
Beslisk inde

Dictaat Wisk inde D

Versie: 2 j li 2013



Ontwikkeld door:

Hans van Ballegooij
Maaslandcollege, Oss
hans.van.ballegooij@gmail.com

Op basis van:

Beslissen Wiskunde D , door Jan Essers ism Kerngroep Wiskunde D Eindhoven,
Font s en de be erking hiervan door Ferd van der Werf op 16 juli 2008
Lineair programmeren, problemen met t ee onbekenden , door Etienne Goemaere,
Katholieke Universiteit Leuven
Een inleiding in de besliskunde door Herbert Hamers, Elleke Janssen, Marieke
Quant, Tilburg Universit

Inhoudsopgave

1	Optimaliseren	1
1.1	Basisprobleem	1
1.2	Het toegestane gebied	2
1.3	De maximale inst	6
1.4	E tra opga en	9
2	Beslissen in net erken	12
2.1	Basisprobleem	12
2.2	Grafentheorie	13
2.3	Grafen en Coalities	21
2.4	E tra opga en	26
3	Koppelen	29
3.1	Basisprobleem	29
3.2	Een analyse an het probleem	30
3.3	De Hongaarse methode	31
3.4	Varianten an de Hongaarse methode	34
3.5	E tra opga en	36
4	Macht	39
4.1	Basisprobleem	39
4.2	De nities	39
4.3	De machtsinde an Ban haf	42
4.4	De machtsinde an Shaple -Sh bik	44
4.5	E tra opga en	46

1 Optimaliseren

1.1 BASISPROBLEEM



Over boer Boersma en andere optimaliseringsproblemen

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

Boer Boersma heeft 45 hectaren land.

Er wordt koren en tarwe geaaid.

Elke hectare beplant met koren levert 300 euro inst op.

Elke hectare beplant met tarwe levert 200 euro inst op.

Er is 120 ton kunstmest beschikbaar en er zijn 100 arbeidskrachten.

Voor elke hectare koren zijn 2 arbeidskrachten nodig en 4 ton kunstmest.

Voor elke hectare tarwe zijn 3 arbeidskrachten nodig en 2 ton kunstmest.

Boer Boersma streeft naar maximalisatie van de inst. Hoe moet hij gaan aaien?

In dit probleem moet je dus gaan zoeken naar een maximum (van de inst) en er is sprake van allerlei voorwaarden. We starten met een analyse van het probleem en kruipen in de huid van de boer.

1

Boer Boersma denkt er over om de helft van de oppervlakte met koren in te aaien en de andere helft met tarwe.

- a Hoe groot is dan de inst (opbrengst) voor Boer Boersma?
- b Wordt bij de keuze aan alle voorwaarden voldaan?
- c Kies zelf een andere verdeling die mogelijk is en bereken bij de verdeling de inst (opbrengst).

Je kunt nu het land eer op een andere manier gaan verdelen en opnieuw nagaan of het mogelijk is en at dan de inst is. Een aanpak die niet echt slim is ant je eet nooit of je de maximale inst hebt bereikt. Het is verstandiger om het probleem iskundig aan te pakken. De onbekenden in dit probleem leg je niet vooraf vast (bv. 22,5 hectare koren) maar maak je variabel (dus x hectare koren).

Noem dus het aantal hectaren dat je in aait met koren x en het aantal hectaren dat je in aait met tar e y . We noemen de e variabelen de *beslissingsvariabelen*. Je kunt nu nagaan aaraan de e variabelen moeten voldoen.

1.2 HET TOEGESTANE GEBIED

In de eerste plaats moet er rekening gehouden orden met de hoeveelheid land. De totale oppervlakte is 45 hectare en dus mag de som van x en y niet groter ijn dan 45: $x + y \leq 45$. De e voor aarde heet een *beperkende voorwaarde* of *restrictie*. Uiteraard kunnen de variabelen x en y niet negatief ijn, dus t ee andere beperkende voor aarden ijn: $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Er ijn nog meer beperkende voor aarden omdat er slechts een beperkt aantal arbeidskrachten is en een beperkte hoeveelheid kunstmest, ie de navolgende tabel:

Beperkende voorwaarde		Formule
I	De totale oppervlakte is 45 hectare	$x + y \leq 45$
II	Er is een beperkt aantal arbeidskrachten	$2x + 3y \leq 100$
III	Er is een beperkte hoeveelheid kunstmest	
IV	Het aantal hectaren koren kan niet negatief ijn	$x \geq 0$
V	Het aantal hectaren tar e kan niet negatief ijn	$y \geq 0$
Maximaliseer de winst		
Noem de inst z dan moet je maximaliseren:		$z =$

2

- Toon aan dat voor de arbeidskrachten inderdaad geldt $2x + 3y \leq 100$.
- Stel de beperkende voor aarde voor de hoeveelheid kunstmest op.
- Druk de inst uit in en .

Een probleem zoals geformuleerd in de tabel noemen we een *Lineair Programmeren Maximalisatieprobleem*, kortweg *LP-maximalisatieprobleem*.

Algemeen is een LP-maximalisatieprobleem een probleem van het volgende type:

LP-maximalisatieprobleem

Maximaliseer

$$z = p_1x + q_1y + \dots + p_nx + q_ny$$

Onder de voorwaarden

$$(1) \quad p_1x + q_1y \leq r_1$$

$$(2) \quad p_2x + q_2y \leq r_2$$

.....

$$(n) \quad p_nx + q_ny \leq r_n$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Er kunnen dus veel meer (n) voorwaarden zijn dan de drie voorwaarden zoals bij boer Boersma.

De functie die in een LP-maximalisatieprobleem gemaximaliseerd dient te worden wordt de *doelfunctie* genoemd. Voor het gemak gebruiken we overal in dit hoofdstuk voor de doelfunctie de letter z .

Omdat er slechts twee variabelen zijn, x en y , kun je de beperkende voorwaarden gaan tekenen in een xy -assenstelsel.

3

Kijk naar de tabel. De voorwaarden $x \geq 0$ en $y \geq 0$ geven aan dat x en y positief zijn en dus hoef je alleen in het eerste kwadrant te tekenen. We gaan nu kijken naar de eerste restrictie.

a Vul bij de vergelijking $x + y = 45$ de volgende tabel in:

	0	10	20	30	40	
						0

b Teken de grafiek bij de vergelijking $x + y = 45$.

c Waarom had je van tevoren kunnen weten dat dit een rechte lijn wordt? Wat is de richtingscoëfficiënt van de lijn?

d Arceer in je grafiek het gebied waar aan de drie restricties $x \geq 0$, $y \geq 0$ en $x + y \leq 45$ wordt voldaan.

Beslissonde

De oplossing van ons probleem (wanneer is de inst maximaal?) voldoet aan de drie restricties. De oplossing moet dus ergens in het gearceerde gebied liggen. We noemen dit gebied het *toegestane gebied*. Om dit toegestane gebied verder te verkleinen gaan we ook de lijnen die horen bij restricties II en III in de grafiek tekenen.

4 a Teken ook de grafieken van de lijnen die horen bij restricties II en III.

b Bepaal het toegestane gebied.

5 a Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen $2x + 3y = 100$ en $2x + y = 60$.

b Benoem alle hoekpunten van het toegestane gebied.

6 (Uit: Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) Gegeven zijn de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \leq 7 \\ x - 2y \geq 5 \\ x \geq -4 \\ y \leq 7 \end{cases}$$

a Teken het toegestane gebied.

b Bereken de coördinaten van alle hoekpunten.

