vwo wiskunde d

Binomiale en normale verdeling

de Wageningse Methode

Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen

Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN xxx
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit hoofdstuk is het tweede (na **Combinatoriek en rekenregels**) in een serie over kansrekening.
Het volgende is: **Hypothesetoetsen en Poissonverdeling**.
Deze hoofdstukken behoren tot de stof van het vak 456 vwo wiskunde d.
Belangrijk in dit hoofdstuk is mogelijkheden tellen. Dat heb je in het hoofdstuk **Combinatoriek en rekenregels** geleerd.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

17 januari 2019

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

Echt, moet kunnen
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.

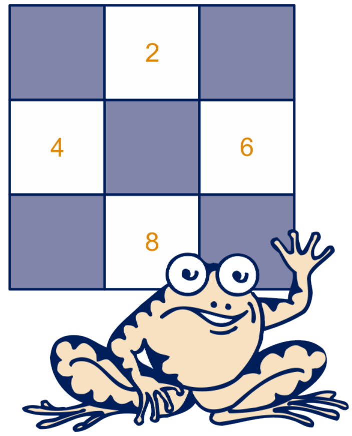
Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.

In hoofdstuk 1 Combinatoriek en rekenregels is de kansdefinitie aan de orde geweest. In deze paragraaf wordt de definitie herhaald en toegepast.



1 Een kikker is onrustig. Hij springt over de hiernaast getekende tegelvloer alsof zijn leven ervan afhangt. Hij springt steeds naar een naburige tegel: horizontaal of verticaal (dus niet diagonaal).

a Leg uit dat de kans dat de kikker op een zeker ogenblik op een donkere tegel zit niet noodzakelijk $\frac{5}{9}$ is.

b Welke tegel heeft de meeste kans en welke tegels hebben de minste kans? Kun je ook zeggen waarom?

Kansdefinitie

Als er bij een experiment n even waarschijnlijke uitkomsten zijn, waarvan er k zijn van een bepaald type, dan is de kans op een uitkomst van dat type gelijk aan $\frac{k}{n}$.

Voorbeeld

Je hebt een verzameling van 28 dingen. Er zijn drie soorten dingen. Van soort A zijn er 15, van soort B zijn er 5 en van soort C zijn er 8. Iemand pakt willekeurig één ding uit die verzameling. Elk van de dingen heeft dezelfde kans om gepakt te worden. Dan is de kans dat hij een ding van soort A pakt $\frac{15}{28}$.

2 Anneke werpt met twee zuivere muntstukken. (Bij een zuivere munt zijn de kansen op kop en op munt gelijk; dus beide $\frac{1}{2}$.) Er zijn drie mogelijke uitkomsten: "2 kop", "2 munt" en "1 kop en 1 munt". Anneke redeneert als volgt: Bij twee van de drie mogelijke uitkomsten heb je een "dubbele" (de munten vallen op dezelfde kant). Dus is de kans op een dubbele $\frac{2}{3}$.

a Wat is de fout in Annekes redenering?

b Wat is de juiste kans op een dubbele?

3 Voor een loket staan acht mensen in een rij. Je weet dat Anneke en Egon in de rij staan.
Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat Egon vóór Anneke in de rij staat.

4 Bij een verloting zijn er 100 verschillende loten, genummerd 1 tot en met 100. De personen A, B, C en D krijgen ieder willekeurig een lot.

a Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat het nummer dat A krijgt groter is dan de nummers die B, C en D krijgen.

b Bereken met de kansdefinitie wat de kans is dat het nummer dat A krijgt groter is dan 50, maar kleiner is dan 70.

De kansdefinitie is voor het eerst zo geformuleerd door de grote Franse wiskundige Laplace. Hij deed behalve veel aan waarschijnlijkheidsrekening ook aan astronomische mechanica en differentiaalvergelijkingen. Laplace leefde tijdens de roerige tijden van de Franse revolutie. Uit zijn leven zijn de volgende gebeurtenissen bekend. De zestienjarige Napoleon heeft examen gedaan bij Laplace. In 1790 hielp Laplace mee met de standaardisatie van maten en gewichten op decimale basis. Tijdens het schrikbewind van Robespierre ontvluchtte hij Parijs. In 1799 wordt Laplace minister onder Napoleon en daarna kanselier van de senaat.

Pierre Simon Laplace
1749 - 1827

Als je de kansdefinitie wilt toepassen is het belangrijk te weten of de mogelijk uitkomsten wel even waarschijnlijk zijn. Uitkomsten zijn even waarschijnlijk als ze als gelijkwaardig mogen worden beschouwd: als er geen enkele reden is dat een van de uitkomsten vaker zal voorkomen dan een andere. Bijvoorbeeld in opgave 3 is (als je geen extra informatie hebt) er geen reden om aan te nemen dat Egon vaker voor Anneke staat in de rij dan omgekeerd: beide mogelijkheden hebben kans . Maar stel eens dat je weet dat Anneke en Egon een hechte relatie hebben, meestal gezamenlijk naar het loket gaan en dat Egon dan altijd Anneke voor laat gaan. Dan zijn de twee mogelijkheden niet meer gelijkwaardig. De kans dat An-neke voor Egon staat in de rij is dan beslist groter dan $\frac{1}{2}$.

5 Noem een paar "experimenten" waarbij de uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

6 Je hebt drie brieven (a, b en c) geschreven aan vrienden en hun adressen op enveloppen (A, B en C) gezet. Je pakt envelop A en zonder ergens op te letten stop je een brief in die envelop. Daarna doe je hetzelfde met de andere twee enveloppen.

a Op hoeveel verschillende manieren kunnen de drie brieven aan de drie enveloppen worden gekoppeld ?

X is het aantal brieven dat in de juiste envelop zit.

b Welke waarden kan X aannemen?

c Wat is de kans op elk van deze waarden?

7 De koning gaat op staatsbezoek in China. In zijn kielzog gaan er onder andere drie parlementariërs mee. In aanmerking voor de reis komen drie parlementariërs van de PvdA, vier van de VVD en twee van het CDA. Wie mee mag, wordt door het lot aangewezen.
Er zijn in totaal 84 drietallen mogelijk.

a Bereken de kans dat ze alle drie van één partij komen.

b Bereken de kans dat er van elke partij een parlementariër mee mag.

Het probleem van opgave 7**b** kun je met de kansdefinitie als volgt aanpakken.
Er moet een keuze gedaan worden van drie uit in totaal negen personen. Er zijn 84 van zulke keuzes; die zijn allemaal even waarschijnlijk. Je telt nu hoeveel keuzes er zijn, bestaande uit 1 PvdA-er, 1 VVD-er en 1 CDA-er: dat zijn er $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$. Het antwoord op opgave 7**b** is dus $\frac{24}{84}$.

8 Je vriend heeft een telefoonnummer dat bestaat uit de cijfers 1, 2, 3, 5, 7 en 9. Dat weet je nog, maar de volgorde van de cijfers ben je vergeten.

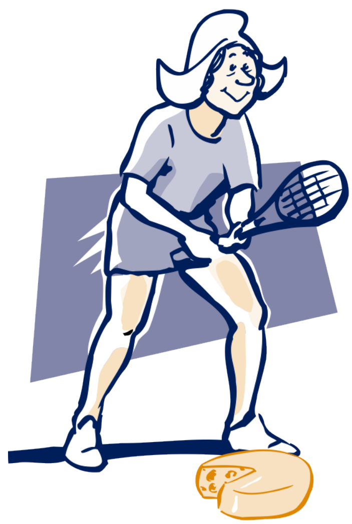
a Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 2, 3, 5, 7 en 9?

Op de gok toets je het nummer "325197" in.

b Bereken de kans dat je het goede nummer hebt.

c Dezelfde vraag als je je herinnert dat de 3 vooraan staat.

9 Een tennistoernooi telt 64 deelnemers, waarvan zes Nederlanders en acht Duitsers. Er wordt gespeeld volgens het knock-out systeem: wie verliest ligt eruit. Voor de finale houden we twee spelers over. Omdat voor elke ronde tussen de overgebleven spelers geloot wordt, kan in principe elke speler tegen elke andere speler in de finale komen.



a Hoeveel finales zijn er mogelijk?

b Hoeveel finales zijn er mogelijk waarbij een Nederlander tegen een Duitser speelt?

Veronderstel dat alle spelers even sterk zijn en dus even grote kans hebben de volgende ronde te bereiken.

c Bereken de kans dat de finale wordt gespeeld tussen een Nederlander en een Duitser.

Opmerking
Vaak wordt de fout gemaakt dat ten onrechte wordt aangenomen dat de mogelijke uitkomsten even waarschijnlijk zijn. Hoe gevaarlijk dat is, zie je in de volgende opgave.

10 Egon heeft drie kaartjes: een met een blauwe en een rode kant, een met een witte en een rode kant en een met twee rode kanten. Egon pakt een willekeurig kaartje en legt het op tafel. De kant die hij ziet blijkt rood te zijn.
Wat, denk je, is de kans dat de achterkant ook rood is?

Je wilt dus weten hoeveel mogelijke uitkomsten er zijn (die uitkomsten moeten even waarschijnlijk zijn!) en je wilt weten hoeveel speciale uitkomsten er zijn. Dan ken je de kans op zo'n speciale uitkomst. Hoeveel uitkomsten er zijn en hoeveel speciale uitkomsten, is vaak een kwestie van tellen. En dat hebben we in het eerste hoofdstuk Combinatoriek en rekenregels van de kansrekening voor wiskunde d geleerd.
In paragraaf 2 herhalen we de belangrijkste zaken en gaan dan met combinatiegetallen kansen uitrekenen.

In vraagstukken over kansrekening heb je vaak te maken met een grootheid die verschillende waarden kan aannemen. Je wilt dan weten wat de kans is op elk van die waarden. Bijvoorbeeld in opgave 6: de grootheid is het aantal brieven X dat in de goede enveloppe komt. X kan de waarden 0, 1 en 3 aannemen. De kansen op deze waarden zijn achtereenvolgens $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{6}$.
We schrijven wel:
$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}$ en $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$.
De grootheid X heet wel **toevalsgrootheid** of **stochast**.

11 Bekijk nog eens opgave 7. Het aantal parlementariërs van de VVD die meegaan naar China noemen we X.
Welke waarden kan de stochast X aannemen?

12 We werken met de context van opgave 9. X is het aantal Nederlanders in de finale.

a Bereken de waarden die X aan kan nemen met de de bijbehorende kansen. Schrijf je antwoorden overzichtelijk in een tabel:

k	...	...	...	
$\mathrm{P}(X=k)$	...	...	...	

b Controleer je antwoorden door de kansen op te tellen.

De som van de kansen op de verschillende waarden van een stochast is 1. Je zou kunnen zeggen dat de totale kans 1 verdeeld is over die waarden. We noemen het geheel van waarden en bijbehorende kansen de **kansverdeling** van de stochast. Je kunt die goed in de vorm van een tabel geven.

13 Je werpt met een zuivere dobbelsteen. X is het aantal ogen dat je werpt.

a Maak een tabel van de kansverdeling van X.

Een gezin telt 3 kinderen. M is het aantal meisjes in het gezin.

b Maak een tabel van de kansverdeling van M.

Als je bij mens-erger-je-niet met de dobbelsteen een 6 gooit, mag je een nieuwe pion op het speelbord plaatsen. Je werpt één keer met de dobbelsteen. X is het aantal pionnen dat je vervolgens op het speelbord mag plaatsen.

c Maak een tabel van de kansverdeling van X.

14 Iemand werpt met twee dobbelstenen. X_1 is het aantal ogen dat hij met de ene dobbelsteen werpt en X_2 het aantal ogen met de andere dobbelsteen.

$S = X_1 + X_2$ is de som van de aantallen ogen.

a Welke waarden kan S aannemen?

b Hoe groot is P$(S = 2)$? En P$(S = 3)$? En P$(S = 4)$?

c Maak een kanstabel voor S.

2.2 Combinatoriek en kans

Herhaling uit het hoofdstuk Combinatoriek en rekenregels

15 In de finale van een wielerklassieker bestaat de kopgroep uit zeven renners. Het peloton is zo ver achter dat het zeker is dat de zeven koplopers de prijzen zullen verdelen. Drie van hen zullen op het podium komen, als nummer 1, 2 en 3.
Hoeveel verschillende bezettingen van het podium zijn er mogelijk?

16 In een serie van de 1500 meter (atletiek) bestaat de kopgroep uit zeven lopers. De anderen hebben een zo grote achterstand opgelopen dat het zeker is dat deze zeven lopers zullen strijden om de eerste plaatsen. De eerste drie gaan door naar de halve finale. Hierbij is het niet van belang wie er eerste, tweede of derde wordt.
Hoeveel verschillende drietallen zijn er voor de halve finale mogelijk?

Opmerking
Het antwoord van opgave 14 is het aantal **geordende grepen** ofwel **permutaties** van 3 uit 7. We noteren dit aantal met $7P3$.
Dit aantal bereken je op de GR met de knop nPr.

Het antwoord van opgave 16 is het aantal **ongeordende grepen** ofwel **combinaties** van 3 uit 7. We noteren dit aantal met $7C3$, ook wel met $\binom{7}{3}$.
Dit aantal bereken je op de GR met de knop nCr.

17

a Wat is het verband tussen $7P3$ en $7C3$? Leg dat uit.
b Wat is het verband tussen nPr en nCr?
c Ga na: $100P4 = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = \frac{100!}{96!}$.
d Geef een formule voor nPr in de vorm: $nPr = \frac{\ldots!}{\ldots!}$.

Uit de onderdelen **b** en **d** van de voorgaande opgave volgt de formule hieronder.

Er geldt: $nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Opmerking

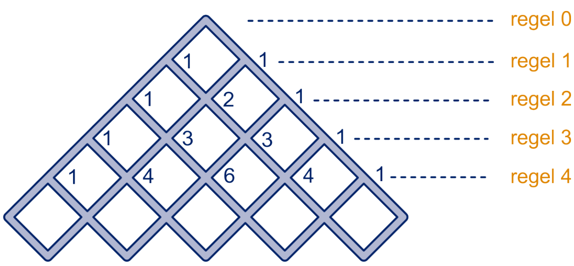
- $\binom{n}{r}$ is het aantal 0-1-rijtjes van lengte n met r nullen,
- $\binom{n}{r}$ is het aantal kortste routes van lengte n in een rooster met r stappen naar rechts,
- $\binom{n}{r}$ is het aantal grepen van r dingen uit een verzameling van n dingen.
  Met een "greep" bedoelen we een **ongeordende** greep zonder herhalingen: de volgorde waarin je de dingen pakt, is niet van belang; je kunt een ding maar één keer pakken.

De combinatiegetallen zijn mooi geordend in de driehoek van Pascal.

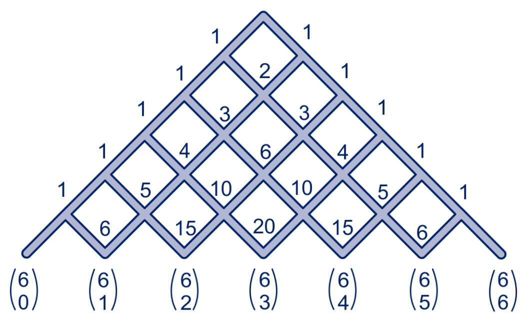
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

18

In figuur 1 hieronder is het begin van de driehoek van Pascal getekend. Er is aangegeven hoe de regels genummerd zijn.
De getallen in de zesde rij zijn van links naar rechts:
$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{6}{5}$ en $\binom{6}{6}$, zie figuur 2.
Dit is je in hoofdstuk 1 Combinatoriek en rekenregels al verteld.



figuur 1


figuur 2

$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}$ kun je schrijven als een combinatiegetal in de volgende regel, dus $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}=\binom{7}{\ldots}$.

a Welk getal moet er op de stippellijn staan?

b Vul de juiste uitdrukkingen in r in:

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{\ldots}+\binom{n-1}{\ldots}.$$

Als je de getallen in een rij van de driehoek van Pascal optelt, krijg je een macht van 2.

c Welke macht van 2 krijg je bij de n-de rij? Verklaar je antwoord.

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r-1}$$

Toepassen

19 In een doos zitten 30 ballen: 20 witte en 10 zwarte. Pak er acht ballen uit (zonder terugleggen). Noem het aantal getrokken witte ballen X.

a Hoeveel grepen van acht ballen zijn er uit een doos met 30 ballen? Geef je antwoord met een combinatie-getal.

b Bij hoeveel grepen heb je vijf witte ballen en drie zwarte ballen gepakt? Schrijf je antwoord als product van twee combinatiegetallen.

c Wat is de kans dat je vijf witte en drie zwarte ballen pakt? Schrijf de kans met behulp van combinatiegetallen en bereken hem ook in drie decimalen.

20 Uit een volledig kaartspel van 52 kaarten trekken we (zonder terugleggen) drie kaarten.

a Hoeveel grepen zijn er van drie kaarten uit een volledig spel?

b Bij hoeveel grepen zijn de drie kaarten schoppen?

c Wat is dus de kans op drie schoppenkaarten? Geef je antwoord in drie decimalen.

Je kunt de kans op drie schoppenkaarten ook berekenen door een geschikt boomdiagram te tekenen en daaruit drie breuken te vermenigvuldigen.

d Doe dat.

e Hoe groot is de kans op drie kaarten van dezelfde kleur (drie schoppen, drie harten, drie ruiten of drie klaveren)? Geef je antwoord in drie decimalen.

21 Bij het (zonder terugleggen) trekken van drie kaarten uit een volledig spel van 52 kaarten is Y het aantal getrokken schoppenkaarten.

a Welke waarden kan Y aannemen?

b Bereken op twee manieren P$(Y = 1)$.

c Geef in een tabel de kansverdeling van Y. Schrijf de kansen met behulp van combinatiegetallen. Bereken de kansen ook in drie decimalen nauwkeurig.

22 **Lotto**

Nevenstaande informatie over de lotto staat op internet.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om zes getallen uit 45 te kiezen?

Als je vijf van de zes winnende getallen goed hebt, krijg je 1000 euro.

b Op hoeveel manieren kun je zes getallen invullen met vijf winnende?

c Bereken in vijf decimalen de kans dat je de prijs van 1000 euro wint.

23 In de kast staan tien boeken, vier thrillers en zes detectives. Daan mag er drie meenemen. Hij kiest willekeurig, dus alle drietallen zijn even waarschijnlijk.

a Bereken de kans dat hij één thriller kiest en twee detectives.

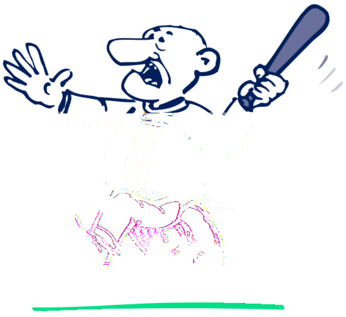
b Bereken ook de kans dat hij:

- drie detectives kiest;
- twee thrillers kiest en één detective kiest;
- drie thrillers kiest.

c Hoe kun je je antwoorden op **a** en **b** controleren?

24 Uit een klas van tien jongens en twaalf meisjes wordt een afvaardiging van zes leerlingen gekozen.
Hoe groot is de kans dat er evenveel meisjes als jongens gekozen worden? Schrijf je antwoord met combinatiegetallen en geef vervolgens het antwoord in drie decimalen.

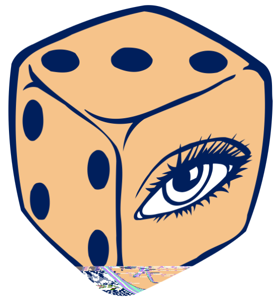
25 Na de wedstrijd van Ajax tegen Feyenoord is het weer eens mis. Vijfentwintig supporters, tien van Ajax en vijftien van Feyenoord gaan met elkaar op de vuist. De politie grijpt in, zonder ergens op te letten: elke supporter heeft dezelfde kans om opgepakt te worden. In totaal worden er acht supporters gearresteerd.
Bereken met combinatiegetallen de kans dat er drie aanhangers van Ajax en vijf van Feyenoord naar het bureau moeten. Geef je antwoord vervolgens in drie decimalen. antwoord in drie decimalen.



In deze paragraaf leiden we een formule af om $(x+y)^n$ zonder haakjes te schrijven. Deze formule wordt het **binomiumvan Newton** genoemd.

Het Σ-teken

Het is handig bij het binomium van Newton de notatie met het Σ-teken te gebruiken.
Σ is de griekse hoofdletter sigma. Men noemt dit teken ook wel het sommatie-teken
Anneke gooit een aantal keren met een dobbelsteen en noteert telkens het aantal ogen. Het aantal ogen dat ze de eerste keer gooit noemen we x_1, de tweede keer x_2, de derde keer x_3, enzovoort.



De som van de eerste vijf worpen schrijven we zo op: $\sum_{i=1}^{5} x_i$: de som van x_i, waarbij i loopt van 1 tot en met 5.

Zo is $\sum_{i=3}^{7} x_i = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$, het totaal aantal ogen van de derde tot en met de zevende worp.

26 Hieronder staat het lijstje van de worpen van Anneke.

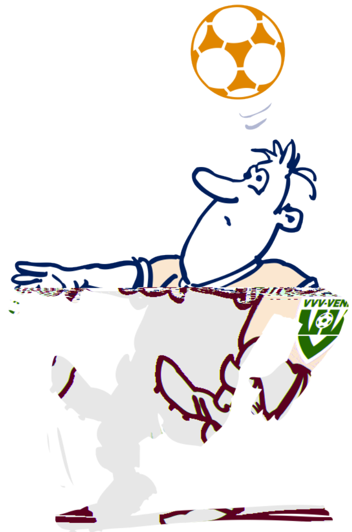
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
2	5	1	3	6	6	1	3	4

a Bereken $\sum_{i=1}^{5} x_i$ en $\sum_{i=3}^{7} x_i$.

b Bereken ook: $\sum_{i=1}^{5} 2x_i$ en $\sum_{i=3}^{7} (x_i - 1)$

27 De antwoorden van opgave 26 kun je ook met de GR vinden.
Zoek uit hoe dat werkt.

28 VVV speelt acht wedstrijden in een toernooi. Het aantal doelpunten dat VVV in de eerste wedstrijd maakt noemen we x_1, het aantal doelpunten van de tegenpartij y_1, het aantal doelpunten in de tweede wedstrijd van VVV noemen we x_2 en dat van de tegenstander y_2, enzovoort.
Voor elk doelpunt dat VVV maakt geeft een sponsor 1000 euro.



a Wat is de betekenis van:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i, \sum_{i=1}^{8} y_i, \sum_{i=1}^{8} (x_i + y_i), \sum_{i=1}^{8} (x_i - y_i), \sum_{i=1}^{8} 1000x_i?$$

b Ga na of geldt:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i + \sum_{i=1}^{8} y_i = \sum_{i=1}^{8} (x_i + y_i),$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i - \sum_{i=1}^{8} y_i = \sum_{i=1}^{8} (x_i - y_i),$$

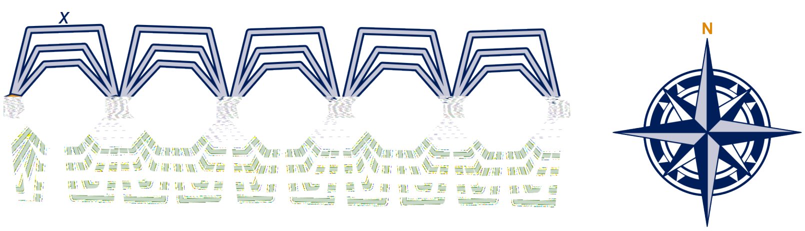
$$\sum_{i=1}^{8} 1000x_i = 1000 \cdot \sum_{i=1}^{8} x_i.$$

In het algemeen geldt niet: $\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{8} y_i\right) = \sum_{i=1}^{8} x_i \cdot y_i$.
Neem maar eens $x_1 = x_2 = \ldots = x_8 = y_1 = y_2 = \ldots = y_8 = 1$.

c Wat is dan $\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{8} y_i\right)$ en wat is $\sum_{i=1}^{8} x_i \cdot y_i$?

Het binomium van Newton

29 Bekijk de routes van S naar F in de figuur hieronder. Elke route bestaat uit vijf stappen. Bij elk van die stappen is zijn er x noordelijke wegen en y zuidelijke wegen.



In de figuur is $x = 3$ en $y = 4$.
Het aantal routes van S naar F waarbij je 3 keer een noordelijke weg neemt en 2 keer een zuidelijke weg is $10 \cdot x^3y^2$.

a Leg dat uit.

b Hoeveel routes zijn er van S naar F waarbij je

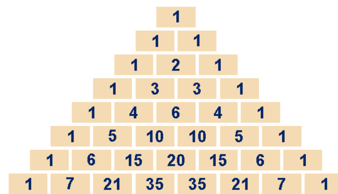
- 0 keer een noordelijke weg neemt en 5 keer een zuidelijke weg?
- 1 keer een noordelijke weg neemt en 4 keer een zuidelijke weg?
- 2 keer een noordelijke weg neemt en 3 keer een zuidelijke weg?
- 4 keer een noordelijke weg neemt en 1 keer een zuidelijke weg?
- 5 keer een noordelijke weg neemt en 0 keer een zuidelijke weg?

Het totaal aantal routes van S naar F is $(x+y)^5$.

c Welke formule voor $(x+y)^5$ vind je uit **a** en **b**?

d Controleer de formule voor $x=1$ en $y=1$. Ook voor $x=1$ en $y=2$.

30 De coëfficiënten in de formule van opgave 29**c** staan in regel 5 van de driehoek van Pascal. En dat is niet toevallig.
Je kunt de zesde regel van de driehoek van Pascal gebruiken om een formule voor $(x+y)^6$ te geven.



a Doe dat.

b Geef zo ook formules voor $(x+y)^1$, $(x+y)^2$ en $(x+y)^3$
Controleer of de formules juist zijn door de haakjes uit te werken.

Het binomium van Newton
Voor alle getallen x en y en positieve gehelen getallen n geldt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

De formule is genoemd naar Isaac Newton, ofschoon hij hem niet heeft uitgevonden. De formule was toen al minstens vijf eeuwen bekend (bij Arabische en Chinese wiskundigen). Newton heeft de formule gegeneraliseerd voor niet-gehele exponenten.
$x+y$ is een tweeterm, ofwel een binomium (latijn: bi = twee, nomus = term).
In de formule spelen de combinatiegetallen een belangrijke rol. Daarom worden die ook wel binomiaalcoëfficiënten genoemd.

Sir Isaac Newton
(1642-1727)
hoogleraar te Cambridge

31 Elke speciale keuze voor x en y levert een bijzonder geval van de algemene formule.
Schrijf de formule op die je krijgt als

- $y = 1$
- $x = y = 1$
- $x = -1$ en $y = 1$

Voorbeeld
11^3 kun je met het binomium van Newton eenvoudig als volgt uitrekenen:
$11^3 = (10+1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 1331.$

32 Gebruik zo ook de driehoek van Pascal om

a 11^4 te berekenen,
b en ook 101^2, 101^3 en 101^4 te berekenen,
c en om 9^3 te berekenen.

Hint 1.

Dat het binomium van Newton een juiste formule is, kun je ook inzien door gewoon haakjes uit te werken.

- $(x+y)^2 = (x+y)\,x + (x+y)\,y = xx + yx + xy + yy$
- $(x+y)^3 = (x+y)(xx+yx+xy+yy) =$
  $xxx + xyx + xxy + xyy + yxx + yyx + yxy + yyy$
- $(x+y)^4 = (x+y)(xxx+xyx+xxy+xyy+yxx+yyx+yxy+yyy) =$

  $xxxx{+}xxyx{+}xxxy{+}xxyy{+}xyxx{+}xyyx{+}xyxy{+}xyyy{+}$
  $yxxx{+}yxyx{+}yxxy{+}yxyy{+}yyxx{+}yyyx{+}yyxy{+}yyyy$

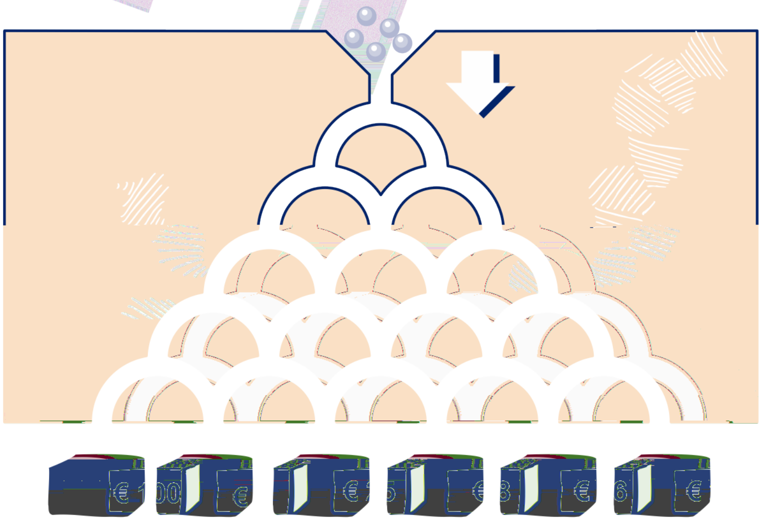
33 Je schrijft op soortgelijke wijze $(x+y)^5$ uit.

a Hoeveel termen krijg je?
b Hoeveel van die termen zijn er gelijk aan x^5? En aan x^4y? En aan x^3y^2? En aan x^2y^3? En aan xy^4? En aan y^5?
c Kloppen de resultaten met het binomium van Newton?

Een formule voor de verwachtingswaarde

34

Hieronder staat schematisch het inwendige van een speelautomaat. Bovenaan wordt in de trechter een balletje losgelaten. Dat rolt naar beneden en komt onderaan in een van de bakjes terecht. De speler ontvangt het bedrag dat op het bakje geschreven staat. We gaan ervan uit dat een balletje bij elke splitsing met gelijke kans naar links of naar rechts gaat.



Stel dat dit spel per jaar 40.000 keer gespeeld wordt.

a Hoe vaak zou je het balletje in het bakje €100,– verwachten? En hoe vaak in elk van de andere bakjes?

b Hoeveel zou de eigenaar van de automaat naar verwachting per jaar moeten uitbetalen?

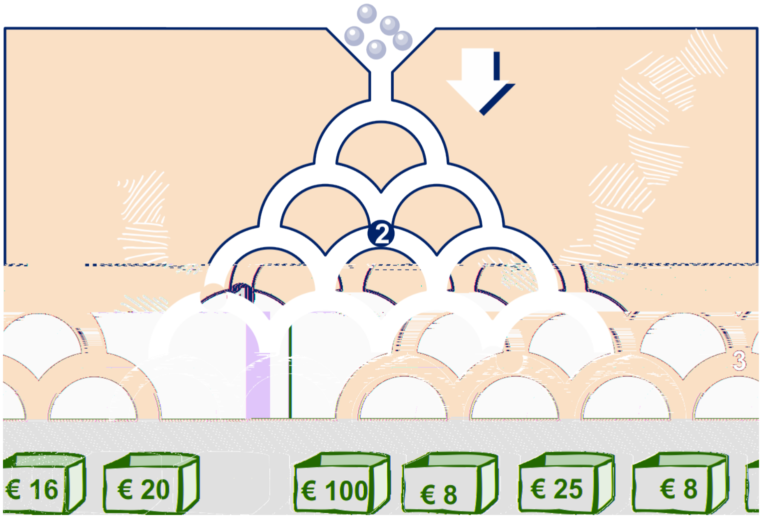
Natuurlijk zal hij niet precies het bedrag uit onderdeel **b** moeten uitbetalen.

c Wat is in theorie het maximale bedrag dat de eigenaar per jaar zou kunnen moeten uitbetalen? En het theoretisch minimale bedrag?

Om dit spelletje te mogen spelen moet je €15,– betalen.

d Is dit een aantrekkelijke prijs voor een speler om te spelen?

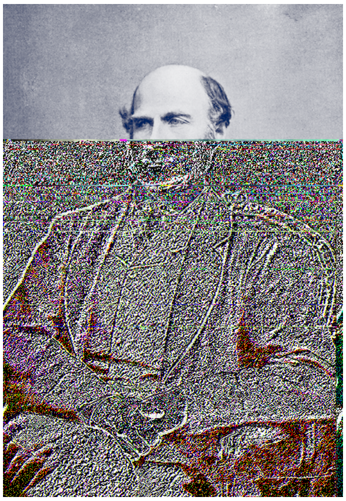
Na enige tijd verandert de eigenaar het spel. Op drie plaatsen zet hij een “stop”. Rolt het balletje daarin dan stopt het spel en er wordt niets uitbetaald. Het inwendige van de speelautomaat ziet er nu uit zoals op de volgende bladzijde te zien is.

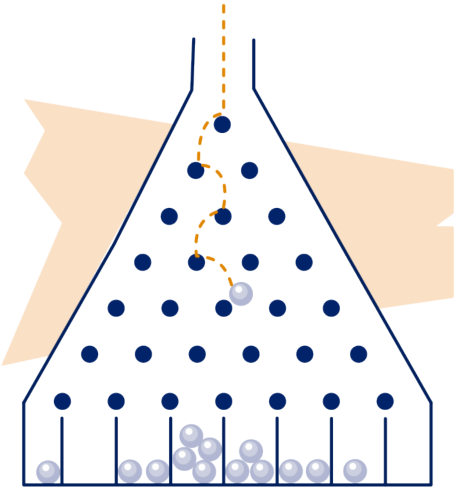


e Hoeveel moet de eigenaar nu naar verwachting per jaar uitbetalen?

f Bij welke inzet is het net niet meer aantrekkelijk om het spel te spelen?

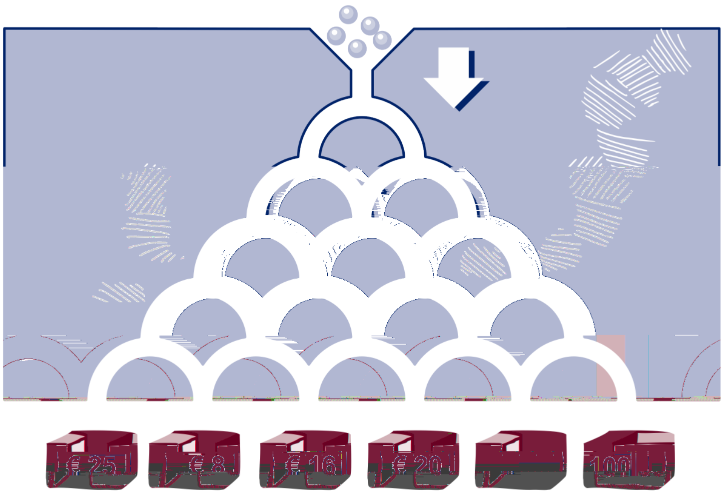
Als we de speelautomaat schematisch weergeven, krijgen we een zogenaamd Galtonbord. Dat bestaat uit een aantal rijen pinnen. Bovenaan worden kogeltjes losgelaten; die vallen via de pinnen naar beneden. Als het een goed bord is, is voor elk kogeltje bij elke pin de kans $\frac{1}{2}$ om naar links of naar rechts te gaan. Onderaan worden de kogeltjes in bakjes opgevangen. In de middelste bakjes zullen de meeste kogeltjes komen, aan de uiteinden de minste.
Het bord is ontworpen door de Britse statisticus sir Francis Galton, en is naar hem genoemd. Het spel in opgave 34 is gebaseerd op dit idee.


Sir Francis Galton (1822-1911)



35 Ga naar VU-Stat, Kansrekenen, Bord van Galton.
Maak een paar simulaties op borden van verschillende aantallen rijen. Varieer ook de kans dat een kogeltje naar rechts valt.

36 We bekijken opnieuw het spel van opgave 34.



In de tabel hieronder staan de kansen op de verschillende uitbetalingen.

uitbetaling	100	8	25	16	20
kans	$\frac{1}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Stel dat er 160 keer gespeeld wordt.

a Hoe groot is dan naar verwachting de totale uitbetaling?
b Wat is de gemiddelde uitbetaling per keer?
c Wat is de gemiddelde uitbetaling per keer als er n keer gespeeld wordt?

