \lambda \cdot (-3,4,3)$ en : ( ) (3,8, 2)

2.8 a. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=$
$v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)\cdot(w_1,w_2,w_3)=$
$(u_1+v_1)w_1+(u_2+v_2)w_2+(u_3+v_3)w_3=$
$u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2+u_3w_3+v_3w_3=$
$u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3+v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3=$
$(u_1,u_2,u_3)\cdot(w_1,w_2,w_3)+(v_1,v_2,v_3)\cdot(w_1,w_2,w_3)=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

c. $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=(\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=$
$(\lambda u_1)v_1+(\lambda u_2)v_2+(\lambda u_3)v_3=$
$\lambda(u_1v_1)+\lambda(u_2v_2)+\lambda(u_3v_3)=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

2.9. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(u_1,u_2,u_3)=u_1^2+u_2^2+u_3^2=|\mathbf{u}|^2$

2.10 a. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

b. $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

c. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{v}|^2$.

d. Wo gy w e ech s ee s u aen b.

2.11. 13°

2.12. 79°

2.13. $\cos\gamma=0$ precies dan als $\gamma=90°$ en
$\cos\gamma>0$ precies dan als $0°\leq\gamma<90°$ en
$\cos\gamma<0$ precies dan als $90°<\gamma\leq 180°$.

2.14. Zeg dat $|\mathbf{h}_i|=R$ en noem de hoek tussen $\mathbf{h}_i$ en $\mathbf{h}_j$ φ.
Dan geldt enerzijds: $\mathbf{h}_1\cdot(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2+\mathbf{h}_3+\mathbf{h}_4)=$
$\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_2+\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_3+\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_4=R^2+3R^2\cos\varphi$
en anderzijds: $\mathbf{h}_1\cdot(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2+\mathbf{h}_3+\mathbf{h}_4)=\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{o}=0$.
Dus $R^2+3R^2\cos\varphi=0$ en dus is $\cos\varphi=-\frac{1}{3}$ en $\varphi\approx 109°$.

2. 5 a. $\left(4\frac{}{2}, 4\frac{}{2}, 0\right)$

b. $\mathbf{q} = \mathbf{u} - \mathbf{p} = \left(-\frac{}{2}, \frac{}{2}, \right)$

c. $\mathbf{s} = \mathbf{u} - 2\mathbf{p} = (-5, -4,)$

2. a. $\mathbf{v}$ g n $V \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{q} \perp \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$.

b. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{q} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{v}$ g n V.

2. 7. a = , b = 2, c = - en d = .

2. 8. B v oo bee d $\mathbf{n} = (3, 2, -5)$ en $\mathbf{q} = (0, 4, 0)$.

2. 9 a. $\mathbf{p} = (, 2,)$

b. $\mathbf{q} = (-2, - ,)$

c. $3\sqrt{2}$

2.20. e a s and s $|\mathbf{p} - \mathbf{v}| = \left| \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \right| = \frac{|(\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|^2} |\mathbf{n}| = \frac{|(\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$.

2.2 . $\frac{8}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2}$

2.22. $\mathbf{n} = (a, b, c)$ s een no aav ec o v an v a V. Laa $\mathbf{q}$ een n z n v an V. an s $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ een v e ge ng v an V (o ga e 2. 7). s $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = d$. Vo gens o ga e 2.2 s de a s and v an $\mathbf{u}$ o V ge aan $\frac{|(\mathbf{u} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|au + bu_2 + cu_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

2.23. e oe ssen ee men s e de n e sc e . e e oe en z n sa en 80 ° en ebben d s een egenges e de cos n s.

2.24. as de o e v oo de oe ssen ee men oe o de men e ngs ec o en v en $\mathbf{n}$. en o da $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} = 90°$ s s n $\boldsymbol{\beta} = \cos \boldsymbol{\delta}$.