7

Top-fietsen produceert twee typen fietsframes, een ATB frame en een race frame. Voor de productie van een ATB frame is 4 kg aluminium en 6 kg staal nodig, voor de productie van een race frame is 5 kg aluminium en 2 kg staal nodig. Top-fietsen verkoopt een ATB frame voor 1980 euro en een race frame voor 1240 euro.



Het aanbod van aluminium is beperkt tot een maximum van 70 kg per dag en het aanbod van staal tot een maximum van 72 kg per dag. Top-fietsen wil zijn dagelijkse opbrengst maximaliseren. De tabel toont alle gegevens van het bovenstaand beschreven productieproces van fietsframes van Top-fietsen:

	ATB frame	race frame	dagelijks aanbod
aluminium	4	5	70
staal	6	2	72
prijs	1980	1240	

Noem x het aantal ATB frames geproduceerd op een dag en y het aantal race frames geproduceerd op een dag.

- Stel het bijbehorende LP-maximalisatieprobleem op.
- Teken het toegestane gebied
- Bereken de coördinaten van alle hoekpunten

8

Een bierproducent produceert blond bier (b) en donker bier (d). De voornaamste grondstoffen die nodig zijn voor de productie van bier zijn tarwe en hop. Het productieschema ziet er als volgt uit:

	blond bier	donker bier	dagelijks aanbod
tarwe	1	2	5
hop	2	1	8
prijs	5	7	

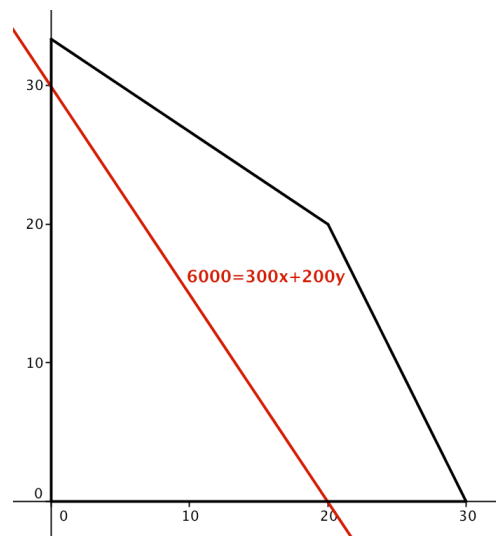


- Stel het bijbehorende LP-maximalisatieprobleem op.
- Teken het toegestane gebied.

1.3 DE MAXIMALE WINST

We keren terug naar het probleem van boer Boersma. De doelfunctie $z = 300x + 200y$ moet gema imaliseerd orden. Als je een aarde voor en kiest dan is de inst vastgelegd. Als je bijvoorbeeld $x = 10$ en $y = 15$ kiest (een punt dat in het toegestane gebied ligt) dan is de inst

$z = 300 \cdot 10 + 200 \cdot 15 = \text{€ } 6.000$. Er ijn meer punten in het toegestane gebied aar de inst $\text{€ } 6.000$ is, bijvoorbeeld de punten $(x,y) = (20,0)$ en $(x,y) = (0,30)$. In de grafiek hiernaast ie je het toegestane gebied en daarin getekend de lijn $6000 = 300x + 200y$. Overal op die lijn is de inst dus $\text{€ } 6.000$. Een dergelijke lijn heet een hoogtelijn of isolijn bij de doelfunctie.



- 9**
- Neem figuur 1.1 over en teken e tra hoogtelijnen bij $z = 2000$, $z = 4000$ en $z = 8000$.
 - Waar ver acht je dat in het toegestane gebied de ma imale inst ordt bereikt?
 - Bereken de e ma imale inst.
 - Hoe it het met het gebruik van kunstmest, arbeidskrachten en grond? Geef commentaar.

In opgave 9 heb je ontdekt dat de inst het grootst is in een hoekpunt van het toegestane gebied. Dit is altijd o. Door de aarde van de doelfunctie in de hoekpunten van het toegestane gebied uit te rekenen vind je de ma imale aarde. De e methode heet de *hoekpuntenmethode*.

- 10** (Uit: Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) Het toegestane gebied bij de doelfunctie $z = x + y + 10$ wordt gegeven door de volgende ongelijkheden:

$$\begin{cases} 5x + 8y \leq 39 \\ 4y - 5x \leq 15 \\ 7x + 5y \leq 36 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a** Teken het toegestane gebied.
- b** Bepaal met de hoekpuntenmethode de coördinaten van het punt uit het toegestane gebied waar de doelfunctie maximaal is. Welke waarde heeft z in dat punt?
- c** In elk punt van het toegestane gebied is z minimaal? Welke waarde heeft z in dat punt?

- 11 a** Bepaal m.b.v. de hoekpuntenmethode het maximum bij het LP-maximalisatieprobleem van opgave 7.

- b** Idem voor opgave 8.

Als er meer veel hoekpunten zijn, is de hoekpuntenmethode nogal omslachtig. In dat geval is het gemakkelijker om een paar hoogtelijnen te tekenen en met behulp daarvan te bepalen in elk hoekpunt het maximum wordt bereikt. In opgave 9 heb je eigenlijk deze methode al gebruikt. Deze methode noemen we de *schuifmethode*.

- 12 a** Teken het toegestane gebied bij het onderstaande LP-maximalisatieprobleem:

Maximaliseer $z = 2x + y$ onder de beperkende voorwaarden:
$$\begin{cases} 8x + 2y \geq 17 \\ 4x + 2y \leq 13 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- b** Los het probleem op m.b.v. de schuifmethode. Er zijn meer oplossingen, bepaal ze allemaal.

13

(Uit: Wageningse Methode) Een kleine boer kan voor ten hoogste € 360 koffie en thee inkopen. Koffie kost € 3 per kg, thee € 4 per kg. De boer weet dat hij niet meer dan 100 kg koffie al kunnen afzetten en niet meer dan 75 kg thee. Noem het aantal kg koffie dat de boer inkoop x en het aantal kg thee y . Natuurlijk moet gelden $x \geq 0$ en $y \geq 0$.



- a Aan elke drie andere ongelijkheden moeten x en y voldoen als je let op het te besteden bedrag en de mogelijke afzet?
- b Teken het toegestane gebied.

Stel dat de boer € 1 instaat per kg koffie en € 2 instaat per kg thee.
- c Stel de doelfunctie op.
- d Teken enkele iso-inkooppunten.
- e Wat is het optimale inkoopplan, d.w.z. het plan dat de meeste instaat oplevert?

Al met al levert de uitwerking van het probleem van boer Boersma een algemene aanpak voor een LP-maximalisatieprobleem (of minimalisatieprobleem):

Plan van aanpak

Stel de doelfunctie $z = ax + by$ en alle beperkende voorwaarden op
 Teken alle lijnen die bij de beperkende voorwaarden horen
 Bepaal het toegestane gebied

Via de hoekpuntenmethode:
 Bepaal alle hoekpunten
 Bereken in elk hoekpunt de waarde z en bepaal de oplossing

of

Via de schuifmethode:
 Teken een geschikte hoogtelijn $c = ax + by$
 Schuif daarmee naar het beste hoekpunt
 Bereken dat hoekpunt en de waarde van z in dat hoekpunt

1.4 EXTRA OPGAVEN

14

Los m.b.v. de hoekpuntenmethode het volgende LP-minimalisatieprobleem op:

$$\text{Minimaliseer } z = 70x + 72y \text{ onder de beperkende voorwaarden: } \begin{cases} 4x + 6y \leq 1960 \\ 5x + 2y \geq 1240 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

15

Los het volgende LP-minimalisatieprobleem op:

$$\text{Minimaliseer } z = x + y \text{ onder de beperkende voorwaarden: } \begin{cases} 4x + 5y \geq 10 \\ x + 2y \leq 8 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

16

(Uit Wageningse Methode) Een timmerfabriekje maakt twee soorten salontafels: modern eiken en klassiek eiken. Per dag kunnen er van elke soort hoogstens vijf gemaakt worden. In verband met de opslagcapaciteit mogen er per dag niet meer dan even tafels in totaal gemaakt worden.