37 Chuck-a-luck is een spelletje op Amerikaanse kermissen. Tegen een inzet van 1 dollar mag je met drie dobbelstenen gooien. Valt geen van de dobbelstenen op ’zes’ dan ben je je inzet kwijt. In de andere gevallen krijg je de inzet terug plus een dollar voor elke zes die je gooide. De exploitant van dit spelletje op de kermis is natuurlijk geïnteresseerd hoeveel hij kan verdienen met dit spel. De inkomsten zijn duidelijk: $\$1$ per spel. De uitgaven liggen minder vast. Die variëren: 0, 2, 3 of 4 dollar. Hij maakt een tabel met de kansen op de verschillende uitgaven per spel.

Uitbetaling	$\$0$	$\$2$	$\$3$	$\$4$
kans				

a Bereken de kansen.

b Bereken hoeveel de exploitant naar verwachting gemiddeld per spelletje verdient.

Hint 2.

De stochast X neemt n verschillende waarden aan: $x_1, x_2, ..., x_n$.
De bijbehorende kansen zijn $p_1, p_2, ..., p_n$.
Dan is $\text{E}(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... p_n \cdot x_n$ de **verwachtingswaarde** van X.
$\text{E}(X)$ kun je zien als een theoretisch gemiddelde: je neemt het gemiddelde van de mogelijke waarden, rekening houdend met de kansen waarmee ze voorkomen.
Als je het experiment bij herhaling uitvoert, zal de gemiddelde waarde (hoogst waarschijnlijk) dicht bij $\text{E}(X)$ liggen.
De letter E komt van expectatio.

Als je de **tabel van de kansverdeling** kent (zoals in opgave 36):

waarde	x_1	x_2	...	x_n
kans	p_1	p_2	...	p_n

kun je de verwachtingswaarde dus eenvoudig uitrekenen: vermenigvuldig elk van de mogelijke uitkomsten met de kans op die uitkomst en tel vervolgens de producten op.

Niet alleen bij spelletjes wordt de gemiddelde winst die je naar verwachting boekt, berekend. We gaan hiervan enkele voorbeelden bekijken.

38 Een druiventeler kan kiezen uit twee manieren van oogsten.

- Direct oogsten als de druiven rijp zijn.
  De winst per kg is dan €1,50. Aan deze manier van oogsten is geen risico verbonden.
- Twee weken wachten met oogsten als de druiven rijp zijn.
  Hierdoor worden de druiven voller van smaak en zijn dan meer waard: de winst wordt €2,00 per kg. Aan deze manier zit wel een risico. Als het gaat regenen in de extra twee weken, worden de druiven namelijk aangetast en worden ze minder waard. De winst is dan nog slechts €0,75 per kg.

De kans dat het in de betreffende periode van twee weken regent is 0,3.

Bekijk een periode van 20 jaar.

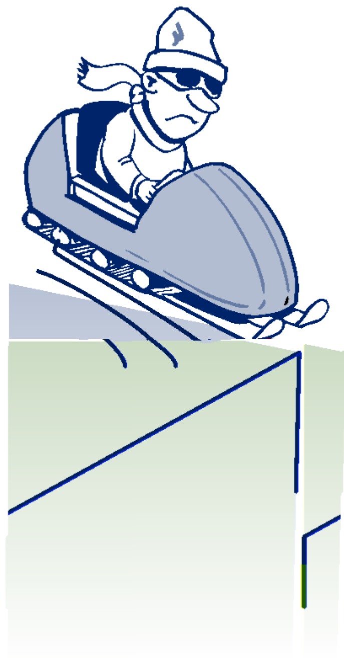
a Laat zien dat de te verwachten winst per kg bij de tweede manier groter is dan €1,50.

Als de winst van de aangetaste druiven veel lager wordt dan €0,75, is het voordeliger voor de teler om de eerste manier te kiezen.

b Bereken vanaf welke winst per kg voor de aangetaste druiven hij beter voor de eerste manier kan kiezen.

39

Bij wintersportvakanties gebeurt nogal eens een ongeluk. Daarvoor kun je je verzekeren. Om de verzekeringspremie te bepalen schatten verzekeringsmaatschappijen de kans op een ongeluk aan de hand van historische gegevens. Ongeveer 6% van alle wintersporters raakt in meer of mindere mate gewond. De behandelingskosten variëren van enkele tientjes tot duizenden euro's; gemiddeld liggen de kosten per gewonde rond de 4000 euro.



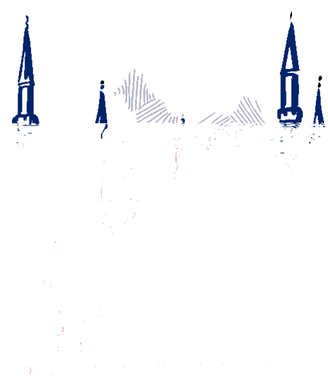
Per jaar gaan 100.000 Nederlanders op wintersport. Laten we aannemen dat ze zich allemaal bij één verzekeringsmaatschappij verzekeren en dat deze maatschappij geen winst hoeft te maken.

a Hoe hoog zal de verzekeringspremie per persoon moeten zijn, opdat de verzekerings maatschappij de verwachte kosten kan betalen?

Stel dat slechts de helft van de wintersporters zich verzekert.

b Wat is nu de hoogte van de premie?

40



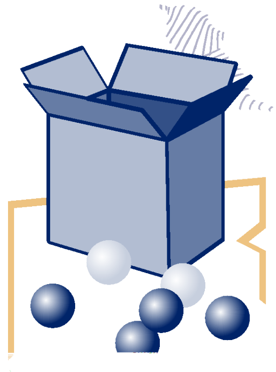
Reisbureaus bieden vlak voor vertrek zogenaamde last minutereizen aan. Ze proberen door de prijzen te verlagen het vliegtuig en/of hotel op die manier alsnog vol te krijgen. Reizen die normaal bijvoorbeeld €800,– kosten, kunnen dan geboekt worden voor €550,–. Wie zou dat niet willen? Maar dit kan alleen als er nog plaatsen over zijn. Dus als je gokt op zo'n last minuteaanbieding, loop je het risico dat er geen plaats is.

Familie Jansen telt vier personen en wil komende zomer naar Turkije. Zo'n reis kan in april geboekt worden voor €800,– per persoon. Vorig jaar zomer zag de familie een last minuteaanbieding van deze reis voor €550,– per persoon. Neem aan dat de kans 0,60 is dat deze aanbieding dit jaar weer komt (met plaats voor vier personen). Als de aanbieding niet komt, zal de familie, om toch naar Turkije te kunnen, een duurdere lijnvlucht moeten boeken van €900,– per persoon.

Welk advies zou jij de familie Jansen geven: in april boeken of wachten tot de zomer? Ondersteun je advies met verwachtingswaarden.

2.4 Verwachting

41



In een doos zitten zes ballen: twee witte en vier zwarte. Uit die doos nemen we aselect drie ballen. X is het aantal witte ballen als met terugleggen getrokken wordt, Y is het aantal witte ballen als er zonder terugleggen getrokken wordt.

a Geef in een tabel de kansverdeling van X en bereken E(X).

b Geef in een tabel de kansverdeling van Y en bereken E(Y).

42

Anne speelt Mens-erger-je-niet. Ze heeft geen pionnen op het speelbord. Zodra ze een zes heeft gegooid met de dobbelsteen, mag ze een pion op het bord zetten. Daar zit ze dus op te wachten. Het kan zijn dat ze meteen de eerste beurt een zes gooit (dan heeft ze geluk), maar het kan ook zijn dat ze een heleboel beurten moet wachten alvorens haar dobbelsteen 6 ogen geeft.
Het aantal beurten dat Anne nodig heeft om een zes te gooien noemen we X.

a Wat is de kans dat X gelijk is aan 3?

b Welke waarden kan X aannemen?

c Maak een tabel van de kansverdeling van X voor de eerste vijf waarden.

d Hoe groot is de kans dat X groter is dan 8?

e Hoe groot schat jij dat E(X) is?

f Controleer je schatting met een simulatie: ga naar VU-Stat, Simulaties, Random Generator, Gooien tot (bij Model).

In onderdeel **f** heb je een idee gekregen hoe groot de verwachtingswaarde E(X) ongeveer is.
Het is niet eenvoudig E(X) exact te berekenen. Daarvoor gebruiken we een speciale truc.
Anne gaat beginnen; het duurt gemiddeld E(X) beurten voordat ze de eerste zes gooit. Er kunnen twee dingen gebeuren.

- Anne werpt meteen een zes; dan duurt het 1 beurt. Dit gebeurt met kans $\frac{1}{6}$.
- Of Anne werpt niet meteen een zes; dan duurt het gemiddeld nog E(X) beurten, dus in totaal E(X) $+ 1$ beurten. Dit gebeurt met kans $\frac{5}{6}$.

Dus is de gemiddelde duur $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot (\text{E}(X) + 1)$.
We hebben nu de vergelijking $\text{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot (\text{E}(X) + 1)$.

g Bereken hieruit E(X).

De somregel voor verwachtingswaarden

43 In twee warenhuizen is gedurende een doordeweekse dag bijgehouden hoelang de mensen met hun boodschappen voor de kassa moesten wachten, afgerond op halve en hele minuten.

wachttijd in minuten	0	0,5	1	1,5	2
percentage klanten in winkel A	20	10	20	25	25
percentage klanten in winkel B	0	40	40	20	0

Zo moesten bijvoorbeeld in winkel A 20% van de klanten 1 minuut wachten. Met deze gegevens maken we een model: we nemen aan dat bovenstaande verdeling voor iedere doordeweekse dag geldt. Voor iedere klant geldt in dit model dus dat de kans dat hij 1 minuut in winkel A moet wachten $0{,}20$ is. Voor de andere wachttijden en voor winkel B worden op dezelfde wijze de kansen gedefinieerd.

a Bereken de verwachtingswaarde van de wachttijd voor winkel A. Ook voor winkel B.

Een klant bezoekt beide winkels.

b Bereken de kans dat hij in de winkels even lang moet wachten.

De totale wachttijd W voor iemand die beide winkels bezoekt, varieert van $0{,}5$ tot en met $3{,}5$ minuut.

c Maak een tabel van de kansverdeling van W.

d Bereken de verwachtingswaarde van W.

De som van je twee antwoorden van **a** is – als het goed is – exact gelijk aan je antwoord van **d**. Als je daar even over nadenkt, is dat nogal logisch.

e Waarom?

44 Op een dobbelsteen is de som van de ogen op twee tegenover elkaar liggende kanten 7. Het aantal ogen dat boven komt noemen we X, het aantal ogen dat onder komt Y.
Verder bekijken we de som $S = X + Y$.

a Hoe groot is Y, als $X = 2$?

b Welke waarden kan X aannemen? En Y? En welke waarden kan S aannemen?

c Bereken E(X), E(Y) c

45 Iemand werpt met twee dobbelstenen. X_1 is het aantal ogen dat hij met de ene dobbelsteen werpt en X_2 het aantal ogen met de andere dobbelsteen.
$S = X_1 + X_2$ is de som van de aantallen ogen. Zie opgave 7 voor de kanstabel voor S.

a Hoe groot is $\text{E}(X_1)$? En hoe groot is $\text{E}(X_2)$?
b Bereken $\text{E}(S)$.
c Geldt $\text{E}(S) = \text{E}(X_1) + \text{E}(X_2)$?

De somregel voor verwachtingswaarden
De verwachtingswaarde van de som van twee stochasten is gelijk aan de som van de verwachtingswaarden van de twee afzonderlijke stochasten. Dit geldt ook als een uitkomst van de eerste stochast van invloed is op de uitkomst van de tweede (zie opgave 44) en geldt ook bij de som van meer dan twee stochasten.

Als $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$, dan $\text{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \text{E}(X_k)$.

Deze somregel maakt berekeningen vaak veel eenvoudiger. Bijvoorbeeld bij opgave 45 wisten we dat $\text{E}(X_1) = \text{E}(X_2) = 3{,}5$; zonder de kansverdeling van $S = X_1 + X_2$ uit te rekenen, weten we dat $\text{E}(S) = \text{E}(X_1) + \text{E}(X_2) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$.
In opgave 13**d** hebben we door simulatie de verwachtingswaarde van de som van de ogen bij drie dobbelstenen kunnen schatten. Met de somregel weten we nu dat die verwachtingswaarde precies $10{,}5$ is.

46 De verwachtingswaarde van het aantal geboortes per dag is in Nederland 482 (gegevens van 2010 t/m 2015).

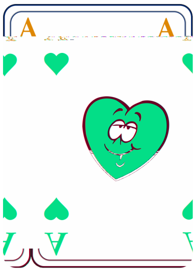
a Wat is de verwachtingswaarde van het aantal geboortes in een week?
b Wat heeft dit met bovenstaande somregel te maken?
c Wat is de verwachtingswaarde van het aantal geboortes per uur?
d Wat heeft dit met bovenstaande somregel te maken?

47 Peter heeft de vier azen van een kaartspel in de hand. Anne en Egon trekken na elkaar een kaart, zonder te zien welke. Anne eerst. Als ze beide getrokken hebben mogen ze kijken welke aas ze getrokken hebben.

a Wie heeft de meeste kans op hartenaas, denk je?

De kans dat Anne hartenaas trekt is $\frac{1}{4}$.
b Bereken met een kansboom de kans dat Egon hartenaas trekt.

48 Bridge wordt gespeeld met een pak van 52 kaarten, waaronder dertien hartenkaarten. Een speler krijgt hieruit dertien kaarten. Het aantal hartenkaarten dat hij bij de eerste kaart krijgt is natuurlijk 0 of 1.



a Wat is de verwachtingswaarde van het aantal hartenkaarten bij de eerste kaart?

De verwachtingswaarde van het aantal hartenkaarten bij de zesde kaart is hetzelfde. Dat is logisch want de zesde kaart is met dezelfde kans een harten als de eerste, zie ook de voorgaande opgave.

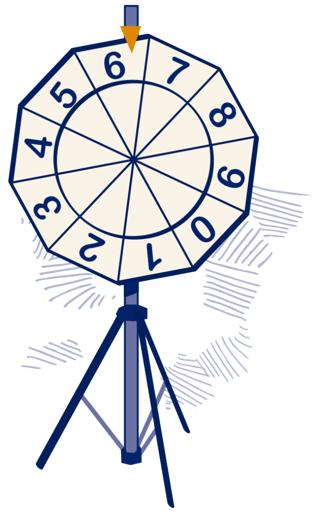
b Wat is de verwachtingswaarde van het aantal hartenkaarten bij de dertiende kaart.

c Wat is de verwachtingswaarde van het aantal hartenkaarten dat de speler krijgt?

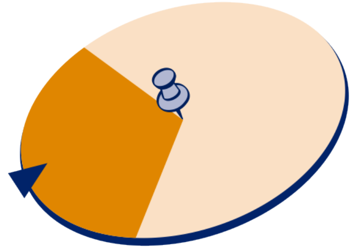
49 Op een draaiwiel staan, elk in een sector van $36°$, de cijfers 0, 1, ..., 9. Dit wiel wordt zes keer rondgedraaid. Hoe groot is de kans:

a op zes verschillende cijfers?
b op zes keer hetzelfde cijfer?
c dat er geen 8 bij is?
d dat er minstens één 8 bij is?
e dat alleen de eerste twee cijfers 8 zijn?
f dat er precies twee cijfers 8 bij zijn?
g dat er precies twee cijfers 8 zijn die bovendien na elkaar komen?

Hint 3.



50



e Controleer of de som van de kansen (ongeveer) 1 is.

f Beschrijf het draaiwiel waarmee het gooien met deze dobbelsteen te simuleren is.

Veel opgaven in deze paragraaf zijn wiskundig gezien hetzelfde. Bij een experiment zijn er twee mogelijke uitkomsten: "succes" en "mislukking". Dit experiment wordt n keer (onafhankelijk van elkaar) herhaald, steeds met dezelfde kans op succes p.
Elk rijtje met precies k successen heeft kans $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ en er zijn $\binom{n}{k}$ van zulke rijtjes.
De kans op k successen is dus: $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.
Noemen we het totaal aantal successen X, dan is
$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.
We zeggen dat X **binomiaal verdeeld** is.
Binomiaal betekent letterlijk tweetermig. Dat heeft te maken met het feit dat er twee alternatieven zijn: succes en mislukking.

Voorbeeld
Bij 5 herhalingen, steeds met succeskans $0{,}4$, is de kans op 2 successen:
$\binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3$.
Zoek uit hoe je deze binomiale kans met de GR kunt berekenen. Waarschijnlijk kom je de term pdf tegen. Die staat voor probability distribu t on func t on.

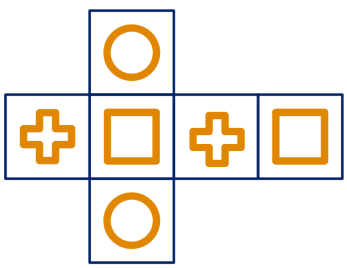
53 Een poes heeft zes jongen gekregen.

a Hoe groot is de kans dat er evenveel katers als poezen zijn?

b Hoe groot is de kans dat er meer katers dan poezen zijn?

c Hoe groot is de kans dat er zowel katers als poezen zijn?

54 Een spel bevat negen identieke dobbelstenen. Elke dobbelsteen heeft twee zijvlakken met een rondje, twee met een kruis en twee met een vierkant. Hiernaast is een uitslag van zo'n dobbelsteen getekend. Men werpt de negen dobbelstenen tegelijk en kijkt dan welke figuren boven liggen.



a Bereken de kans op allemaal gelijke figuren.

b Bereken de kans op precies drie rondjes.

c Bereken de kans op drie rondjes, drie kruisen en drie vierkanten.

Volgens de kans bij **c** treedt gemiddeld bij ongeveer één op 12 worpen (met negen dobbelstenen) de mooie configuratie met drie rondjes, drie kruisen en drie vierkanten op.

d Bereken de kans dat dit in 12 worpen precies één keer gebeurt.

55 Van de penalty's bij voetballen in de eredivisie wordt 70% benut, wordt 20% door de keeper gestopt en wordt 10% over of naast geschoten.

a Wat is de kans dat van de eerstvolgende 10 penalty's er precies 3 gemist (= niet benut) worden?

Je hebt gehoord dat er afgelopen weekend liefst 7 penalty's werden gemist.

b Bereken de kans dat er daarvan precies 4 door de keeper werden gestopt.

Er zijn op een avond maar twee wedstrijden gespeeld. Je hebt gehoord dat er die avond liefst 7 penalty's zijn gegeven. Neem aan dat elke club met dezelfde kans een penalty krijgt.

c Bereken de kans dat precies 4 van de penalty's aan eenzelfde club werden gegeven.

56 Een kolom van het totoformulier vul je in door bij elk van de dertien wedstrijden één van de hokjes 1, 2 of 3 aan te kruisen. (1 betekent "de thuisspelende club wint", 2 betekent "de uitspelende club wint" en 3 betekent "gelijkspel".) Neem aan dat elke wedstrijd met kans $\frac{1}{3}$ goed voorspeld wordt. Johan vult één kolom in.

a Bereken de kans dat hij precies vijf wedstrijden juist voorspelt.

b Bereken de kans dat hij geen enkele wedstrijd juist voorspelt.

Als je alle 13 wedstrijden goed voorspelt, dan win je de Jackpot. Bij 12 wedstrijden goed win je de tweede prijs en bij 11 wedstrijden goed de derde prijs. Bij minder dan 11 goede voorspellingen win je niets.

c Bereken de kans dat Johan een prijs wint.

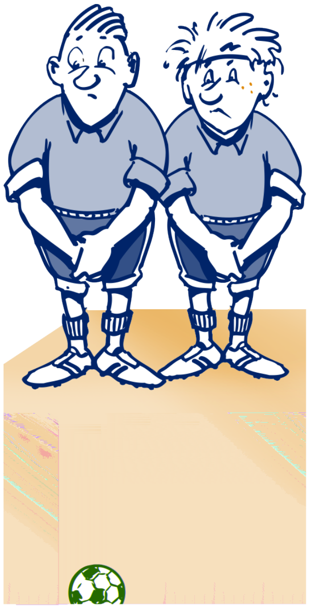
57 In het seizoen 2009-2010 werden in de eredivisie 306 wedstrijden gespeeld. Daarvan werden er 153 gewonnen door de thuisclub, 91 werden verloren door de thuisclub en 62 eindigden in een gelijkspel. Op grond van deze aantallen mag je wel zeggen dat een willekeurige thuisclub met 50% kans wint, met 30% kans verliest en met 20% kans gelijkspeelt. Neem aan dat deze percentages ook dit seizoen gelden. We kijken naar de negen eredivisiewedstrijden in een bepaald weekend.

a Bereken de kans dat vier van de negen wedstrijden worden gewonnen door de thuisclub.

b Bereken de kans dat de thuisclubs vier wedstrijden winnen en er drie verliezen en dat twee wedstrijden eindigen in een gelijkspel.

c Bereken de kans dat geen enkele wedstrijd eindigt in een gelijkspel.

d Bereken de kans dat drie wedstrijden eindigen in winst voor de thuisclub, drie in verlies voor de thuisclub en drie in een gelijkspel.



58

Rikken wordt gespeeld met een volledig spel van 52 kaarten. Elk van de vier spelers krijgt bij deling 13 kaarten. We letten op de verdeling van de 4 azen over de spelers. De kans dat elk van de spelers één aas krijgt is ongeveer $0{,}1055$. We zeggen dat de azen dan "rond zitten". We bekijken de verdeling van de azen in 10 opeenvolgende spellen.

a Bereken de kans dat de azen precies één keer rond zitten.

b Bereken de kans dat de azen hoogstens twee keer rond zitten.

c Bereken de kans dat de azen minstens twee keer rond zitten.

59

De azen kunnen bij Rikken op vijf manieren over de vier spelers verdeeld zijn. De eerste manier is de 1-1-1-1-verdeling (elke speler heeft één aas) met kans $0{,}1055$, de tweede manier is de 2-1-1-0-verdeling met kans $0{,}5843$, de derde manier is de 3-1-0-0-verdeling met kans $0{,}1648$, de vierde manier is de 2-2-0-0-verdeling met kans $0{,}1348$ en de vijfde manier is de 4-0-0-0-verdeling (één speler heeft alle azen) met kans $0{,}01056$. We bekijken weer de verdeling van de azen in 10 opeenvolgende spellen.

a Bereken de kans dat bij vier spellen de azen bij hoogstens twee spelers zitten.

b Bereken de kans dat bij minstens één spel de azen bij één speler zitten.

c Bereken de kans dat de tweede manier hoogstens drie keer voorkomt.

d Bereken de kans dat de eerste manier één keer voorkomt, de tweede manier zeven keer en de derde manier twee keer.

e Bereken de kans dat de eerste manier één keer voorkomt, de tweede manier zeven keer, de derde manier één keer en de vierde manier één keer.

Als X het aantal azen is dat een van de spelers krijgt, dan staat P($X \leq 3$) voor de som van de kansen: P($X = 0$), P($X = 1$), P($X = 2$) en P($X = 3$). We noemen P($X \leq 3$) een **cumulatieve kans**. Cumula t ef betekent bij elkaar opgeteld, opstapelend.

Cumulatieve kansen bij een binomiaal kansexperiment kun je ook met de GR berekenen.
Zoek uit hoe dat op jouw apparaat gaat, door de antwoorden in

Opmerking
Merk op dat zowel op de TI als op de Casio alleen binomiale kansen van het type P($X = k$) of P($X \leq k$) kunnen worden berekend. Met behulp van het feit dat de som van de kansen gelijk is aan 1 kunnen ook andere binomiale kansen worden berekend. Zo is bijvoorbeeld P($X \geq 8$) $= 1 -$ P($X \leq 7$) en P($X > 12$) $=$ P($X \geq 13$) $= 1 -$ P($X \leq 12$).

60 Een binomiaal kansexperiment heeft 14 herhalingen en succeskans 0,3. X is het aantal successen.
Bereken met de GR de volgende kansen:
a P($X \geq 7$)
b P($X < 8$)
c P($1 < X < 5$)
d P($3 \leq X \leq 10$)

61 We werpen tien keer met een dobbelsteen en letten op het aantal zessen in die tien worpen.
Hoe groot is de kans dat er minstens drie zessen bij zijn?

62 Zo'n 10% van de auto's die over de Nederlandse wegen razen, heeft technische gebreken. Regelmatig worden door de politie uitgebreide technische keuringen uitgevoerd langs de kant van de autoweg.

De politie controleert op zekere dag 250 auto's.
a Hoe groot is de kans dat er bij meer dan dertig auto's gebreken worden geconstateerd?

Gemiddeld 1 op de 500 auto's is zo gammel dat hij van de weg wordt gehaald en naar de sloper gebracht.
b Hoe groot is de kans dat bij 250 controles er minstens één auto rijp is voor de sloop?

Het Nederlandse wagenpark telt zo'n 7 miljoen automobielen. Als de verkeerspolitie 250 verschillende auto's uitkiest, dan wil dat zeggen, dat ze eigenlijk werkt zonder terugleggen. Omdat de populatie waaruit getrokken wordt zo groot is, maakt het nauwelijks uit of de trekking met of zonder terugleggen gebeurt. In de volgende opgave bekijken we wat het verschil is bij relatief kleine en bij relatief grote populaties.

63

Uit een vaas met 5 witte en 10 rode ballen worden 3 ballen getrokken. We willen de kans op twee witte ballen weten.

a Bereken die kans als de trekking met terugleggen gebeurt in vier decimalen.

b Bereken die kans als de trekking zonder terugleggen gebeurt in vier decimalen.

Uit een vaas met 50 witte en 100 rode ballen worden 3 ballen getrokken. We willen weten wat de kans is op 2 witte ballen.

c Bereken die kans als de trekking met terugleggen gebeurt in zes decimalen.

d Bereken die kans als de trekking zonder terugleggen gebeurt in zes decimalen.

e Wat valt je op?

Hypergeometrisch ≈ binomiaal

Als het aantal trekkingen klein is ten opzichte van de totale populatie, dan kun je kansen zonder terugleggen (hypergeometrisch) praktisch berekenen alsof de trekking met terugleggen gebeurt (binomiaal). En dat is vaak handiger.

64

Bij een eerlijke munt zijn de kansen op "kop" en "munt" gelijk. Je mag dus verwachten dat in ongeveer 50% van de worpen "kop" zal worden gegooid. De kans is groot dat het aantal keer kop ten minste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.

We doen 10 worpen.

a Bereken de kans dat het aantal keer "kop" ten minste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.

b Dezelfde vraag voor 20 worpen, voor 50 worpen en voor 100 worpen.

Hoe groter het aantal worpen, des te groter de kans dat het aantal keer "kop" tussen de 40% en 60% ligt.

c Kun je dat verklaren?

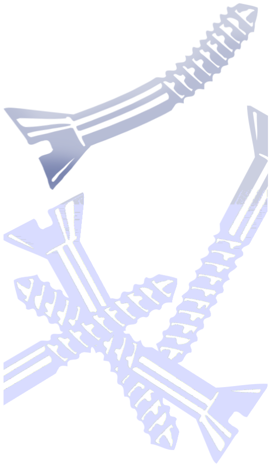
65 Bij een landelijk onderzoek is gebleken dat 15% van alle middelbare scholieren regelmatig spijbelt.

a Hoe groot is de kans dat in een vwo5-klas van 20 leerlingen er meer dan 4 zijn die regelmatig spijbelen?

Bij vraag **a** heb je een binomiale kans berekend. Maar hebben we hier wel te doen met een binomiaal kansexperiment?

b Waarom is dat twijfelachtig?

66 In een bedrijf worden schroeven gefabriceerd. Volgens de bedrijfsleider is 5% van de productie niet bruikbaar. De slechte exemplaren worden niet verwijderd, omdat de controle op bruikbaarheid te veel geld kost. De schroeven worden in doosjes van 50 stuks verkocht aan de winkeliers.



a Hoe groot is de kans dat een doosje meer dan vier onbruikbare schroeven bevat?

Een winkelier heeft een partij van 500 doosjes schroeven besteld bij de fabriek.

b Hoeveel doosjes met 50 bruikbare schroeven kan hij daarbij verwachten?

67 Een docent geeft een multiplechoicetest die bestaat uit twintig vierkeuzevragen.
Stel dat hij voor elke goed beantwoorde vraag een half punt toekent.

a Hoe groot is de kans dat iemand die alle antwoorden gokt als cijfer een 4 of hoger krijgt?

De docent vindt dat een gokker ten hoogste 1% kans mag hebben om een 4 of hoger te halen.

b Bij welk aantal goede antwoorden moet hij dan het cijfer 4 toekennen?

Willekeurig?

68 Nederlandse volwassen mannen zijn gemiddeld 1,81 meter.
Bij een congres in Utrecht over biometrie werd de lengte van de deelnemers gevraagd. Er antwoordden 37 mannelijke deelnemers; 24 van hen waren langer dan 1,81 cm.

a Bereken de kans op een resultaat van ten minste 24 mannen die langer dan gemiddeld zijn bij een groep van 37 willekeurige Nederlandse mannen.

b Zou je – op basis van je antwoord bij **a** – de groep deelnemers aan het congres “willekeurig” willen noemen?

69 Er zijn 154 vwo4-leerlingen op het Amalia College, waarvan 69 jongens en 85 meisjes. 43 van de leerlingen hebben wiskunde A/C en 111 hebben wiskunde B. Op grond hiervan veronderstellen we dat de kans dat een willekeurige leerling wiskunde A/C kiest $\frac{43}{154} \approx 0{,}279$ is.

a Bereken de kans dat van de 69 jongens er 13 of minder wiskunde A/C kiezen.

b Bereken ook de kans dat van de 85 meisjes er 30 of meer wiskunde A/C kiezen.

Op het Amalia College hadden 13 jongens wiskunde A/C gekozen en 30 meisjes.

c Zou je de vwo4-leerlingen op het Amalia College “willekeurig” willen noemen?

Als men een verzameling objecten onderzoekt (bijvoorbeeld de lengte van mensen, de kwaliteit van eieren of de neerslag in Nederlandse plaatsen) is het in de praktijk vaak ondoenlijk van elk object het resultaat te meten. In plaats daarvan volstaat men met een deel van de verzameling; dat deel is een zogenaamde **steekproef**. De objecten in de steekproef moeten wel willekeurig worden gekozen, dat wil zeggen elk object moet van tevoren evenveel kans hebben om in de steekproef terecht te komen.

70 Versie NL: Ga naar VU-Stat, Simulatie, Steekproeven
Er zijn vier parameters: geheime propor t e blauw, omvang popula t e, omvang steekproef en aantal steekproeven.
Versie BE: Ga naar VU-Stat, Steekproeven, Steekproeven uit janee populatie. Er zijn hier drie parameters: deel groen, omvang popula t e en omvang steekproef.

a Kies zelf waarden voor de parameters en voer enkele simulaties uit.

b Klopt het resultaat met wat je vooraf zou verwachten?

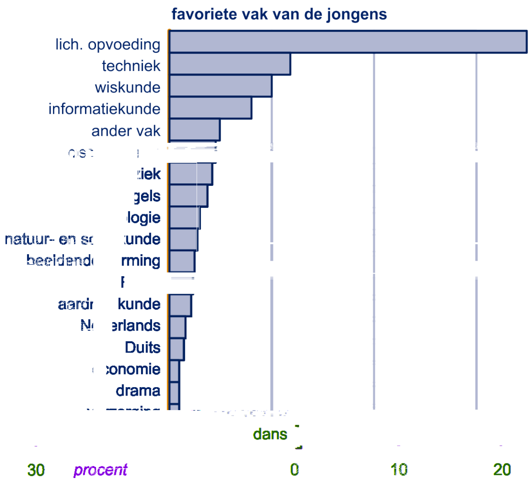
Kies geheime propor t e blauw of deel groen is $0{,}28$, omvang popula t e is 10.000, omvang steekproef is 69 en aantal steekproeven is 100 of voer handmatig 100 steekproeven uit.

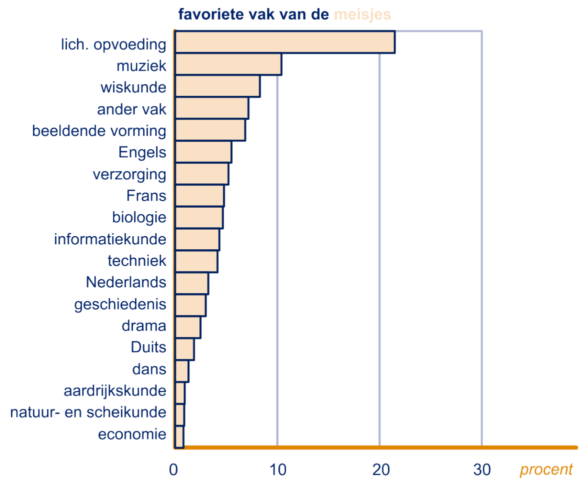
c Hoe vaak is het resultaat 13 of minder?
Komt dat overeen met het antwoord van opgave 69**a**?

Doe hetzelfde als bij **c**, maar nu met omvang steekproef is 85.

d Hoe vaak is het resultaat 30 of meer?
Komt dat overeen met het antwoord van opgave 69**b**?

71 In 2000 is in Nederland de massale enquête Nationale Doorsnee gehouden onder eerste- en tweedeklassers van het voortgezet onderwijs.
Onder andere werd gevraagd naar het favoriete schoolvak. Bij 10% van de jongens was dat wiskunde, en ook bij 8% van de meisjes. Laten we zeggen gemiddeld bij 9% van de leerlingen.





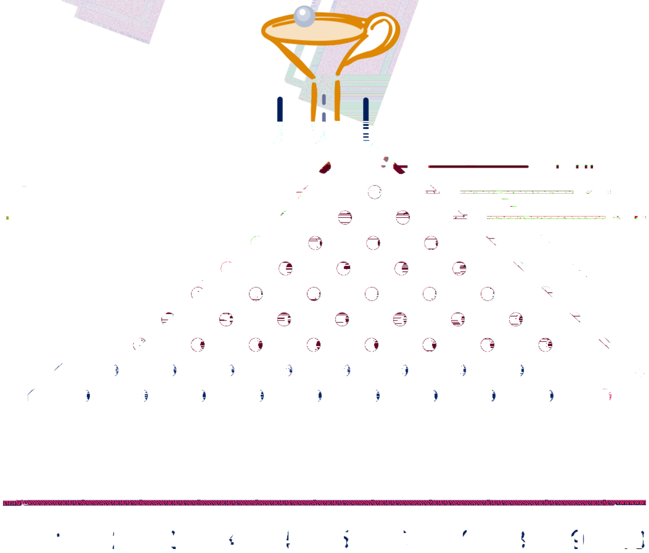
a Hoeveel leerlingen verwacht je in een brugklas van 33 leerlingen voor wie wiskunde het favoriete vak is?

b Wat is de kans dat voor precies 3 leerlingen wiskunde het favoriete vak is?

c Wat is de kans dat in een klas van 33 leerlingen er 6 of meer wiskunde als favoriete vak hebben?

72

Hieronder staat schematisch het bord van Galton. Een balletje wordt boven in de trechter losgelaten en valt over de pinnen naar beneden. Als het balletje op zo'n pin komt, valt het met even grote kans naar links als naar rechts. Na 10 keer een pin geraakt te hebben, komt het balletje in een van de elf bakjes onderaan het bord.
De bakjes zijn genummerd van 0 tot en met 10.