2.25. an s $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{n}|$. Vo gens de o e s s n $\boldsymbol{\beta} =$ en d s s $\boldsymbol{\beta} = 90°$. a o nde daad.

2.2. A s e angs de ng v an de sn nv an de v a en dan z e
e de v a en a s men. e d age sv an de b b o ende no aa -
v ec o en s aan ood o deze men en a en d s oo onde -
ng deze de oe .

2.27 a. $2\sqrt{3}$

b. $\left(0, \frac{8}{5}, \frac{}{5}\right)$

c. 4°

d. 7°

e. 0°

f. 7°

Het uitwendig product

3. a. $(3, \ , -3)$

b. $(25, -4, \ 0)$

c. $(4, -5, \ )$

3.2 a. $(\ , 0, \ )$

b. $(\ , \ , \ )$

c. $(\ , \ , - \ )$

3.5 a. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\ , 0, - \ )$

b. $\mathbf{c} \times \mathbf{d} = (-25, 4, - \ 0)$

c. $\mathbf{e} \times \mathbf{f} = (20, -25, 5)$

od c en s e ens eenv eev o dv an e an oo d b 3. .

3. a. $(\ , \ , -2)$

b. $(3, -2, 4)$

c. $(\ , 2, 4)$

d. $(\ , - \ , 2)$

3.7. s e n e d e e aa n coo d na en en daa na e
e d. A s e sec e dan s aa e ee aa e ze de.

3.8. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(\mathbf{u}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{o}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{o}\ \Rightarrow\ \mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{u}$.

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{o}=\mathbf{o}\ \Rightarrow\ \mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{v}$.

3.9. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{z}$, $\mathbf{y}\times\mathbf{z}=\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}\times\mathbf{z}=-\mathbf{y}$. Het resultaat [illegible] telkens overeen met de [illegible]regel.

3.10. Als $\mathbf{u}=\mathbf{o}$ of $\mathbf{v}=\mathbf{o}$, dan zijn $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ [illegible]. Neem daarom aan, dat $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ beide ongelijk zijn aan $\mathbf{o}$. Dan geldt volgens stelling 3.12: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{o}\Rightarrow|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=0\Rightarrow|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\gamma=0$. Aangezien $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ beide ongelijk zijn aan $\mathbf{o}$, volgt $\sin\gamma=0$. Dus $\gamma=0°$ of $\gamma=180°$. Dus $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ zijn [illegible].

3.11. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}))=\mathbf{a}\cdot((\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d})=$

$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

[illegible] in coördinaten [illegible].

3.12. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=$

$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}+(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}=\mathbf{o}$.

Krommen in de ruimte

4.1. a. $\left(-8\frac{1}{2},-17,17\right)$

b. $(3,2,-1)$

c. $(\cos 5,\sin 5,5)$

d. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{3}\pi\right)+k(0,0,2\pi)$ en $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3},-\frac{1}{3}\pi\right)+k(0,0,2\pi)$ (met k geheel).

4.2. Rechte lijn; parabool; schroeflijn.

4.3 a. De baan is telkens de rechte lijn $\lambda(1,2,-2)$.

b. Het deeltje [illegible] $\mathbf{q}$ 2 seconden achter op het deeltje [illegible] $\mathbf{p}$.

c. [illegible]

4.4. $(\mathbf{p}+\mathbf{q})(t)=(4t-4,8t-8,-8t+8)$

$(\mathbf{p}-\mathbf{q})(t)=(4,8,-8)$

$$(3\mathbf{r})(t) = (6t^3,\ 2t^3, -\ 2t^3)$$
$$\left(2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \tfrac{}{2}\mathbf{r}\right)(t) = \left(-2t + \ 2 + t^3, -4t + 24 + 2t^3, 4t - 24 - 2t^3\right)$$

4.5 a. $\left(|\mathbf{k}|(t)\right)^2 = \left(\cos^2 t\right)^2 + (\sin t \cdot \cos t)^2 + (\sin t)^2 =$