Een moderne tafel kost één mandag werk, een klassieke tafel kost twee mandagen. In de fabriek werken elf mensen aan de productie van salontafels.

Stel dat er per dag x moderne tafels en y klassieke tafels gemaakt worden.

- Welke omstandigheden beperken de dagelijkse productie?
- Aan elke 4 ongelijkheden (behalve $x, y \geq 0$) moeten x en y voldoen?
- Teken het toelaatbare gebied.

De inst op een moderne tafel is € 200 en op een klassieke tafel € 300. Het bedrijf wil de inst minimaliseren.

- Wat is de doelfunctie?
- Teken enkele iso-instlijnen.
- Bij elk productieschema is de inst het grootst?

Door een grote vraag naar moderne tafels is het mogelijk de prijs te verhogen. De prijs van een moderne tafel die nu wordt gemaakt is nu € 300.

- g Wat is nu de doelfunctie?
- h Teken enkele iso-productielijnen en bepaal bij elk productieschema de grootste productie die nu wordt gemaakt.

17

(Uit Moderne Wiskunde, editie 8, deel A2, VWO) In een machinefabriek worden twee soorten machines geproduceerd: type N en type S. Voor een machine van type N is de benodigde arbeidstijd per eenheid op afdeling A 15 uur en op afdeling B 20 uur. Voor een machine van type S zijn de twee tijden achtereenvolgens 20 en 30 uur. Per eenheid is op afdeling A 900 uur arbeidstijd beschikbaar en op afdeling B 1200 uur. Voor een machine van type N moet het bedrijf vooraf € 500 aan materiaalkosten uitgeven en voor een machine van type S € 1000. Per eenheid mag men niet meer dan € 34.500 aan materiaalkosten uitgeven. Op een machine van type N maakt men € 120 winst, op een machine van type S € 200. Men streeft naar maximale winst.

- a Neem de tabel hieronder over en vul de lege cellen verder in

	type N	type S	totaal beschikbaar
Afdeling A	15		900
Afdeling B	20		

- b Vertaal de beperkende voorwaarden in ongelijkheden en teken het toegestane gebied.
- c Bereken de coördinaten van de vier hoekpunten van het toegestane gebied.
- d Hoe groot is de maximale winst?

Door omstandigheden wordt er op een gegeven moment nog maar € 180 winst gemaakt op machines van type S. de winst op machines van type N blijft € 120.

- e Onderzoek of de maximale winst verandert. Zo ja, met hoeveel?
- f Leg uit waarom in dit geval de maximale winst bij verschillende productieaantallen bereikt kan worden.

Ook de winst op type N dreigt te verminderen.

- g Bij elke winstvermindering op type N is het verstandig de productie van N te staken en uitsluitend type S te maken? Licht je antwoord toe met een toelichting.

18

(Ontleend aan CE VWO A12 2002 tweede tijdvak) Een speelgoedfabriek maakt poppenhuizen en houten treinen. Voor het vervaardigen van speelgoed is drie soorten arbeid te onderscheiden: slijpen, timmeren en verven. Het aantal minuten dat hiervoor nodig is staat in de tabel:

soort arbeid	tijd (in minuten) nodig per poppenhuis	tijd (in minuten) nodig per trein
slijpen	24	15
timmeren	60	40
verven	40	10

Er is één personeelslid belast met slijpen, twee met het timmeren en één met het verven. Elk van de drie personeelsleden kan maximaal 40 uur per week werken. Ga er van uit dat de kosten voor het maken van speelgoed bestaan uit materiaalkosten en arbeidskosten. Aan materiaal kost een poppenhuis € 17 en een trein ook € 17. Ieder personeelslid kost € 30 per gewerkt uur. Alleen voor gewerkte uren wordt het personeelslid betaald. Alle producten die in een week worden gemaakt, worden de elfde week verkocht, de poppenhuizen voor € 97 per stuk, de treinen voor € 58,50 per stuk.

- a** Bereken de maximale winst die wkelijks gemaakt kan worden.

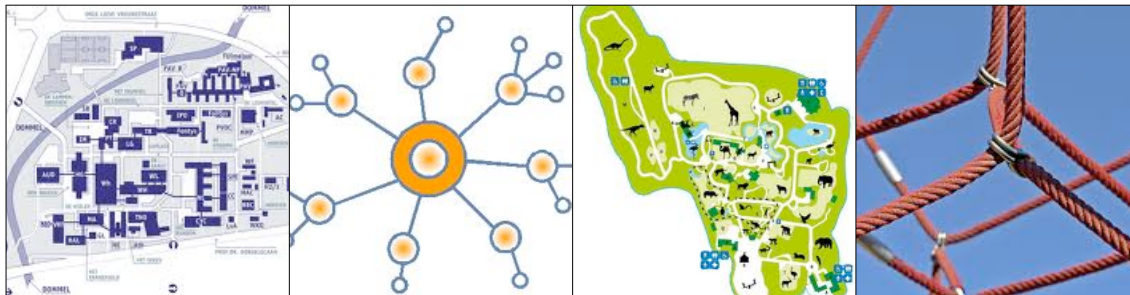
Waarschijnlijk heb je gemerkt dat onder de gegeven omstandigheden er nooit zoveel poppenhuizen en treinen gemaakt worden dat er voor de slijper 40 uur werk is. De slijper kan ook heel aardig verven. Hij doet dat net zo vlot als diegene die het normaal doet. Men besluit daarom dat de slijper een aantal uren beschikbaar moet zijn om te verven. Gedurende die tijd is hij niet beschikbaar voor het slijpen.



- b** Is het mogelijk de slijper zo lang te laten verven dat het aantal timmerlieden de enige beperkende factor wordt? Licht je antwoord toe.

2 Beslissen in net erken

2.1 BASISPROBLEEM

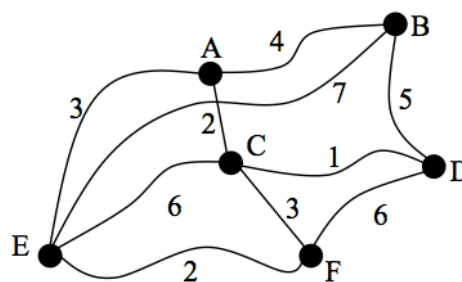


Over grafen (met een f!) en Koningsbergen

Hierboven zie je onder andere een plattegrond van de TU-Eindhoven. Een bezoeker kan met de plattegrond waarschijnlijk snel zien hoe hij zo snel mogelijk bij een bepaald gebouw komt. Maar ook kun je met dit plaatje uitvooeken of er voor een bezoeker een rondleiding bestaat waarbij je paden precies een keer doorloopt.