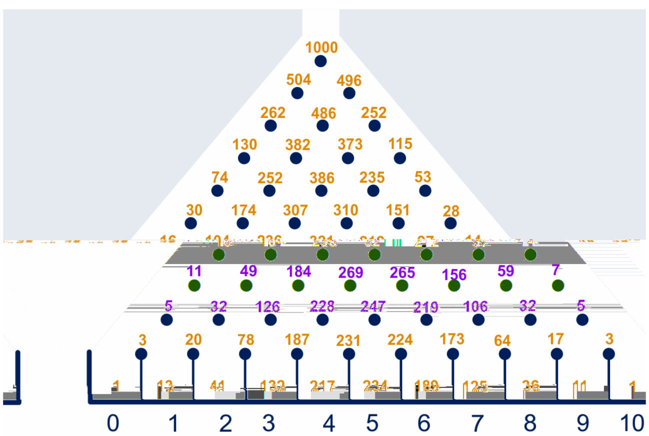
a Hoeveel routes leiden er naar bakje 3?

Een balletje raakt op zijn weg naar beneden de derde pin van links op de zevende rij.

b In welke bakjes kan het balletje dan nog terecht komen?

73

Hieronder zie je het resultaat van een simulatie op een Galton-bord met 10 rijen. Er zijn 1000 balletjes naar beneden gevallen.

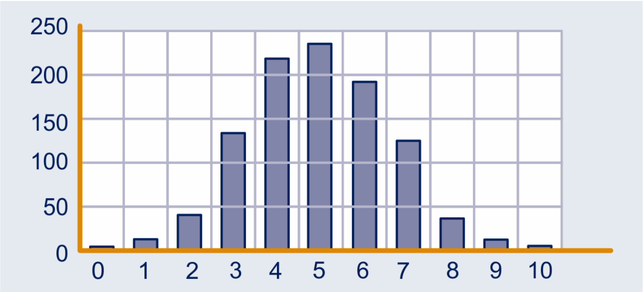


a Hoe groot schat jij op grond van deze simulatie de kans dat een balletje in bakje 3 terecht komt?

Bij een enkel balletje valt absoluut niet te voorspellen welke route het zal volgen. Alle routes zijn namelijk even (on)waarschijnlijk.

b Bereken de kans dat een balletje in bakje 3 terecht komt.

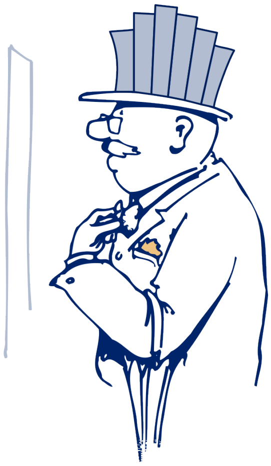
Bij de simulatie met 1000 balletjes kan een histogram gemaakt worden.



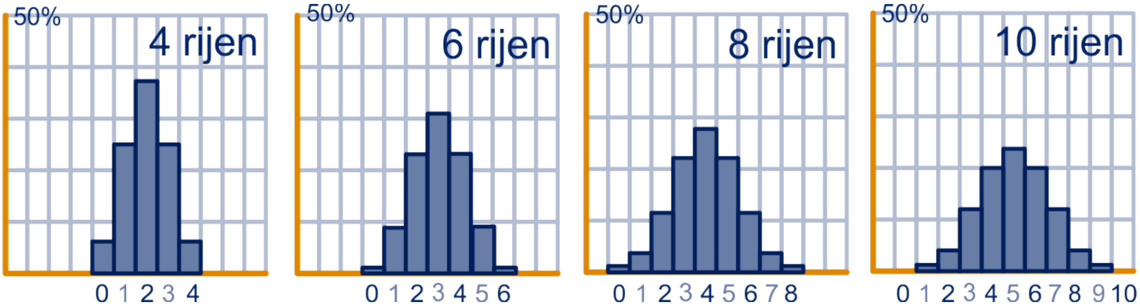
74 Het nummer van het bakje waarin het balletje terecht komt, noemen we X. X is binomiaal verdeeld.

a Maak een tabel van de kansverdeling.

b Teken het bijbehorende kanshistogram.
Vergelijk het met het histogram van de simulatie hierboven.



Je kunt bij Galtonborden met verschillende aantallen rijen pinnen histogrammen maken.



Het is lastig om uit deze histogrammen precieze kansen af te lezen. Voor precieze kansen moet je rekenen.

75 Hoe hoog is in het histogram bij 8 rijen, de balk van bakje 2 precies?

76 Het laten vallen van een balletje in een Galtonbord met n rijen pinnen, is een binomiaal kansexperiment.

a Wat is de succeskans?
Wat is het aantal herhalingen?
Wat is de stochast X: het aantal successen?
Hoe groot is E(X)?

Als het aantal rijen n toeneemt, verandert het kanshistogram van vorm; het blijft niet gelijkvormig!

b Wat verandert er aan de vorm van het kanshistogram?

Bij elk aantal rijen n is het kanshistogram symmetrisch.

c Waar ligt de symmetrie-as?

Het verschil tussen de kanshistogrammen dat bedoeld werd in **b** heeft te maken met de "spreiding". Dat is de mate waarin de waarden van X uit elkaar liggen.

d Als n groter wordt, wordt dan de spreiding groter of kleiner?

In het volgende zoeken we een maat voor de spreiding.

77 Een afwijking bekijk je ten opzichte van de verwachtingswaarde. Dat wil zeggen, bij een waarde k bekijk je de afwijking $|\text{E}(X) - k|$.

a Waarom wordt de absolute waarde gebruikt?

Hieronder staat de kanstabel bij het Galtonbord met $n = 6$.

k	0	1	2	3	4	5	6
P$(X = k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

b Welke waarden nemen de afwijkingen $|\text{E}(X) - k|$ aan? En met welke kans?

c Bereken de verwachtingswaarde van deze afwijkingen.

We gaan preciezer zeggen wat we met spreiding bedoelen. Dat doen we niet alleen voor de binomiale verdeling, maar algemeen.
Zoals gezegd nemen we daarvoor de afwijking ten opzichte van de verwachtingswaarde. Als de kans op een afwijking groot is, zal hij vaker voorkomen dan wanneer de kans op een afwijking klein is. Kansrijke afwijkingen moeten dus een groter "gewicht" hebben dan kansarme afwijkingen. De grootte van het gewicht is

de kans op die afwijking. Daarom lijkt de volgende formule wel redelijk.

$$\text{Vaa}(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k|\text{E}(X) - x_k|.$$

Hierbij zijn de waarden x_k, $k = 0,\ldots, n$ de verschillende waarden die X aan kan nemen en p_k de bijbehorende kansen.
Vaa staat voor verwachte absolute afwijking. Toegepast op het voorbeeld in opgave 77 is deze formule helemaal uitgeschreven:
$\frac{1}{64} \cdot |0-3| + \frac{6}{64} \cdot |1-3| + \frac{15}{64} \cdot |2-3| + \frac{20}{64} \cdot |3-3| + \frac{15}{64} \cdot |4-3| + \frac{12}{64} \cdot |5-3| + \frac{1}{64} \cdot |6-3| = \frac{15}{16}$.

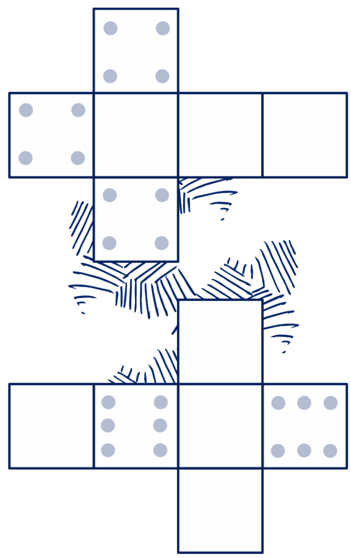
78 Welke uitkomst krijg je als je in de formule de absolutewaardestrepen weglaat en dus werkt met de formule:

$$\text{Vaa}(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k(\text{E}(X) - x_k)?$$

Als je de verwachtingswaarde en de verwachte absolute afwijking kent, ligt de stochast nog niet vast. Maar deze twee gegevens samen zeggen toch wel aardig wat over de stochast. Dit blijkt uit de volgende opgave.

79 In een bak zitten zes kaartjes, elk met een geheel getal erop geschreven. We pakken aselect een kaartje uit de bak. De stochast X is het getal dat op dat kaartje staat. Gegeven is dat $\text{E}(X) = 10$ en $\text{Vaa}(X) = 1$.
Welke getallen staan er op de zes kaartjes? Een van de mogelijkheden is: 8, 9, 10, 10, 11, 12.

80 We bekijken twee "dobbelstenen". De ene heeft drie grensvlakken met 0 ogen en drie grensvlakken met 4 ogen. De andere heeft twee grensvlakken met 6 ogen en vier grensvlakken met 0 ogen. Iemand werpt met beide stenen. Het aantal ogen waarop de eerste steen valt, noemen we X, dat van de andere steen Y.



a Bereken $\text{Vaa}(X)$ en $\text{Vaa}(Y)$.

De stochast $X+Y$ neemt dus de waarden 0, 4, 6 en 10 aan.
b Maak een kanstabel voor $X+Y$ en bereken $\text{Vaa}(X+Y)$.
c Ga na dat $\text{Vaa}(X+Y) \neq \text{Vaa}(X) + \text{Vaa}(Y)$.

Vaa lijkt een goede maat te zijn voor de spreiding. Er is echter een probleem: $\text{Vaa}(X+Y) \neq \text{Vaa}(X) + \text{Vaa}(Y)$. Een spreidingsmaat waarvoor zo'n eigenschap wel zou gelden, heeft grote voordelen. Een spreidingsmaat die deze eigenschap wel heeft is de volgende.

Laat X een stochast zijn die de waarden x_0, $x_1, \ldots x_n$ aanneemt, met kansen p_0, $p_1, \ldots p_n$.

Dan is $\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x_k - \text{E}(X))^2$.

$\text{Var}(X)$ is de zogenaamde **variantie** van X.

Opmerking

Zijn er nu geen absolute-waardestrepen nodig?

81

We gaan verder met opgave 80 .

a Bereken $\text{Var}(X)$ en $\text{Var}(Y)$ voor de stochasten X en Y.

b Bereken ook $\text{Var}(X + Y)$.

c Ga na dat nu wel geldt: $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Somregel voor de verwachtingswaarde

Voor elk tweetal stochasten X en Y geldt:

$\text{E}(X + Y) = \text{E}(X) + \text{E}(Y)$.

In woorden: de verwachtingswaarde van de som is de som van de verwachtingswaarden.

Somregel voor de variantie

Voor elk tweetal ona f ankelijke stochasten X en Y geldt:

$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

In woorden: de variantie van de som is de som van de varianties, mits de stochasten onafhankelijk zijn.

De somregels gelden natuurlijk ook voor drie of meer stochasten.

82

Y is het aantal ogen dat met een dobbelsteen geworpen wordt.

a Ga na met een exacte berekening na dat $\text{Var}(Y) = \frac{35}{12}$.

Pieter werpt met n dobbelstenen. Y_n is de som van het aantal ogen van een worp.

b Geef een formule voor $\text{Var}(Y_n)$.

83

Sophie werpt met een dobbelsteen. X is het aantal ogen aan de bovenkant en Y is het aantal ogen aan de onderkant.

a Hoe groot zijn $\text{E}(X)$, $\text{E}(Y)$ en $\text{E}(X + Y)$?

b Bereken $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$ en $\text{Var}(X + Y)$.

c Is de somregel voor de verwachtingswaarde van toepassing? En de somregel voor de variantie?

84 In een doos zitten zes briefjes. Op drie briefjes staat het getal 5, op twee briefjes staat 10 en op één briefje staat 25. Iemand trekt aselect en met terugleggen twee keer een briefje uit de doos. S is de som van de getrokken getallen.

a Maak een tabel van de kansverdeling van S.

b Bereken exact E(S) en Var(S).

85 We gaan verder met opgave opgave 84. X is het getal op het eerste briefje, Y is het getal op het tweede briefje dat getrokken wordt. Dus $S = X + Y$.

a Maak een tabel van de kansverdeling van Y.

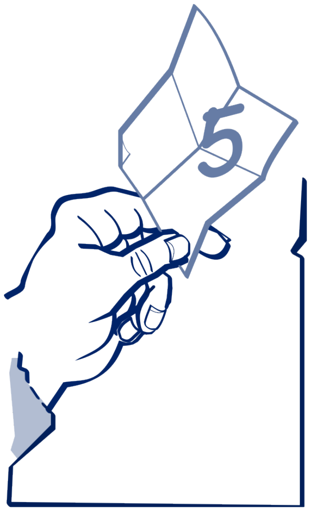
b Bereken E(Y) en Var(Y).

c Is aan de voorwaarde "mits..." in de somregel voor de variantie voldaan? Geldt dus Var(S) = Var($X + Y$)?

86 We werken met dezelfde doos als in opgave 84.
Nu worden er twee briefjes tegelijk getrokken. T is de som van de getrokken getallen.

a Maak een tabel van de kansverdeling van$T$.

b Bereken E(T) en Var(T).



87 We gaan verder met opgave 84. X is het getal op het eerste briefje en Y is het getal op het tweede briefje dat getrokken wordt. Dus $X + Y = T$.

a Maak een tabel van de kansverdeling van Y.

b Bereken E(Y) en Var(Y).

c Hoe groot zijn E(X) en Var(X)?

d Ga na dat E($X + Y$).

e Is aan de voorwaarde "mits ..." in de somregel voor de variantie voldaan?
Ga na dat Var($X + Y$) $\neq$ Var(X) + Var(Y).

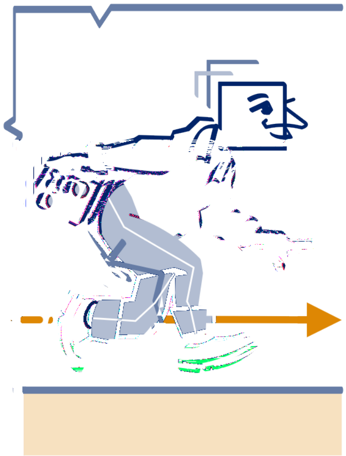
De variantie van de som is bij mèt terugleggen groter dan bij zonder terugleggen.

f Waarom mocht je dat wel verwachten?

88

X is het aantal ogen bij een worp met een dobbelsteen. Er geldt: $\text{E}(X) = 3\frac{1}{2}$ en $\text{Var}(X) = 2\frac{11}{12}$, zie opgave 82.
We bekijken twee spellen.
Spel 1 Werp met een dobbelsteen; je krijgt twee keer zoveel euro's uitbetaald als het aantal ogen van de worp.
Deze uitbetaling noemen we D. Dus $D = 2 \cdot X$.
Spel 2 Werp met twee dobbelstenen; je krijgt zoveel euro's uitbetaald als het totaal aantal ogen van de worp.
Deze uitbetaling noemen we S.

a Welke stochast heeft de grootste variantie denk je, D of S?
b Teken een kanshistogram van D en ook van S.
c Waarom geldt: $\text{Var}(S) = 2 \cdot \text{Var}(X)$?
d Ga na dat geldt: $\text{Var}(D) = 4 \cdot \text{Var}(X)$.



Voor elke stochast X en positief getal k geldt:
$\text{Var}(k \cdot X) = k^2 \cdot \text{Var}(X)$.

89

De variantie is nog niet helemaal de spreidingsmaat die we zoeken. Stel dat we een toevalsgrootheid X hebben die wordt uitgedrukt in cm.

a Waarin wordt $\text{E}(X)$ uitgedrukt? En $X - \text{E}(X)$? En $\text{Var}(X)$? En $\sqrt{\text{Var}(X)}$?

Stel dat we van cm overstappen op mm. De bijbehorende toevalsgrootheid noemen we Y. Dus $Y = 10 \cdot X$.

b Wat is het verband tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}(Y)$? En tussen $\text{Var}(X)$ en $\text{Var}(Y)$? En tussen $\sqrt{\text{Var}(X)}$ en $\sqrt{\text{Var}(Y)}$?

Er zijn veel spreidingsmaten mogelijk. Wij kiezen de volgende.

X is een stochast die de waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kan aannemen met kansen achtereenvolgens $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
De zogenaamde **standaardafwijking** van X is dan
$\text{sd}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Als je de verwachtingswaarde en de variantie kent, ligt de stochast nog niet vast. Maar deze twee gegevens samen zeggen toch wel aardig wat over de stochast. Dit blijkt uit de volgende opgave.

90 In een bak zitten 16 kaartjes, elk met een geheel getal erop geschreven. We pakken aselect een kaartje uit de bak. De stochast X is het getal dat op dat kaartje staat. Gegeven is dat E$(X) = 10$ en Var$(X) = 1$.
Wat zit er in de bak? Een mogelijkheid is: 6 kaartjes met 9, 6 kaartjes met 10 , 2 kaartjes met 11 en 2 kaartjes met 12.
Geef de andere acht mogelijkheden.

Een formule voor standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast

91 X is een binomiaal verdeelde stochast, met n onafhankelijke herhalingen, elk met succeskans p. Dus $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, waarbij $X_i = 1$ als er de
i-de keer succes is en 0 anders.

a Bepaal E(X_1) en Var(X_1).
b Bepaal E(X), Var(X) en sd(X).

X is een binomiale stochast met n herhalingen en succeskans p.
Dan sd$(X) = \sqrt{np(1-p)}$

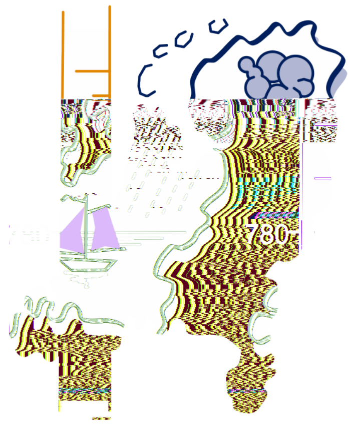
92 Bereken de standaardafwijking van de volgende stochasten.
a Het aantal keer kop bij 100 wHes t 11ka 5 b

2.7 Wat is normaal?

Klokvormig

93 Vanaf 1848 worden in Nederland systematisch allerlei gegevens over het weer bijgehouden. Gemiddeld valt er jaarlijks 780 mm neerslag in de Bilt. Grotere afwijkingen dan 380 mm van dit gemiddelde zijn nooit voorgekomen. Op grond van die jarenlange ervaring maakt men een plaatje van de kansverdeling van de neerslag voor het komend jaar.

a Hoe ziet dat plaatje eruit, denk je? Vermeld de relevante gegevens.

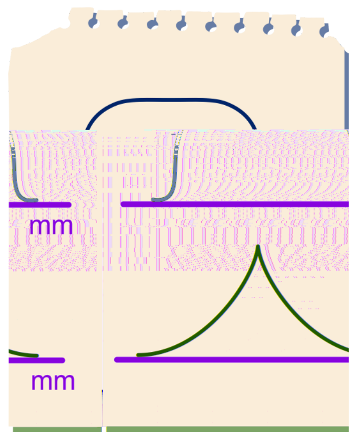


Stel dat er in een jaar 500 mm neerslag viel

b Vind je dat extreem weinig of valt het wel mee? Waarom?

Hiernaast staan twee mogelijke antwoorden op vraag a.

c Wat is je bezwaar tegen elk van deze antwoorden?

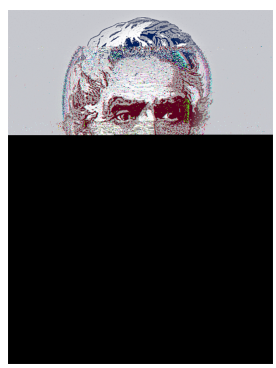


Over een klokvormige kromme

In de simulaties in de vorige paragraaf kwam je hetzelfde soort plaatje tegen: de zogenaamde **klokvorm**. De klokvorm heeft de volgende kenmerken.

- Symmetrie om het gemiddelde: afwijkingen naar boven zijn even waarschijnlijk als even grote afwijkingen naar beneden.
- Hoe groter de afwijking, des te kleiner is de kans dat die optreedt.
- Erg grote afwijkingen komen praktisch niet voor.

In veel voorbeelden in de natuur en bij het menselijk handelen komt de klokvorm voor (vaak bij benadering). Dat deze verdeling vaak voorkomt, is ontdekt in de negentiende eeuw. De belangrijkste onderzoeker was de Belg Quételet. In 1835 publiceerde hij een boek met statistisch materiaal over allerlei grootheden betreffende een mens (bijvoorbeeld de lengte van 18-jarige jongens). Hij merkte op dat de grootheden klokvormig verdeeld waren rond een gemiddelde. Een individuele afwijking van dat gemiddelde kwam door toevallige oorzaken. Hij voerde het idee van de "volmaakte" mens in: dat is de mens die alle grootheden gemiddeld heeft. Heel iets anders dan wat als ideaal gezien wordt!



Adolphe Quételet
1796 - 1874

94 Teken voor elk van de volgende voorbeelden een plaatje zoals hiernaast. Op de horizontale as wordt de genoemde grootheid uitgezet.
Schrijf bij de horizontale as de eenheid waarin je meet. (Bij het eerste voorbeeld is de grootheid lengte en is de eenheid cm.)
Schrijf bij de drie streepjes op de horizontale as getallen die redelijk kloppen met de werkelijkheid.

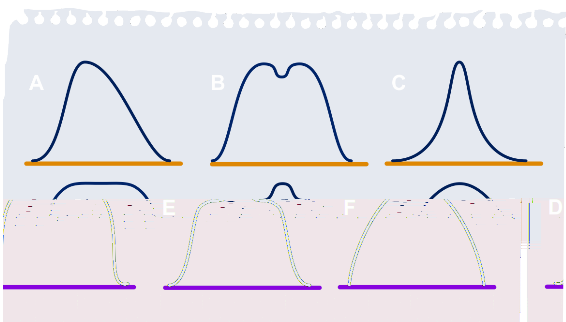
- Lengte van een Nederlandse jongen van 18 jaar.
- Leeftijd van een vrouw als ze moeder wordt (haar eerste kind krijgt).
- Tijdsduur van een autorit Arnhem-Nijmegen (18 km) in de ochtendspits.
- Het precieze gewicht in een zogenaamd kilopak suiker.

Zoals gezegd, zijn veel verdelingen klokvormig, of ze lijken daar sterk op. We spreken wel van een **normale verdeling**. De term normale verdeling is ingevoerd door de Engelse statisticus Karl Pearson (1857-1936). Het plaatje bij opgave 94 staat model voor de normale verdeling.

Maar niet alle verdelingen zijn normaal.

95 **a** Geef zelf nog een paar praktijkvoorbeelden van (ongeveer) normale verdelingen.
b Geef zelf ook een paar voorbeelden waarbij de verdeling duidelijk niet normaal is.

96 Geen van de volgende verdelingen is normaal.

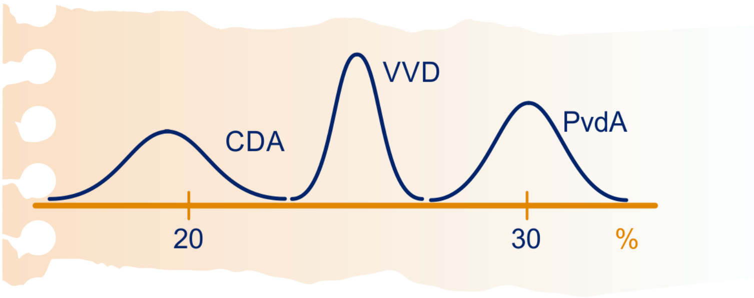


Zeg van elke verdeling, waarom hij niet normaal is.

Zoals je gezien hebt, kun je uit een zogenaamde **verdelingskromme** kansen of percentages aflezen. Daarvoor is de oppervlakte onder de kromme bepalend.

97

Op 6 mei 1998 vonden er verkiezingen voor de Tweede Kamer plaats. De laatste dagen voor de verkiezingen werd de uitslag voorspeld. Er zijn twee grote bureaus die zich daarmee bezighouden: Inter/View en Nipo. Zij houden peilingen onder de Nederlandse bevolking. Op grond van die peilingen voorspellen de bureaus voor elke politieke partij een percentage van de stemmen. Maar dat voorspelde percentage klopt natuurlijk zelden precies: er is een onzekerheid. Welke percentages voorspeld werden voor de drie grote partijen, drie dagen voor de verkiezingen, kun je aflezen uit onderstaand plaatje. Bovendien kun je de erin zien in hoeverre de voorspellingen betrouwbaar zijn.



We bekijken het percentage voor de PvdA.

a Welk percentage is voorspeld voor de PvdA?

b Tussen welke twee grenzen ligt het percentage (met grote waarschijnlijkheid)?

c Bij welke partij is de onzekerheid van de voorspelling het grootst? Bij welke partij is de onzekerheid het kleinst? Waar zie je dat aan?

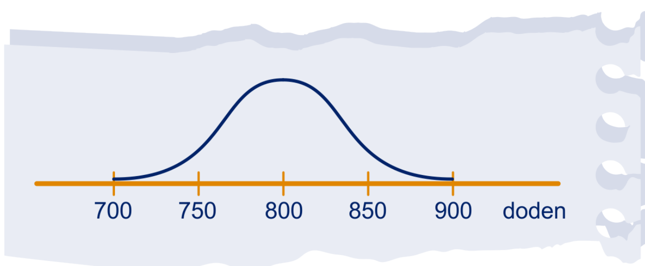
De oppervlakte onder elk van de drie krommen is hetzelfde.

d Waarom moet dat zo zijn?

e Hoe groot ongeveer is volgens het plaatje de kans dat de PvdA meer dan 31% van de stemmen haalt?

98

Verkeersdoden

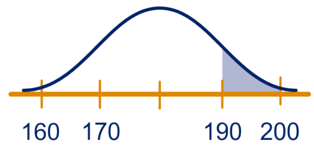


Het aantal verkeersdoden in een jaar in Nederland schommelt de laatste jaren rond de 800. Op grond van het verleden wordt het aantal verkeersdoden voor komend jaar voorspeld. De voorspelling en de onzekerheid daarvan lees je af uit het plaatje.

a Schat hoe groot de kans is dat het aantal verkeersdoden onder de 750 ligt.

b Schat hoe groot de kans is dat het aantal verkeersdoden ligt tussen 800 en 830.

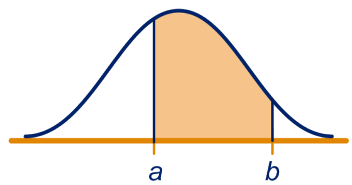
99 De lengte van 18-jarige jongens in Nederland is klokvormig verdeeld. Het percentage van de jongens die langer zijn dan 190 cm wordt gegeven door de gekleurde oppervlakte.



a Hoe groot schat jij dat dat percentage ongeveer is?

b Schat hoeveel procent van de jongens een lengte heeft tussen 170 en 180 cm.

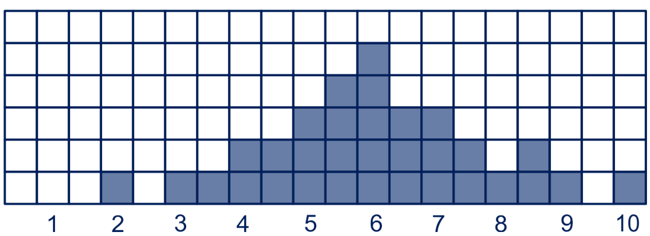
Een grootheid X is verdeeld volgens de kromme hiernaast. Op de horizontale as zijn twee mogelijke waarden van X aangegeven: a en b.



De kans dat de waarde van X ligt tussen a en b wordt gegeven door de oppervlakte onder de kromme tussen a en b.
Preciezer: de volgende drie uitspraken komen op hetzelfde neer.

- De grijze oppervlakte is p% van de totale oppervlakte onder de kromme.
- Bij een groot aantal herhalingen zal X in ongeveer p% van de gevallen een waarde tussen a en b hebben.
- De kans dat $a \leq X \leq b$ is $\frac{p}{100}$.

100 Hieronder staat een histogram van de cijfers van een wiskunde B-toets.



a Bereken het gemiddelde cijfer.

b Bereken de standaardafwijking van de cijfers.

Je kunt de standaardafwijking ook op je GR berekenen.

c Zoek uit hoe dat op jouw machine gaat.

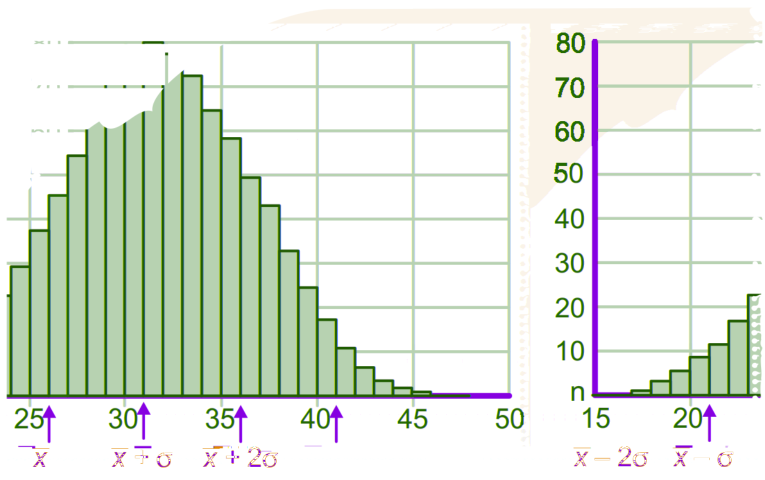
101

In 2009 werden in Nederland in totaal 184.915 kinderen levend geboren. Hieronder staan een frequentietabel en een frequentiehistogram van de leeftijd van de moeders. De gegevens zijn ontleend aan het CBS StatLine. De verdeling is klokvormig.

leeftijd moeder	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
frequentie (‰)	0,2	0,4	1,2	3,1	5,6	8,5	11,8	16,8	23,0	29,1	37,3	45,4

leeftijd moeder	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
frequentie (‰)	54,7	65,6	75,3	77,6	80,0	77,5	72,5	64,7	58,5	49,8	43,2	33,0

leeftijd moeder	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
frequentie (‰)	24,5	17,4	10,4	6,1	3,4	1,9	0,8	0,3	0,2	0,1	0,1



Voer op de GR de leeftijden in.

a Controleer het histogram door het op de GR te tekenen.

b Bereken op de GR het gemiddelde en de standaardafwijking van de leeftijd van de moeders.

Als je als leeftijden 15, 16, ... invoert, krijg je als gemiddelde ongeveer 31,0 jaar.
In werkelijkheid is het gemiddelde echter 31,5 jaar.

c Kun je dat halve jaar verschil verklaren?

d Ga na dat in het frequentiehistogram $\bar{x}$, $\bar{x} + \sigma$ en $\bar{x} - \sigma$ goed zijn aangegeven.

e Hoeveel procent van de moeders is ouder dan $\bar{x}$, hoeveel procent is ouder dan $\bar{x} + \sigma$ en hoeveel procent is ouder dan $\bar{x} + 2\sigma$?

2.7 Wat is normaal?

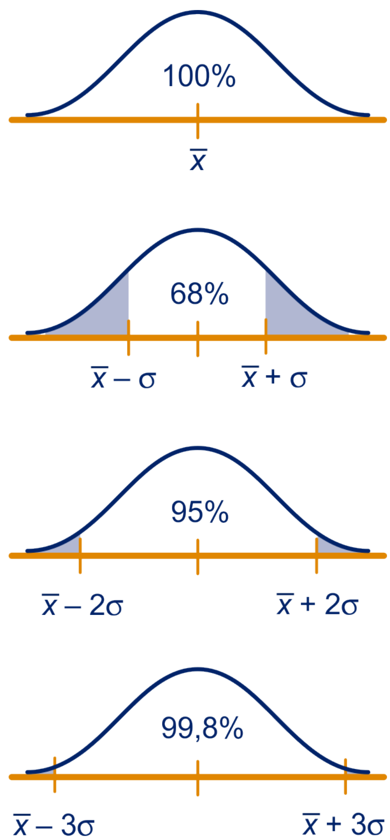
Klokvormige verdelingen

Veel data zijn zo ongeveer klokvormig verdeeld zoals hiernaast schetsmatig is aangegeven. Er is één top en de verdeling is symmetrisch en loopt geleidelijk af tot 0. Jr kunt hierbij denken aan juli-temperaturen, lengte van rekruten, de eindexamencijfers voor het vak wiskunde A of het aantal jongens bij 1000 geboortes in een zekere gemeente. In opgave 101 zie nog zo'n voorbeeld. Bij die verdelingen zijn grote afwijkingen van het gemiddelde zeldzaam.

Bij klokvormige verdelingen gelden de volgende vuistregels voor de afwijkingen van het gemiddelde:

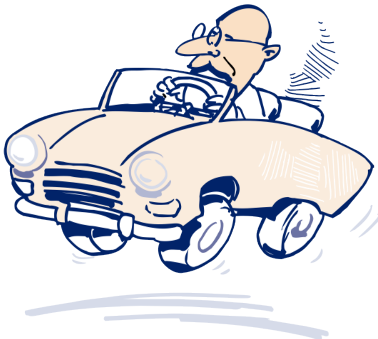
- afwijkingen van meer dan σ zijn heel gewoon: dit gebeurt in ongeveer 32% van de gevallen,
- afwijkingen van meer dan 2σ zijn tamelijk zeldzaam: dit gebeurt in ongeveer 5% van de gevallen,
- afwijkingen van meer dan 3σ zijn uiterst zeldzaam: dit gebeurt in ongeveer $0{,}2$% van de gevallen.

Zie de vier plaatjes hiernaast.



Kansen bij de normale verdeling

Bij de volgende opgaven mag je er telkens van uitgaan dat er sprake is van een **normale** verdeling.



102 Op een weg binnen de bebouwde kom (waar 50 km/u de maximumsnelheid is) wordt vaak te hard gereden. Controles wijzen uit dat de gemiddelde snelheid 60 km/uur is en de bijbehorende standaardafwijking 5 km/uur.

a Hoeveel procent van de passerende voertuigen rijdt te hard?

b Hoeveel procent van de passerende voertuigen rijdt tussen 55 en 70 km/uur?

103 Klas 4V2 (met 28 leerlingen) heeft bij Engels een schriftelijke overhoring gehad over een groot aantal woordjes. Gemiddeld had een leerling 17,5 fout. De standaardafwijking van het aantal fouten was 2,5. De toegepaste normering is één punt eraf per vijf fouten.

a Schat het laagste en het hoogste cijfer in deze klas.

b Schat het aantal onvoldoendes ($\leq 5{,}5$) in deze klas.

104 Neem aan dat de leeftijd van leerlingen in vwo 5 aan het begin van een schooljaar (1 september) normaal verdeeld is met een gemiddelde van 16,3 jaar en een standaardafwijking van 0,8 jaar. (Hierbij rekenen we de leeftijd als voortdurend oplopende tijd sinds de geboorte, zodat iemand bijvoorbeeld 15,7 jaar kan zijn.)

a Is de leeftijd van deze leerlingen aan het eind van het schooljaar (op 1 juli) ook normaal verdeeld? Wat is dan het gemiddelde en wat is de standaardafwijking?

b Is de leeftijd van deze leerlingen gerekend in maanden (op 1 september) ook normaal verdeeld? Wat is dan het gemiddelde en wat is de standaardafwijking (beide in maanden)?

105 De lengte van 21-jarige Engelse jongemannen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 178 cm en een standaardafwijking van 7 cm. Hun gewicht is ook normaal verdeeld en wel met een gemiddelde van 78 kg en een standaardafwijking van 11 kg.

a Wat wordt het gemiddelde en wat de standaardafwijking als de lengtes in “feet” en “inches” worden weergegeven? (1 foot = 30,48 cm en 1 inch = 2,54 cm)

b Wat wordt het gemiddelde en wat de standaardafwijking als de gewichten in “stones” worden weergegeven? (1 stone = 6,35 kg)

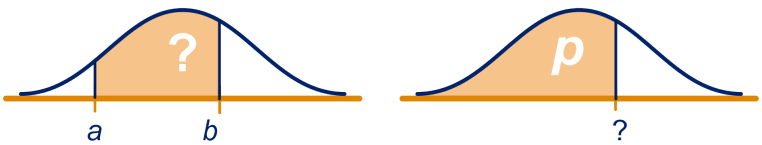
2.7 Wat is normaal?