$\cos^4 t + \sin^2 t \cdot \cos^2 t + \sin^2 t = \cos^4 t + \left(\ -\cos^2 t\right)\cdot \cos^2 t + \sin^2 t =$

$\cos^4 t + \cos^2 t - \cos^4 t + \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = \ .$

b. [illegible]

4.6. $\dot{\mathbf{f}}(t) = (2, 4, -4)$

$\dot{\mathbf{g}}(t) = (0, 2, 2t - 2)$

$\dot{\mathbf{h}}(t) = (-\sin t, \cos t, \ )$

4.7 a. $|\dot{\mathbf{f}}|(t) = 6$; $|\dot{\mathbf{g}}|(t) = \sqrt{4t^2 - 8t + 8}$; $|\dot{\mathbf{h}}|(t) = \sqrt{2}$.

b. $(3, 2, - \ )$

c. $\dot{\mathbf{h}}(t) \cdot (0, 0, \ ) = (-\sin t, \cos t, \ ) \cdot (0, 0, \ ) =$ [illegible]

d. [illegible] $45°$.

4.8 a. $\dot{\mathbf{k}}(t) = \left(-2\cos t \cdot \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t, \cos t\right) = \left(-\sin(2t), \cos(2t), \cos t\right)$

b. $|\dot{\mathbf{k}}|(t) = \sqrt{\sin^2(2t) + \cos^2(2t) + \cos^2 t} = \sqrt{\ + \cos^2 t}$

c. ; [illegible] $(0, 0, \ )$ [illegible] $(0, 0, - \ )$

d. $\sqrt{2}$; [illegible] $(\ , 0, 0)$

4.9 a. $|\mathbf{f}(t)| = (2 + \cos(3t)) \cdot \sqrt{\cos^2(2t) + \sin^2(2t)} = 2 + \cos(3t)$

b. [illegible] $[\ , 3]$.

c. $\dot{\mathbf{f}}(t) = (-3\sin(3t)\cos(2t) - 2\sin(2t)(2 + \cos(3t)),$

$-3\sin(3t)\sin(2t) + 2\cos(2t)(2 + \cos(3t)))$

d. $|\dot{\mathbf{f}}(t)|^2 = (-3\sin(3t)\cos(2t) - 2\sin(2t)(2 + \cos(3t)))^2 +$

$(-3\sin(3t)\sin(2t) + 2\cos(2t)(2 + \cos(3t)))^2 = \ldots\ldots\ldots =$

$9\sin^2(3t) + 4 \cdot (2 + \cos(3t))^2 =$

$9\sin^2(3t) + \ 6 + \ 6\cos(3t) + 4\cos^2(3t) =$

$25 + \ 6\cos(3t) - 5\cos^2(3t)$.

Dus $\left|\dot{\mathbf{f}}(t)\right| = \sqrt{25 + 16\cos(3t) - 5\cos^2(3t)}$.

e. 2 (als $\cos(3t) = -1$).

4.10 a. $\left|\mathbf{g}(t)\right|^2 = (2+\cos(3t))^2 \cdot \left(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)\right) + \sin^2(3t) =$
$(2+\cos(3t))^2 + \sin^2(3t) = 5 + 4\cos(3t)$.
Dus $\left|\mathbf{g}(t)\right| = \sqrt{5 + 4\cos(3t)}$.

b. Alle waarden in het interval $[1,3]$.

c. $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-3\sin(3t)\cos(2t) - 2\sin(2t)(2+\cos(3t)),$
$-3\sin(3t)\sin(2t) + 2\cos(2t)(2+\cos(3t)), 3\cos(3t))$.

d. Door handig gebruik te maken van [illegible] 4.9 [illegible].