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

Op een fabrieksterrein wil men tussen zes depots een buisennetwerk aanleggen voor het transport van goederen. Hierbij moet elk van de zes depots bereikbaar zijn vanuit elk van de andere depots - eventueel via tussenliggende depots - en zijn omgeven niet erg omdat het vervoer door de buis en vrij snel gaat. De situatie zie je hiernaast in een schema.



De depots zijn aangegeven door punten en de mogelijke verbindingen door lijnen. Niet elke verbinding is mogelijk vanwege tussenliggende gebouwen. In de tekening zijn de kosten van de mogelijke verbindingen aangegeven door getallen (in miljoenen euros) langs de betreffende verbindingen.

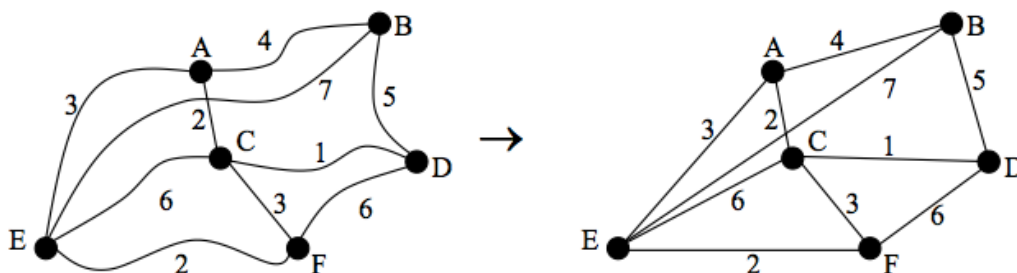
Uiteraard wil men de kosten van het aan te leggen buisennetwerk zo laag mogelijk houden. Hoe moet men het buisennetwerk aanleggen?

2.2 GRAFENTHEORIE

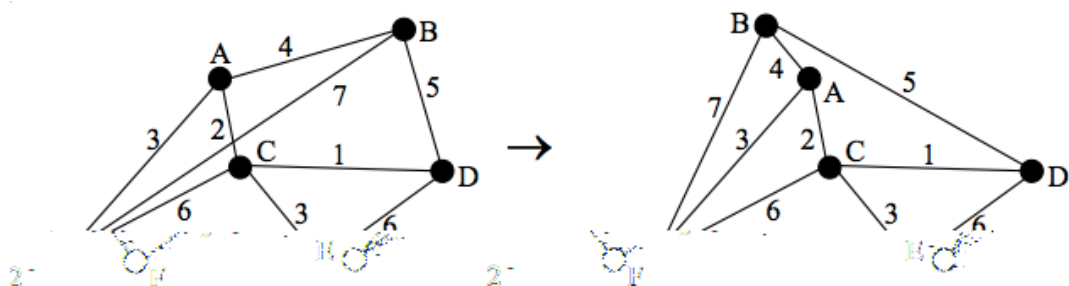
In dit probleem moet je dus gaan zoeken naar de kortste weg langs alle depots. Voordat je begint met een analyse gaan we eerst kijken naar het soort van figuur dat bij dit probleem hoort.

Een dergelijke figuur noemen we in de wiskunde een *graaf*. Het is een plaatje dat bestaat uit een verzameling punten die men ook wel *knopen* noemt en verbindingen die men kanten of *lijnen* noemt. De getallen die bij de verbindingen horen heten de *gewichten* van de lijnen. De tak van de wiskunde waarin grafen worden bestudeerd heet grafentheorie.

Bij de meeste problemen is de vorm van de verbinding niet van belang en in de grafentheorie tekent men daarom verbindingen tussen knopen meestal als rechte lijnstukken. De graaf hierboven kun je dus ook zo tekenen:



Het snijpunt van de lijnen BE en AC heeft in de rechte graaf geen betekenis. Dat snijpunt is dus geen punt van de graaf. Omdat dat snijpunt verplaatst kan worden kun je de lijn BE beter verplaatsen.



In het figuur hierboven zie je een derde weergave van het buienetwerk. De knopen A en B zijn daarin ook verplaatst om alle lijnen als rechte lijnstukken te tekenen.

Nog wat definities:

Een graaf heet *volledig* als je van ieder knooppunt rechtstreeks naar ieder ander knooppunt kunt komen.

Twee knopen heten *verbonden* als er een pad, bestaande uit lijnen uit de graaf bestaat, die die twee knopen verbindt. Die verbinding mag eventueel via een andere knoop lopen.

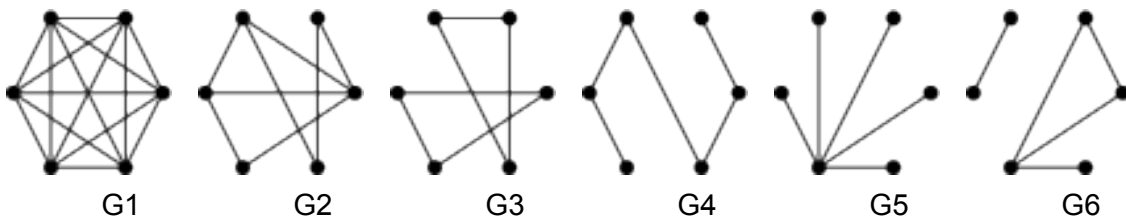
Een graaf heet *samenhangend* als er een pad is tussen elk tweetal knopen.

Een cirkel is een speciaal pad: het is een rondwandeling over verschillende lijnen van knoop naar knoop waarbij je terugkomt in de beginknoop.

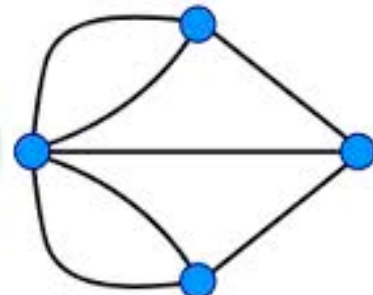
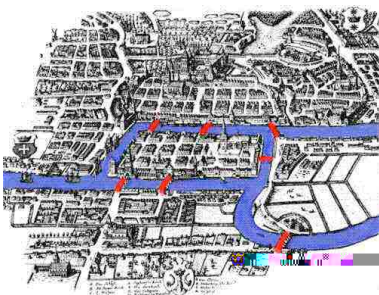
Een samenhangende graaf die geen cirkel bevat noemt men een *(opspannende) boom*.

19

Je hebt de volgende zes grafen:



- Welke van de zes grafen is samenhangend?
- Welke van de zes grafen is volledig?
- Welke van de zes grafen is een boom?
- Is het mogelijk dat een graaf samenhangend, volledig en een boom is? Waarom (niet)?

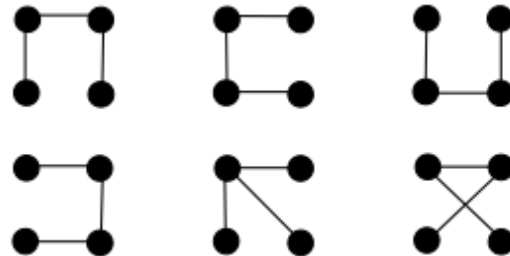
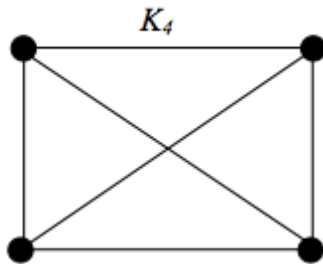


20

De zeven bruggen van Königsbergen is een beroemd probleem. De stad Königsbergen (heden ten dage Kaliningrad) lag in het oosten van Pruisen aan de rivier de Pregel, waarin twee eilanden lagen die door zeven bruggen met elkaar en met de vaste wal verbonden waren. Hierboven is de situatie schematisch afgebeeld.