106 Temperaturen kunnen zowel in graden Celsius als in graden Fahrenheit worden uitgedrukt.
De temperatuur in graden Celsius noemen we C en de temperatuur in graden Fahrenheit F. Er geldt: $F = 1{,}8C + 32$.
Wat wordt de gemiddelde julitemperatuur van $17{,}4$ °C en een bijbehorende standaardafwijking van $1{,}5$ °C als de temperaturen naar Fahrenheit worden overgezet?

Een normale verdeling wordt volledig bepaald door twee **parameters**:
- het gemiddelde,
- de standaardafwijking.

Het gemiddelde en de standaardafwijking worden in de statistiek met Griekse letters aangegeven:
- μ(spreek uit mu) voor het gemiddelde,
- σ (spreek uit sigma) voor de standaardafwijking.

Opmerking



Stel dat een grootheid X normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaard-afwijking σ.
De kans dat de grootheid een waarde tussen a en b aanneemt ligt dan vast. Deze kans noteren we met: P$(a < X < b|$ μ, σ$)$.
(Zie de figuur hierboven links.)
Op de GR kun je deze kans berekenen, in de figuur links met een vraagteken aangegeven.
Ook kun je met de GR het getal a vinden (in de figuur rechts aangegeven met een vraagteken) als je de kans p kent met P$(X < a|$ μ; σ$)$.
Zoek uit hoe dat op jouw GR gaat.
Ga met je GR bijvoorbeeld na dat voor P$(1 \leq X \leq 5|\ \mu = 3; \sigma = 2)$ ongeveer $0{,}6827$ vindt.
Ook dat je voor het getal a met P$(X < a|\ \mu = 5; \sigma = 8)$ vindt: $a \approx 13{,}27$.

In de volgende opgaven moet je beide opties veel gebruiken.
We gaan er vanuit dat je ook P$(X < a|$ μ; σ$)$ en P$(X > a|$ μ; σ$)$ op de GR kunt berekenen.

2.7 Wat is normaal?

107 Een tomatenkweker heeft geoogst. De vruchten variëren in grootte en gewicht. Het gewicht is normaal verdeeld met $\mu = 90$ gram en $\sigma = 15$ gram. In totaal zijn 60.000 tomaten geoogst. De oogst wordt op gewicht gesorteerd.
De drie gewichtsklassen zijn:

- klasse A: tot 70 gram,
- klasse B: van 70 tot 100 gram,
- klasse C: meer dan 100 gram.

a Hoeveel procent van de oogst komt in elk van de klassen terecht?

De opbrengst van een tomaat hangt af van zijn gewichtsklasse:

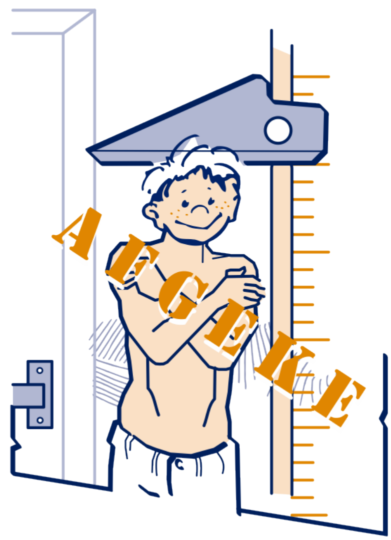
- klasse A: 20 cent,
- klasse B: 25 cent,
- klasse C: 30 cent.

b Welke opbrengst mag de kweker voor zijn hele oogst verwachten?

108 In 1986 werd van 103.370 dienstplichtige 18-jarigen de lengte opgemeten. Hun gemiddelde lengte bleek 181,8 cm te zijn en de standaardafwijking 7 cm.
We willen weten hoeveel jongens 190 cm of langer zijn.

a Schets een normale kromme en geef daarbij de gegevens en het gevraagde aan.

b Bereken met de GR hoeveel van de jongens naar verwachting 190 cm of langer waren.



Jongens die langer waren dan 200 cm of korter dan 160 cm werden op grond van hun lengte afgekeurd.

c Teken weer een bijpassend plaatje. Bereken hoeveel jongens er in 1986 op grond van hun lengte werden afgekeurd.

d Bereken vanaf welke lengte een jongen tot de 1% langste behoorde.

e Bereken tot welke lengte een jongen tot de 5% kleinste behoorde.

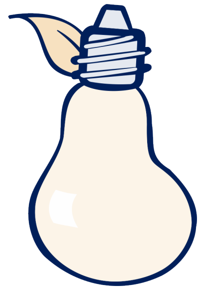
109 Een ei weegt gemiddeld 63 gram met een standaardafwijking van 4 gram. Men verdeelt eieren in verschillende gewichtsklassen: S staat voor Small, dat is met een gewicht onder de 53 gram, M betekent Medium, dat is met een gewicht van 53 tot 61 gram, de L staat voor Large, dat is met een gewicht van 61 tot 73 gram en XL is Extra Large; dat zijn eieren die zwaarder zijn dan 73 gram.

a Bereken hoeveel procent van de eieren in de verschillende gewichtsklassen terechtkomt.

Stel dat de eieren worden ingedeeld in vier opeenvolgende gewichtsklassen die elk 25% van het totaal bevatten.

b Bereken dan de bijbehorende gewichtsgrenzen.

110 Twee fabrikanten brengen voor dezelfde prijs eenzelfde type lamp op de markt. Merk A heeft een gemiddelde van 1200 branduren en een standaardafwijking van 200 uur. Merk B heeft een gemiddelde van 1250 uur en een standaardafwijking van 250 uur. Je wilt een lamp kopen die minstens 1100 uur moet branden. Welk merk heeft jouw voorkeur?



111 Nederlandse euromunten worden in Utrecht geslagen bij de Koninklijke Nederlandse Munt. De afmetingen en gewichten zijn aan zeer strikte regels gebonden.

munstsoort	metaal	middellijn in mm	gewicht in mg
twee euro	koper/nikkel/messing	25,75	8500
een euro	koper/nikkel/messing	23,25	7500
vijftig cent	Nordic gold	24,25	7800
twintig cent	Nordic gold	22,25	5740
tien cent	Nordic gold	19,75	4100
vijf cent	staal/koper	21,25	3920
twee cent	staal/koper	18,75	3060
een cent	staal/koper	16,25	2300

Het gewicht van een nieuw geslagen euromunt is normaal verdeeld met $\mu = 7500$ mg en $\sigma = 6$ mg. Munten die meer dan 15 mg afwijken van het vereiste gewicht mogen niet in omloop worden gebracht.

a Waarom gelden er zulke strikte eisen voor het toegestane gewicht?

b Bereken welk percentage van de nieuw geslagen één-euromunten niet in omloop zal worden gebracht.

Per jaar zijn er 25 miljoen nieuwe één-euromunten nodig.

c Hoeveel moeten er geslagen worden om aan die vraag te kunnen voldoen?

112

In een fabriek worden blikken gevuld met (gemiddeld) 1 liter verf. De vulmachine levert niet blikken van precies 1 liter. De inhoud van de blikken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 15 milliliter.
We willen weten hoeveel procent van de blikken meer dan 30 ml verf te weinig bevat.

a Schets een normale kromme en kleur de oppervlakte die hoort bij deze vraag.

b Bereken hoeveel procent van de blikken meer dan 30 ml verf te weinig bevat.

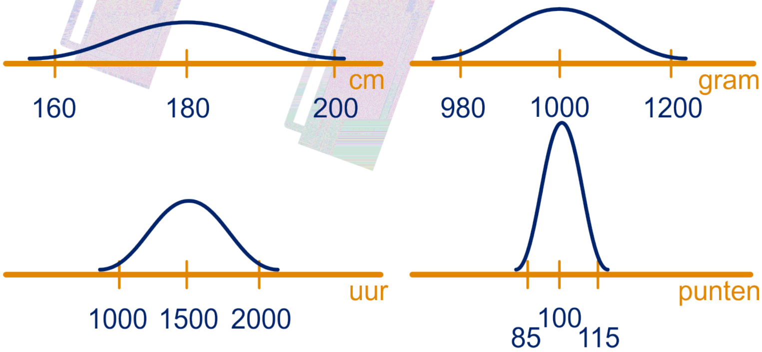
Een liter verf weegt 2 kg.

c Bereken hoeveel procent van de blikken minder dan 1980 gram verf bevat.

2.8 Standaardiseren

De verwantschap van normale verdelingen

We vergelijken vier normale verdelingen. Omdat de oppervlakte onder een normale kromme alle gevallen vertegenwoordigt (100%), is er zo geschaald dat de oppervlaktes onder de krommen gelijk zijn.



De verdelingen gaan over:

- de lengte van volwassen Nederlandse mannen (in cm),
- het gewicht van een kilopak suiker (in gram),
- de levensduur van TL-buizen (in uren),
- het IQ van Nederlandse scholieren (in punten).

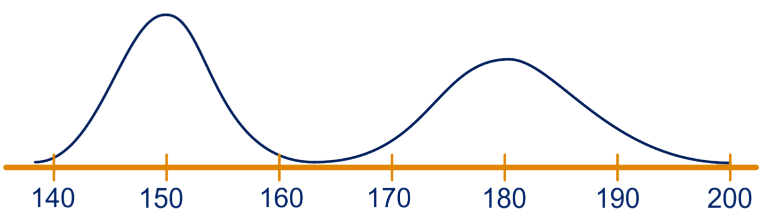
113

a Controleer dat bij de vier krommen geldt: als een verdeling n keer zo breed is, is hij ook n keer zo laag.

b Leg uit waarom dat zo is.

114

Nederlanders zijn de langste mensen ter wereld, pygmeeën in Kameroen de kortste. De volwassen Nederlandse man is gemiddeld $1{,}80$ meter met standaardafwijking 7 cm. Een volwassen pygmeeman is gemiddeld $1{,}50$ meter met standaardafwijking 5 cm. Van beide lengtes staat hieronder de verdeling, met gelijke oppervlakte onder de krommen.



De verdelingen lijken veel op elkaar. Je kunt die van de pygmeeën in die van de Nederlanders overvoeren door naar rechts te verschuiven en vervolgens te verbreden (op te rekken in horizontale richting ten opzichte van het midden). Dan verandert de hoogte automatisch mee.

Over welke afstand moet je naar rechts verschuiven en met welke factor moet je verbreden?

Normale verdelingen verschillen alleen wat gemiddelde en wat standaardafwijking betreft. Dat betekent dat je de ene in de andere kunt overvoeren door een horizontale verschuiving (van het ene gemiddelde naar het andere), gevolgd door een horizontale verbreding of versmalling (van de ene standaardafwijking naar de andere).

115 Stel dat het aantal grammen suiker S in een pak normaal verdeeld is met gemiddelde 1000 en standaardafwijking 10 en dat de levensduur L (uren) van TL-buizen normaal verdeeld is met gemiddelde 1500 en standaardafwijking 50.

a Hoeveel moet je de verdelingskromme van S verschuiven en verbreden om die van L te krijgen?

Je kunt ook zeggen dat ... $\cdot S -$ ... dezelfde verdeling heeft als L.

b Welke getallen horen op de stippellijntjes?

c Neem over en vul in:
S heeft dezelfde verdeling als ... $\cdot L +$ ....

Opmerking
Iets dergelijks is ook aan de hand bij parabolen. Als twee parabolen een verticale symmetrieas hebben, kun je de ene zo verschuiven en oprekken dat hij precies op de andere valt; eventueel moet je nog spiegelen in de x-as.

Uitzonderlijk

116 Gemiddeld bedraagt de temperatuur in De Bilt in de maand juli $17{,}4$ °C. In 2010 was de gemiddelde juli-temperatuur in De Bilt $19{,}2$ °C.

a Is dat uitzonderlijk hoog? Wat denk jij?

Anneke simuleert op de computer het gooien met een dobbelsteen. De computer “gooit” 1000 keer. Anneke verwacht ongeveer 167 keer zes ogen te krijgen, met een standaardafwijking van 12. Bij de simulatie krijgt ze 150 keer zes ogen.

b Is dit uitzonderlijk weinig? Wat vind jij?

De consumentenbond controleert 10 kilopakken suiker. Gemiddeld behoren de pakken 1000 gram te bevatten. In de steekproef bleken acht pakken minder dan 1000 gram te bevatten.

c Vind jij dit uitzonderlijk?

2.8 Standaardiseren

Vaak is het lastig om, zo op het oog, te beoordelen of een waarneming uitzonderlijk is. Daarvoor hebben we het volgende.
Bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking. Bepaal hoeveel keer de standaardafwijking de waarneming van het gemiddelde afwijkt. Hoe hoger dit aantal keer, des te uitzonderlijker is de waarneming.

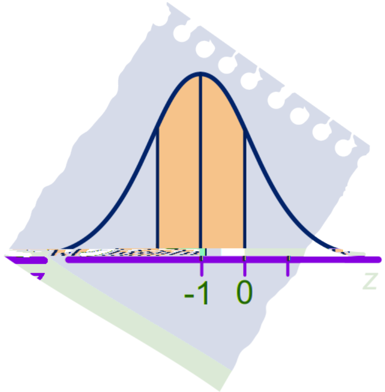
Het aantal keer de standaardafwijking dat een waarneming afwijkt van het gemiddelde, noemen we de **z-waarde** van die waarneming.
In formule: $z\text{-waarde} = \dfrac{\text{waarneming} - \text{gemiddelde}}{\text{standaardafwijking}}$.

117 We bekijken nog eens de lengte (in cm) van de volwassen man met $\mu = 180$ en $\sigma = 7$. De lengte van een Nederlandse volwassen man van 2,00 meter heeft z-waarde $\dfrac{200-180}{7} \approx 2{,}86$.

a Hoe lang is een volwassen man met z-waarde van -2,86?
b Hoe lang is een volwassen man met z-waarde 1?
c Hoe lang is een volwassen man met z-waarde 0?

118 We bekijken de lengte in een groep 16-jarige jongens en in een groep 16-jarige meisjes. Bij de jongens is de gemiddelde lengte 178 cm en de standaardafwijking 7 cm. Bij de meisjes is de gemiddelde lengte 168 cm en de standaardafwijking 6 cm.
Een jongen en een meisje uit deze groepen zijn beiden erg lang: de jongen 196 cm en het meisje 186 cm.
Bereken de z-waarde van de lengte van de jongen en van de lengte van het meisje.
Welk van de twee vind jij het meest uitzonderlijk?

Als de waarneming zelf normaal verdeeld is, is de z-waarde dat ook, en wel met gemiddelde $\mu = 0$ en standaardafwijking $\sigma = 1$.
We zeggen dat de z-waarde **standaardnormaal** verdeeld is.
De normale verdeling met gemiddelde $\mu = 0$ en standaardafwijking $\sigma = 1$ is de “standaard” onder de normale verdelingen. Elke normale verdeling is daarop terug te voeren door van de waarneming de gemiddelde waarneming af te trekken en vervolgens door de standaardafwijking te delen.
[Vergelijk dit met de “standaard” $y = x^2$ onder de parabolen.]
In formule: als X normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ, dan is de stochast $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ standaardnormaal verdeeld.



Het overstappen op de standaardnormale verdeling noemen we **standaardiseren**.

119 X is normaal verdeeld met gemiddelde 1000 en standaardafwijking 25.
Y is standaardnormaal verdeeld.

a Leg uit dat de kans dat $X > 1035$ gelijk is aan de kans dat $Y > 1{,}4$.

b Neem over en vul in: de kans dat $X > a$ is gelijk aan de kans dat $Y >$ ....

120 De vuistregels zeggen dat bij een normale verdeling de kans op een afwijking kleiner dan $1 \cdot \sigma$ gelijk is aan 68% en een afwijking kleiner dan $2 \cdot \sigma$ gelijk is aan 95%.

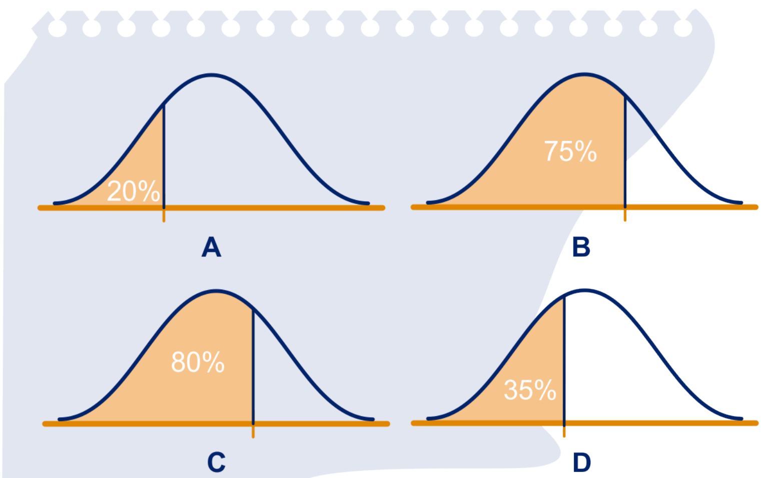
a Wat betekent dit voor de z-waarde?

b Controleer deze percentages voor de standaardnormale verdeling met de GR .

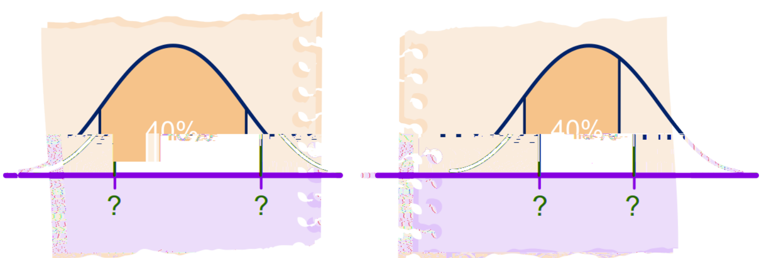
c Wat is de kans dat een afwijking kleiner is dan $3 \cdot \sigma$?

121 X is bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 222 euro en standaardafwijking 14 euro.
Tussen welke waarden ligt X met 95% kans (symmetrisch om 222)?

122 Welke z-waarden passen bij de volgende oppervlakten?



123 Bij gegeven percentages tussen twee waarden kunnen de bijbehorende z-waarden meestal niet gevonden worden. We bekijken de twee situaties hieronder.

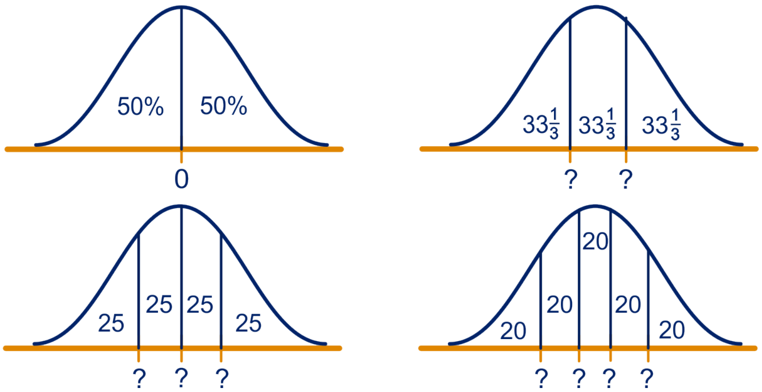


In het linkerplaatje liggen de linker- en rechtergrens even ver van het midden. Bij het rechter plaatje is dat niet zo.

a Bepaal de z-waarden in het linker plaatje

b Kun je de z-waarden ook in het rechter plaatje bepalen?

124 De lijn bij $z = 0$ deelt het gebied onder de standaardnormale kromme in twee symmetrische helften, elk met oppervlakte 50%.



a Bepaal de z-waarden die de oppervlakte verdelen in drie gelijke stukken.

b Bepaal ook de z-waarden die de oppervlakte verdelen in vier gelijke stukken en in vijf gelijke stukken.

125 Een machine vult pakken met 1000 gram suiker. Althans dat is de bedoeling. Als de vulmachine ingesteld staat op 1000 gram, zal het werkelijke gewicht van een pak normaal verdeeld zijn met gemiddelde 1000 gram en standaardafwijking 10 gram.

a Ga na dat bijna 7% van de pakken een gewicht heeft van 985 gram of minder.

b Op welk gemiddelde moet de machine worden ingesteld, opdat slechts 2% van de pakken een gewicht heeft van 985 gram of minder? Neem aan dat de standaardafwijking 10 gram is, onafhankelijk van het gemiddelde waarop de machine is ingesteld.

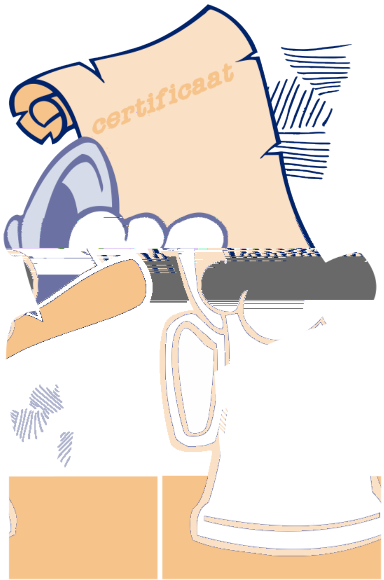
126 Uit een onderzoek bleek dat de score van leerlingen bij het CSE wiskunde A1 vwo in 2000 bij benadering normaal verdeeld was. Het gemiddelde was 62 punten en 28% van de leerlingen had een onvoldoende (54 punten of minder).

a Welke z-waarde hoort bij 28%?

b Bereken de standaardafwijking.

c Bereken hoeveel punten je moet hebben om bij de 20% besten te horen.

127



Een slijter gaat op examen om het biercertificaat te halen. Het examen bestaat uit 40 driekeuzevragen. Om te slagen moet hij ten minste 24 vragen goed beantwoorden, dat is 60%.
De slijter heeft zich in het geheel niet voorbereid en zal de vragen dan ook op de gok beantwoorden. X is het aantal vragen dat de slijter goed beantwoordt. Dan is X binomiaal verdeeld.

a Wat is de kans dat hij slaagt?

b Bereken $\text{E}(X)$ en $\text{sd}(X)$.

Vako Drankenopleidingen neemt het examen af. Vako wil dat de kans dat iemand die de vragen puur op de gok beantwoordt hoogstens 1% kans heeft om te slagen.

c Wat is de z-waarde die hoort bij het slagingspercentage van 1%?

Vako kan met minder dan 40 vragen volstaan om aan de eis te voldoen dat een gokker hoogstens 1% kans heeft om te slagen. De slagingseis blijft dat 60% van de vragen goed moet zijn beantwoord. We willen weten hoeveel vragen Vako minstens moet stellen; noem dat aantal vragen n. We noemen het aantal vragen dat een pure gokker goed heeft X.

d Druk $\text{E}(X)$ en $\text{sd}(X)$ uit in n.

X is bij benadering normaal verdeeld.

e Leg uit dat de z-waarde van het minimum aantal goede antwoorden $\dfrac{0{,}6n - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}}$ is.
Laat algebraïsch zien dat dit gelijk is aan $0{,}5657\sqrt{n}$.

f Bereken de waarde van n waarvoor $0{,}5657\sqrt{n}$ gelijk is aan de in **c** gevonden waarde.
Hoeveel vragen moet Vako minimaal stellen?

g Controleer het antwoord van vraag **f** door bij het gevonden aantal vragen de kans uit te rekenen dat een gokker slaagt.

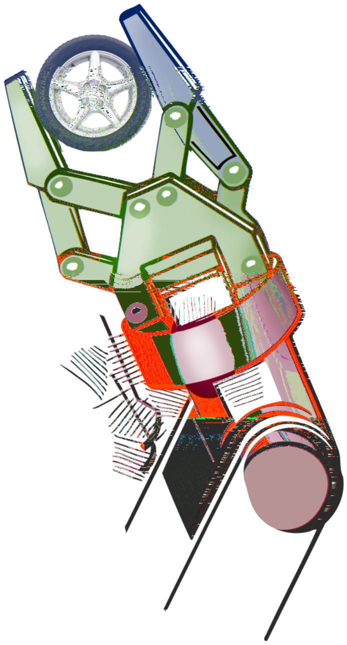
Bij vraagstukken rond de normale verdeling draait alles om drie grootheden: het gemiddelde μ, de standaardafwijking σ en een percentage (dat is de oppervlakte boven een interval onder de normale kromme). De drie grootheden zijn gekoppeld: als er twee bekend zijn, kun je de derde uitrekenen. In principe zijn er dus drie verschillende soorten vragen mogelijk. Van elk soort volgt nu een voorbeeld.

128

μ en σ zijn bekend

Auto's worden op de lopende band in elkaar gezet. Een robot heeft voor het monteren van een wiel gemiddeld 96 seconden nodig met een standaardafwijking van 5 seconden. Er treedt vertraging op in de hele montagelijn als de robot meer dan 110 seconden nodig heeft.

a Bereken bij hoeveel procent van de auto's er vertraging zal optreden.



μ en percentage zijn bekend

Een robot heeft gemiddeld 80 seconden nodig voor het bevestigen van een bumper. Bij zo'n 20% van de auto's is hij al na 77 seconden klaar.

b Bereken hoe groot de standaardafwijking is.

σ en percentage zijn bekend

De robot die de deuren inzet, heeft daarvoor bij 8 op de 1000 auto's meer dan 105 seconden nodig. De standaardafwijking van de benodigde tijd bedraagt 4 seconden.

c Bereken hoeveel seconden de robot gemiddeld doet over zijn karwei.

Andere mogelijkheden om μ of σ te vinden

Stel dat je het percentage p weet dat de waarde tussen a en b ligt. Als je bovendien μ weet, kun je σ vinden en omgekeerd. Daarvoor kun je de z-waarde goed gebruiken. Er zijn ook allerlei andere methodes. We noemen er een paar, waarbij we μ bekend veronderstellen en σ zoeken. Als omgekeerd σ bekend is en μ moet worden gezocht, gaat het net zo.

- Proberen
  Doe een gok voor σ en bereken bij die gok hoe groot het percentage is bij de bekende μ en gegokte σ tussen a en b. Pas de gok σ aan zodat dat percentage dichter bij p komt te liggen, net zo lang totdat je tevreden bent.
- Met een grafiek
  Teken de grafiek van het percentage tussen a en b bij de bekende μ, als functie van σ. Kijk voor welke invoer σ er p uitkomt.
- Met de GR een vergelijking oplossen
  Op de GR heb je een optie om vergelijkingen op te lossen. Zoek uit hoe dat op je GR gaat (als je dat nog niet gedaan hebt).

129 In een land is de gemiddelde lengte van de volwassen vrouwen onbekend; die noemen we μ. In dat land is de gemiddelde lengte van de volwassen mannen 190 cm. De standaardafwijkingen van de volwassen mannen en van de volwassen vrouwen zijn beide 7 cm.

a Maak hierbij plaatjes van de verdelingen van de lengtes:
- een voor de volwassen vrouwen; geef daarin het percentage groter dan 190 aan,
- een voor de volwassen mannen; geef daarin het percentage kleiner dan μ cm aan.

Het percentage van de volwassen vrouwen die langer zijn dan 190 cm is gelijk aan het percentage van de volwassen mannen dat korter is dan μ cm.

b Leg dat uit met behulp van z-waarden.

130 Zijn jongens slimmer dan meisjes of omgekeerd? Er is veel onderzoek gedaan naar eventueel verschil in intelligentie van jongens en meisjes. De resultaten spreken elkaar soms tegen; bovendien ligt het onderwerp politiek en sociaal gevoelig. Op Wikipedia is onder andere te vinden: Analysing data from the interna t onal PISA student evalua t on study, Machin and Pekkarinen found higher variance in boys' than girls' results on mathema t cs and reading tests in most OECD countries.... en A study by Rosalind Arden and Robert Plomin from 2006 found greater variance among boys than among girls.

Laten we eens van het volgende uitgaan:
- het IQ van jongens is normaal verdeeld met gemiddeld 100,
- het IQ van meisjes is normaal verdeeld met gemiddelde 100,
- de standaardafwijking van het IQ van jongens is 16, die van het IQ van meisjes is 14.

a Schets de normale krommen van de IQ's in één figuur.

Het valt op dat er bij w4kangoeroe veel meer jongens onder de prijswinnaars zijn dan meisjes. Neem maar aan dat er evenveel jongens als meisjes meedoen aan w4kangoeroe.
Gezien bovenstaande is het logisch dat er meer jongens onder de prijswinnaars zijn.

b Leg dat uit.

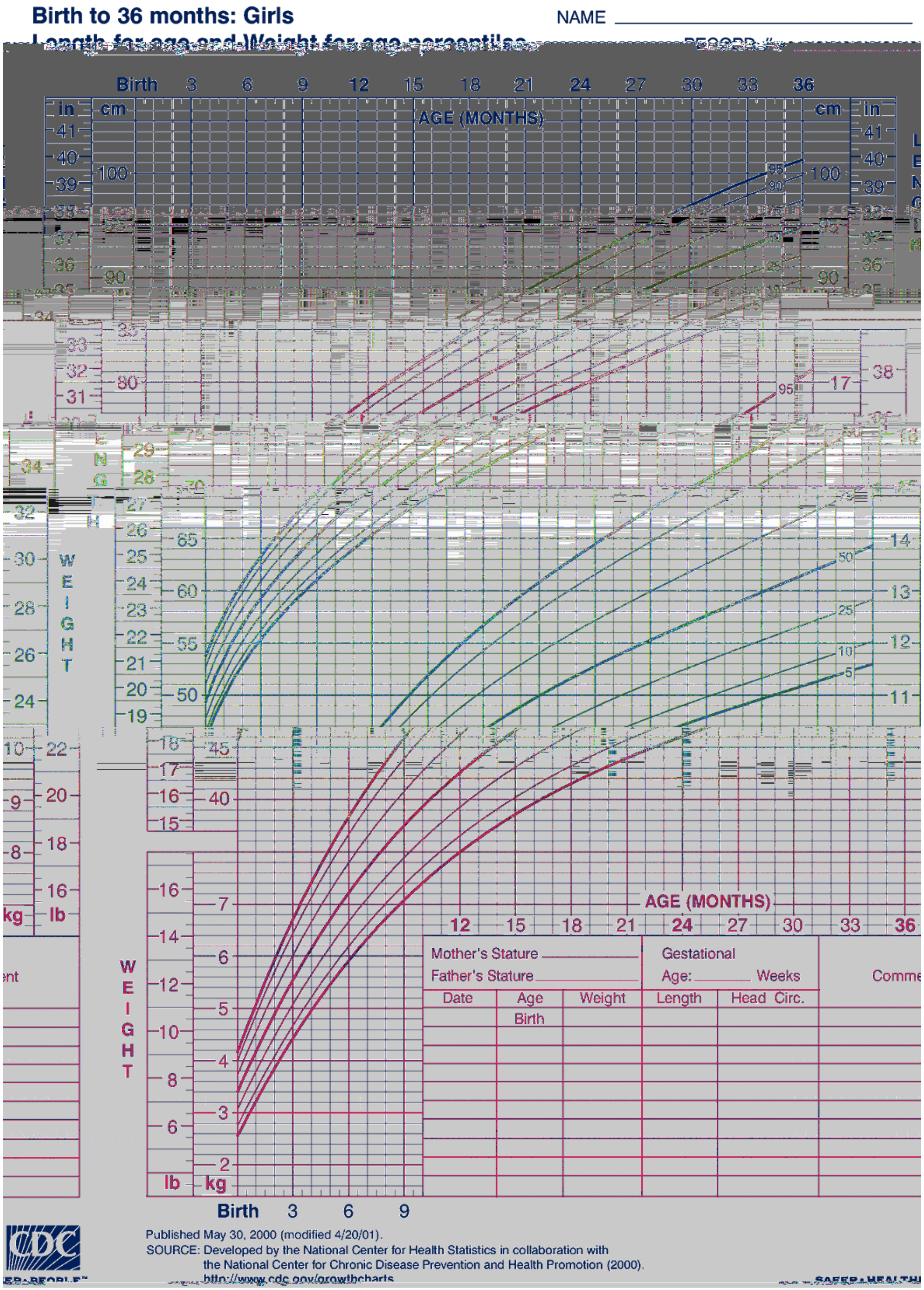
Stel dat je 500 jongens en 500 meisjes hebt.

c Hoeveel jongens en hoeveel meisjes hebben een IQ boven 128?

d Hoeveel procent van de leerlingen met een IQ boven 128 is jongen?

131

Hieronder staan de groeicurves voor meisjes van 0 t/m 36 maanden. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat 25% van de meisjes van 26 maanden 85 cm of korter is. En dat 90% van de meisjes van 18 maanden 12,6 kg of minder weegt.



We letten op het gewicht na 36 maanden. Je kunt zien dat dan het gewicht niet zuiver normaal verdeeld is.

a Hoe zie je dat? Laat in een schets zien hoe de verdelingskromme van het gewicht afwijkt van de normale verdeling.

We letten op de lengte na 36 maanden. Veronderstel dat dan de lengte van meisjes normaal verdeeld is.

b Bepaal de standaardafwijking van de lengte.

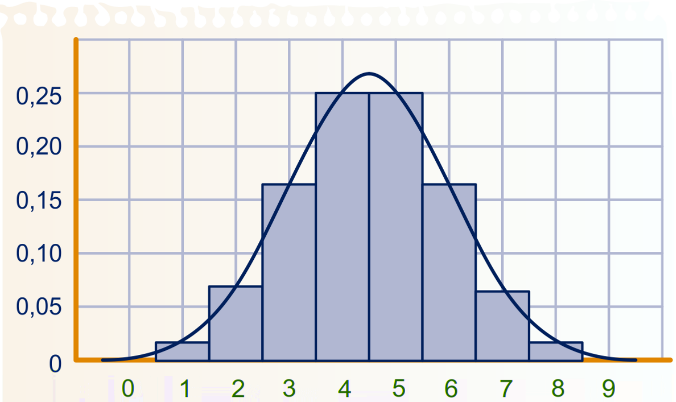
In paragraaf 4 en 6 heb je het volgende gezien, soms zonder bewijs.

Laat X

Binomiaal ≈ normaal

132

X is het aantal keer kop bij negen worpen met een muntstuk. Op de volgende bladzijde staat een kanshistogram van X, met daar overheen de kromme bij de normale verdeling met hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking als X. De bijbehorende grootheid noemen we U.



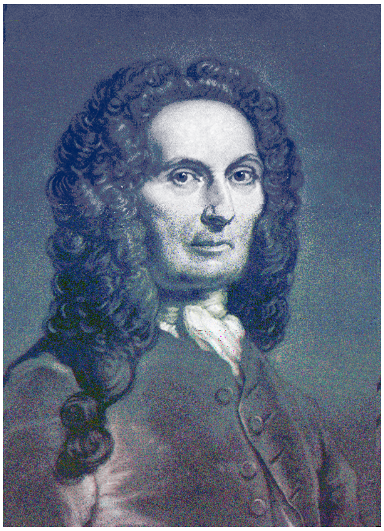
a Wat zijn μ en σ van X en U?
b Bereken $\mathrm{P}(X = 3)$
c Bereken $\mathrm{P}(2{,}5 \leq U \leq 3{,}5)$
d Neem over en vul in: $\mathrm{P}(X = 5) \approx \mathrm{P}(\ldots \leq U \leq \ldots)$.
$\mathrm{P}(4 \leq X \leq 7) \approx \mathrm{P}(\ldots \leq U \leq \ldots)$
e Ga naar VuStat/Kansverdelingen/Binomiale Verdeling.
Teken het kanshistogram voor het aantal kop bij oplopende aantallen worpen n met een muntstuk. Je ziet dat het kanshistogram steeds meer op een normale kromme gaat lijken.
Teken de normale kromme erbij (aanvinken linksonder).

133

Y is het aantal keer zes bij 18 worpen met een dobbelsteen. V is de normale grootheid die daar het best bij past, dat wil zeggen die hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking heeft.
a Wat zijn dat gemiddelde en die standaardafwijking?
b Vergelijk $\mathrm{P}(Y = 2)$ en $\mathrm{P}(1{,}5 < V < 2{,}5)$.
c Dezelfde vragen voor 180 in plaats van 18 worpen en 20 in plaats van 2 zessen.
d Ga naar VuStat/Kansverdelingen/Binomiale Verdeling. Teken het kanshistogram voor het aantal keer zes bij 18 en bij 180 worpen met een dobbelsteen. Teken er de normale kromme bij.