$\left|\dot{\mathbf{g}}(t)\right|^2 = (-3\sin(3t)\cos(2t) - 2\sin(2t)(2+\cos(3t)))^2 +$
$(-3\sin(3t)\sin(2t) + 2\cos(2t)(2+\cos(3t)))^2 + 9\cos^2(3t) = ... =$
$9\sin^2(3t) + 4\cdot(2+\cos(3t))^2 + 9\cos^2(3t) = 9 + 4\cdot(2+\cos(3t))^2$.
Dus $\left|\dot{\mathbf{g}}(t)\right| = \sqrt{9 + 4\cdot(2+\cos(3t))^2}$.

e. Alle waarden in het interval $[\sqrt{13}, 3\sqrt{5}]$.

4.11. [illegible]

4.12 a. $\mathbf{k}(t) \times \dot{\mathbf{k}}(t) = (1,-2,1)$

b. De baan ligt in het vlak met vergelijking $x - 2y + z = 0$.

4.13. $\left|\mathbf{f}(t)\right| = r \Rightarrow \left|\mathbf{f}(t)\right|^2 = r^2 \Rightarrow \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}(t) = r$.
Differentiëren geeft: $2\mathbf{f}(t)\cdot\dot{\mathbf{f}}(t) = 0$, dus $\mathbf{f}(t) \perp \dot{\mathbf{f}}(t)$.

4.14. $\ddot{\mathbf{p}}(t) = (0,0,0) = \mathbf{o}$ en $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (12t, 24t, -24t) = 12t(1,2,-2)$
$\left|\ddot{\mathbf{p}}(t)\right| = 0$ en $\left|\ddot{\mathbf{r}}(t)\right| = \left|12t\right|\cdot 3 = 36\left|t\right|$.

4.15. $\ddot{\mathbf{k}}(t) = (-\sin t - \cos t, -\sin t, -\sin t + \cos t) = \mathbf{k}(t)$

4.16. Zeg $\left|\dot{\mathbf{f}}(t)\right| = c$. Dan is $\dot{\mathbf{f}}(t)\cdot\dot{\mathbf{f}}(t) = c^2$.

en en gen ; $2\dot{\mathbf{f}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{f}}(t)=0$, $\dot{\mathbf{f}}(t)\perp\ddot{\mathbf{f}}(t)$.

4. 7. $v(t)=\sqrt{\ ^2+(-at+b)^2}=\sqrt{a^2t^2-2abt+b^2+}$

en $a(t)=\sqrt{0^2+(-a)^2}=a$.

4. 8 a. $\mathbf{v}(t)=(-\boldsymbol{\omega}R\,\mathrm{s\ n}(\boldsymbol{\omega}t),\boldsymbol{\omega}R\cos(\boldsymbol{\omega}t))$. z en da $\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{r}(t)=0$.

b. $v(t)=\sqrt{\boldsymbol{\omega}^2R^2\,\mathrm{s\ n}^2(\boldsymbol{\omega}t)+\boldsymbol{\omega}^2R^2\cos^2(\boldsymbol{\omega}t)}=\sqrt{\boldsymbol{\omega}^2R^2}=\boldsymbol{\omega}R$

c. $\mathbf{a}(t)=(-\boldsymbol{\omega}^2R\cos(\boldsymbol{\omega}t),-\boldsymbol{\omega}^2R\,\mathrm{s\ n}(\boldsymbol{\omega}t))=$
$-\boldsymbol{\omega}^2(R\cos(\boldsymbol{\omega}t),R\,\mathrm{s\ n}(\boldsymbol{\omega}t))=-\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}(t)$

d. $a(t)=|\mathbf{a}(t)|=|-\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}(t)|=\boldsymbol{\omega}^2|\mathbf{r}(t)|=\boldsymbol{\omega}^2R$

e. v o g da $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{v}{R}$, d s $a(t)=\boldsymbol{\omega}^2R=\left(\dfrac{v}{R}\right)^2\cdot R=\dfrac{v^2}{R}$.