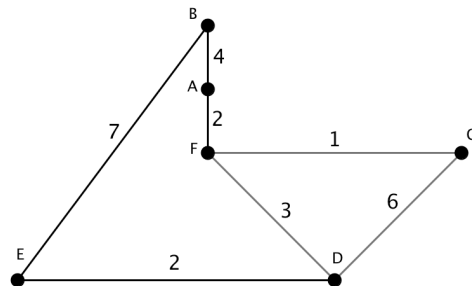
Tevens is een graaf getekend die de situatie abstract weergeeft. Is het mogelijk om zo te wandelen dat je precies eenmaal over elke brug loopt? Zo ja, geef de route. Zo nee, leg uit waarom niet.

- 21**
- a Hoeveel lijnen heeft een volledige graaf met 2, 3, 4, 5, 6 knopen?
 - b Leg uit dat een volledige graaf met n knopen $\frac{1}{2}n(n-1)$ lijnen heeft.
 - c Bepaal het aantal opspannende bomen van een volledige graaf met t knopen.
 - d Bepaal het aantal opspannende bomen van een volledige graaf met drie knopen.



- e De volledige graaf K_4 hierboven heeft meer dan 10 opspannende bomen. Hierboven rechts zijn er zes getekend. Hoeveel opspannende bomen heeft K_4 exact?
- f Wat is fout in de volgende redenering? Een opspannende boom van K_4 heeft 3 lijnen. Je kunt op $\binom{6}{3} = 20$ manieren 3 lijnen uit zes lijnen kiezen, dus K_4 heeft 20 opspannende bomen.

- 22**
- In de tekening hiernaast zijn de zes depots van ons basisprobleem schematisch weergegeven. Ook is een mogelijk buienetwerk weergegeven. Neem de tekening over en beantwoord vervolgens de vragen.



- a De gegeven graaf heeft drie cycli, benoem de cycli.
- b Is de gegeven graaf samenhangend?
- c Waarom kan dit buienetwerk nooit de oplossing zijn voor ons basisprobleem?
- d Teken, uitgaande van de zes depots, een buienetwerk (graaf) met precies een cyclus. Teken ook twee verschillende opspannende bomen. Zet steeds langs iedere lijn het gewicht van de lijn.
- e Waarom kan een samenhangende graaf met een cyclus nooit de oplossing zijn voor ons probleem?
- f Bereken de som van de gewichten van de twee verschillende opspannende bomen die je getekend hebt.
- g Kun je een opspannende boom tekenen met een lager totaalgewicht?
- h Iedere opspannende boom heeft precies 5 lijnen, leg uit waarom.

We gaan verder met ons basisprobleem. In de opgaven hebben we ontdekt dat het minimumprobleem erop neer komt dat je een boom zoekt waarvan de som van de gewichten van de lijnen minimaal is. Zo'n boom heet een minimaal opspannende boom.

Een manier om de minimale opspannende boom te bepalen is het bepalen van alle bomen en dan steeds de som van de gewichten te bepalen. Dat is in de eerste situatie best nog mogelijk maar bij meer lijnen en knopen al snel een tijdsintensieve en vrij onmogelijke klus. Zelfs een relatief kleine graaf die bestaat uit 6 knopen en 15 lijnen bevat ongeveer 1300 opspannende bomen.

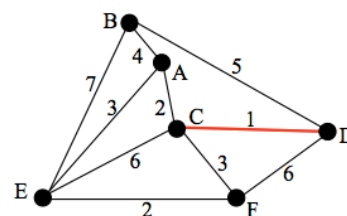
Er bestaan gelukkig slimmere strategieën. Een algoritme dat een minimale opspannende boom maakt is:

Het algoritme van Kruskal

Kies een van de lijnen met het kleinste gewicht
Kies van de overgebleven lijnen de lijn met het kleinste gewicht en voeg daarbij dat die lijn samen met de eerder gekozen lijnen geen circuit vormt.
Ga o door totdat je alle knopen hebt gehad.

In de volgende serie plaatjes zie je hoe je dit algoritme op het minimumprobleem toepast:

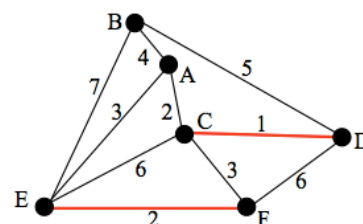
Kies lijn **CD**, deze heeft het kleinste gewicht, namelijk 1



Kies lijn AC of EF, deze hebben beide gewicht 2.

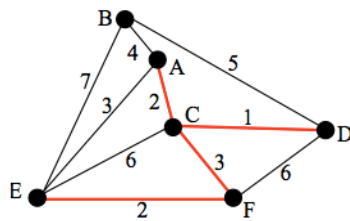
Keuze voor **EF**.

Som gewichten: $1+2 = 3$.



Dit keer is lijn **AC** de lijn met het kleinste gewicht en moet dus gekozen worden.

Som gewichten: $1+2+2 = 5$.

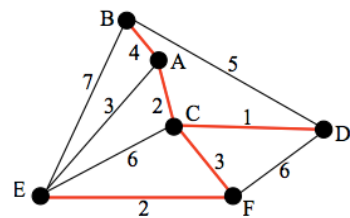


Gewicht 3 komt twee keer voor. Bij beide keuzes ontstaat geen circuit.

Links keuze **CF**

Rechts keuze **AE**

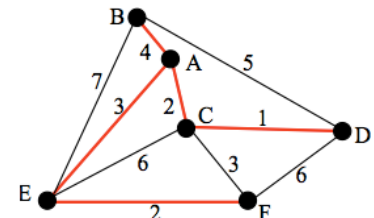
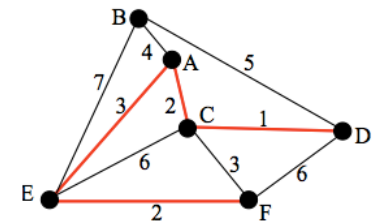
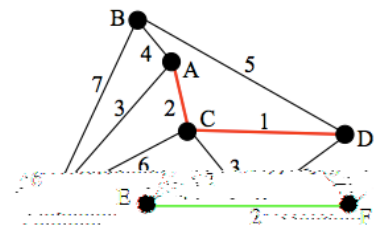
Som gewichten: $1+2+2+3 = 8$.



In beide situaties moet **BA** gekozen worden (bij keuze gewicht 3 ontstaat circuit).

Som gewichten:

$1+2+2+3+4 = 12$.



Het probleem is nu opgelost. Er zijn twee minimale opspannende bomen en de som van de gewichten is 12. Voor het buienprobleem betekent dat dat de minimale kosten 12 miljoen Euro zijn. De bedrijfsleiding kan kiezen uit twee netwerken.

Het algoritme van Kruskal beperkt het zoek- en rekenwerk aanzienlijk. De stap die in grote netwerken het meeste tijd kost is het controleren of er geen circuit ontstaat. Een methode waarbij die controle niet hoeft plaats te vinden is het algoritme van Prim. In dat algoritme voeg je geen lijnen toe maar knopen.

Het algoritme van Prim

Kies een willekeurige knoop.