Een binomiale verdeling kan goed benaderd worden met een normale verdeling. Vooral als de succeskans p niet te ver van $0{,}5$ afwijkt. Als p bijvoorbeeld $0{,}1$ of $0{,}9$ is, moet het aantal herhalingen n van de binomiale verdeling groter gekozen worden (ten minste tien).

Dat de binomiale verdeling voor grote waarden van n steeds meer op een normale verdeling gaat lijken werd omstreeks 1720 ontdekt door Abraham de Moivre. Later is de volgende algemene stelling bewezen.
Als onafhankelijke grootheden met dezelfde kansverdeling bij elkaar opgeteld worden, gaat de som steeds meer lijken op een normale verdeling.
Dit staat bekend als de **centrale limietstelling**.



Abraham de Moivre 1667 - 1754

De som van normale verdelingen

De lengte van 18-jarige jongens is normaal verdeeld met gemiddelde 180 cm en standaardafwijking 7 cm; de lengte van 18-jarige meisjes is normaal verdeeld met gemiddelde 170 cm en standaardafwijking 6 cm.
Kies nu een willekeurige 18-jarige jongen en een willekeurig 18-jarig meisje. Wat is dan de kans dat het meisje langer is dan de jongen? Of wat is de kans dat de jongen ten minste 17 cm langer is dan het meisje? Over dit soort vragen gaat het volgende gedeelte.
Om deze vragen te beantwoorden, willen we weten of het lengteverschil L (=lengte jongen – lengte meisje) normaal verdeeld is, en zo ja, wat het gemiddelde en de standaardafwijking van L is. We gaan eerst een en ander over de standaardafwijking herhalen.

134

a Ga na dat de formules $\mathrm{E}(a+X) = a+\mathrm{E}(X)$ en $\mathrm{Var}(a+X) = \mathrm{Var}(X)$ in overeenstemming zijn met de bijbehorende krommen in de figuur.

b $\mathrm{Var}(2 \cdot X) = 4 \cdot \mathrm{Var}(X)$. Wat is dus het verband tussen $\mathrm{sd}(2 \cdot X)$ en $\mathrm{sd}(X)$?

135 Xander en Yono spelen allebei een avond in een casino. Xander begint met 100 euro, Yono met 200 euro. Allebei zetten ze (onafhankelijk van de ander) twintig keer in, Xander zet steeds 5 euro in, Yono 10 euro. Veronderstel dat de kans $\frac{1}{2}$ is op verlies (dan ben je je inzet kwijt) en de kans ook $\frac{1}{2}$ is op winst (dan wordt de dubbele inzet uitbetaald). X is Xanders bedrag na de twintig keer spelen, Y is Yono's bedrag na afloop. X en Y zijn binomiaal verdeeld.
$X+Y$ is het bedrag dat Xander en Yono samen na afloop hebben.

a Wat zijn E(X), E(Y) en E$(X+Y)$?
b Wat zijn Var(X), Var(Y) en Var$(X+Y)$?

Op grond van de centrale limietstelling zijn X en Y bij benadering normaal verdeeld, en om dezelfde reden is $X+Y$ bij benadering normaal verdeeld. En de verdeling van $X+Y$ zou nog beter op een normale verdeling hebben geleken als Xander en Yono (veel) vaker dan twintig keer hadden ingezet.

Als X en Y onafhankelijk zijn en beide normaal verdeeld zijn, dan is ook $X+Y$ normaal verdeeld.

136 Stel dat X de nevenstaande verdelingskromme heeft. Zoals je ziet neemt X de waarden van -1 tot 2 aan. Stel dat E$(X) = 0{,}2$ en sd$(X) = 0{,}6$.
Bij X maken we $T = \text{-}X$ (het tegengestelde van X; bijvoorbeeld als X de winst is bij een zeker spel, is T het verlies bij dat spel.)

a Teken op het werkblad de verdelingskromme van T.
b Hoe groot zijn E(T) en sd(T)?

137 We vragen ons af: Hoe zit het met het lengteverschil L van een willekeurige 18-jarige jongen en een willekeurig 18-jarig meisje? De lengte van de jongen noemen we X, die van het meisje Y. Dus $L = X - Y$.
Omdat Y normaal verdeeld is, is -Y dat ook.

a Leg uit dat L normaal verdeeld is.

18-jarige jongens zijn gemiddeld 180 cm lang met een standaardafwijking van 7 cm; 18-jarige meisjes zijn gemiddeld 170 cm lang met een standaardafwijking van 6 cm.

b Bereken E(L), Var(L) en sd(L).

Als X en Y onafhankelijk zijn en beide normaal verdeeld zijn, dan is ook $X-Y$ normaal verdeeld.

138 We kiezen twee willekeurige Nederlandse mannen en bepalen hun lengte. De lengte van de eerste die wordt gekozen noemen we X, die van de tweede Y. Het gemiddelde van zowel X als Y is 180 cm en de standaardafwijking is 7 cm.
We moeten zorgvuldig kiezen, anders zijn X en Y niet onafhankelijk.

a Noem omstandigheden waarbij X en Y zeker niet onafhankelijk zijn.

We zijn geïnteresseerd in de som S van X en Y.
Anneke stelt voor in plaats van een tweede man te kiezen gewoon de lengte van de eerste man twee keer te nemen. Dus met $D = X + X$ te werken in plaats van $S = X + Y$.

b Zijn D en S gelijk?

c Wat zijn de gemiddelden en standaardafwijkingen van D en S?

Ten slotte bekijken we ook nog de gemiddelde lengte van de twee gekozen mannen: $G = \frac{1}{2}(X + Y)$.

d Wat zijn het gemiddelde en de standaardafwijking van G?

e Wat zijn het gemiddelde en de standaardafwijking van de gemiddelde lengte van negen onafhankelijk van elkaar gekozen mannen?

De wortel-n-wet

We bekijken n onafhankelijke herhalingen van een toevalsexperiment met verwachtingswaarde E(X) en standaardafwijking sd(X).
Zeg dat de resultaten zijn: $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$.
De som van de resultaten is $S = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$, het gemiddelde is $G = \frac{1}{n} \cdot S$.
Er geldt:
$\mathrm{E}(S) = n \cdot \mathrm{E}(X)$, $\mathrm{sd}(S) = \sqrt{n} \cdot \mathrm{sd}(X)$,
$\mathrm{E}(G) = \mathrm{E}(X)$ en $\mathrm{sd}(G) = \dfrac{\mathrm{sd}(X)}{\sqrt{n}}$.
Als $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ normaal verdeeld zijn, zijn S en G zijn dat ook.

139 In veel winkels wordt bij het afrekenen afgerond op veelvouden van 5 eurocent. Door het afronden betaalt de klant meestal iets te veel of te weinig. Het aantal eurocent dat hij te veel betaalt noemen we X; in het geval dat de klant te weinig betaalt is X negatief.

a Bereken E(X) en Var(X).

b Wat was je veronderstelling bij vraag a?

Op een dag heeft een supermarkt – waar op bovenstaande manier wordt afgerond – 200 klanten gehad. T is het aantal eurocent dat de supermarkt die dag door het afronden teveel ontvangt.

c Op grond van welke stelling is T bij benadering normaal verdeeld?

d Bereken de kans dat T groter dan $0{,}50$ euro is.

e Tussen welke grenzen ligt T met 95% zekerheid?

140

In een diepvriespak lekkerbekjes zitten volgens de verpakking 4 tot 6 wijtingfilets in beslag die samen een gewicht van 500 gram hebben. Neem aan dat het gewicht van zo'n pak normaal verdeeld is met gemiddelde 500 gram en standaardafwijking 15 gram.

a Waarom is de standaardafwijking van het gewicht van een pak lekkerbekjes waarschijnlijk groter dan de standaardafwijking van het gewicht van bijvoorbeeld een pondspak suiker?

Iemand koopt zo'n pak lekkerbekjes.

b Hoe groot is de kans dat het gewicht daarvan meer dan $10\ \%$ afwijkt van wat de verpakking belooft?

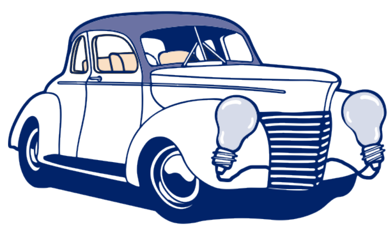
Iemand koopt drie van deze pakken.

c Hoe groot is de kans dat het totale gewicht van de drie pakken meer dan 10% afwijkt van het te verwachten totale gewicht?

De kans bij **c** is beduidend kleiner dan bij **b**.

d Kun je dat verklaren?

141



Twee koplampen

De levensduur van een halogeenkoplamp van een auto is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2500 branduren en een standaardafwijking van 450 uur. Neem aan dat de levensduur van de linker koplamp van een auto en de levensduur van de rechter koplamp onafhankelijk van elkaar zijn.

a Bereken de kans dat zowel de linker als de rechter koplamp binnen 2100 branduren kapot gaat.

De levensduur van de rechter koplamp noemen we R en die van de linker koplamp L. Om R en L met elkaar te vergelijken, bekijken we het verschil V, gedefinieerd door $V = R - L$.
Als bijvoorbeeld $V = \text{-}100$, dan brandt de linker koplamp 100 uur langer dan de rechter koplamp.

b Wat zijn het gemiddelde en de standaardafwijking van V?

c Bereken de kans dat het verschil in levensduur van de beide koplampen kleiner is dan 20 uur.

Naar: examen vwo wiskunde B, 2007I

142 **Heupoperaties**

Patiënten lopen na een operatie in het ene ziekenhuis veel meer gevaar een infectie te krijgen dan in het andere. In het jaar 2003 werden in een bepaald ziekenhuis 120 heupoperaties uitgevoerd, waarna 6 patiënten een infectie kregen. De directie vond het percentage van 5% infectiegevallen te hoog en nam extra preventieve maatregelen. In 2004 werden 154 heupoperaties uitgevoerd, met nu 2 infectiegevallen. Men vroeg zich af of dit betere resultaat toeval was of dat het door de extra preventieve maatregelen kwam.

a Bereken de kans op hoogstens 2 infectiegevallen bij 154 operaties voor het geval dat de kans op infectie per operatie 0,05 is.

Omdat de zojuist berekende kans klein is, neemt men aan dat na de extra preventieve maatregelen de kans op infectie na een operatie is afgenomen. De kans op infectie na een operatie na de extra preventieve maatregelen noemen we p.

b Zoek de waarde van p waarvoor geldt: de kans op hoogstens 2 infectiegevallen bij 154 patiënten is 0,1.

De afgelopen vijf jaar was de verpleegduur in Nederlandse ziekenhuizen voor heupoperaties ongeveer normaal verdeeld met een gemiddelde van 4,5 dagen en een standaardafwijking van 1,8 dagen.

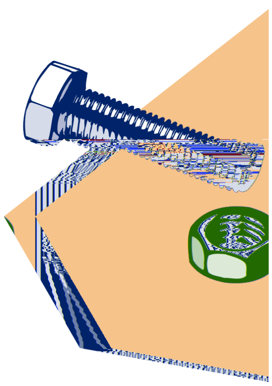
Van 100 patiënten wordt de gemiddelde verpleegduur bepaald.

c Bereken de kans dat de gemiddelde verpleegduur groter is dan 5,0 dagen. (Dat zou voor de directie aanleiding zijn om maatregelen te nemen.)

Naar: examen vwo wiskunde B, 2008I

143 De diameter van de bout DIN931 is normaal verdeeld met gemiddelde 6,0 mm en standaardafwijking 0,2 mm. De diameter van de bijbehorende moer is normaal verdeeld met gemiddelde 6,5 mm en standaardafwijking 0,2 mm.

Iemand pakt willekeurig een bout en een moer van dit type. We willen weten wat de kans is dat de moer te klein is voor de bout.



Noem de diameter van de bout B en die van de moer M (in mm).

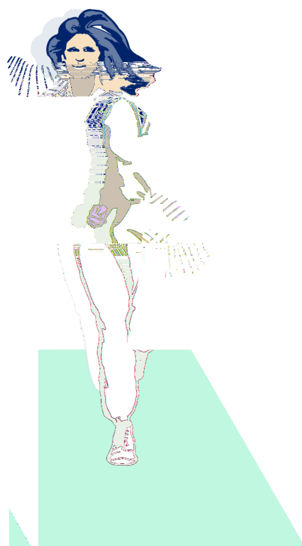
a Hoe is $M - B$ verdeeld?

b Wat betekent het voor $M - B$ dat de moer te klein is voor de bout?

c Wat is de kans dat de moer te klein is voor de bout?

144 Anne moet elke ochtend op halte Terminus overstappen van lijn 5 op lijn 9. De aankomsttijd van lijn 5 is normaal verdeeld met gemiddelde 7.30 uur en standaardafwijking 3 minuten. De vertrektijd van lijn 9 is normaal verdeeld met gemiddelde 7.35 en standaardafwijking 4 minuten.
Wat is de kans dat Anne de aansluiting mist?

145 Easy is startloopster in een estafetteploeg 4 maal 100 meter. Haar tijd over de 100 meter is normaal verdeeld: gemiddeld 12,4 seconden, met een standaardafwijking van 0,6 seconden.
De andere drie loopsters in Easy's ploeg doen korter over de 100 meter, want zij hebben een vliegende start. Hun tijd is normaal verdeeld met gemiddelde 10,8 seconde en standaardafwijking 0,4 seconden.
Wat is de kans dat hun totaaltijd voor de 4 keer 100 meter onder de 44 seconden ligt?



Kansverdelingen

Kansdefinitie

Als er bij een experiment n even waarschijnlijke uitkomsten zijn, waarvan er k zijn van een bepaald type, dan is de kans op een uitkomst van dat type gelijk aan $\frac{k}{n}$.

Bij veel kansen kun je combinatiegetallen gebruiken.

Voorbeeld

Zonder en met terugleggen

In een vaas zitten 25 knikkers, 10 rood en 15 wit.

- We halen er 5 knikkers uit, zonder terugleggen.
  De kans op 3 rode knikkers is:
  $$\text{P(3 rood en 2 wit)} = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{25}{5}} = \frac{60}{253} \approx 0{,}2372.$$
- We halen er 5 knikkers uit, met terugleggen.
  De kans op 3 rode knikkers is:
  $$\text{P(3 rood en 2 wit)} = \binom{5}{2} \cdot \left(\tfrac{10}{25}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{15}{25}\right)^2 \approx 0{,}2304.$$

Dit laatste is een voorbeeld van een **binomiale kans**. We zeggen dat een stochast X **binomiaal verdeeld** is als X het aantal successen is bij een aantal herhalingen van een experiment, steeds met twee alternatieven: succes en mislukking, waarbij de kans op succes vast is (en dus ook die op mislukking). Hierboven zijn er 5 herhalingen met succeskans $\frac{10}{25} = 0{,}4$ ("rood" is hier een succes).

Als het aantal trekkingen klein is ten opzichte van de totale populatie, dan kun je kansen zonder terugleggen (**hypergeometrisch**) praktisch berekenen alsof de trekking met terugleggen gebeurt (binomiaal). De binomiaal berekende kans is dan ongeveer gelijk aan de werkelijke kans.

Cumulatieve kans

Als een toevalsgrootheid X de waarden $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ kan aannemen, dan noemen we $\text{P}(X \leq 3)$ een **cumulatieve kans**. Deze is de som van de kansen: $\text{P}(X = 0)$, $\text{P}(X = 1)$, $\text{P}(X = 2)$ en $\text{P}(X = 3)$.

Verwachtingswaarde en standaardafwijking

Laat X een stochast zijn die de waarden $x_1, x_2, \ldots x_n$ aanneemt, met kansen $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Dan $\text{E}(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots p_n \cdot x_n$ is de **verwachtingswaarde** van X. Als je de tabel van de kansverdeling kent:

waarde	x_1	x_2	...	x_n
kans	p_1	p_2	...	p_n

kun je de verwachtingswaarde dus eenvoudig uitrekenen: vermenigvuldig elk van de mogelijke uitkomsten met de kans op die uitkomst en tel vervolgens de producten op.

$\text{sd}(X) = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$ is de **standaardafwijking** van X.

De standaardafwijking noteren we ook wel met σ.

De **variantie** van X is het kwadraat van de standaardafwijking:

$\text{Var}(X) = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2$.

Er geldt:

$\text{E}(X + Y) = \text{E}(X) + \text{E}(Y)$ voor elke stochast X en Y.

$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$, mits X en Y onafhankelijk zijn.

Als X binomiaal verdeeld is met n herhalingen en succeskans p, dan is $\text{E}(X) = np$ en $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.

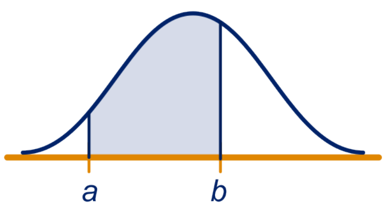
De normale verdeling

Een normale verdeling X ligt vast door zijn verwachtingswaarde μ en zijn standaardafwijking σ.

De kans dat X tussen twee waarden a en b ligt, is de oppervlakte aangegeven in de figuur hiernaast.

Deze kans noteren we met $\text{P}(a < X < b \mid \mu;\sigma)$.

De totale oppervlakte onder de zogenaamde verdelingskromme is 1.



De standaard-normale verdeling

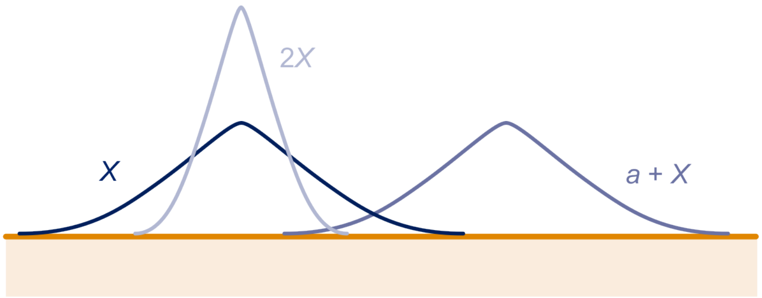
Voor willekeurige stochasten X en Y en getallen a geldt:

1. $\text{E}(a + X) = a + \text{E}(X)$
2. $\text{E}(a \cdot X) = a \cdot \text{E}(X)$

en

1. $\text{Var}(a + X) = \text{Var}(X)$
2. $\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$

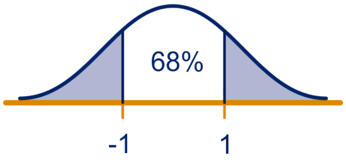
Bij de formules voor $a + X$ en $a \cdot X$ tekenen we de volgende plaatjes.

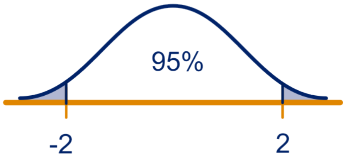


Zo kun je elke normale verdeling 'vervormen' tot de standaard-normale verdeling.

De normale grootheid N, met verwachtingswaarde 0 en standaardafwijking 1 noemen we de **standaard-normale verdeling**.
Bij een normale verdeling X met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ is bij een waarde $X = a$ de z-waarde van a:
$z = \dfrac{a - \mu}{\sigma}$.
Overgaan op de standaard-normale verdeling noemen we **standaardiseren**.
Uitslagen met een

- z-waarde tussen -1 en 1 zijn heel gewoon: in 68% van de gevallen;
- z-waarde die meer dan 2 van 0 afwijkt, zijn tamelijk zeldzaam in 5% van de gevallen;
- z-waarde die meer dan 3 van 0 afwijken zijn uiterst zeldzaam: in 0,2% van de gevallen.





Rekenregels
Als $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ normaal verdeeld zijn, dan is $X = X_1 + \ldots + X_n$ dat ook.
Er geldt: $\text{E}(X) = \text{E}(X_1) + \ldots + \text{E}(X_n)$.
Als $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn geldt ook:
$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \ldots + \text{Var}(X_n)$, dus
$\text{sd}(X) = \sqrt{(\text{sd}(X_1))^2 + \ldots + (\text{sd}(X_n))^2}$.

In het bijzonder geldt de wortel-n-wet.

Als $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met dezelfde verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt voor de som S met $S = X_1 + \ldots + X_n$:
$\mathrm{E}(S) = n \cdot \mu$ en $\mathrm{sd}(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma$.
Voor het gemiddelde G met $G = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ geldt:
$\mathrm{E}(G) = \mu$ en $\mathrm{sd}(G) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Centrale limietstelling
Als onafhankelijke grootheden met dezelfde kansverdeling bij elkaar opgeteld worden, gaat de som steeds meer lijken op een normale verdeling.

De kansverdeling van een binomiale grootheid X met kansparameter p en aantal herhalingen n is goed te benaderen met een normale grootheid N met dezelfde verwachtingswaarde $\mu = n \cdot p$ en standaardafwijking
$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$.
Zo is bijvoorbeeld:
$\mathrm{P}(3 < X < 10, n, p) \approx \mathrm{P}(3{,}5 < N < 9{,}5 \mid \mu;\sigma)$ en
$\mathrm{P}(3 < X \leq 10, n, p) \approx \mathrm{P}(3{,}5 < N < 10{,}5 \mid \mu;\sigma)$ enzovoort.

Dit klopt beter naarmate n groter is en p in de buurt van

Over paragraaf 1: de kansdefinitie

1 Er staan vijf mensen in een rij voor een loket, onder wie Anne, Bea en Cleo.

a Wat is de kans dat Anne voor Bea staat, maar achter Cleo?

b Wat is de kans dat Anne en Cleo achter elkaar staan, zonder iemand tussen hen in?

c Wat is de kans dat Anne bij de voorste twee mensen in de rij staat?

2 We werpen met twee "dobbelstenen": een gewone (met 1 tot en met 6 ogen) en een regelmatig viervlak (met 1 tot en met 4 ogen).
Wat is de kans dat het viervlak een hoger aantal ogen geeft dan de gewone dobbelsteen?

3 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52.
Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen A dat Anne krijgt.
Anne vindt dat de kans dat ze hartenaas krijgt $\frac{1}{4}$ is.

a Leg uit hoe Anne dat beredeneerd kan hebben.

Anne redeneert verder: "Ik kan 0, 1, 2, 3 of 4 azen krijgen. Dat zijn vijf mogelijkheden. Dus is de kans dat ik 0 azen krijg $\frac{1}{5}$".

b Geef commentaar op deze redenering.

c Bereken $\text{P}(A = 0)$, $\text{P}(A = 1)$ en $\text{P}(A = 4)$.

Over paragraaf 2: combinatoriek en kans

4 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen A dat Anne krijgt.

a Bereken $\text{P}(A = 3)$.

Het kaartspel heeft 13 klaveren, 13 ruiten, 13 harten en 13 schoppen.

b Bereken de kans dat Anne van elke soort ten minste 3 kaarten krijgt.

5 Er doen n atleten mee aan een wedstrijd. De drie die als eersten finishen komen op het podium.

a Hoeveel verschillende podia zijn er mogelijk (uitgedrukt in n)?

Er doen n atleten mee aan een wedstrijd. De drie die als eerste finishen mogen naar de olympische spelen.

b Hoeveel verschillende drietallen zijn er mogelijk om uitgezonden te worden, uitgedrukt in n?

Over paragraaf 3: het binomium van Newton

6

$(x + x^{-1})^6$ wordt zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk geschreven.

a Hoeveel termen krijg je?

b Wat zijn de exponenten van x in elk van deze termen?

c Hoe groot is de constante term?

7

Bij een zekere schaatswedstrijd wordt er op vier afstanden gereden door n deelnemers. Voor elke afstand heeft Anne een persoonlijke favoriet. Na de wedstrijd wordt de lijst opgemaakt van de vier winnaars.

a Hoeveel lijsten zijn er in totaal mogelijk?

b Bereken hoeveel lijsten er mogelijk zijn met:
- 0 van Annes favorieten,
- 1 van Annes favorieten,
- 2 van Annes favorieten,
- 3 van Annes favorieten,
- 4 van Annes favorieten.

c Wat is het verband van **a** en **b** met het binomium van Newton?

Over paragraaf 4: verwachting

8

Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen A dat Anne krijgt.

a Maak een tabel van de kansverdeling van A.

b Bereken E(A) met behulp van deze kansverdeling in twee decimalen.

$H = 1$ als Anne hartenaas krijgt, anders is $H = 0$.

c Bereken E(H).

d Hoe vind je E(A) met behulp van E(H)?

9 Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen. X is het aantal successen en Y is het aantal mislukkingen.
Stel dat je de verwachtingswaarde van X kent.
a Hoe vind je daaruit de verwachtingswaarde van Y?

Stel dat je de verwachtingswaarde van X kent.
b Hoe vind je daaruit de succeskans?

10 Een spel gaat over drie ronden. In elke ronde valt € 120 te verdienen. Dat lukt in de eerste ronde met kans $\frac{1}{2}$; dan kom je in de tweede ronde, anders ben je uitgeschakeld. In de tweede ronde lukt dat met kans $\frac{1}{3}$; dan kom je in de derde ronde, anders ben je uitgeschakeld. In de derde ronde verdien je de € 0 met kans $\frac{1}{4}$.
X is het totale bedrag dat je met het spel verdient.
a Maak een kanstabel voor X en bereken E(X).

X_1, X_2 en X_3 zijn de bedragen die je in de eerste, tweede en derde ronde verdient.
b Bereken E(X_1), E(X_2) en E(X_3).
c Kloppen de antwoorden van **a** met die van **b**?

Over paragraaf 5: de binomiale verdeling

11 Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Het kaartspel heeft vier azen.
Anne redeneert als volgt: "De kans dat ik hartenaas krijg is $\frac{1}{4}$; die kans geldt ook voor de andere drie azen. Dus is de kans dat ik 3 azen krijg $\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4}$.
Geef commentaar.

12 Iemand werpt 20 keer met een dobbelsteen. X is het aantal zessen dat hij werpt.
a Vul in: P$(X \leq 5) = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} \binom{\ldots}{\ldots} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{\ldots} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\ldots}$
b Op welke gebeurtenis is $\sum_{k=0}^{10} \binom{20}{2k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20-2k}$ de kans?

13 Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen. X is het aantal successen en Y is het aantal mislukkingen.
Je kent de cumulatieve kanstabel van X.
a Hoe vind je daaruit de cumulatieve kanstabel van Y?
b Hoe vind je daaruit de gewone kanstabel van X?

Over paragraaf 6: de standaardafwijking

14 Van de stochast X zijn de kansen gegeven:
$\text{P}(X = 0) = \frac{1}{3}$, $\text{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, $\text{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$.

a Bereken sd(X) zonder GR.

Van de stochast Y zijn de kansen gegeven:
$\text{P}(Y = 0) = \frac{1}{3}$, $\text{P}(Y = 10) = \frac{1}{2}$, $\text{P}(Y = 30) = \frac{1}{6}$.

b Hoe vind je sd(Y) uit sd(X)?

Van de stochast Z zijn de kansen gegeven:
$\text{P}(Z = 10) = \frac{1}{3}$, $\text{P}(Z = 11) = \frac{1}{2}$, $\text{P}(Z = 13) = \frac{1}{6}$.

c Hoe vind je sd(Z) uit sd(X)?

15 Een binomiaal kansexperiment heeft 50 herhalingen. X is het aantal successen, Y het aantal mislukkingen.
Stel je kent sd(X).

a Hoe vind je hiermee sd(Y)?

Neem aan sd$(X) = 2\sqrt{2}$. Er zijn twee mogelijkheden voor de succeskans.

b Wat kun je zeggen over het verband tussen die twee?

c Hoe vind je de succeskans?

16 **Bridge**

Anne speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52. Er zijn vier azen. Het aantal azen dat Anneke krijgt noemen we A. De kansverdeling van A is:

a	0	1	2	3	4
$\text{P}(A = a)$	$0{,}3038$	$0{,}4388$	$0{,}2135$	$0{,}0412$	$0{,}0026$

a Bereken hiermee Var(A).

$H = 1$ als Anneke hartenaas krijgt, anders $H = 0$.

b Bereken Var(H).

c Waarom geldt niet: Var$(A) = 4 \cdot$ Var(H)?

Over paragraaf 7: wat is normaal?

17 X is normaal verdeeld met gemiddelde 100 en sd 10.
Beantwoord de volgende vragen zonder GR.

a Neem over en vul het juiste getal in: $P(X < 105) = P(X > ...)$.

b Neem over en vul het juiste teken in: $<$ of $>$.
$P(93 < X < 105) ... P(94 < X < 106)$.

Over paragraaf 8: standaardiseren

18 Gegeven is een normale verdeelde stochast X. De z-waarde van 100 is 0,4 en de z-waarde van 92 is -1,6.
Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de X.

Over paragraaf 9: de centrale limietstelling

19 X en Y zijn twee onafhankelijke stochasten, met standaardafwijking 3, respectievelijk 4.

a Wat is de standaardafwijking van $X + Y$?

$X_1, X_2, ..., X_{64}$ zijn vierenzestig onafhankelijke stochasten, elk met standaardafwijking 3.

b Wat is de standaardafwijking van de som $X_1 + X_2 ... + X_{64}$?

c Wat is de standaard afwijking van het gemiddelde van die 64 stochasten?

20 De uitkomst X van een experiment kan twee waarden aannemen: waarde 5 met kans $\frac{1}{3}$ en waarde 8 met kans $\frac{2}{3}$. Het experiment wordt 100 keer herhaald; de herhalingen zijn onafhankelijk van elkaar. S is de som van de honderd uitkomsten. Omdat het aantal herhalingen groot is, is S bij benadering normaal verdeeld.

a Met welk gemiddelde en welke standaardafwijking?

b Hoe benader je P($S > 697$) met de GR?

21 Een discrete stochast D kan goed benaderd worden door een normale stochast N.
Neem over en vul op de ... de juiste getallen in.
P($400 < D < 500$) $\approx$ P($... < N < ...$),
P($400 < D \leq 500$) $\approx$ P($... < N < ...$),
P($400 \leq D \leq 500$) $\approx$ P($... < N < ...$).

Over de binomiale verdeling

22 Een pincode bestaat uit vier cijfers van 0 t/m 9. Anneke is haar pincode vergeten. Wel weet ze dat hij uit de cijfers 1, 5, 6, 8 bestaat. Ze toetst een van de mogelijkheden in.

a Wat is de kans dat ze de goede pincode intoetst?

b Maak een kanstabel voor het aantal cijfers dat ze op de goede plaats heeft staan.

23 Bridge wordt gespeeld door vier personen en met een volledig kaartspel (52 kaarten, waaronder 4 azen). De kaarten worden gedeeld; ieder krijgt 13 kaarten.
Birgit is een van de spelers. We letten op het aantal azen dat Birgit krijgt.

a Bereken de kans dat Birgit geen enkele aas krijgt.

b Bereken de kans dat Birgit precies één aas krijgt.

c Maak een kanstabel voor het aantal azen dat Birgit krijgt.

24 Een druiventeler kan kiezen uit twee manieren van oogsten.

- Direct oogsten als de druiven rijp zijn.
  De winst per kg is dan €$1{,}50$. Aan deze manier van oogsten is geen risico verbonden.
- Twee weken wachten met oogsten als de druiven rijp zijn.
  Hierdoor worden de druiven voller van smaak en zijn dan meer waard: de winst wordt €$2{,}00$ per kg. Aan deze manier zit wel een risico. Als het gaat regenen in de extra twee weken, worden de druiven namelijk aangetast en worden ze minder waard. De winst is dan nog slechts €$0{,}75$ per kg.

De kans dat het in de betreffende periode van twee weken regent is $0{,}3$.

Bekijk een periode van 20 jaar.

a Laat zien dat de te verwachten winst per kg bij de tweede manier groter is dan €$1{,}50$.

Als de winst van de aangetaste druiven veel lager wordt dan €$0{,}75$, is het voordeliger voor de teler om de eerste manier te kiezen.

b Bereken vanaf welke winst per kg voor de aangetaste druiven hij beter voor de eerste manier kan kiezen.

25 Met de Euroloterij is er elke week kans op extra geldprijzen, bovenop de winkans bij alleen de Lotto. Je moet wel al aan de Lotto deelnemen voordat je kunt deelnemen aan de Euroloterij. De inleg is €1,– per trekking. Op het formulier staat een getal van zes cijfers (0 t/m 9).

Het prijzenschema is als volgt:

Alle 6 cijfers goed:	€200.000,–
De laatste 5 cijfers goed en niet alle 6:	€5000,–
De laatste 4 cijfers goed en niet de laatste 5:	€450,–
De laatste 3 cijfers goed en niet de laatste 4:	€50,–
De laatste 2 cijfers goed en niet de laatste 3:	€5,–
Het laatste cijfer goed en niet de laatste 2:	€1,–

a Maak een kanstabel van de uitkering per formulier.

b Bereken de verwachte winst per formulier voor de organisator van de Euroloterij.

26

We bekijken steeds twee databestanden. Welk van de twee heeft de grootste standaardafwijking? Waarom?
Controleer je antwoorden eventueel achteraf door de standaardafwijkingen uit te rekenen.

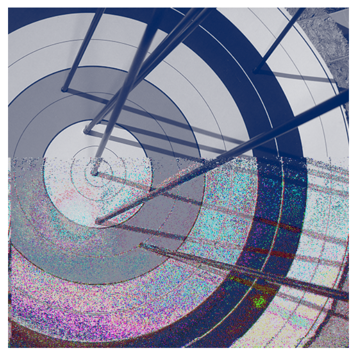
a 1, 2, 2, 3 en 1, 1, 3, 3

b 1, 1, 3, 3 en 0, 0, 2, 2

c 1, 1, 3, 3 en 2, 2, 6, 6

d 1, 1, 3, 3 en 1, 1, 1, 3, 3, 3

27



Bij boogschieten worden pijlen geschoten op een schietschijf, het zogenaamde blazoen. Dat heeft, van binnen naar buiten, de kleuren geel, rood, blauw, zwart en wit. Elke kleur heeft twee ringen. De puntentelling is van binnen naar buiten: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
Boogschutter Robin H. kent zijn kansen per schot:

aantal punten	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
kans	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19

Boogschutter Wilhelm T. heeft vaker een afzwaaier, maar zit ook vaker dicht bij de roos dan Robin. Wilhelms kansen zijn:

aantal punten	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
kans	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0	0	0,1	0,2	0,3

a Welke boogschutter behaalt gemiddeld de hoogste score?

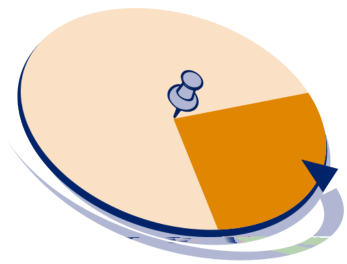
b Bij welke boogschutter is de standaardafwijking van het aantal punten het grootst?

28 Na de wedstrijd van Ajax tegen Feyenoord is het weer eens mis. Vijfentwintig supporters, tien van Ajax en vijftien van Feyenoord, gaan met elkaar op de vuist. De politie grijpt in, zonder ergens op te letten. Elke supporter heeft daardoor dezelfde kans om opgepakt te worden. In totaal worden er acht supporters gearresteerd.
Hoe groot is de kans dat er drie aanhangers van Ajax en vijf van Feyenoord naar het bureau moeten? Schrijf je antwoord eerst met combinatiegetallen en bereken daarna de kans.

29 Sietse heeft twee volle batterijen nodig voor zijn fototoestel. In een laatje liggen zes oplaadbare batterijen: vier volle en twee lege. Sietse pakt willekeurig twee van de batterijen en doet die in zijn fototoestel.
Bereken de kans dat het fototoestel werkt op twee manieren:
- door twee kansen te vermenigvuldigen,
- door combinatiegetallen te gebruiken.

30 De telefoonnummers in Uden beginnen met 0413 – dat is het netnummer – waarna het abonneenummer (zes cijfers) komt.
Hoeveel abonneenummers kun je maken met:
a de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9?
b de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8?
c de cijfers 1, 1, 1, 3, 5 en 7?
d de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 7?