4. 9 a. v c o en $\mathbf{v}(t)$ en $\mathbf{r}(t+\frac{1}{4}T)$ z en n d z de ng.

n $\left|\dfrac{v}{R}\mathbf{r}(t+\frac{1}{4}T)\right|=\dfrac{v}{R}\cdot R=v=|\mathbf{v}(t)|$, d s $\mathbf{v}(t)=\dfrac{v}{R}\mathbf{r}(t+\frac{1}{4}T)$.

b. $\mathbf{a}(t)=\dot{\mathbf{v}}(t)=\dfrac{v}{R}\dot{\mathbf{r}}(t+\frac{1}{4}T)=\dfrac{v}{R}\mathbf{v}(t+\frac{1}{4}T)=\dfrac{v}{R}\mathbf{r}(t+\frac{1}{2}T)=-\dfrac{v^2}{R^2}\mathbf{r}(t)$.

c. v o g da d v e sm ng ge s naa e dd n en d

g oo v an d v e sm ng s ge aan $\left|-\dfrac{v^2}{R^2}\mathbf{r}(t)\right|=\dfrac{v^2}{R^2}\cdot R=\dfrac{v^2}{R}$.

4.20 a. $\mathbf{a}(t)=(-\omega^2a\cos(\omega t),-\omega^2b\,\mathrm{s\ n}(\omega t))=$
$-\omega^2(a\cos(\omega t),b\,\mathrm{s\ n}(\omega t))=-\omega^2\mathbf{r}(t)$

b. $v(t)^2=\omega^2\left(a^2\,\mathrm{s\ n}^2(\omega t)+b^2\cos^2(\omega t)\right)$
$(r(t))^2+(v(t)/\omega)^2=a^2\cos^2(\omega t)+b^2\,\mathrm{s\ n}^2(\omega t)+$
$\left(\omega^2a^2\,\mathrm{s\ n}^2(\omega t)+\omega^2b^2\cos^2(\omega t)\right)/\omega^2=a^2+b^2$

4.2 . $O'(t)=\frac{1}{2}|\mathbf{n}|$ v o g da $O(t)-O(t_0)=\frac{1}{2}|\mathbf{n}|\cdot(t-t_0)$.
da $O(t_0)=0$ (d n) s $O(t)=\frac{1}{2}|\mathbf{n}|\cdot(t-t_0)$.

5 De reuzen van Newton

5. a. $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,-2)$, $(0,2)$

   b.

5.3 a. a is de horizontale component van de beginsnelheid en c is de verticale component van de beginsnelheid. Hieruit volgt dat $\cos\theta = \frac{a}{v}$ oftewel $a = v\cos\theta$ en $\sin\theta = \frac{c}{v}$ oftewel $c = v\sin\theta$.

b. Bepaal voor welke t geldt $y = 0$:

$$-\tfrac{1}{2}gt^2 + ct = 0 \Leftrightarrow t\left(-\tfrac{1}{2}gt + c\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ of } t = \frac{2c}{g}.$$

c. $t = 0 \Rightarrow x = 0$ (beginpunt) en $t = \frac{2c}{g} \Rightarrow x = at = \frac{2ac}{g}$ (eindpunt).

Substitutie van $a = v\cos\theta$ en $c = v\sin\theta$ geeft nu:

$$x = \frac{2ac}{g} = \frac{2v\cos\theta\, v\sin\theta}{g} = \frac{2v^2\cos\theta\sin\theta}{g} = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$$

d. $x = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ is maximaal als $\sin 2\theta$ maximaal is. Dan is $\sin 2\theta = 1$ oftewel als $2\theta = 90°$ oftewel $\theta = 45°$.

e. Bij een afschiethoek θ hoort een overbrugde afstand van $\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ en bij een afschiethoek $90° - \theta$ hoort een overbrugde afstand van $\frac{v^2}{g}\sin 2(90° - \theta) = \frac{v^2}{g}\sin(180° - 2\theta) = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$.