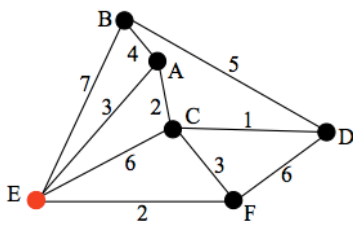
Kies uit alle lijnen van die knoop een lijn met minimaal gewicht.

Kies van alle lijnen die bij de eerder gekozen knopen horen, steeds de lijn met het kleinste gewicht en voeg de bijbehorende nieuwe knoop toe.

Herhaal de eerste stap totdat je alle knopen hebt.

Ook dit algoritme gaat de stapsgewijze volgen bij het buienprobleem.

Beslissonde

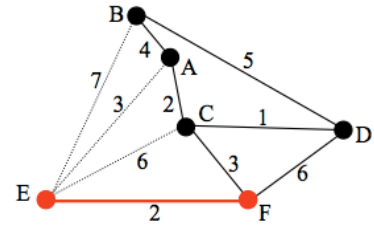


Links: Kies (vrij willekeurig) knoop **E**. In knoop E komen vier lijnen samen.

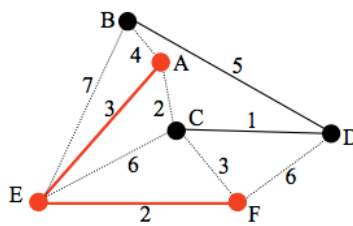
Rechts: Kies de lijn met het kleinste gewicht: EF.

Knoop **F** wordt toegevoegd.

Som gewichten: 2



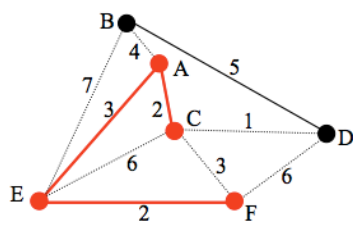
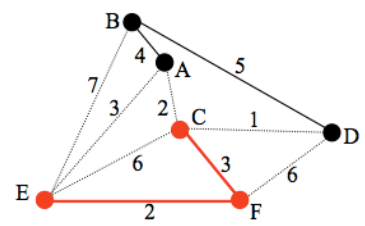
Bij de knopen E en F komen samen 5 lijnen aan. De lijnen met minimaal gewicht zijn AE en CF. Beide kunnen gekozen worden.



Links: Voeg AE toe met gewicht 3, Knoop **A**.

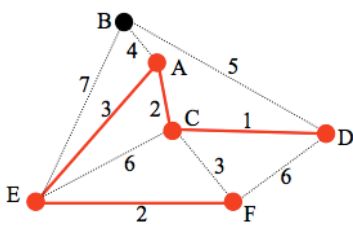
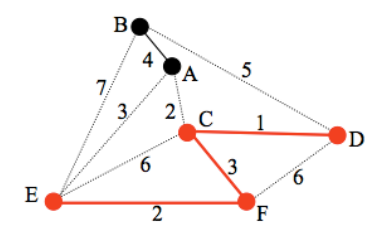
Rechts: Voeg CF toe met gewicht 3, Knoop **C**.

Som gewichten: $2+3 = 5$.



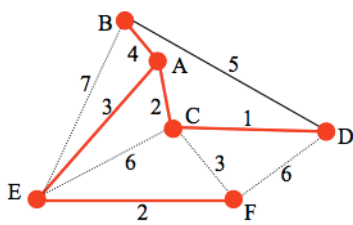
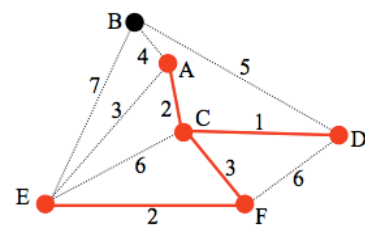
Links: Voeg AC toe met gewicht 2, Knoop **C**.

Rechts: Voeg CD toe met gewicht 1, Knoop **D**.



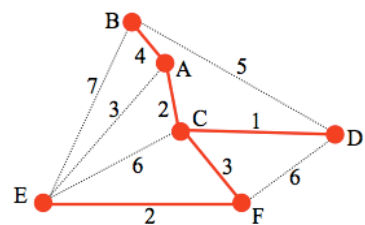
Links: Voeg CD toe met gewicht 1, Knoop **D**.

Rechts: Voeg AC toe met gewicht 2, Knoop **A**.



Links: Voeg AB toe met gewicht 4, Knoop **B**.

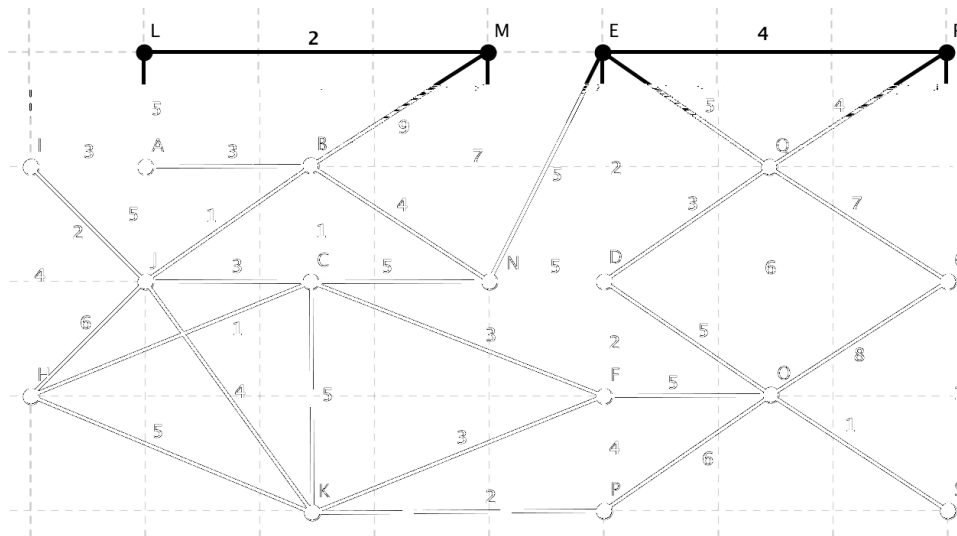
Rechts: Voeg AB toe met gewicht 4, Knoop **B**.



Uiteraard levert het algoritme van Prim de zelfde oplossingen (anders zou het geen correct algoritme zijn) als het algoritme van Kruskal. Het bewijs dat de beide algoritmes altijd de minimale opspannende boom leveren is niet heel eenvoudig en laten we hier achterwege.

23

Bepaal de minimale opspannende boom bij het onderstaande netwerk.



Kies het algoritme dat je het handigst lijkt.