31 Bij een spel met een draaiwiel met een successector van 90° heb je kans $\frac{1}{4}$ om drie euro te winnen en kans $\frac{3}{4}$ om één euro te verliezen. Iemand besluit om dit spel drie keer te spelen. X is het bedrag dat hij na die drie spelletjes gewonnen heeft.
a Welke waarden kan X aannemen?
b Maak een tabel van de kansverdeling van X.
c Laat met een berekening zien dat dit spel eerlijk is.
d Wat is trouwens een eerlijk spel, vind je?



32 Er wordt zes keer met een munt geworpen.
Bereken de kans dat:
a alleen de eerste, derde en vijfde worp kop oplevert.
b alleen de tweede, vierde en zesde worp kop oplevert.
c precies drie van de zes worpen kop opleveren.

Noem het aantal keren dat kop wordt gegooid Y.
d Maak een tabel van de kansverdeling van Y.
e Teken het kanshistogram van Y.
f Waarom is dit kanshistogram symmetrisch?

2.11 Extra opgaven

33 In een grabbelton zitten zes plankjes. Op drie ervan staat het getal 5, op twee staat 10 en op één 25. Iemand pakt willekeurig twee keer een plankje uit de ton, met terugleggen.
X is de som van de getrokken getallen.

a Maak een kanstabel voor X.
b Bereken $\mathrm{E}(X)$ met behulp van de kanstabel.
c Bereken $\mathrm{E}(X)$ met de somregel voor de verwachtingswaarde.
d Bereken $\mathrm{Var}(X)$ met behulp van de kanstabel in **a**.
e Bereken $\mathrm{Var}(X)$ met de somregel voor de variantie.

34 Dezelfde grabbelton als in opgave 33. Er worden nu twee plankjes zonder terugleggen gepakt.
Y_1 is het getal op het eerste plankje dat gepakt wordt, Y_2 dat op het tweede plankje en Y is de som van die getallen.

a Maak een kanstabel voor Y_2.
b Bereken $\mathrm{E}(Y_2)$.
c Maak een kanstabel voor Y.
d Bereken $\mathrm{E}(Y)$.
e Geldt $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2)$?
f Bereken $\mathrm{Var}(Y)$.
g Waarom is $\mathrm{Var}(Y)$ niet gelijk aan $\mathrm{Var}(Y_1) + \mathrm{Var}(Y_2)$?

35 Bij het bordspel Mens erger je niet moet je een nieuwe pion in het spel brengen als je zes ogen gooit met de dobbelsteen, mits nog niet alle pionnen in het spel zijn.
Bereken de kans dat:

a de tweede pion in de vierde beurt in het spel komt.
b de tweede pion pas na de vierde beurt in het spel komt.
c de derde pion in de tiende beurt in het spel komt.
d de vierde (en laatste) pion pas na de twintigste beurt in het spel komt.

36 Bij een griepepidemie wordt 20% van de bevolking ziek. Neem aan dat iedereen dezelfde kans heeft om ziek te worden.

a Waarom is deze aanname aanvechtbaar?

Op een school werken 25 leraren.

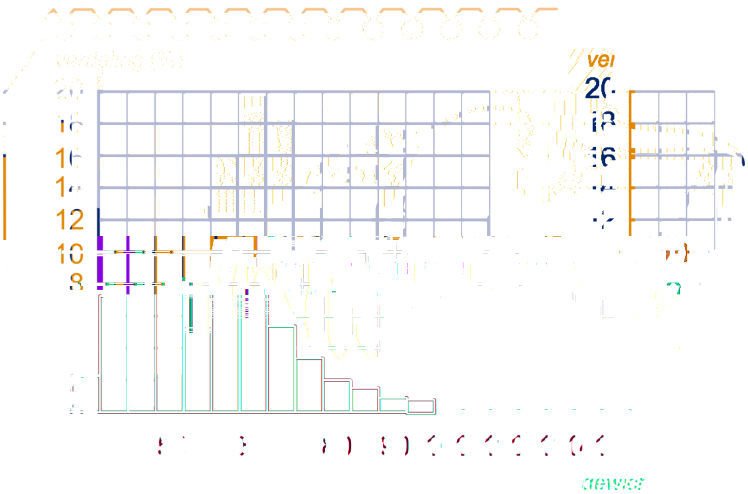
b Hoe groot is de kans dat minstens vijf leraren griep krijgen?
c Hoe groot is de kans dat hoogstens vijf leraren griep krijgen?
d En hoe groot is de kans dat precies vijf leraren griep krijgen?

Neem aan dat op een dag vijf leraren door de griep geveld zijn.

e Hoe groot is de kans dat van de elf leraren die Sofie heeft er die dag drie met griep thuis zijn gebleven?

Over de normale verdeling

37 Van 22000 zwangere vrouwen werd het gewicht bepaald. Hieronder staat het histogram.



a Is het gewicht bij benadering normaal verdeeld?

De diastolische bloeddruk (ofwel onderdruk) van mensen tussen 30 en 70 jaar is ongeveer normaal verdeeld met een gemiddelde van 85 (mm Hg) en standaardafwijking 13 mm Hg.
12,4% van de mensen tussen 30 en 70 jaar hebben een diastolische bloeddruk boven 100 mm Hg en 12,4% van de mensen hebben een bloeddruk onder ... mm Hg.

b Welke grens is dat?

c Tussen welke waarden ligt de bloeddruk van de middelste 50% van de mensen?

38 Anne heeft op haar computer maar één plaatje van een normale curve staan. Dat gebruikt ze bij elke opgave waarin sprake is van een normale verdeling.

a Geef hierop commentaar.

Anne heeft bij een normale verdeling de z-waarde bepaald van de waarde waarboven 13% ligt en ook de z-waarde van de waarde waaronder 13% ligt.

b Wat is het verband tussen deze twee z-waardes?

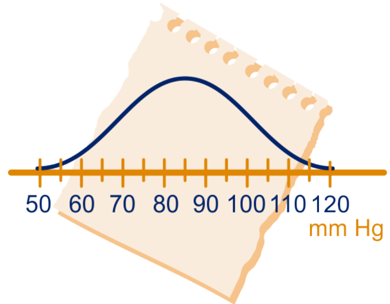
Stel je weet dat bij twee normale verdelingen met dezelfde standaardafwijking de percentages onder 50 respectievelijk onder 60 gelijk zijn.

c Wat weet je dan van hun gemiddeldes?

Stel je weet dat bij twee normale verdelingen met gemiddeldes 50 en 60 de percentages onder 70 gelijk zijn.

d Wat weet je dan van de standaardafwijkingen?

39 De diastolische bloedruk (ofwel onderdruk) van mensen tussen 30 en 70 jaar is ongeveer normaal verdeeld met een gemiddelde van 85 (mm Hg) en standaardafwijking 13 mm Hg.



a Is de bloeddruk een continue of een discrete variabele?

b Maak een histogram van de bloeddruk met klassengrenzen 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120.

Een arts noteert de bloeddruk als geheel getal.

c Bij hoeveel procent van de mensen zal hij 85 noteren?

40 In de tabel staan de gemiddelde temperaturen per seizoen in De Bilt en de bijbehorende standaardafwijkingen.

seizoen	winter	lente	zomer	herfst
gemiddelde	2,7	8,7	16,4	10,0
standaardafwijking	1,8	1,0	1,0	1,0

Bereken de gemiddelde jaartemperatuur in De Bilt en de bijbehorende standaardafwijking.

41 Drie echtparen Arno en Anneke, Bob en Bea en Cor en Crissy hebben een dansclubje. Elke dinsdagavond gaan ze dansen. Wie met wie danst, wordt elke dinsdag opnieuw door het lot bepaald. X is het aantal mannen dat zijn eigen vrouw treft.

a Ga na dat per dinsdag de volgende kansen gelden: $\text{P}(X = 0) = \frac{1}{3}$, $\text{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ en $\text{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$.

b Bereken $\text{E}(X)$ en $\text{sd}(X)$.

Vandaag viert het dansclubje haar eerste lustrum: de afgelopen vijf jaar hebben ze geen dinsdagavond overgeslagen, in totaal 262 avonden. In totaal hebben ze 262 S is het aantal keer dat in de vijf jaar een man zijn eigen vrouw trof. S is bij benadering normaal verdeeld.

c Bereken $\text{E}(S)$ en $\text{sd}(S)$.

d Bereken met deze normale benadering de kans dat niet meer dan 250 keer een man zijn eigen vrouw trof.

42

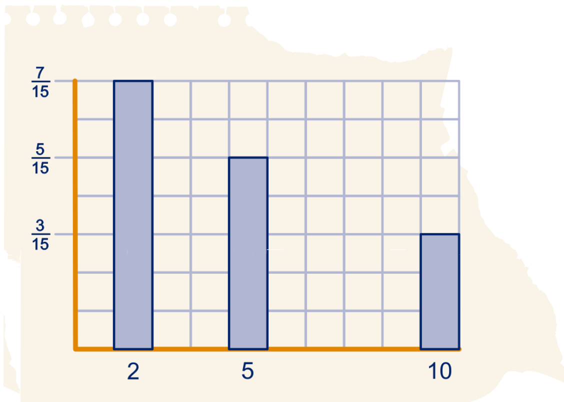
Grabbelton

"Altijd prijs in de supergrabbelton" staat er bij een kraampje op de braderie. Tussen het zaagsel in de ton zijn tien plankjes verborgen: op zeven plankjes staat "2", op twee plankjes staat "5" en op één plankje staat "10". Na een inzet mag je twee plankjes grabbelen. Het hoogste getal dat op deze plankjes staat, is de uitbetaling X in euro's.

a Ga na: P$(X = 5) = \frac{1}{3}$.

b Geef in een tabel de kansverdeling van X.

c Bereken E(X) en Var(X)



Hierboven is het histogram getekend van de uitbetaling bij één keer spelen in de grabbelton met de tien plankjes. Je ziet dat het histogram er niet normaal verdeeld uitziet, integendeel!
Het histogram dat hoort bij vijftig keer spelen is goed te benaderen met een normale kromme.

d Waarom?

e Tussen welke twee bedragen ligt de totale uitbetaling bij vijftig keer spelen?

f Hoe groot is de kans op de laagst mogelijke en hoe groot is de kans op de hoogst mogelijke uitbetaling?

T is de totale uitbetaling bij vijftig keer spelen in de grabbelton: $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_{50}$, waarbij X_i de uitbetaling is bij de i-de keer spelen.

g Bereken E(T), Var(T) en sd(T)

h Bereken de kans op een totale uitbetaling tussen de 224 en 255 euro in vier decimalen.

43

Een vulmachine vult pakken met (ongeveer) 1 kilogram suiker. Als de machine ingesteld staat op 1000 gram, zal het werkelijke gewicht van een pak normaal verdeeld zijn met gemiddelde 1000 gram en standaardafwijking 10 gram.

a Toon aan dat bijna 7% van de pakken een gewicht heeft van 985 gram of minder.

De EU-voorschriften betreffende vulgewichten zijn in Nederland vastgelegd in het zogenaamde Hoeveelheidsaanduidingenbesluit (de Warenwet). De bedoeling van deze normen is dat de consument niet onaangenaam verrast wordt door een artikel waar veel minder in zit dan er op de verpakking staat. De fabrikanten die zich aan deze normen houden, tonen dat door op de verpakking aan de inhoudsopgave de letter "e" toe te voegen.
In deze voorschriften worden de volgende begrippen gebruikt:

- nominale hoeveelheid: de hoeveelheid die op het pak vermeld staat (dus bijvoorbeeld 1 kg suiker),
- fout in minus: de hoeveelheid die de werkelijke inhoud kleiner is dan de nominale hoeveelheid.

Artikel 3 van de voorschriften zegt nu ongeveer het volgende:

- de werkelijke hoeveelheid mag gemiddeld niet kleiner zijn dan de nominale hoeveelheid,
- bij een statistische controle (steekproef) mag hoogstens 2% van de pakken een hoeveelheid bevatten die een grotere fout heeft dan de toegelaten fout in minus

Zie de tabel hieronder.

Nominale hoeveelheid Q van een verpakking in gram of in milliliter		toegelaten fout in minus	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

b Lees af hoe groot de toegelaten fout in minus is van een $1\frac{1}{2}$-literfles cola. En van een blikje cola van 33 cl.

Pakken koffie worden machinaal gevuld door een machine die bij elke ingestelde hoeveelheid een standaardafwijking heeft van 5 gram. Neem aan dat de gemiddelde hoeveelheid koffie in een pak gelijk is aan de ingestelde hoeveelheid. We bekijken de pondspakken (500 gram).

c Bereken op welke hoeveelheid de machine moet worden ingesteld als aan beide eisen van artikel 3 voldaan moet worden.

Naast pondspakken zijn er ook nog halfpondspakken in de handel. Ook deze pakken moeten aan de EU-normen voldoen.

d Onderzoek of de fabrikant bij halfpondspakken meer, minder of evenveel koffie verbruikt per nominaal gewicht van 1 kg vergeleken met pondspakken

44

Batterijen

De research afdeling van een fabriek heeft een nieuw type batterij ontwikkeld, dat bijzonder geschikt is voor het aandrijven van speelgoedmotortjes. Neem aan dat op elke productiedag de levensduur van de die dag geproduceerde batterijen normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 50 minuten. Het gemiddelde μ in minuten is afhankelijk van een aantal factoren in het fabricageproces. Omdat de fabrikant in reclameboodschappen beweert dat zijn batterijen erg lang meegaan, wil hij er voor zorgen dat hoogstens 7% van de batterijen uit een dagproductie een levensduur heeft van minder dan $8\frac{1}{2}$ uur.

a Bereken in minuten nauwkeurig de kleinste waarde van μ waarvoor dit nog het geval is.

Een controleur merkt dat bij het wisselen van een serie batterijen per ongeluk twee nieuwe batterijen bij een groepje van tien lege terecht zijn gekomen. Omdat aan de buitenkant niet zichtbaar is welke de nieuwe zijn, zit er niets anders op dan de batterijen een voor een door te meten totdat de twee nieuwe zijn teruggevonden.

b Bereken de kans dat hij in totaal vier van de twaalf batterijen moet doormeten

Examen wiskunde A, 1994I, gedeeltelijk

45

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen nieuwe personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen, omdat ze niet aan deze eis voldeden.

De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van de aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van Volksgezondheid.

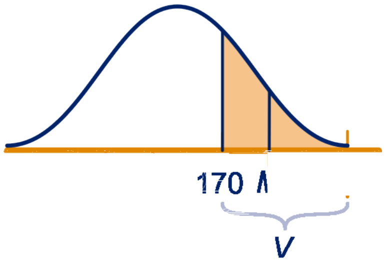
Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = 160{,}4$ cm en standaardafwijking σ.

a Toon aan dat $\sigma = 7{,}2$ cm.

De groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 noemen we V. De mediaan van de lengte van de vrouwen in V noemen we even MED.

b Hoeveel procent van de vrouwen in V is langer dan MED?

c Toon aan dat $MED = 172{,}6$ cm (uitgaande van $\sigma = 7{,}2$ cm en $\mu = 160{,}4$ cm).



De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91 sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselecte steekproef van 1000 vrouwen tussen 18 en 65 jaar werd bij 113 vrouwen een lengte gemeten van meer dan 172,6 cm.

Neem aan dat de standaardafwijking ongewijzigd is, dus $\sigma = 7{,}2$ cm.

d Wat is de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen.

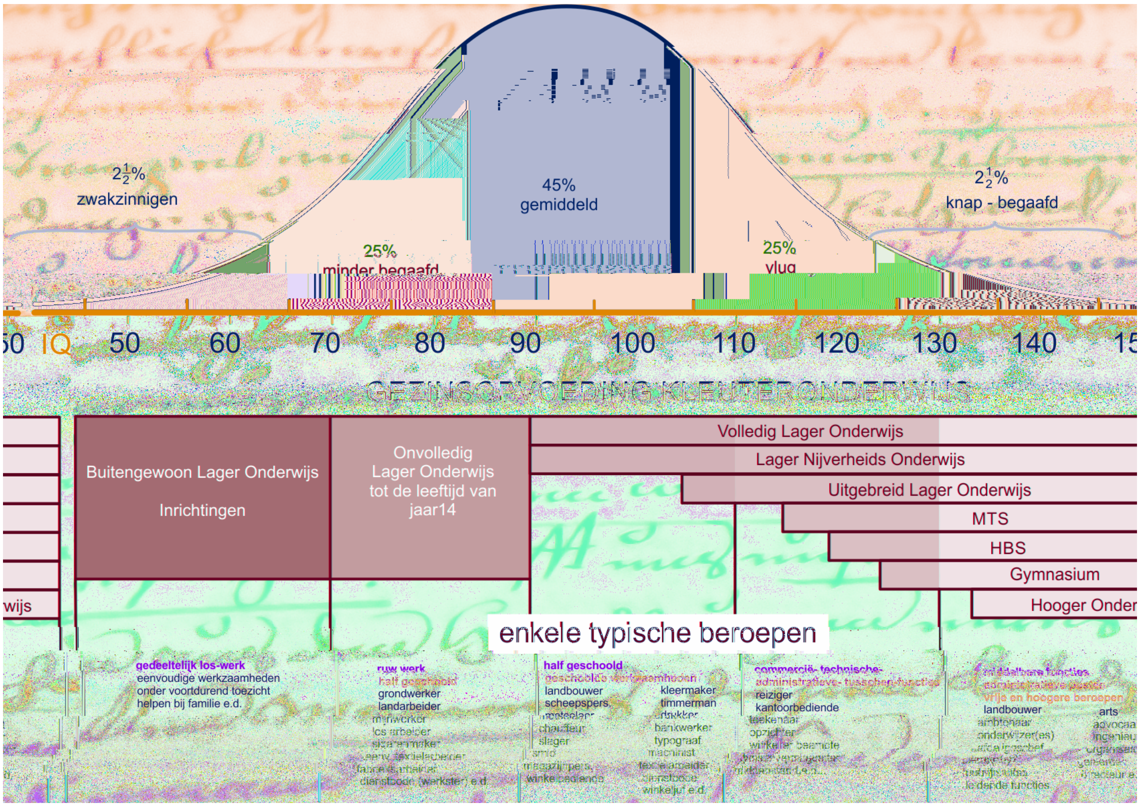
Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164{,}0$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

e Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

Naar: Examen vwo wiskunde A 1990

46

Intelligentie is een van de factoren die een rol spelen bij het met succes volgen van een schoolopleiding. In 1938 gebruikte een onderwijskundige onderstaande grafiek, waarin de mate van intelligentie (uitgedrukt in IQ) werd gekoppeld aan soorten opleidingen en mogelijke beroepen.

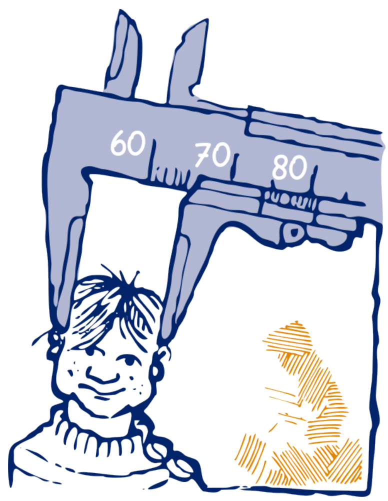


Het gemiddelde IQ is 100; $27\frac{1}{2}$% heeft een IQ kleiner dan 90.

a Laat zien dat hieruit volgt: de standaardafwijking $\sigma = 16{,}7$.

b Bereken hoeveel procent van de bevolking in 1938 in staat werd geacht om ten minste de MTS te volgen.

c Bereken hoeveel procent in aanmerking kwam voor de HBS, maar niet voor het Gymnasium.



De kansdefinitie

1

a Die kans is $\frac{1}{2}$. De kikker zit namelijk om en om op een witte en een donkere tegel.
b De middelste tegel heeft de meeste kans (vanuit 4 van de 9 tegels springt de kikker naar de middelste tegel), de hoektegels de minste (een hoektegel wordt maar vanuit 2 van de 9 tegels.

2

a De drie uitkomsten "2 kop", "2 munt" en "een dubbele" zijn niet even waarschijnlijk.
b Er zijn vier even waarschijnlijke uitkomsten namelijk kk, km, mk, mm, dus de kans is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3

Er zijn twee even waarschijnlijke mogelijkheden, dus de kans is $\frac{1}{2}$.

4

a Voor ieder van de vier is de kans op het grootste nummer hetzelfde, dus $\frac{1}{4}$.
b 0,19

5

- kop, munt bij het werpen van een muntstuk
- het aantal ogen dat je met een dobbelsteen werpt
- een blauwe of rode knikker blind trekken uit een vaas met evenveel rode als blauwe knikkers

6

a $3! = 6$
b 0, 1 of 3; 2 niet, want als de eerste twee in de goede envelop zitten, dan de derde ook.
c Neem aan dat de volgorde van de enveloppen ABC is.

volgorde brieven	abc	acb	bac	bca	cab	cba
aantal juist	3	1	1	0	0	1

Dus: kans op 0: $\frac{1}{3}$, kans op 1: $\frac{1}{2}$ en kans op 3: $\frac{1}{6}$

7

a Mogelijk zijn: 1 drietal van de PVDA en 4 van de VVD, dus de kans is $\frac{5}{84}$.
b $\frac{24}{84}$, voor de uitleg, zie hieronder.

8

a $6! = 720$
b $\frac{1}{720}$
c $\frac{1}{120}$

9

a $\binom{64}{2} = 2016$
b $6 \cdot 8 = 48$
c $\frac{48}{2016} = \frac{1}{42}$

10

$\frac{1}{2}$; noem de kleuren van het kaartje dat twee rode kanten heeft, r1 en r2.
Dan zijn er vier mogelijkheden met rood boven: r-b, r-w, r1-r2 en r2-r1.

11

0, 1, 2 en 3

12

a Zie tabel.

k	0	1	2
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{1653}{2016}$	$\frac{348}{2016}$	$\frac{15}{2016}$

Toelichting. Het totaal aantal mogelijkheden is $\binom{64}{2} = 2016$, daarvan zijn er $\binom{58}{2} = 1653$ zonder Nederlanders, $58 \cdot 6 = 348$ met één Nederlander en $\binom{6}{2} = 15$ met twee Nederlanders.

b De kansen zijn samen 1.

13

a Zie tabel.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b Zie tabel.

m	0	1	2	3
$\mathrm{P}(M = m)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c Zie tabel.

k	0	1
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

14

a De waarden 2 tot en met 12

b Maak een rooster, bovenaan en links staan de mogelijke uitkomsten van de twee dobbelstenen. Verder is de som ingevuld.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\mathrm{P}(S = 2) = \frac{1}{36}$ want 2 staat in één van de 36 hokjes.

$\mathrm{P}(S = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ en $\mathrm{P}(S = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

c Zie tabel op de volgende bladzijde.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Combinatoriek en kans

15 $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

16 $\binom{7}{3} = 35$

17

a Elke ongeordende greep kun je op 3! manieren ordenen, dus $3! \cdot 7C3 = 7P3$.

b $n! \cdot nCr = nPr$

c

$$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{96 \cdot 95 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

d

$$nPr = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

18

a 4

b $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r-1}$

c 2^n, je krijgt namelijk alle rijtjes van lengte n, met op elke plaats 0 of 1.

19

a $\binom{30}{8}$

b $\binom{20}{5} \cdot \binom{10}{3}$

c $\dfrac{\binom{20}{5} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{30}{8}} \approx 0{,}31787\ldots$, in drie decimalen: $0{,}318$

20

a $\binom{52}{3} = 22100$

b $\binom{13}{3} = 286$

c $\frac{286}{22100} \approx 0{,}013$

d $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \frac{286}{22100}$

e $4 \cdot \frac{286}{22100} \approx 0{,}052$

21

a 0, 1, 2 en 3

b $\mathrm{P}(Y=1) = \dfrac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{3}} \approx 0{,}436$ of $\mathrm{P}(Y=1) = 3 \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{38}{50} \approx 0{,}436$

c Zie tabel.

k	0	1	2	3	
$\mathrm{P}(Y=k)$	$\dfrac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}$	$\dfrac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{3}}$	$\dfrac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{3}}$	$\dfrac{\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{3}}$	
	0,413	0,436	0,138	0,013	

22 **a** $\binom{45}{6} = 8145060$

b $\binom{39}{1} \cdot \binom{6}{5} = 234$

c $\dfrac{\binom{39}{1} \cdot \binom{6}{5}}{\binom{45}{6}} \approx 0{,}00003$

23 **a** $\dfrac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$

b drie detectives: $\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$,

twee thrillers en één detective: $\dfrac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$ en

drie thrillers: $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$

c De som moet 1 zijn; en dat klopt.

24 $\dfrac{\binom{10}{3} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} \approx 0{,}354$

25 $\dfrac{\binom{10}{3} \cdot \binom{15}{5}}{\binom{25}{8}} \approx 0{,}333$

Het binomium van Newton

26
a 17, 17
b 34, 12

27 -

28
a Het totaal aantal doelpunten van VVV.
Het totaal aantal doelpunten dat VVV tegen kreeg.
Het totaal aantal doelpunten in de wedstrijden die VVV speelde.
Het doelsaldo van VVV in het toernooi.
Het bedrag dat de sponsor in totaal geeft.
b Ja, ja, ja.
c Het eerste is $8 \cdot 8 = 64$ en het tweede 8.

29
a Je moet 3 van de 5 stappen kiezen waarbij je noordelijk gaat; dat kan op $\binom{5}{3} = 10$ manieren. Bij elk van die manieren moet je nog 3 keer kiezen uit x (noordelijke) wegen en 2 keer uit y (zuidelijke) wegen. Dat geeft $10 \cdot x^3y^2$ routes.
b $\binom{5}{0} \cdot x^0y^5, \binom{5}{1} \cdot x^1y^4, \binom{5}{2} \cdot x^2y^3, \binom{5}{4} \cdot x^4y^1, \binom{5}{5} \cdot x^5y^0.$
c $(x+y)^5 =$
$\binom{5}{0} \cdot x^0y^5 + \binom{5}{1} \cdot x^1y^4 + \binom{5}{2} \cdot x^2y^3 + \binom{5}{3} \cdot x^3y^2 + \binom{5}{3} \cdot x^3y^2 + \binom{5}{4} \cdot x^4y^1 + \binom{5}{5} \cdot x^5y^0,$
dus $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.
d Als $x = y = 1$ levert de formule:
$2^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$ en dat klopt: de som van de getallen in de vijfde rij van de driehoek van Pascal is 2^5.
Als $x = 1$ en $y = 2$ levert de formule: $3^5 = \binom{5}{0} \cdot 2^5 + \binom{5}{1} \cdot 2^4 + \binom{5}{2} \cdot 2^3 + \binom{5}{3} \cdot 2^2 + \binom{5}{4} \cdot 2^1 + \binom{5}{5}$ en dat klopt, reken maar na.

30
a $(x+y)^6 =$
$x^6 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^2y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
b $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ en $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

31 $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$; $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\text{-}1)^{n-k} = 0$

32

a $11^4 = (10+1)^4 = 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1 = 14641$

b $101^2 = (100+1)^2 = 100^2{+}2{\cdot}100{+}1 = 10201\,(100+1)^3 = 100^3{+}3{\cdot}100^2{+}3{\cdot}100{+}1 = 1030301$, $101^4 = (100+1)^4 = 100^4 + 4 \cdot 100^3 + 6 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100 + 1 = 104060401$

c $9^3 = (10-1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot -1 + 3 \cdot 10 + -1 = 729$

33

a $2^5 = 32$

b 1, 5, 10, 10, 5, 1

c Ja

Verwachting

34

a **100 euro bakje:**

steeds naar links, kans is $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$, dus $\frac{1}{32} \cdot 40.000 = 1250$ keer

8 euro bakjes:

1 van de 5 naar rechts, dus 5 mogelijkheden of 3 van de 5 naar rechts, dus $\binom{5}{3} = 10$ mogelijkheden, elke mogelijkheid heeft een kans van $\frac{1}{32}$, dus $\frac{15}{32} \cdot 40.000 = 18.750$ keer

25 euro bakje:

2 van de 5 naar rechts, dus $\binom{5}{2} = 10$ mogelijkheden, dus

$\frac{10}{32} \cdot 40.000 = 12.500$ keer

16 euro bakje:

1 van de 5 naar links, dus 5 mogelijkheden, dus $\frac{5}{32} \cdot 40.000 = 6250$ keer

20 euro bakje:

steeds naar rechts, kans is $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$, dus $\frac{1}{32} \cdot 40.000 = 1250$ keer

b $1250 \cdot 100 + 18750 \cdot 8 + 12500 \cdot 25 + 6250 \cdot 16 + 1250 \cdot 20 = 712.500$ euro

c maximaal: $40.000 \cdot 100 = 4.000.000$ euro ; minimaal: $40.000 \cdot 8 = 320.000$ euro

d De eigenaar krijgt $40.000 \cdot 15 = 600.000$ euro. Hij zal naar verwachting meer uitbetalen, namelijk 712.500. Dus dat is aantrekkelijk voor een speler.

e

100 euro:		geen routes
8 euro:	llrll en llrrr en rrllr	3 mogelijkheden
25 euro:	llrlr en llrrl en rrlll	3 mogelijkheden
16 euro:	rrrrl	1 mogelijkheid
20 euro:	rrrrr	1 mogelijkheid
0 euro:		de rest

Per jaar betalen:

$\frac{3}{32} \cdot 40.000 \cdot 8 + \frac{3}{32} \cdot 40.000 \cdot 25 + \frac{1}{32} \cdot 40.000 \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot 40.000 \cdot 20 = 168.750$ euro

f Bij $168.750 : 40.000 = 4{,}21875 \approx 4{,}22$ euro of meer is het niet meer aantrekkelijk om te spelen.

35

-

36

a Totale uitbetaling is $100 \cdot 5 + 8 \cdot 75 + 25 \cdot 50 + 16 \cdot 25 + 20 \cdot 5 = 2850$ euro.

b $2850 : 160 = 17{,}8125 \approx 17{,}81$ euro

c 17,8125 euro

37

a Zie tabel.

Uitbetaling	\$0	\$2	\$3	\$4
kans	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	$3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216}$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

b Ga uit van 216 spellen, dan zijn de uitgaven $125 \cdot 0 + 75 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 199$ dollar, dat is per spel 0,921... dollar, dus per spel verdient hij 0,078... dollar.

38

a Bekijk 1 kg.
$0{,}3 \cdot 20 = 6$ jaar regen → winst is $6 \cdot 0{,}75 = 4{,}50$ euro
$0{,}7 \cdot 20 = 14$ jaar geen regen → winst is $14 \cdot 2 = 28$ euro
Totale winst in 20 jaar is $4{,}50 + 28 = 32{,}50$ euro.
Gemiddeld is dit $\frac{32{,}50}{20} = 1{,}625$ euro en dat is meer dan 1,50 euro.

b Noem de opbrengst per kg aangetast fruit a euro.
$6 \cdot a + 14 \cdot 2 = 6a + 28$ per 20 jaar → gemiddeld per jaar $\frac{6a+28}{20}$
Wanneer is dit kleiner dan 1,50 euro?
$\frac{6a+28}{20} < 1{,}50 \rightarrow 6a + 28 < 30 \rightarrow 6a < 2 \rightarrow a < \frac{1}{3}$
Als de prijs minder is dan $\frac{1}{3}$ euro ($\approx 0{,}33$ euro) is de eerste manier beter.

39

a $100.000 \cdot 0{,}06 = 6000$ gewonden ; kosten $6000 \cdot 4000 = 24.000.000$ euro
hoogte premie is $24.000.000 : 100.000 = 240$ euro

b $50.000 \cdot 0{,}06 = 3000$ gewonden ; kosten $3000 \cdot 4000 = 12.000.000$ euro
hoogte premie is $12.000.000 : 50.000 = 240$ euro (weer)

40

In april boeken: kosten $4 \cdot 800 = €3200,–$
Last minute (kans maal prijs): kosten $0{,}6 \cdot 4 \cdot 550 + 0{,}4 \cdot 4 \cdot 900 = €2760,–$
Advies is dus wachten.

41

a Kanstafel:

X	0	1	2	3
kans	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Kansen zijn samen 1.
0 wit: kans is $\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$;
1 wit (wzz 3 mogelijkheden): kans is $3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$ enz.
$E(X) = 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{27} = 1$

b Kanstafel:

Y	0	1	2
kans	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

0 wit: kans is $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$;

1 wit (wzz 3 mogelijkheden): kans is $3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$;

2 wit (wwz 3 mogelijkheden): kans is $3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{5}$.

$\text{E}(Y) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = 1$

42

a Ze gooit dan geen 6, geen 6, wel 6. De kans is $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.

b van 1 tot oneindig.

c Kanstafel:

X	1	2	3	4	5
kans	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{1296}$	$\frac{625}{7776}$

d X is groter dan 8 als je de eerste 8 keer geen zes gooit.

Dus $\text{P}(X > 8) = \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0{,}2326$.

e -

f -

g $\text{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \text{E}(X) + \frac{5}{6} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \text{E}(X) = 1 \rightarrow \text{E}(X) = 6$

43

a Winkel A: $\text{E} = 0 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 1{,}5 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 = 1{,}125$

Winkel B: $\text{E} = 0 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}4 + 1{,}5 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0 = 0{,}9$

b $\text{P}(0{,}0) = 0$ (kan niet), $\text{P}(0{,}5; 0{,}5) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$, $\text{P}(1{,}1) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$, $\text{P}(1{,}5; 1{,}5) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}05$, $\text{P}(2{,}2) = 0$ (kan niet). Samen is dit 0,17.

c Kanstafel:

wachttijd	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
kans	0,08	0,12	0,16	0,2	0,24	0,15	0,05

De kansen zijn samen 1.

$\text{P}(W = 1{,}5) = \text{P}(0; 1{,}5) + \text{P}(0{,}5; 1) + \text{P}(1; 0{,}5) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$, enz.

d $\text{E}(W) = 0{,}5 \cdot 0{,}08 + 1 \cdot 0{,}12 + \ldots + 3{,}5 \cdot 0{,}05 = 2{,}025$

e De gemiddelde wachttijd bij A en de gemiddelde wachttijd bij B zijn samen natuurlijk de gemiddelde wachttijd bij A en B samen.

44

a $Y = 7 - 2 = 5$

b X: de getallen 1 t/m 6 ; Y: de getallen 1 t/m 6 ; $X + Y = 7$

c $\text{E}(X) = 3\frac{1}{2}$; $\text{E}(Y) = 3\frac{1}{2}$, zie opgave 13**b**

$X + Y = 7$ met kans 1, $\text{E}(X + Y) = 7 \cdot 1 = 7$.

d Ja, want $\text{E}(X) + \text{E}(Y) = 7$ en $\text{E}(X + Y) = 7$.

45

a $E(X_1) = 3\frac{1}{2}$; $E(X_2) = 3\frac{1}{2}$

b $E(X_1 + X_2) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$, zie opgave 14**c**.

c Ja, beide uitkomsten zijn 7.

46

a De verwachting per week is $482 \cdot 7 = 3374$.

b $E(\text{week}) = E(\text{dag } 1) + E(\text{dag } 2) + \ldots + E(\text{dag } 7) = 7 \cdot E(\text{dag})$

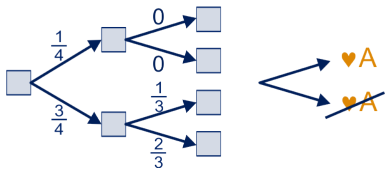
c De verwachting per uur is $482/24 = 20{,}1$.

d $E(\text{dag}) = E(\text{uur } 1) + E(\text{uur } 2) + \ldots + E(\text{uur } 24) = 24 \cdot E(\text{uur})$, dus $E(\text{uur}) = E(\text{dag})/24$.