(NB Hierbij wordt de goniometrische regel $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ toegepast.)

6 De wetten van Newton

6.1. $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = t\mathbf{g} + \mathbf{v}$ voor zekere $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$
$\Rightarrow \mathbf{r}(t) = \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{v} + \mathbf{u}$ voor zekere $\mathbf{u}$ in $\mathbb{R}^3$.

6.2. $F = \frac{GMm}{r^2}$, dus $G = \frac{Fr^2}{Mm}$. Dus $[G] = \frac{Nm^2}{kg^2} = Nm^2kg^{-2}$.

6.3 a. $\frac{GM}{R^2} = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}976 \cdot 10^{24} / (6{,}37 \cdot 10^6)^2 \approx 9{,}8 = g$.

b. ...e v o ... e V van de Aarde is $\frac{4}{3}\pi R^3$ (... o... dv an bo ... e s aa R).
e soo ... e ... assa van de Aarde is $M/V = M/\frac{4}{3}\pi R^3 = 3M/4\pi R^3$.

c. $3M/4\pi R^3 = 3\cdot 5{,}97\ldots\cdot 0^{24} / 4\pi\cdot(\ldots{,}37\cdot 0\ldots)^3 \approx 5{,}52\cdot 0^3\ kg\cdot m^{-3}$.

d. $5{,}52\cdot 0^3 \frac{kg}{m^3} = 5{,}52\frac{kg}{dm^3}$. ... s ... e dan de soo ... e ... assa van
... a... (,0 $kg\cdot dm^{-3}$) ... en van zand (,... $kg\cdot m^{-3}$). ... s de Aarde
o... e v an b nnen z... aarde z n dan aan ... e o ... e v a . ... s aa -
sc... n ... e g... o g van ... en ze ... en ... e n.

7 De wetten van Kepler

7. . $|\mathbf{F}(\mathbf{r})| = \left|-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\right| = \frac{k}{r^3}|\mathbf{r}| = \frac{k}{r^2}$.

7.2. $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ... en $\mathbf{r}$ z n ... o o ... onee ... , ... an $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{r}$, ... aa b ... $\boldsymbol{\lambda} = -\frac{k}{r^3}$.

7.3 a. $\dot{\mathbf{p}}(t) = (m\mathbf{v}(t))^{\cdot} = m\dot{\mathbf{v}}(t) = m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t)$.

b. $\dot{\mathbf{L}}(t) = (\mathbf{r}(t)\times\mathbf{p}(t))^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}(t)\times\mathbf{p}(t) + \mathbf{r}(t)\times\dot{\mathbf{p}}(t) =$
$\mathbf{v}(t)\times m\mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t) = m(\mathbf{v}(t)\times\mathbf{v}(t)) + \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t) =$
$m\mathbf{o} + \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t) = \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t)$.

c. A s $\mathbf{F}$ ... een centraa ... ac... v ... e d s, dan s $\mathbf{F}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{r}(t)$ v oo ze ... e ... e $\boldsymbol{\lambda}(t)$ n $\mathbb{R}$. ... b.v o g n : $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t) = \mathbf{r}(t)\times(\boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{r}(t)) =$
$\boldsymbol{\lambda}(t)(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}(t)) = \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

7.4 a. $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = v^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$.

b. $(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{o} + \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{r}\times\mathbf{a}$.

c. $(r^2)^{\cdot} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = 2(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})$.

d. $(r)^{\cdot} = \left((\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{1}{2}}\right)^{\cdot} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\cdot} = \frac{1}{2}(r^2)^{-\frac{1}{2}}2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r}$.

e. $\left(\frac{1}{r}\right)^{\cdot} = \left((\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}}\right)^{\cdot} = -\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-\frac{3}{2}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\cdot} = -\frac{1}{2}(r^2)^{-\frac{3}{2}}2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) = -\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r^3}$.

f. $(v^4)^{\cdot} = \left((\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^2\right)^{\cdot} = 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{\cdot} = 2v^2 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) = 4v^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$.

g. Die eenheid is na dat $\dot{v} = \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})}{v}$. gaat gelijk aan 7.4 d.

an s $(rv)^{\cdot} = \dot{r}v + r\dot{v} = \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r}v + r\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})}{v} = \frac{v}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) + \frac{r}{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$.