24

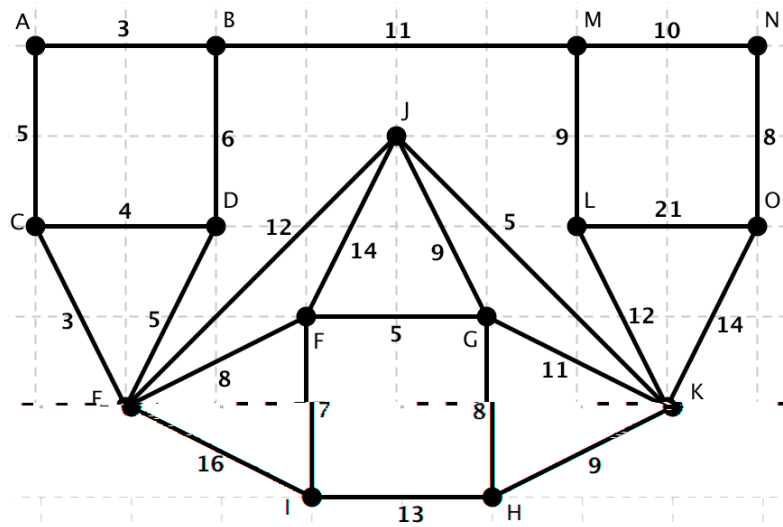
Er liggen acht kleine eilandjes in een meer, en de regering wil 7 bruggen bouwen om ze te verbinden, zodat ieder eiland bereikt kan worden vanuit ieder eiland via een of meer bruggen. De afstanden tussen ieder tweetal eilanden is gegeven in de tabel

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		24	21	34	28	20	35	12
2			27	18	22	18	19	16
3				26	12	35	44	20
4					16	33	30	23
5						36	40	17
6							18	21
7								31
8								

Welke bruggen moeten gebouwd worden om de kosten, die evenredig zijn met de lengte van de bruggen, te minimaliseren?

In de tekst is steeds sprake van een minimaal opspannende boom. Je kunt met kleine wijzigingen de algoritmes van Prim en Kruskal aanpassen zodat ze een *maximaal opspannende boom* leveren. Dat is een boom waarvan de som van de gewichten maximaal is.

25 Bepaal met behulp van de geïjgde algoritmes van Prim en Kruskal een minimaal opspannende boom voor het onderstaande netwerk:



26 Beschouw de onderstaande kostentabel voor het aanleggen van een netwerk tussen de knopen A, B, C, D, E en F.

	A	B	C	D	E	F
A	0	7	3	1	5	9
B	7	0	3	9	5	2
C	3	3	0	3	4	4
D	1	9	3	0	11	5
E	5	5	4	11	0	9
F	9	2	4	5	9	0

- Vindt de minimaal opspannende boom als je begint vanuit E met behulp van het algoritme van Prim.
- Vindt de minimaal opspannende boom als je begint vanuit A met behulp van het algoritme van Prim.
- Gebruik nu het algoritme van Kruskal om de minimale opspannende boom te vinden.

2.3 GRAFEN EN COALITIES

In de buurt van een rivier wordt een nieuwe gascentrale gebouwd die ook gas kan leveren aan drie verderop gelegen autonome regio's. Helaas zijn er nog geen leidingen naar de regio's. Die kunnen aangelegd worden maar daar hangt een behoorlijk prijskaartje aan:

600 miljoen Euro voor een gasleiding naar regio A, 400 miljoen naar B en 800 miljoen naar C. Het is ook mogelijk om van regio naar regio leidingen aan te leggen. De kosten daarvan (keer 100 miljoen) staan aangegeven in de onderstaande situatieschets. Alle aanlegkosten moeten door de regio's worden opgebracht.

27

Leg uit dat de totale minimale kosten 14 eenheden (1400 miljoen euro) bedragen. Wat is de minimale opspannende boom?

Als onafhankelijk adviseur zou je dus adviseren dat iedereen moet samenwerken en

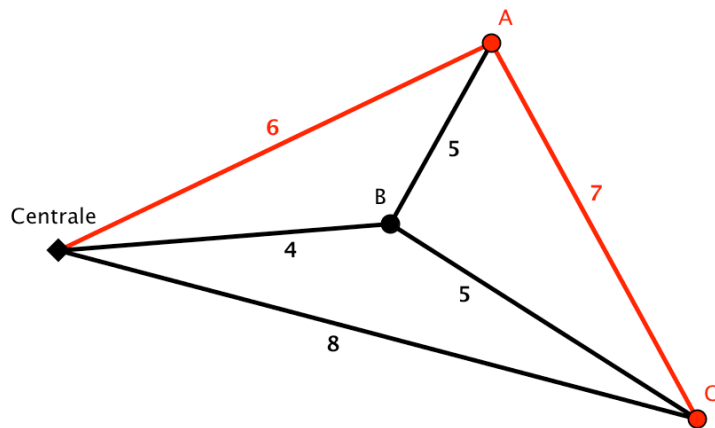


Het voorgaande leidt tot de volgende vraag: Hoe kunnen de regio s samen erken om kosten te besparen? En hoeveel ou een regio dan redelijker ijs aan de kosten van een ge amenlijk net erk moeten bijdragen?

Met de e (en soortgelijke) vragen ullen e ons in de rest van de e paragraaf be ig houden.

Allereerst een t eetal definities: regio s die samen erken noemen e in de iskunde *coalities*. Vaak spreken e in de iskunde over *spelers* in plaats van regio s.

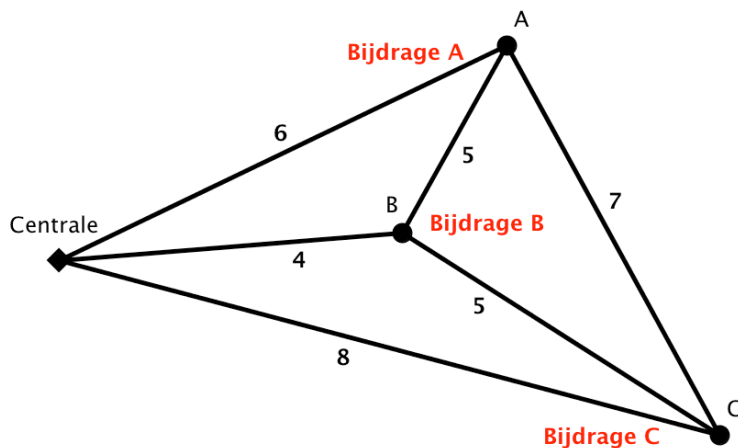
De spelers A en C kunnen bijvoorbeeld een coalitie vormen en voor $6 + 7 = 13$ eenheden (=1300 miljoen euro) orden aangesloten. Als A dan bijvoorbeeld 5,5 eenheden bijdraagt en C dus $13 - 5,5 = 7,5$ eenheden dan hebben beide regio s een voordeel van 0,5 eenheid en dat is 50 miljoen Euro. Niet mis!



29

Breng alle mogelijke coalities op een soortgelijke manier in kaart en vermeld per coalitie at de kosten voor de coalitie ijn en de kosten voor de overgebleven speler(s).

Omdat de belastingbetaler uiteindelijk de rekening betaalt ordt besloten dat de drie spelers toch samen een coalitie moeten vormen. De totale kosten ijn dus 14, maar e blijven itten met de vraag of er een goede verdeling van de e kosten bestaat. Als dat o is dan moet de bijdrage van B tussen de 0 en de 4 liggen (aarom?).



Om het probleem verder te anal seren voeren e drie variabelen in:

a is het aantal eenheden dat regio A bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC

b is het aantal eenheden dat regio B bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC

c is het aantal eenheden dat regio C bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC

Er geldt natuurlijk dat $a + b + c = 14$ ant de drie spelers moeten samen het net erk bekostigen.

Verder al geen enkele regio meer dan de directe aansluitkosten illen betalen. Dat levert de volgende voor aarden op: $0 \leq a \leq 6$, $0 \leq b \leq 4$, $0 \leq c \leq 8$

Ook al elke speler niet meer illen bijdragen dan dat er in een coalitie van 2 partijen moet orden betaald. Voor de coalitie AC houdt dat, oals eerder besproken, in dat $a + c \leq 13$. Voor de coalitie AB betekent dit: $a + b \leq 9$ En voor de coalitie BC: $b + c \leq 9$.