47

a -

b Zie figuur.
Die kans is $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, dus ook $\frac{1}{4}$.



figuur bij opgave 47

48

a Zie de tabel hieronder.

aantal harten eerste keer	0	1
kans	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

b Ook $\frac{1}{4}$.

c $E = \frac{1}{4} \cdot 13 = 3\frac{1}{4}$

De binomiale verdeling

49

a De kans is $\frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{189}{1250}$.

b De kans is $\frac{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{100.000}$.

c De kans is $\left(\frac{9}{10}\right)^6 \approx 0{,}531$.

d De kans is $1 - P(\text{geen } 8) \approx 1 - 0{,}531 = 0{,}469$.

e De kans is $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0{,}006561$.

f De kans is $\binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0{,}098415$.

g 88nnnn ; n88nnn ; nn88nn ; nnn88n ; nnnn88,
de kans is $5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0{,}032805$.

50

a De kans is $\frac{144}{360} = \frac{2}{5}$.

b De kans is $\left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{3125}$.

c De kans is $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{3125}$.

d De kans is $5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{625}$.

e De kans is $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{72}{3125}$.

f De kans is $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{144}{625}$.

51

a b-r-b, de kans is $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{45}{512}$.

b x-r-x, de kans is $\frac{8}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{8} = \frac{5}{8}$.

c Kanstafel:

X	0	1	2	3
kans	$\frac{27}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{125}{512}$

d Kansen zijn samen 1.

e Vijf achtste deel is rood. Dus 225 graden rood, 135 graden zwart.

52

a 6-6-n-n-n, de kans is $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{7776}$.

b n-6-n-6-n, de kans is $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{7776}$.

c De kans is $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}$.

d Kanstafel:

Z	0	1	2	3	4	5
kans	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{1250}{7776}$	$\frac{250}{7776}$	$\frac{25}{7776}$	$\frac{1}{7776}$

e De som is precies 1.

f Elk van de getallen 1 t/m 6 krijgt een sector van 60 graden.

53

a We gaan ervan uit dat de kans op een katertje 0,5 is.
$P(X = 3, n = 6, p = 0{,}5) = 0{,}3125$.

b $P(X = 4, n = 6, p = 0{,}5) + P(X = 5, n = 6, p = 0{,}5) +$
$P(X = 6, n = 6, p = 0{,}5) \approx 0{,}34375$

c 1 − kans op zes katers − kans op zes poezen $= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}96875$

54

a De kans is $\frac{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1}{6561}$ of $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{6561}$.

b $P\left(X = 3, n = 9, p = \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}2731$.

c De kans is $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{560}{6561}$.

d $P\left(X = 1, n = 12, p = \frac{1}{12}\right) \approx 0{,}3840$.

55

a $P(X = 3, n = 10, p = 0{,}3) \approx 0{,}2668$.

b Van de gemiste penalty's wordt $\frac{2}{3}$ deel gestopt en $\frac{1}{3}$ deel gaat over of naast,
$P\left(X = 4, n = 7, p = \frac{2}{3}\right) \approx 0{,}2561$.

c $4 \cdot P\left(X = 4, n = 7, p = \frac{1}{4}\right) \approx 0{,}2307$.
Er wordt met 4 vermenigvuldigd, omdat elke club 4 penalty's kan krijgen.

56

a $P\left(X = 5, n = 13, p = \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}2067$.

b $P\left(X = 0, n = 13, p = \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}0051$.

c $P\left(X = 11, n = 13, p = \frac{1}{3}\right) + P\left(X = 12, n = 13, p = \frac{1}{3}\right) + P\left(X = 13, n = 13, p = \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}0002$.

57

a $P(X = 4, n = 9, p = 0{,}5) \approx 0{,}2461$.

b $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}0851$.

c $P(X = 0, n = 9, p = 0{,}2) \approx 0{,}1342$ of $0{,}8^9 \approx 0{,}1342$.

d $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}2^3 \approx 0{,}0454$.

58

a $P(X = 1, n = 10, p = 0{,}1055) \approx 0{,}3868$.

b $P(X = 0, n = 10, p = 0{,}1055) + P(X = 1, n = 10, p = 0{,}1055) + P(X = 2, n = 10, p = 0{,}1055) \approx 0{,}9200$.

c $1 - P(X = 0, n = 10, p = 0{,}1055) + P(X = 1, n = 10, p = 0{,}1055) \approx 0{,}2853$

59

a 3-1-0-0 of 2-2-0-0 of 4-0-0-0 verdeling,
de totale kans is $0{,}1648 + 0{,}1348 + 0{,}01056 = 0{,}31016$
dus de gevraagde kans is $P(X = 4, n = 10, p = 0{,}31016) \approx 0{,}2094$.

b De kans is $1 - P(X = 0, n = 10, p = 0{,}01056) \approx 0{,}1007$.

c $P(X = ?, n = 10, p = 0{,}5843)$, met $? = 0, 1, 2, 3$ optellen geeft 0,0674.

d De kans is $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{7} \cdot 0{,}1055 \cdot 0{,}5843^7 \cdot 0{,}1648^2 \approx 0{,}0240$.

e De kans is $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{7} \cdot \binom{2}{1} \cdot 0{,}1055 \cdot 0{,}5843^7 \cdot 0{,}1648 \cdot 0{,}1348 \approx 0{,}0392$.

60

a De kans is $1 - P(X \leq 6, n = 14, p = 0{,}3) \approx 0{,}0933$.

b $P(X \leq 7, n = 14, p = 0{,}3) \approx 0{,}9685$

c $P(X \leq 4, n = 14, p = 0{,}3) - P(X \leq 1, n = 14, p = 0{,}3) = 0{,}5367$

d $P(X \leq 10, n = 14, p = 0{,}3) - P(X \leq 2, n = 14, p = 0{,}3) = 0{,}8389$

61

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P\left(X \leq 2, n = 10, p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}2248$.

62

a $P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - P(X \leq 30, n = 250, p = 0{,}1) \approx 0{,}1247$.

b $P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - P\left(X \leq 0, n = 250, p = \frac{1}{500}\right) \approx 0{,}3938$.

63

a $P\left(X = 2, n = 3, p = \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}2222$.

b $\dfrac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}2198$

c De kans is 0,222222 (precies dezelfde kans als bij **a**).

d $\dfrac{\binom{50}{2} \cdot \binom{100}{1}}{\binom{150}{3}} \approx 0{,}222202$

e Bij trekkingen uit grote aantallen zijn de kansen met en zonder terugleggen ongeveer gelijk.

64

a Tenminste 4 en ten hoogste 6 keer kop:
$\text{P}(4 \leq X \leq 6) = \text{P}(X \leq 6) - \text{P}(X \leq 3) =$
$\text{P}\left(X \leq 6, n = 10, p = \frac{1}{2}\right) - \text{P}\left(X \leq 3, n = 10, p = \frac{1}{2}\right) = 0{,}6563.$

b 20 worpen: $\text{P}(8 \leq X \leq 12) = \text{P}(X \leq 12) - \text{P}(X \leq 7) \approx 0{,}7368$
50 worpen: $\text{P}(20 \leq X \leq 30) = \text{P}(X \leq 30) - \text{P}(X \leq 19) \approx 0{,}8811$
100 worpen: $\text{P}(40 \leq X \leq 60) = \text{P}(X \leq 60) - \text{P}(X \leq 39) \approx 0{,}9648$

c Succeskans $\frac{1}{2}$ betekent: hoe vaker je gooit, hoe dichter het percentage kop bij 50% zal liggen. Dus de kans op “tussen de 40% en 60%“ zal naar 100% gaan.

65

a $\text{P}(X > 4) = 1 - \text{P}(X \leq 4) = 1 - \text{P}(X \leq 4, n = 20, p = 0{,}15) \approx 0{,}1702.$

b Op een strenge school zal waarschijnlijk minder dan 15% spijbelen, op een minder strenge school zal dat waarschijnlijk meer zijn.

66

a $\text{P}(X > 4) = 1 - \text{P}(X \leq 4) = 1 - \text{P}(X \leq 4, n = 50, p = 0{,}05) \approx 0{,}1036.$

b $\text{P}(X = 0) = \text{P}(X = 0, n = 50, p = 0{,}05) = 0{,}0769...$ of $0{,}95^{50} = 0{,}0769...$
en $0{,}0769... \cdot 500 = 38{,}4...$, dus ongeveer 38 doosjes.

67

a $\text{P}(X \geq 8) = 1 - \text{P}(X \leq 7) = 1 - \text{P}(X \leq 7, n = 20, p = 0{,}25) \approx 0{,}1018.$

b $\text{P}(X \geq 10) = 1 - \text{P}(X \leq 9) = 1 - \text{P}(X \leq 9, n = 20, p = 0{,}25) \approx 0{,}0139$
$\text{P}(X \geq 11) = 1 - \text{P}(X \leq 10) = 1 - \text{P}(X \leq 10, n = 20, p = 0{,}25) \approx 0{,}0039$
Dus bij 11 goede antwoorden moet de docent het cijfer 4 geven.

68

a We mogen aannemen dat de kans dat iemand langer is dan gemiddeld 0,5 is.
$\text{P}(X \geq 24) = 1 - \text{P}(X \leq 23) = 1 - \text{P}(X \leq 23, n = 37, p = 0{,}5) \approx 0{,}0494$

b Nee, de bij **a** berekende kans is vrij klein. Dus waarschijnlijk zijn deze mannen niet gemiddeld van lengte.

69

a $\text{P}(X \leq 13) = \text{P}(X \leq 13, n = 69, p = 0{,}279) \approx 0{,}0573$

b $\text{P}(X \geq 30) = 1 - \text{P}(X \leq 29) = 1 - \text{P}(X \leq 29, n = 85, p = 0{,}279) \approx 0{,}0831$

c Je kunt uit de kleine kansen bij **a** en bij **b** afleiden, dat zowel de jongens als de meisjes op het Amalia College waarschijnlijk niet met kans 0,279 wiskunde A/C kiezen. De jongens kiezen dit vak met een kleinere kans en de meisjes met een grotere kans. Dus de vwo-4 leerlingen zijn niet gelijk wat hun interesse voor wiskunde A/C betreft.

70

a -

b -

c Druk eventueel op sorteren (versie NL). Kijk hoe vaak er 13 of minder voor komt. Gezien de uitkomst van opgave 69**a** zou dat rond de 6 keer moeten zijn.

d Druk eventueel op sorteren (versie NL). Kijk hoe vaak er 30 of meer voor komt. Gezien de uitkomst van opgave 69**b** zou dat rond de 8 keer moeten zijn.

71

a $0{,}09 \cdot 33 \approx 3$ leerlingen

b $\text{P}(X = 3, n = 33, p = 0{,}09) \approx 0{,}2349.$

c $\mathrm{P}(X \geq 6) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 5) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 5, n = 33, p = 0{,}09) \approx 0{,}0714.$

De standaardafwijking

72

a $\binom{10}{3} = 120$

b 2, 3, 4, 5, 6

73

a -

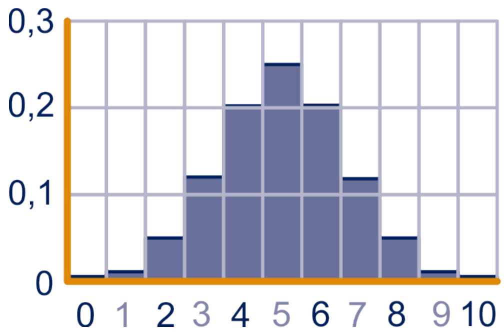
b $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}117...$

74

a Zie tabel.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

b Zie figuur.



75

$\binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \frac{7}{64}$

76

a De succeskans $\frac{1}{2}$; het aantal herhalingen is n; X =het nummer van het bakje= het aantal keer dat het balletje naar rechts valt; $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}n$.

b Het wordt breder en lager.

c Bij $\frac{1}{2}n$

d Groter

77

a Een afwijking is positief.

b $\mathrm{E}(X) = 3$. De afwijking van 3 noemen we A. Dan

a	0	1	2	3
$\mathrm{P}(A = a)$	$\frac{20}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{2}{64}$

c $0 \cdot \frac{20}{64} + 1 \cdot \frac{30}{64} + 2 \cdot \frac{12}{64} + 3 \cdot \frac{2}{64} = \frac{15}{16}$

78 0

79 $7, 10, 10, 10, 10, 13; 7, 10, 10, 10, 11, 12; 8, 9, 10, 10, 10, 13; 9, 9, 9, 11, 11, 11$

80 **a** $\text{E}(X) = 2$ en $\text{Vaa}(X) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$.
$\text{E}(Y) = 2$ en $\text{Vaa}(Y) = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 2\frac{2}{3}$.

b Zie tabel.

k	0	4	6	10
$\text{P}(X + Y = k)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\text{E}(X + Y) = 4$ en $\text{Vaa}(X + Y) = \frac{2}{6} \cdot 4 + \frac{2}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 2\frac{2}{3}$

c Klopt

81 **a** $\text{Var}(X) = \frac{1}{2}(0-2)^2 + \frac{1}{2}(4-2)^2 = 4$ en $\text{Var}(Y) = \frac{2}{3}(0-2)^2 + \frac{1}{3}(6-2)^2 = 8$

b $\text{Var}(X + Y) = \frac{1}{3}(0-4)^2 + \frac{1}{3}(4-4)^2 + \frac{1}{6}(6-4)^2 + \frac{1}{6}(10-4)^2 = 12$

c Klopt

82 **a** Zie tabel.

k	1	2	3	4	5	6
$\text{P}(Y = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Dus $\text{E}(Y) = 3\frac{1}{2}$ en $\text{Var}(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}\left(k - 3\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(2 \cdot \frac{25}{4} + 2 \cdot \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{35}{12}$.

b $\text{Var}(Y_n) = \frac{35}{12}n$

83 **a** $\text{E}(X) = \text{E}(Y) = 3\frac{1}{2}$ en $\text{E}(X + Y) = 7$.

b $\text{Var}(X) = \frac{35}{12}$, $\text{Var}(Y) = \frac{35}{12}$ (zie de vorige opgave).
$X + Y$ neemt alleen de waarde 7 aan dus $\text{Var}(X + Y) = 0$.

c De somregel voor de verwachtingswaarde wel voor de variantie niet

84 **a** Zie tabel.

s	10	15	20	30	35	50
$\text{P}(S = s)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

b $\text{E}(S) = \frac{9}{36} \cdot 10 + \frac{12}{36} \cdot 15 + \frac{4}{36} \cdot 20 + \frac{6}{36} \cdot 30 + \frac{4}{36} \cdot 35 + \frac{1}{36} \cdot 50 = 20$ en $\text{Var}(S) = \frac{9}{36} \cdot (10-20)^2 + \frac{12}{36} \cdot (15-20)^2 + \frac{4}{36} \cdot 0 + \frac{6}{36} \cdot (30-20)^2 + \frac{4}{36} \cdot (35-20)^2 + \frac{1}{36} \cdot (50-20)^2 = 100$.

85

a Zie tabel.

y	5	10	25
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

b $\mathrm{E}(Y)=\frac{3}{6}\cdot 5+\frac{2}{6}\cdot 10+\frac{1}{6}\cdot 25=10$ en $\mathrm{Var}(Y)=\frac{3}{6}\cdot(5-10)^2+\frac{2}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot(25-10)^2=50$

c Ja, ja

86

a Zie tabel.

t	10	15	20	30	35
$\mathrm{P}(T=t)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

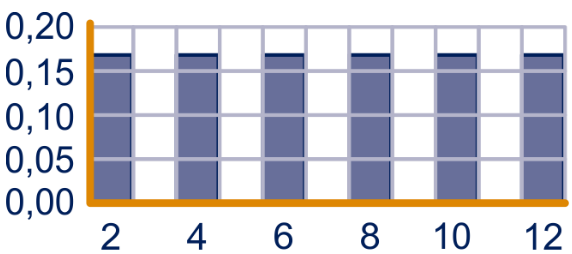
b $\mathrm{E}(T)=\frac{3}{15}\cdot 10+\frac{6}{15}\cdot 15+\frac{1}{15}\cdot 20+\frac{3}{15}\cdot 30+\frac{2}{15}\cdot 35=20$ en
$\mathrm{Var}(T)=\frac{3}{15}\cdot(10-20)^2+\frac{6}{15}\cdot(15-20)^2+\frac{1}{15}\cdot 0+\frac{3}{15}\cdot(30-20)^2+\frac{2}{15}\cdot(35-20)^2=80$

87

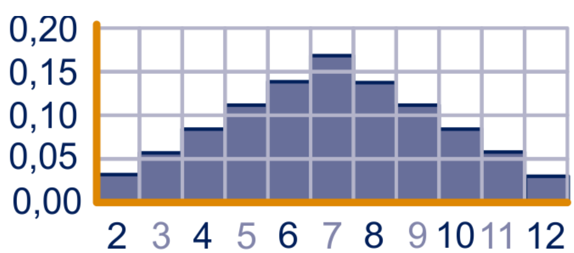
a Die is hetzelfde als die van Y in opgave 85.
b $\mathrm{E}(Y)=10$ en $\mathrm{Var}(Y)=50$
c $\mathrm{E}(X)=10$ en $\mathrm{Var}(X)=50$
d Klopt
e Ja, klopt
f Bij 'met terugleggen' komt de (sterk afwijkende) uitkomst 50 ook voor.

88

a D, bij S middelen de uitbetalingen elkaar uit.
b Voor D figuur 1 en voor S zie figuur 2.



figuur 1



figuur 2

c Laat X het aantal ogen van de eerste dobbelsteen zijn en Y van de tweede, dan
$S=X+Y$ en $\mathrm{Var}(S)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)=2\cdot\mathrm{Var}(X)$.

d $\mathrm{Var}(D)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}(2k-2\cdot\mathrm{E}(X))^2=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot 2^2\cdot(k-\mathrm{E}(X))^2=4\cdot\mathrm{Var}(X)$

89

a $\mathrm{E}(X)$ en $X-\mathrm{E}(X)$ in cm, $\mathrm{Var}(X)$ in cm^2 en $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ in cm
b $\mathrm{E}(Y)=10\cdot\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)=100\cdot\mathrm{Var}(X)$, $\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}=10\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

90

1 keer 7, 2 keer 9, 8 keer 10, 5 keer 11
1 keer 8, 4 keer 9, 6 keer 10, 4 keer 11, 1 keer 12

1 keer 8, 3 keer 9 , 9 keer 10 , 1 keer 11 , 2 keer 12
2 keer 8, 1 keer 9, 9 keer 10, 3 keer 11, 1 keer 12
2 keer 8, 2 keer 9, 6 keer 10, 6 keer 11
2 keer 8, 12 keer 10 , 2 keer 12
5 keer 9, 8 keer 10, 2 keer 11, 1 keer 13
8 keer 9, 8 keer 11

91

a De kanstafel van X_1 is:

x	0	1
$\text{P}(X_1 = x)$	$1 - p$	p

Dus $\text{E}(X_1 = x) = p$ en $\text{Var}(X_1 = x) = p\,(1 - p)\,(0 - p)^2 + p(1 - p)^2$ =(haal in beide termen $p(1 - p)$ buiten haakjes)= $p(1 - p)\,(p + 1 - p) = p(1 - p)$.

b $\text{E}(X) = \text{E}(X_1) + \text{E}(X_2) + \ldots + \text{E}(X_n)$, dus $\text{E}(X) = n \cdot p$, $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \ldots + \text{Var}(X_n) = np(1 - p)$ en $\text{sd}(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

92

a $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$, dus sd $= \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 5$

b $n = 100$, $p = \frac{1}{3}$, dus sd $= \sqrt{100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

Wat is normaal?

93

a Een grafiek met de horizontale-as van 300 t/m 1160, dicht bij 300 en dicht bij 1160 heel laag. In het midden hoger.

b Dichtbij 300 is heel extreem, 780 is normaal; 500 is twijfelachtig.

c Niet waarschijnlijk is bij de linker grafiek de grote daling aan de zijkanten, bij de rechter grafiek de scherpe punt in het midden.

94

Redelijk is bijvoorbeeld

150	180	210 cm
15	27	41 jaar
10	20	30 minuten
0,95	1,00	1,05 kilo

95

a Het gewicht 18-jarige meisjes, het gewicht van kilopakken suiker.

b Salarissen: links van het hoogste punt sneller omhoog, naar rechts een lange uitloop.

96

1. Niet: symmetrisch;
2. niet: hoe groter de afwijking hoe kleiner de kans;
3. spits bij de top;
4. niet: hoe groter de afwijking hoe kleiner de kans;
5. niet: hoe groter de afwijking hoe kleiner de kans, door horizontaal stukje links van midden;
6. niet: grote afwijkingen komen teveel voor.

97

a 30%

b Tussen 28% en 32%
c CDA het grootst (brede grafiek); VVD het kleinst (smalle grafiek)
d De oppervlakte moet onder elke grafiek 100% (of 1) zijn.
e Ongeveer 15%

98
a 7%
b 30%

99
a 10%
b 40%; de antwoorden op a en b moeten samen 50% zijn.

100
a 6
b 1,75
c -

101
a -
b gemiddelde $\bar{x} = 31{,}0229 \approx 31{,}0$ en de standaardafwijking $\sigma = 4{,}9700... \approx 5{,}0$
c Iemand van 15 jaar heeft een leeftijd van 15 tot 15,999.... jaar, dat is gemiddeld 15,5 jaar.
d $\bar{x} = 31$, $\bar{x} + \sigma = 36$ en $\bar{x} - \sigma = 26$, klopt dus.
e ouder dan $\bar{x}$: de frequenties van 31 t/m 49 opgeteld, geeft 54,44%,
ouder dan $\bar{x} + \sigma$: de frequenties van 36 t/m 49 opgeteld, geeft 19,12%,
ouder dan $\bar{x} + 2\sigma$: de frequenties van 41 t/m 49 opgeteld, geeft 2,33%.

102
a 97,5%
b $68 + 13{,}5 = 81{,}5\%$

103
a $17{,}5 - 3\sigma = 10$ fouten dus hoogste cijfer is 8
$17{,}5 + 3\sigma = 25$ fouten dus laagste cijfer is 5.
b 5,5 hoort bij 22,5 fout. Er geldt: $\mu + 2\sigma = 22{,}5$, dus 2,5% van de 28 leerlingen heeft onvoldoende, dus eentje.

104
a Alle leeftijden worden $\frac{10}{12}$ jaar meer, dus weer normaal verdeeld.
Het gemiddelde is dan $16{,}3 + \frac{10}{12} \approx 17{,}1$ jaar. De standaardafwijking blijft 0,8 jaar.
b Normaal verdeeld, het gemiddelde is $16{,}3 \cdot 12 = 195{,}6$ maanden, de standaardafwijking is $0{,}8 \times 12 = 9{,}6$ maanden.

105
a Gemiddelde lengte is $\frac{178}{30{,}48} \approx 5{,}84$; standaardafwijking van de lengte is $\frac{7}{30{,}48} \approx 0{,}23$
b Gemiddeld gewicht = $\frac{78}{6{,}35} \approx 12{,}28$; de standaardafwijking gewicht = $\frac{11}{6{,}35} \approx 1{,}73$

106
Gemiddelde temperatuur in graden Fahrenheit $= 1{,}8 \cdot 17{,}4 + 32 = 63{,}32$ en de standaardafwijking $= 1{,}8 \cdot 1{,}5 + 32 = 34{,}7$.

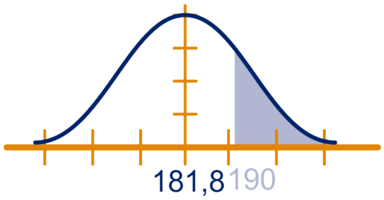
107
a 9,1% 65,6% en 25,2%
b $0{,}091... \cdot 60.000 \cdot 0{,}20 = 1092$ euro, $0{,}656... \cdot 60.000 \cdot 0{,}25 = 9840$ euro en $0{,}253... \cdot 60.000 \cdot 0{,}30 = 4554$ euro, in totaal 15.486 euro.

108

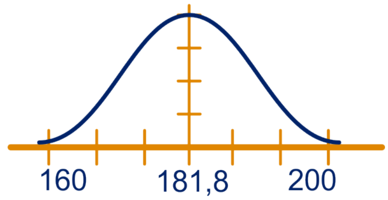
a Zie figuur 1 hieronder.

b Met de GR vind je $\text{P}(X > 190 | \mu = 181{,}8; \sigma = 7) = 0{,}1207\cdots$. Dat zijn dus $103.370 \cdot 0{,}1207\cdots \approx 12.478$ jongens.

c Zie figuur 2, eigenlijk niet te tekenen, want de gebieden zijn erg klein: links van 160 en rechts van 200.



figuur 1



figuur 2

Met de GR vind je: $\text{P}(160 < X < 200 | \mu = 181{,}8; \sigma = 7) = 0{,}9944\cdots$. Er werden dus $103.370 \cdot (1 - 0{,}9944\cdots) \approx 577$ jongens afgekeurd.

d Met de GR bepaal je het getal a zó, dat $\text{P}(X < a | \mu = 181{,}8; \sigma = 7) = 0{,}99$. Je vindt: $a = 198{,}1$.
Dus vanaf een lengte van 198,1 cm.

e Met de GR bepaal je het getal a zó, dat $\text{P}(X < a | \mu = 181{,}8; \sigma = 7) = 0{,}05$. Je vindt: $a = 170{,}3$, dus tot lengte 170,3 cm.

109

a Met de GR vind je:
In de klasse S: $\text{P}(X < 53 | \mu = 63; \sigma = 4) = 0{,}006$, dus 0,6%;
In de klasse M: $\text{P}(53 < X < 61 | \mu = 63; \sigma = 4) = 0{,}302$, dus 30,2%;
In de klasse L: $\text{P}(61 < X < 73 | \mu = 63; \sigma = 4) = 0{,}685$, dus 68,5%;
In de klasse XL: $\text{P}(X > 73 | \mu = 63; \sigma = 4) = 0{,}006$, dus 0,6%.

b Met de GR zoeken we het getal a met $\text{P}(X < a | \mu = 63; \sigma = 4) = 0{,}25$. Je vindt $a = 60$; de andere grenzen zijn dan (vanwege symmetrie): 63 en 66, dus:

Klasse	S	M	L	XL
gewicht (gram)	t/m 60	60-63	63-66	vanaf 66

110

Met de GR: $\text{P}(X > 1100 | \mu = 1200; \sigma = 200) = 0{,}6915...$ en $\text{P}(X > 1100 | \mu = 1250; \sigma = 250) = 0{,}7257...$, dus merk B heeft een lichte voorkeur.

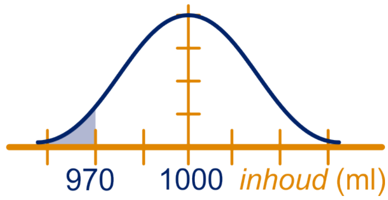
111

a In verband met automaten.

b $2 \cdot \text{P}(X < 7485 | \mu = 7500; \sigma = 6) \approx 0{,}0124$, dus 1,24%.

c Noem dat aantal x, dan $(1 - 0{,}0124)\,x = 25$ miljoen, dus $x = \dfrac{25}{1 - 0{,}0124} \approx 25{,}31$ miljoen.

112
a Zie figuur.
b 2,5% (2e vuistregel);
of: P($X < 970|\ \mu = 1000; \sigma = 15$), dus 2,3%
c Gewicht in gram is 2 maal inhoud in ml, dus voor het gewicht geldt: μ = 2000 en σ = 30.
P($X < 1980|\ \mu = 2000; \sigma = 30$), dus 25,2%.



Standaardiseren

113
a -
b Als de oppervlakte even groot blijft, moet steeds de breedte maal de hoogte gelijk zijn.

114
30 naar rechts en $1\frac{2}{5}$ keer zo breed.

115
a 500 naar rechts en 5 maal zo breed.
b $5 \cdot S$ heeft als gemiddelde 5000 en standaardafwijking 50, $5 \cdot S - 3500$ heeft als gemiddelde 1500 en de standaardafwijking blijft 50
Ingevuld moet worden 5 en 3500.
c $S = \frac{1}{5}L + 700$

116
a -
b -
c -

117
a Noem die lengte x, dan $\dfrac{x - 180}{7}$ = -2,86, dus de lengte is $180 - 2{,}86 \cdot 7 \approx 160$ cm.
b $180 + 1 \cdot 7 = 187$ cm
c 180 cm

118
De jongen heeft z-waarde $\frac{196-178}{7} \approx 2{,}57$, het meisje $\frac{186-168}{6} = 3$: het meisje is het meest uitzonderlijk.

119
a $\dfrac{1035 - 1000}{25} = 1{,}4$
b $Y > \dfrac{a - 1000}{25}$

120
a De kans op $-1 < Z < 1$ is ongeveer 68%; de kans op $-2 < Z < 2$ is ongeveer 95%
b P($-1 < X < 1|\ 0; 1$)= 0,682... ≈ 68%; P($-2 < Z < 2|\ 0; 1$) = 0,954...≈ 95%.
c P($-3 < Z < 3|\ 0; 1$)= 0,9973... ≈ 99,7%
(Vaak wordt 99,8% gebruikt, 0,1% links en 0,1% rechts van dit gebied.)

121
Tussen $222 - 2 \cdot σ = 194$ en $222 + 2 \cdot σ = 250$ euro

122
Bepaal met de GR achtereenvolgens de waarden van a met: P($X < a|\ 0; 1$)= 0,20, P($X < a|\ 0; 1$)= 0,75, P($X < a|\ 0; 1$)= 0,80 en P($X < a|\ 0; 1$)= 0,35.
Je vindt: a = -0,84, a = 0,67, a = 0,84 en a = -0,39.

123

a Bepaal met de GR het getal a zó, dat P$(X < a|\, 0; 1) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}40)$. Je vindt: $z = $ -0,52; de rechter grens is dan $z = 0{,}52$.

b Nee, je kunt het gekleurde gebied naar links en naar rechts schuiven, de grenzen liggen dus niet vast.

124

a Bepaal met de GR het getal a zó, dat P$(X < a|\, 1; 0)$ $a = \frac{1}{3}$; je vindt: $a = $ -0,43. De grenzen zijn $z = $ -0,43 en $z = 0{,}43$.

b Bepaal met de GR het getal a met P$(X < a|\, 0; 1) = \frac{1}{4}$; je vindt $a = $ -0,67.

De drie grenzen bij de verdeling in vier stukken zijn: $z = $ -0,67, $z = 0$ en $z = 0{,}67$.

Bepaal met de GR de getallen a met P$(X < a|\, 0; 1) = \frac{1}{5}$ en P$(X < a|\, 0; 1) = \frac{2}{5}$; je vindt $a = $ -0,84 en $a = $ -0,25.

De vier grenzen bij de verdeling in vijf stukken zijn: $z = $ -0,84, $z = $ -0,25, $z = 0{,}25$ en $z = 0{,}84$.

125

a Met de GR: P$(X < 985|\, 1000; 10)$, dus 7%.

b Dat kan op twee manieren.

- Via standaardiseren.
  Bepaal met de GR het getal a zó, dat P$(X < a|\, 0; 1) = 0{,}02$. Je vindt: $a = $ -2,05374....
  Noem het gemiddelde waarop de machine ingesteld moet worden μ, dan $\frac{985 - \mu}{10} = $ -2,05374..., dus $\mu = 985 + 10 \cdot 2{,}05374... \approx 1005{,}5$ gram.
- Los de volgende vergelijking in x op met een tabel, grafiek of...
  P$(X < 985|\, x; 10) = 0{,}02$.

126

a Bepaal met de GR het getal a zó, dat P$(X < a|\, 1; 0) = 0{,}28$.
Je vindt: $a = $ -0,5828, dat is de gevraagde z-waarde.

b Het kan weer op twee manieren

- Via standaardiseren.
  Noem de standaardafwijking σ, dan $\frac{62 - 54}{\sigma} = 0{,}5828$, dus $\sigma = \frac{62 - 54}{0{,}5828} \approx 13{,}7$.
- Los de volgende vergelijking in x op.
  P$(X < 54|\, 62; x) = 0{,}28$.

c Bepaal met de GR het getal a zó, dat P$(X < a|\, 62; 13{,}7) = 0{,}8$.
Je vindt: $a = 73{,}5$. Je moet dus minstens 74 punten halen.

127

a $\mathrm{P}\left(X \geq 24, n = 40, p = \frac{1}{3}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 23, n = 40, p = \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}0005$

b $\mathrm{E}(X) = np \approx 13{,}3$ en $\mathrm{sd}(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 2{,}98$

c Bepaal met de GR het getal a met P$(X < a|\, 0; 1) = 0{,}99$. Je vindt: $a \approx 2{,}3263$.

d $\mathrm{E}(X) = np = \frac{1}{3}n$, $\mathrm{sd}(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{2}{9}n}$

e $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{0{,}6n - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}} = \dfrac{0{,}6 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{9}}} \cdot \dfrac{n}{\sqrt{n}} \approx 0{,}5657\sqrt{n}$

f $0{,}5657\sqrt{n} = 2{,}3263$, dus $n = \left(\frac{2{,}3263}{0{,}5657}\right)^2 \approx 16{,}9$, dus $n = 17$ minimaal.

g Als $n = 17$, dan is minimaal 60% minimaal 11 vragen. $\mathrm{P}\left(X \geq 11, n = 17, p = \frac{1}{3}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 10, n = 17, p = \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}008$ en dat is minder dan 1%.
Als $n = 16$, dan is minimaal 60% minimaal 10 vragen. $\mathrm{P}\left(X \geq 10, n = 16, p = \frac{1}{3}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 9, n = 16, p = \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}015$, en dat is meer dan 1%.

128

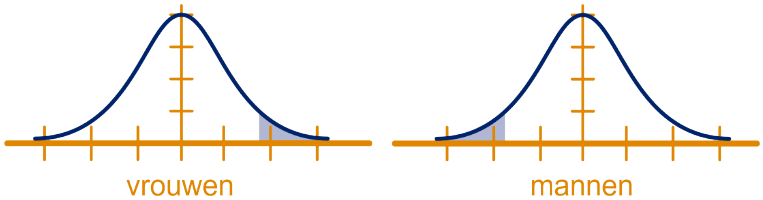
a $\mathrm{P}(X > 110 \mid 96; 5)$, dus 0,3%.

b Met standaardiseren.
Bepaal met de GR het getal a met $\mathrm{P}(X < a \mid 0; 1) = 0{,}2$. Je vindt: $a \approx$ -0,841.... Dus $\dfrac{77-80}{\sigma} = \text{-}0{,}841\ldots$, dus $\sigma = \dfrac{77-80}{\text{-}0{,}841\ldots} = 3{,}56\ldots$.
Het kan ook met een tabel, of een vergelijking op de GR met $\mathrm{P}(X < 77 \mid 80; x)$.

c Met standaardiseren.
8 op de 1000 auto's is 0,8%; bepaal met de GR het getal a waarvoor $\mathrm{P}(X < a \mid 0; 1)$ $\mathrm{P}(X < a \mid 0; 1)$. Je vindt: $a = 2{,}408\ldots$, dit is de z-waarde van 105, dus $\dfrac{105-\mu}{4} = 2{,}408\ldots$, dus $\mu = 105 - 4 \cdot 2{,}408\ldots \approx 95{,}4$.
Het kan ook met een tabel of vergelijking met $\mathrm{P}(X > 105 \mid x; 1) = 0{,}008$.

129

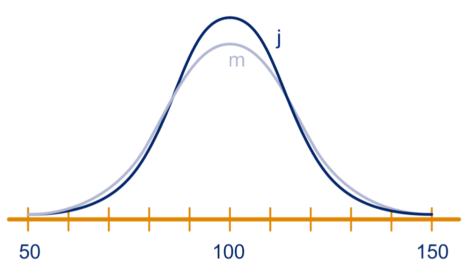
a Zie figuur.



b De z-waarde van de grens van het gekleurde gebied bij vrouwen is $\dfrac{190-\mu}{7}$ en bij mannen $\dfrac{\mu-190}{7}$, dus het tegengestelde. Vanwege symmetrie geldt voor de standaardnormale verdeling Z dat voor elk getal a de kans dat $Z > a$ en de kans dat $Z <$ -a even groot zijn.