7.5. Volgens de kettingregel is $\dot{r}(t) =$

$$\frac{}{2\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2+(z(t))^2}}\cdot\left(2x(t)\dot{x}(t)+2y(t)\dot{y}(t)+2z(t)\dot{z}(t)\right) =$$

$$\frac{}{2r(t)}\cdot 2\left(\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\left(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)\right)\right) = \frac{(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{v}(t))}{r(t)}.$$

7.6. $H = \frac{}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{m^2v^2}{2m} - \frac{k}{r} = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$.

7.7 a. Het deeltje valt in een rechte lijn naar de oorsprong en gaat daarbij steeds sneller.

b. $t=0$ is $r = r_0$ en $v = 0$. Dus $H = -\frac{k}{r_0}$.

als $r < r_0$ van de oorsprong is van rege dele van eme-gebied d $H = \frac{}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = -\frac{k}{r_0}$. Dus $\frac{}{2}mv^2 = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}$.

$$v^2 = \frac{2k}{m}\left(\frac{}{r} - \frac{}{r_0}\right) \text{ en } v = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(\frac{}{r} - \frac{}{r_0}\right)}.$$

7.8. $\mathbf{s}$ is een veelvoud van $\mathbf{r}$, dus $\mathbf{s} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{r}$. Ook is de lengte van $\mathbf{s}$ gelijk aan $-k/H$, dus $|\mathbf{s}| = -k/H$. Dus $|\boldsymbol{\lambda}|r = |\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r}| = -k/H$. Omdat $\boldsymbol{\lambda} > 0$ is, is $\boldsymbol{\lambda} = -k/rH$.

7.9 Er geldt: $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$. Dus de richting van $\mathbf{L}$ is dezelfde als die van $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$. Met behulp van de rechterhandregel zien we dat $\mathbf{L}$ loodrecht op het vlak staat.
Er geldt: $\mathbf{n} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} = m(\mathbf{v}\times\mathbf{L})$. Dus de richting van $\mathbf{n}$ is dezelfde als die van $\mathbf{v}\times\mathbf{L}$. Met behulp van de rechterhandregel zien we dat de richting van $\mathbf{n}$ in het vlak van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{v}$.

7.10. $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$ volgens opgave 7.6. Dus $p^2 = 2m\left(H + \frac{k}{r}\right)$.

7.11. $\mathbf{K}\cdot\mathbf{L} = \left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{km}{r}\mathbf{r}\right)\cdot\mathbf{L} = (\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot\mathbf{L} - \frac{km}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{L}) =$ (stelling 3.)

$$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{L}\times\mathbf{L})-\frac{km}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{L})=\mathbf{o}-\frac{km}{r}(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p}))=\text{(s ng 3.)}$$

$$-\frac{km}{r}((\mathbf{r}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{p})=\mathbf{o}.$$

7. 2. s, d on s aa en c s aa b doo deze n en ng o en ac o $\frac{a}{b}$, o v a $\frac{a}{b}\pi b^2=\pi ab$.

7. 3. $4c^2=(2c)^2=t^2=\left(\frac{K}{mH}\right)^2=\frac{K^2}{m^2H^2}=\frac{2mHL^2+k^2m^2}{m^2H^2}=\frac{2L^2}{mH}+\frac{k^2}{H^2}$.

7. 4. $4b^2=4(a^2-c^2)=4a^2-4c^2=\frac{k^2}{H^2}-\left(\frac{2L^2}{mH}+\frac{k^2}{H^2}\right)=-\frac{2L^2}{mH}$.