130

a Zie figuur.



b Het is duidelijk dat er meer jongens dan meisjes zijn met een IQ boven de 120. Met een hoger IQ zal de kans op een prijs groot zijn.

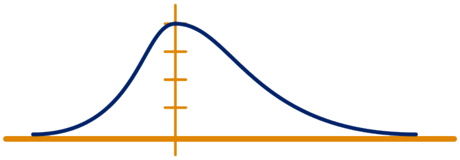
c Bij jongens is de kans op een IQ groter dan 128: $\mathrm{P}(X > 128 \mid 100; 16) = 0{,}0400\ldots$, dus bij 500 zijn er $500 \cdot 0{,}0400\ldots \approx 20$.
Bij meisjes is de kans op een IQ groter dan 128: $\mathrm{P}(X > 128 \mid 100; 14) = 0{,}0227\ldots$, dus bij 500 zijn er $500 \cdot 0{,}0227\ldots \approx 11$.

d Dat zijn er 20 van de 31, dat is 65%.

131

a Tussen 5 en 10 procent is de gewichtstoename ongeveer 4 kilo, tussen 90 en 95 procent ruim 8 kilo.

b Bijvoorbeeld: tussen 10 en 50 procent neemt de lengte toe met 5 cm.
Met de GR zoek je het getal a met $P(X < a|\,0;1) = 0{,}1$. Je vindt: $a = -1{,}28...$, dus $\frac{0-5}{\sigma} = -1{,}28...$, dus $\sigma \approx 3{,}9$ cm.



De centrale limietstelling

132
a Bij X en U geldt: $\mu = np = 4{,}5$ en $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 1{,}5$.
b $P\left(X = 3, n = 9, p = \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}164$
c $P(2{,}5 < X_N < 3{,}5|\,\mu = 4{,}5; \sigma = 1{,}5)$
d $P(X = 5) \approx P(4{,}5 \leq U \leq 5{,}5)$ en $P(4 \leq X \leq 7) \approx P(3{,}5 \leq U \leq 7{,}5)$
e -

133
a $\mu = np = 3$ en $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 1{,}58$
b $P(Y = 2) = P\left(X = 2, n = 18, p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}230$;
$P(1{,}5 < X < 2{,}5|\,\mu = 3; \sigma = 1{,}58)$. Ze verschillen nogal.
c $\mu = np = 30$ en $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5$;
$P(Y = 20) = P\left(X = 20, n = 180, p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}0103$;
$P(19{,}5 < Y_N < 20{,}5|\,\mu = 30; \sigma = 5)$. Ze verschillen nauwelijks.
d -

134
a Als je alle waarden van X met a vermeerderd, verschuift de verdelingskromme a naar rechts en wordt de verwachtingswaarde ook a groter.
Dan veranderen de onderlinge verschillen van de verdeling niet, dus de variantie blijft gelijk.
b $\text{sd}(2 \cdot X) = \sqrt{\text{Var}(2 \cdot X)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\text{Var}(X)} = 2 \cdot \text{sd}(X)$.

135
a $E(X) = 100$. $E(Y) = 200$, $E(X + Y) = 300$
b $\text{Var}(X) = 20\left(\frac{1}{2} \cdot (5)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-5)^2\right) = 500$,
$\text{Var}(Y) = 20\left(\frac{1}{2} \cdot (10)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-10)^2\right) = 2000$,
dus $\text{Var}(X + Y) = 2500$.

136
a Spiegel de kromme bij X in de verticale lijn door 0.
b $E(T) = -0{,}2$ en $\text{sd}(T) = 0{,}6$

137
a L is de som van twee normaal verdeelde stochasten, X en $-Y$, die onafhankelijk zijn.
b $E(L) = E(X) + E(-Y) = E(X) + -E(Y) = 10$; $\text{Var}(L) = \text{Var}(X) + \text{Var}(-Y)$
$= \text{Var}(X) + (-1)^2\text{Var}(Y) = 7^2 + 6^2 = 85$, dus $\text{sd}(L) = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$

138
a Als we bijvoorbeeld twee spelers uit een basketbalteam kiezen.
b Nee, zie antwoord c
c $E(D) = 2 \cdot 180 = 360$ en $E(S) = 2 \cdot 180 = 360$;
$\text{sd}(D) = 2 \cdot 7 = 14$, $\text{sd}(S) = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$.

d $\mathrm{E}(G) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X+Y) = 180$ en $\mathrm{Var}(G) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(X+Y) = \frac{1}{4}(7^2+7^2) = \frac{1}{2}\cdot 7^2$. dus $\mathrm{sd}(G) = \frac{7}{\sqrt{2}}$.

e Het gemiddelde is 180 en de standaardafwijking is $\frac{1}{9}\left(\sqrt{7^2+\ldots+7^2}\right) = \frac{7}{3}$.

139 **a** Zie tabel.

X	-2	-1	0	1	2
kans	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Dus $\mathrm{E}(X) = 0$ en $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{5}(0 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2) = 2$.

b Dat elke waarde van X even vaak voorkomt.

c Op grond van de centrale limietstelling

d $\mathrm{E}(T) = 200\cdot 0 = 0$, $\mathrm{Var}(T) = 200\cdot 2$, dus $\mathrm{sd}(T) = \sqrt{400} = 20$.
$\mathrm{P}(X > 50{,}5 \mid \mu = 0; \sigma = 20)$.

e 2,5% links en 2,5% rechts
De rechtergrens bepaal je met de GR. Zoek het getal a, zó, dat $\mathrm{P}(X > a \mid 0; 20) = 0{,}025$.
Je vindt: $a = 39{,}199\ldots$, dus de rechter grens is 40 cent en de linker grens is dan -40 cent.

140 **a** Een lekkerbekje weegt dus ongeveer 100 gram. Als het gewicht 480 gram is, kun je niet dichter bij 500 gram komen door een extra lekkerbekje erbij te doen. Bij suiker kun je wel vrij precies op 500 gram komen.

b Dus het gewicht moet onder de 450 of boven de 550 gram zijn.
$1 - \mathrm{P}(450 < X < 550 \mid \mu = 500; \sigma = 15)$.

c Dus het moet gewicht onder de 1350 of boven de 1650 zijn.
Het gewicht van de drie pakken samen noemen we S, dan $\mathrm{E}(S) = 1500$ en $\mathrm{sd}(S) = 15\sqrt{3}$.
$1 - \mathrm{P}(1350 < X < 1650 \mid \mu = 1500; \sigma = 15\sqrt{3})$.

d Bij onderdeel **b** zoek je meer dan 3,33sd vanaf het gemiddelde, bij onderdeel **c** zoek je wel meer dan 5,77sd vanaf het gemiddelde.
Gevoelsmatig: als je er drie bij elkaar neemt, middelen de gewichten elkaar uit.

141 **a** Alleen links: $\mathrm{P}(X < 2100 \mid \mu = 2500; \sigma = 450) = 0{,}187\ldots$.
Links en rechts heeft dus de kans $(0{,}187\ldots)^2 \approx 0{,}035$.

b $E(V) = 0$ en $\mathrm{sd}(V) = \sqrt{2}\cdot 450 = 636{,}4\ldots$

c $\mathrm{P}(-20 < X < 20 \mid \mu = 0; \sigma = 450\sqrt{2}) \approx 0{,}025$.

142 **a** $\mathrm{P}(X = 2, n = 154, p = 0{,}05) \approx 0{,}015$

b Bekijk een tabel of grafiek met $\mathrm{P}(X = 2, n = 154, p = x) = 0{,}1$; je vindt $p \approx 0{,}034$.

c Noem de gemiddelde pleegduur Y, dan $\mathrm{E}(Y) = 4{,}5$ en $\mathrm{sd}(Y) = \frac{1{,}8}{\sqrt{100}} = 0{,}18$. Dus $\mathrm{P}(Y > 5 \mid \mu = 4{,}5; \sigma = 0{,}18) \approx 0{,}0027$.

143 **a** Normaal verdeeld

b $M - B < 0$

c $\text{E}(M - B) = 6{,}5 - 6{,}0 = 0{,}5$, $\text{sd}(M - B) = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2} = 0{,}2\sqrt{2}$; de gevraagde kans is $\text{P}(X < 0 | \mu = 0{,}5; \sigma = 0{,}2\sqrt{2}) \approx 0{,}0385$.

144 V = Tijd lijn 9 − Tijd lijn 5 is normaal verdeeld met $\text{E}(V) = 5$ en $\text{sd}(V) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Anne mist de aansluiting als $V < 0$. De gevraagde kans is $\text{P}(X < 0 | \mu = 5; \sigma = 5) \approx 0{,}159$.

145 $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ is normaal verdeeld met $\text{E}(T) = 12{,}4 + 3 \cdot 10{,}8 = 44{,}8$ en $\text{sd}(T) = \sqrt{0{,}6^2 + 3 \cdot 0{,}4^2} = \sqrt{0{,}84}$.
De gevraagd kans is: $\text{P}(X < 44 | \mu = 44{,}8; \sigma = \sqrt{0{,}84}) \approx 0{,}191$.

Extra opgaven

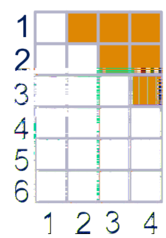
1

a Er zijn volgordes voor de letters A, B en C. Eén van de zes is als gevraagd, de kans is dus $\frac{1}{6}$.

b Het totale aantal volgordes is 6!
Noem de overige personen D en E. Het aantal volgordes van AC, B, D, E is 4! evenals die van CA, B, D, E. De kans is dus: $\dfrac{2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{15}$

c A staat eerste met 5! mogelijkheden of tweede, met ook 5! mogelijkheden. De kans is dus $\dfrac{2 \cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}$.
Of: 2 van de 6 plaatsen zijn goed, dus de kans is: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2 Zie figuur.
$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$



figuur bij extra opgave 2

3

a Elk van de vier bridgers heeft evenveel kans op hartenaas.

b Niet elk van de vijf mogelijkheden heeft dezelfde kans, dus eht klopt niet.

c
$$\text{P}(A = 0) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} \approx 0{,}304,\ \text{P}(A = 1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \approx 0{,}439,$$
$$\text{P}(A = 4) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} \approx 0{,}003$$

4

a
$$\text{P}(A = 3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10}}{\binom{52}{13}} \approx 0{,}041$$

b Dan moet van drie soorten 3 kaarten krijgen en de vierde soort 4. Die kans is: $4 \cdot \dfrac{\binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{4}}{\binom{52}{13}} \approx 0{,}105$.

5

a $n(n-1)(n-2)$
b $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$

6

a 7
b 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6
c $\binom{6}{3} = 20$

7

a n^4
b $(n-1)^4, 4 \cdot (n-1)^3, 6 \cdot (n-1)^2, 4 \cdot (n-1)^1, 1.$
c $n^4 = (n-1+1)^4 =$

$$(n-1)^4 + \binom{4}{1}(n-1)^3 \cdot 1 + \binom{4}{2}(n-1)^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3}(n-1) \cdot 1^3 + \binom{4}{4} \cdot 1^4$$

8

a Zie tabel.

a	0	1	2	3	4
$P(A = a)$	$\dfrac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}$	$\dfrac{\binom{48}{12}\binom{4}{1}}{\binom{52}{13}}$	$\dfrac{\binom{48}{11}\binom{4}{2}}{\binom{52}{13}}$	$\dfrac{\binom{48}{10}\binom{4}{3}}{\binom{52}{13}}$	$\dfrac{\binom{48}{9}\binom{4}{4}}{\binom{52}{13}}$
$P(A = a)$	$\approx 0{,}3038$	$\approx 0{,}4388$	$\approx 0{,}2135$	$\approx 0{,}0412$	$\approx 0{,}0026$

b 1,00
c $P(H = 0) = \frac{3}{4}$ en $P(H = 1) = \frac{1}{4}$, dus $E(H) = \frac{1}{4}$.
d $E(A) = 4 \cdot E(H) = 1$

9

a Als de succeskans p is, dan $E(X) = 10p$ en $E(Y) = 10(1-p) = 10 - 10p = 10 - E(X)$.
b Deel door het aantal herhalingen, dus door 10.

10

a Zie tabel.

x	0	120	240	360
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

Dus $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 120 + \frac{1}{3} \cdot 240 + \frac{1}{24} \cdot 360 = 85$

b $X_1 = 120$ met kans $\frac{1}{2}$ anders $X_1 = 0$;
$X_2 = 120$ met kans $\frac{1}{6}$ anders $X_2 = 0$;
$X_3 = 120$ met kans $\frac{1}{24}$ anders $X_3 = 0$;
Dus $\text{E}(X_1) = 60$, $\text{E}(X_2) = 20$ en $\text{E}(X_3) = 5$

c Ja want $X = X_1 + X_2 + X_3$ en $\text{E}(X) = \text{E}(X_1) + \text{E}(X_2) + \text{E}(X_3)$.

11 Het krijgen van een aas of niet is niet binomiaal.

12
a $\text{P}(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20-k}$

b Een even aantal keren zes ogen gooien

13
a $\text{P}(Y \le 0) = \text{P}(X \ge 10) = 1 - \text{P}(X \le 9)$, $\text{P}(Y \le 1) = \text{P}(X \ge 9) = 1 - \text{P}(X \le 8)$, $\text{P}(Y \le 2) = \text{P}(X \ge 8) = 1 - \text{P}(X \le 7)$ enzovoort.
Dus $\text{P}(Y \le k) = \text{P}(X \ge 10 - k) = 1 - \text{P}(X \le 9 - k)$, $k = 0, 1, \ldots, 9$.

b $\text{P}(X = k) = \text{P}(X \le k) - \text{P}(X \le k - 1)$, $k = 0, 1, \ldots, 10$, waarbij je $\text{P}(X \le -1)$ als 0 moet lezen.

14
a $\text{E}(X) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 = 1$, dus $\text{Var}(X) = \frac{1}{3} \cdot (0-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1-1)^2 + \frac{1}{6} \cdot (3-1)^2 = 1$ en $\text{sd}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1$.

b $\text{sd}(Y) = 10 \cdot \text{sd}(X) = 10$

c $\text{sd}(Z) = \text{sd}(X) = 1$

15
a Als de kans op succes p is, dan $\text{sd}(X) = \sqrt{50p(1-p)}$.
De kans op mislukking is $1 - p$, dus $\text{sd}(Y) = \text{sd}(X)$.

b Die zijn samen 1, dit volgt uit **a**.

c $50p(1-p) = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{5}$ of $p = \frac{4}{5}$.

16
a $\text{E}(A) = 1$, dus $\text{Var}(A) = 0{,}3038 \cdot (0-1)^2 + 0{,}4388 \cdot (1-1)^2 + 0{,}2135 \cdot (2-1)^2 + 0{,}0412 \cdot (3-1)^2 + 0{,}0026 \cdot (4-1)^2 = 0{,}7055$

b $\text{P}(H = 1) = \frac{1}{4}$, dus $\text{E}(H) = \frac{1}{4}$ en $\text{Var}(H) = \frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

c Het krijgen van hartenaas is niet onafhankelijk van het krijgen van een andere aas.

17
a $P(X < 105) = P(X > 95)$
Gebruik de symmetrie ten opzichte van het gemiddelde.

b $P(X < 90) > 2 \cdot P(X < 80)$ en $P(93 < X < 105) < P(94 < X < 106)$
Volgens de vuisteregels is $P(X < 90) \approx 0{,}34$ en $P(X < 80) \approx 0{,}025$.
Het interval $[93{,}105]$ is even breed als het interval $[94{,}106]$, maar het tweede ligt symmetrisch ten opzichte van de top, dus de bijbehorende oppervlakte onder de kromme is groter.

18 Noem het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ, dan: $100 - \mu = 0{,}4\sigma$ en 9`2 $- \mu = -1{,}6\sigma$, dus $100 - \mu - (92 - \mu) = 0{,}4\sigma + 1{,}6\sigma$, dus $\sigma = 4$ en $\mu = 98{,}4$.

19
a $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 3^2 + 4^2$, dus $\text{sd}(X + Y) = \sqrt{\text{Var}(X + Y)} = 5$

b $\text{Var}(X_1 + X_2 + ... + X_{64}) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) ... + \text{Var}(X_{64}) = 64 \cdot 3^2$, dus $\text{sd}(X_1 + X_2 + ... + X_{64}) = \sqrt{64 \cdot 3^2} = 24$.

c $\text{Var}\left(\frac{1}{64}(X_1 + X_2 + ... + X_{64})\right)$, dus $\text{sd}\left(\frac{1}{64}(X_1 + X_2 + ... + X_{64})\right)$.

20

a $E(X) = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 8 = 7$, dus $E(S) = 700$.
$\text{Var}(X) = \frac{1}{3} \cdot (5 - 7)^2 + \frac{2}{3} \cdot (8 - 7)^2 = 2$, dus $\text{sd}(S) = 10\sqrt{2}$

b $P(S > 697) = P(N > 697{,}5 \mid \mu = 700, \sigma = 10\sqrt{2})$

21

$P(400 < D < 500) \approx P(400{,}5 < N < 499{,}5)$,
$P(400 < D \leq 500) \approx P(400{,}5 < N < 500{,}5)$,
$P(400 \leq D \leq 500) \approx P(399{,}5 < N < 500{,}5)$

22

a Er zijn $4! = 24$ volgordes en precies één ervan is goed. De kans is dus $\frac{1}{24}$.

b 3 goed kan niet, dan moet de vierde ook goed zijn.
2 goed: kies er 2 die goed zijn, $\binom{4}{2} = 6$ mogelijkheden, de andere twee cijfers moeten dus zijn verwisseld. Dus 6 van de 24 mogelijkheden geeft $\frac{1}{4}$ kans.
1 goed: kies één cijfer dat goed is, 4 mogelijkheden. De andere drie cijfers moeten allemaal fout zijn. Dat geeft 2 mogelijkheden. Dus in totaal $4 \cdot 2 = 8$ mogelijkheden van de 24. Dit geeft $\frac{1}{3}$ kans.
0 goed: dit zijn de overige mogelijkheden. De kans is dus $1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$.
Kanstabel:

aantal goed	0	1	2	3	4
ka[illegible]	3 [illegible]	1 [illegible]	1 [illegible]	[illegible]	$\frac{1}{24}$

23

a Zonder terugleggen. Kans op geen aas is $\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50} \cdot \frac{36}{49} = \frac{6327}{20.825}$.

b De kans op één aas is $\dfrac{\binom{48}{12} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{52}{13}} = \frac{9139}{20.825}$.

c Kanstabel:

aantal azen	0	1	2	3	4
kans	$\frac{6327}{20.825}$	$\frac{9139}{20.825}$	$\frac{4446}{20.825}$	$\frac{858}{20.825}$	$\frac{55}{20.825}$

De kansen zijn samen 1.

24

a Bekijk 1 kg.
$0{,}3 \cdot 20 = 6$ jaar regen → winst is $6 \cdot 0{,}75 = 4{,}50$ euro
$0{,}7 \cdot 20 = 14$ jaar geen regen → winst is $14 \cdot 2 = 28$ euro
Totale winst in 20 jaar is $4{,}50 + 28 = 32{,}50$ euro.
Gemiddeld is dit $\frac{32{,}50}{20} = 1{,}625$ euro en dat is meer dan $1{,}50$ euro.

b Noem de opbrengst per kg aangetast fruit a euro.
$6 \cdot a + 14 \cdot 2 = 6a + 28$ per 20 jaar → gemiddeld per jaar $\frac{6a+28}{20}$
Wanneer is dit kleiner dan 1,50 euro?
$\frac{6a+28}{20} < 1{,}50 \rightarrow 6a + 28 < 30 \rightarrow 6a < 2 \rightarrow a < \frac{1}{3}$
Als de prijs minder is dan $\frac{1}{3}$ euro ($\approx 0{,}33$ euro) is de eerste manier beter.

25

a De kans op (bijvoorbeeld) een prijs van 50 euro is
$\frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \frac{9}{10}$

uitkering	200.000	5.000	450	50	5	1	0
kans	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

b E(uitkering) $= 200.000 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6 + 5000 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \frac{9}{10} + \ldots + 0 \cdot$ de rest $= 0{,}4655$
E(winst) $= 1 - 0{,}4655 = 0{,}5345$ euro per kaart.

26

a 1, 1, 3, 3 heeft de grootste standaardafwijking, want de middelste twee getallen liggen verder van het gemiddelde af dan bij 1, 2, 2, 3.
b Ze hebben dezelfde sd, want de getallen liggen evenver uit elkaar (de getallen in de ene set zijn 1 groter dan die in de andere set).
c 2, 2, 6, 6 heeft de grootste standaardafwijking (namelijk 2 keer zo groot), want de getallen liggen verder van het gemiddelde af (namelijk 2 keer zo ver).
d Ze hebben dezelfde sd, want de afwijkingen van het gemiddelde zijn allemaal 1 en de gemiddelde kwadratische afwijking dus ook.

27

a Robins gemiddelde is $10 \cdot 0{,}01 + 9 \cdot 0{,}03 + \ldots + 1 \cdot 0{,}19 = 3{,}85$, Wilhelms gemiddelde is $10 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 + \ldots + 1 \cdot 0{,}3 = 4{,}4$. Dus Wilhelm behaalt gemiddeld de hoogste score.
b Wilhelm heeft de grootste sd. Zijn scores liggen erg ver uit elkaar. Ter controle: sd(Wilhelm) $= 3{,}47$ en sd(Robin) $= 2{,}35$.

28

De kans is $\dfrac{\binom{10}{3} \cdot \binom{15}{5}}{\binom{25}{8}} = \frac{728}{2185} \approx 0{,}3332$.

29

$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; $\dfrac{\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$

30

a $6! = 720$
b $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 360$ of $\frac{6!}{2!} = 360$
c $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 120$ of $\frac{6!}{3!} = 120$

d $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 180$ of $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$

31

a -3, 1, 5 en 9

b Kanstabel:

X	-3	1	5	9
kans	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

c $E(X) = -3 \cdot \frac{27}{64} + 1 \cdot \frac{27}{64} + 5 \cdot \frac{9}{64} + 9 \cdot \frac{1}{64} = 0$
Gemiddeld win je niets, dus het is een eerlijk spel.

d Een eerlijk spel is een spel waarbij je gemiddeld geen winst of verlies hebt.

32

a Dus KMKMKM, kans is $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

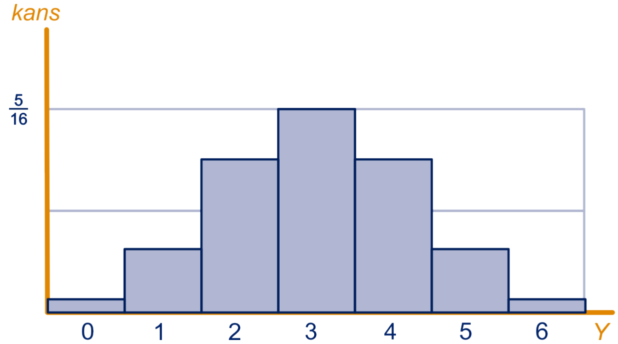
b Dus MKMKMK, kans is $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

c De kans is $\binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$.

d Kanstabel:

Y	0	1	2	3	4	5	6
kans	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

e Zie figuur.



f Omdat de kans op kop en op munt gelijk is.

33

a Kanstabel:

X	10	15	20	30	35	50
kans	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

b $E(X) = 10 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{3} + 20 \cdot \frac{1}{9} + 30 \cdot \frac{1}{6} + 35 \cdot \frac{1}{9} + 50 \cdot \frac{1}{36} = 20$

c Kanstabel:

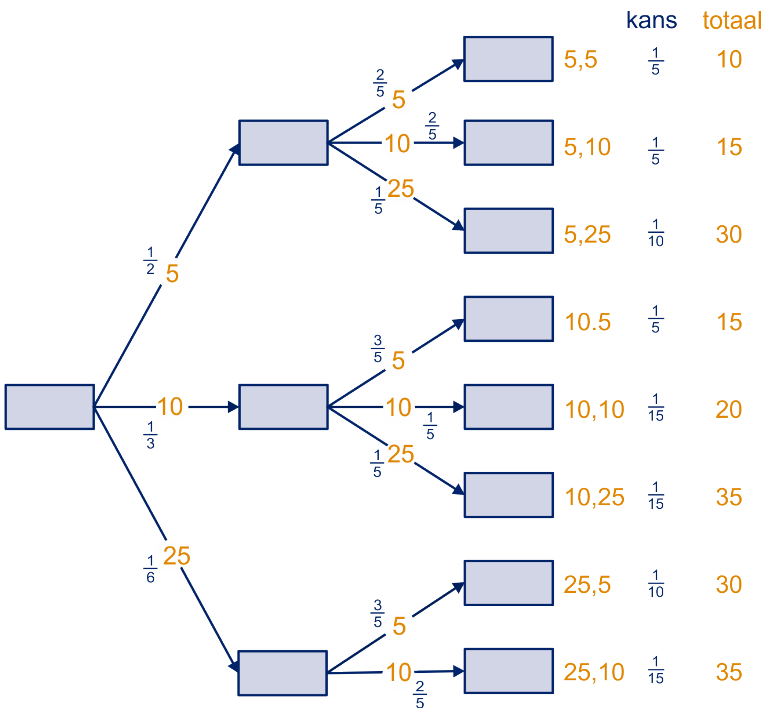
X_1	5	10	25
kans	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\text{E}(X_1) = 5 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{3} + 25 \cdot \frac{1}{6} = 10$
$\text{E}(X) = \text{E}(X_1) + \text{E}(X_2) = 2 \cdot \text{E}(X_1) = 2 \cdot 10 = 20$

d $\text{Var}(X) = (-10)^2 \cdot \frac{1}{4} + (-5)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{9} + 10^2 \cdot \frac{1}{6} + 15^2 \cdot \frac{1}{9} + 30^2 \cdot \frac{1}{36} = 100$

e Met de tabel en de berekeningen bij antwoord **c** zie je dat:
$\text{E}(X_1) = 10$
$\text{Var}(X_1) = (-5)^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 15^2 \cdot \frac{1}{6} = 50$
$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = 2 \cdot \text{Var}(X_1) = 2 \cdot 50 = 100$

34 **a** Zie figuur.



Y_2	5	10	25
kans	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b $\text{E}(Y_2) = 5 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{3} + 25 \cdot \frac{1}{6} = 10$

c Kanstabel:

Y	10	15	20	30	35
kans	[illegible]	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

d $\text{E}(Y) = 10 \cdot \frac{1}{5} + 15 \cdot \frac{2}{5} + 20 \cdot \frac{1}{15} + 30 \cdot \frac{1}{5} + 35 \cdot \frac{2}{15} = 20$

e Ja, want $\text{E}(Y) = 20$ en $\text{E}(Y_1) = \text{E}(Y_2) = 10$.

f $\text{Var}(X) = (-10)^2 \cdot \frac{1}{5} + (-5)^2 \cdot \frac{2}{5} + 0^2 \cdot \frac{1}{15} + 10^2 \cdot \frac{1}{5} + 15^2 \cdot \frac{2}{15} = 100$

g Y_1 en Y_2 zijn niet onafhankelijk, want de kansen bij Y_2 zijn afhankelijk van de waarde van Y_1.

35

a Dus in de eerste 3 beurten één 6 en de 4e beurt is een 6.
De kans is $\text{P}\left(X = 1, n = 3, p = \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}0579$.

b Dus in 4 beurten hoogstens 1 keer een 6.
De kans is $\text{P}\left(X \leq 1, n = 4, p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}8681$.

c Dus in 9 beurten 2 keer een 6 en de 10e beurt is een 6.
De kans is $\text{P}\left(X = 2, n = 9, p = \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}0465$.

d Dus in 20 beurten hoogstens 3 keer een 6.
De kans is $\text{P}\left(X \leq 3, n = 20, p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}5665$.

36

a De ene mens is meer vatbaar voor griep dan de andere en sommige mensen krijgen een antigriepinjectie en zijn daarom weer minder vatbaar.

b $\text{P}(X \geq 5) = 1 - \text{P}(X \leq 4, n = 25, p = 0{,}2) \approx 0{,}5793$

c $\text{P}(X \leq 5) = \text{P}(X \leq 5, n = 25, p = 0{,}2) \approx 0{,}6167$

d $\binom{25}{5} \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^{20} \approx 0{,}1960$

e $\dfrac{\binom{11}{3} \cdot \binom{14}{2}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}2826$

37

a Bij benadering normaal verdeeld, maar toch wel aardig asymmetrisch.

b 70 mm Hg vanwege de symmetrie.

c Bepaal met de GR het getal a met $\text{P}(X < a \mid 85;13) = 0{,}25$. Je vindt: $a \approx 76$.
Dus de waarden tussen 76 en 94. Gebruik symmetrie.

38

a Ja

b Ze zijn elkaars tegengestelde.

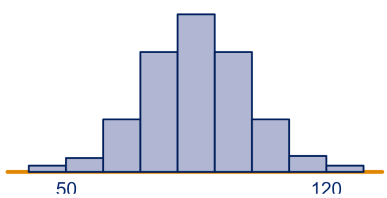
c Het verschil van de gemiddeldes is 10.

d De sd bij gemiddelde 50 is twee maal zo groot als die bij gemiddelde 60, want de z-waarden $z = \dfrac{70 - 50}{\sigma_{50}}$ en $z = \dfrac{70 - 60}{\sigma_{60}}$ zijn gelijk, dus $\sigma_{50} = 2\sigma_{60}$.

39

a Een continue variabele

b Zie figuur.
De hoogte van de staven zijn: $\text{P}(X < 50 \mid 85; 13) \approx 0{,}004$,
$\text{P}(50 < X < 60 \mid 85; 13) \approx 0{,}024$,
$\text{P}(60 < X < 70 \mid 85; 13) \approx 0{,}097$,
$\text{P}(70 < X < 80 \mid 85; 13) \approx 0{,}226$,
$\text{P}(80 < X < 90 \mid 85; 13) \approx 0{,}229$,
$\text{P}(90 < X < 100 \mid 85; 13) \approx 0{,}226$,



$\text{P}(100 < X < 110 | 85; 13) \approx 0{,}097$,
$\text{P}(110 < X < 120 | 85; 13) \approx 0{,}024$,
$\text{P}(X > 120 | 85; 13) \approx 0{,}004$.

c $\text{P}(84{,}5 < X < 85{,}5 | 85; 13)$, dus 31%

40 Gemiddelde: $\frac{1}{4}(2{,}7 + 8{,}7 + 16{,}4 + 10{,}0) = 9{,}45$;
standaardafwijking: $\sqrt{\frac{1}{4}\left(1{,}8^2 + 1{,}0^2 + 1{,}0^2 + 1{,}0^2\right)} \approx 0{,}62$.

41
a -
b Beide 1.
c Het zijn 262 dinsdagen, dus $\text{E}(S) = 262$ en $\text{sd}(S) = \sqrt{262}$.
d $\text{P}\left(X < 250{,}5 | 262; \sqrt{262}\right) \approx 0{,}229$

42
a Er zijn 90 tweetallen en bij 30 ervan is 5 het hoogste.
b $\text{P}(X = 2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$, $\text{P}(X = 5) = \frac{5}{15}$ en $\text{P}(X = 10) = \frac{3}{15}$.
c $\text{E}(X) = \frac{7}{15} \cdot 2 + \frac{5}{15} \cdot 5 + \frac{3}{15} \cdot 10 = 4\frac{3}{5}$ en $\text{Var}(X) = \frac{7}{15} \cdot \left(4\frac{3}{5} - 2\right)^2 + \frac{5}{15} \cdot \left(4\frac{3}{5} - 5\right)^2 + \frac{3}{15} \cdot \left(4\frac{3}{5} - 10\right)^2 = 9\frac{1}{25}$.
d Volgens de centrale limietstelling
e Tussen 100 en 500 euro.
f $\left(\frac{7}{15}\right)^{50} \approx 0$; $\left(\frac{3}{15}\right)^{50} \approx 0$
g $\text{E}(T) = 50 \cdot 4\frac{3}{5} = 230$, $\text{Var}(T) = 50 \cdot 9\frac{1}{25} = 452$, dus $sd(T) = \sqrt{452} \approx 21{,}3$.
h T is discreet. De kans is: $\text{P}\left(223{,}5 < X < 255{,}5 | 230; \sqrt{452}\right) \approx 0{,}5049$.

43
a $\text{P}(X < 985{,}5 | 1000; 10) = 6{,}68...\%$
b 22,5 ml; 9,9 ml
c We bekijken de tweede voorwaarde.
Met standaardiseren.
Noem de waarde waarop de machine ingesteld moet worden μ. De z-waarde van 985,5 kun je op de GR vinden. Het is het getal a waarvoor geldt: $\text{P}(X < a | 0; 1) = 0{,}02$. Je vindt als z-waarde voor 985,5: -2,05, dus $-2{,}05 = \frac{985{,}5 - \mu}{5}$; je vindt dan een waarde voor μ die kleiner is dan de nominale waarde.
De machine moet ingesteld worden op 500 gram.
d We bekijken weer de tweede voorwaarde. De waarde waarop de machine ingesteld moet worden, noemen we weer μ.
Dan $-2{,}05 = \frac{241 - \mu}{5}$, dus $\mu = 241 + 5 \times 2{,}05 \approx 251{,}25$.
Bij pondspakken wordt dus meer koffie verbruikt.

44
a $8\frac{1}{2}$ uur komt overeen met 510 minuten.
De z-waarde van 510 kunnen vinden door met de GR het getal a te bepalen met: $\text{P}(X < a | 0; 1) = 0{,}07$.
Je vindt voor de z-waarde van 510: -1,479.
Dus $-1{,}479 = \frac{510 - \mu}{50}$, met μ in minuten. Dus $\mu = 510 + 1{,}479 \cdot 50 = 584$ minuten.

b We korten af: L is: je trekt een lege ba t erij, N is: je trekt een nieuwe ba t erij. Gevraagd wordt: P(LNNL) + P(NLNL) + P(NNLL). Die kans is:
$= \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{22}$.

45

a Met standaardiseren. Met de GR bepaal je de z-waarde van 170,0. Het is het getal a waarvoor $\text{P}(X < a \mid 0; 1) = 0{,}91$. Je vindt als z-waarde:1,342, dus $1{,}342 = \frac{170{,}0 - 160{,}4}{\sigma}$, dus $\sigma = \frac{170{,}0 - 160{,}4}{1{,}342} = 7{,}15...$.

b 50%

c Het aantal vrouwen dat kleiner is dan MED is: $91 + \frac{1}{2} \cdot 9 = 95{,}5\%$. De z-waarde bij dit percentage is (GR): 1,694, dus $1{,}694 = \frac{MED - 160{,}4}{7{,}2}$ dus $MED = 160{,}4 + 1{,}694 \cdot 7{,}2 \approx 1{,}726$.

d De kans dat een vrouw langer dan 172,6 is 0,113. De z-waarde van 172,6 kun je vinden door met de GR het getal a te bepalen met $\text{P}(X < a \mid 0; 1) = 1 - 0{,}113$. Zo vind je voor de z-waarde 1,21.

Noem het gemiddelde μ, dan $1{,}21 = \frac{172{,}6 - \mu}{7{,}2}$, dus $\mu = 172{,}6 - 7{,}2 \cdot 1{,}21 = 163{,}9$.

e $\text{P}(X < 170{,}0 \mid 164{,}0; 7{,}2) = 0{,}7977$.

46

a Met de GR bepaal je het getal a met $\text{P}(X < a \mid 0; 1) = 0{,}275$. Je vindt: $a = -0{,}60$, dus de z-waarde van 90 is -0,60, dus $-0{,}60 = \frac{90 - 100}{\sigma}$, dus $\sigma = \frac{10}{0{,}60} = 16{,}7$.

b $\text{P}(X > 115 \mid 100; 16{,}7) \approx 0{,}185$, dus 18,5%.

c $\text{P}(120 < X < 124 \mid 100; 16{,}7) \approx 0{,}04$, dus 4%.

2 Binomiale en normale verdelingen

1 $9^3 = (10-1)^3$

2 Ga bijvoorbeeld uit van 216 spellen.

3 Schrijf eens een aantal van die rijtjes op.