7. 5. $\frac{LT}{2m}=\pi ab\Rightarrow\frac{T}{a}=\frac{2\pi bm}{L}\Rightarrow\frac{T^2}{a^2}=\frac{4\pi^2b^2m^2}{L^2}$.

7. 6. $\frac{T^2}{a^2}=\frac{4\pi^2b^2m^2}{L^2}=\frac{\pi^2m^2}{L^2}\cdot 4b^2=\frac{\pi^2m^2}{L^2}\cdot-\frac{2L^2}{mH}=-\frac{2\pi^2m}{H}$.

7. 7. $\frac{T^2}{a^3}=\frac{T^2}{a^2}\cdot\frac{}{a}=-\frac{2\pi^2m}{H}\cdot-\frac{2H}{k}=\frac{4\pi^2m}{k}$.

7. 8. (oo ge a) de a s and a n A en de o oo d T n a en. an sv oo de Aa de $\frac{T^2}{a^3}=\frac{\ ^2}{\ ^3}=$. oo de andere ame en s de a ge onde aa de v an $\frac{T^2}{a^3}$ a sv o g : Me c s 0,978, en s ,0 7, Ma s ,007, ,000, a n s 0,987, an s 0,980 en n s 0,986.

7. 9. A s a n A en T n a en me en, dan s $\frac{T^2}{a^3}=$ $a^3=T^2=76^2$. s $a\approx$ 7,94 A . a s and v an de o o de zon s oogs ens ge aan de ange as v an de s, d s oog- s ens $2a\approx 35,9$ A .

Het Keplerprobleem

8. . a de ng be ; $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ s v an $\mathbf{v}$ naa $\mathbf{u}$ ge da $k>0$, s $-\dfrac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}$ nega . s de v ec o $-\dfrac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ s v an $\mathbf{u}$ naa $\mathbf{v}$ ge en da o a de g oo e be ;

$$|\mathbf{F}|=|-\mathbf{F}|=\left|\frac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right|=\frac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}\cdot|\mathbf{u}-\mathbf{v}|=\frac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2}=\frac{k}{r^2}\text{ en}$$

da o oo .

8.2. aan da de os ev an de e me n assa $\mathbf{u}$ s en de os e v an de g o e n assa $\mathbf{v}$. an s $|\mathbf{u}-\mathbf{z}|\ \ |\mathbf{v}-\mathbf{z}|=5:2$.

$\mathbf{v}$ $\mathbf{z}$ $\mathbf{u}$

8.3. $\dot{\mathbf{z}}$ s een be o den g oo e d, an $(\dot{\mathbf{z}})^{\cdot}=\ddot{\mathbf{z}}=\mathbf{o}$.

8.4. $\dfrac{T^2}{a^3}=\dfrac{4\pi^2}{G(M+m)}$ aa b $G=\ ,\ 7\ \cdot\ 0^{-}\ \ ^2/\ g^2$ en

$M+m=(2{,}02+0{,}99)\cdot\ ,99\cdot\ 0^{30}=5{,}99\cdot\ 0^{30}$ g .

$T^2=(50,\ \cdot\ 5{,}2\ \cdot 24\cdot\ 0\cdot\ 0)^2=(\ ,58\ \cdot\ 0^9)^2=2{,}50\cdot\ 0^{\ 8}$ sec .

$a^3=T^2\cdot\dfrac{G(M+m)}{4\pi^2}=2{,}50\cdot\ 0^{\ 8}\cdot\dfrac{5{,}99\cdot\ 0^{30}}{4\pi^2}=2{,}5\ \cdot\ 0^{37}$.

s $a=\sqrt[3]{2{,}5\ \cdot\ 0^{37}}=2{,}94\cdot\ 0^{\ 2}\ =2{,}94\cdot\ 0^9\ \approx\ 9{,}57$ A