Al met al geldt nu voor de drie bijdragen het volgende stelsel van voor aarden:

$$\begin{cases} a + b + c = 14 \\ a \leq 6, b \leq 4, c \leq 8 \\ a + b \leq 9, a + c \leq 13, b + c \leq 9 \\ a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0 \end{cases}$$

De voor aarden ijn allemaal lineair: een lineaire gelijkheid en negen lineaire ongelijkheden. Daardoor lijkt dit probleem op de optimaliseringsproblemen uit hoofdstuk 1. Verschil is echter dat er nu geen doelfunctie is. Het minimaliseringsprobleem is al opgelost door het bepalen van de minimaal opspannende boom aaruit volgde dat $a + b + c = 14$. Maar net o goed als bij de optimaliseringsproblemen is er nu sprake van een beperkend gebied dat het aantal oplossingen beperkt.

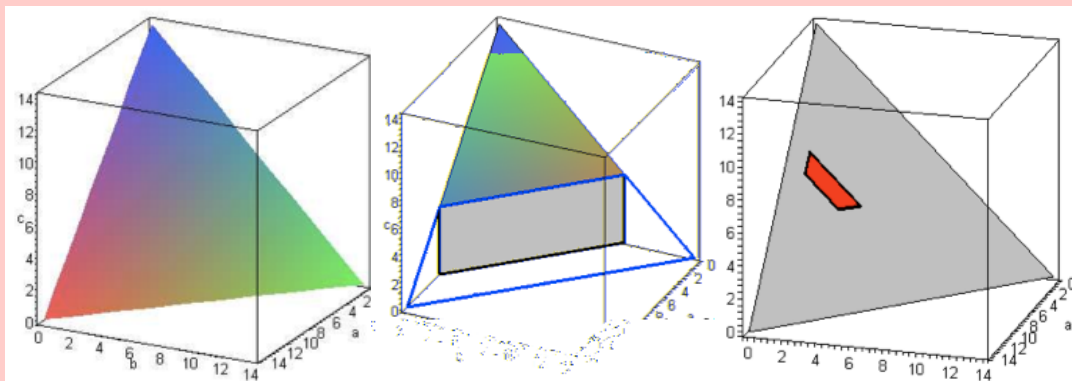
Informatief:

Omdat er 3 variabelen zijn kun je het gebied dat bij de voor aarden hoort schetsen met 3d-plaatjes. In het onderstaande linker plaatje zie je het vlak $a + b + c = 14$ in het eerste octant (dus $a, b, c \geq 0$).

De toegestane oplossingen liggen dus in een driehoek. De drie hoekpunten van die driehoek zijn $(14,0,0)$, $(0,14,0)$ en $(0,0,14)$.

In het middelste plaatje is de voor aarde $a + b \leq 9$ verwerkt. Het vlak $a + b = 9$ is een verticaal vlak dat het grondvlak snijdt in de lijn door $(9,0,0)$ en $(0,9,0)$. Dat vlak snijdt een gedeelte van de driehoek af. De driehoek die overblijft heeft als hoekpunten $(9,0,5)$, $(0,9,5)$ en $(0,0,14)$.

Als je doorgaat wordt elke voor aarde er voor dat een stuk van de driehoek wordt afgesneden. In het rechter plaatje zie je het gebied dat overblijft na verwerking van alle voor aarden. Het is een vierhoek op het vlak $a + b + c = 14$.



Met een truc kun je het gebied ook tweedimensionaal in beeld brengen, in een xy -assenstelsel. Uit $a + b + c = 14$ volgt dat $c = 14 - a - b$.

In de ongelijkheid $b + c \leq 9$ kunnen we nu voor c : $14 - a - b$ **substitueren** (vervangen)

$$\text{en we krijgen dan: } \begin{cases} a + b \leq 9 \Leftrightarrow \\ a + (14 - a - b) \leq 9 \Leftrightarrow \\ 14 - b \leq 9 \Leftrightarrow \\ -b \leq -5 \Leftrightarrow \\ b \geq 5 \end{cases}$$

We zeggen dat we c uit de ongelijkheid $b + c \leq 9$ hebben **geëlimineerd** (verijderd). De ongelijkheid $b + c \leq 9$ is daarbij overgegaan in de ongelijkheid $a \geq 5$.

- 30 a** Laat zien dat door substitutie van $c = 14 - a - b$ in alle voorwaarden van het stelsel op pagina 23, dit stelsel overgaat in:

$$\begin{cases} a+b \geq 6, & a+b \leq 14, & a+b \leq 9 \\ a \geq 5, & a \geq 0, & a \leq 6 \\ b \geq 0, & b \geq 1, & b \leq 4 \end{cases}$$

- b** Teken het toegestane gebied.
- c** Laat zien dat voor P van de hoekpunten P van het toegestane gebied geldt dat $P=(5, 1)$ en dat hier $a=5$, $b=1$ en dat $c=8$.
- d** Vul de onderstaande tabel voor de andere hoekpunten Q , R en S in.
- e** Laat zien dat $M=(a; b; c)=(5,50; 2,75; 5,75)$ een punt is van het toegestane gebied en vul ook voor M de onderstaande tabel in.

	Bijdrage speler	Absoluut voordeel (100 miljoen)	Relatief voordeel
Punt P	Regio A, $a=5$	1	16,7%
	Regio B, $b=1$	3	75%
	Regio C, $c=8$	0	0%
Punt Q	Regio A, $a=$	—	—
	Regio B, $b=$	—	—
	Regio C, $c=$	—	—
Punt R	Regio A, $a=$	—	—
	Regio B, $b=$	—	—
	Regio C, $c=$	—	—
Punt S	Regio A, $a=$	—	—
	Regio B, $b=$	—	—
	Regio C, $c=$	—	—
Punt M	Regio A, $a=$	—	—
	Regio B, $b=$	—	—
	Regio C, $c=$	—	—

Samenvattend (en controleer de e be eringen):

Regio A al redelijker ijs minimaal 5 en ma imaal 6 eenheden moeten bijdragen, Regio B minimaal 1 en ma imaal 4 en regio C minimaal 5 en ma imaal 8.

In de hoekpunten P, Q, R en S is er steeds een regio die geen voordeel uit de coalitie boekt. De regio in k estie kan dus net o goed niet meedoen.

Als neutrale buitenstaander ou je nu allerlei voorstellen kunnen doen. Zo levert het punt M aan ienlijke besparingen voor elke regio op. Uiteraard kun je ook allerlei andere verdelingen bedenken binnen het gebied PQRS. De iskunde heeft in ieder geval de redelijke gren en voor elke regio vastgesteld en ijn taak volbracht.

In dit voorbeeld heb je ge ien hoe grafentheorie en onderdelen van optimaliseren bij elkaar komen. Bij meer dan drie spelers is het bepalen van minimale opspannende bomen nog altijd geen probleem. Met de algoritmes van Prim of Kruskal gaat dat snel. Het aantal voor aarden stijgt echter behoorlijk omdat er steeds meer coalities mogelijk ijn. Bovendien kun je dan je dan niet meer met een plaatje snel het toegelaten gebied in beeld brengen.

2.4 EXTRA OPGAVEN

31 a Bepaal hoeveel coalities er mogelijk ijn met 4, 5 en 6 spelers.

b Hoeveel coalities ijn er mogelijk met n spelers?

32 (Vervolg op opgave 30)

a Is het mogelijk om aarden van a , b en c te bepalen odanig dat elke speler het elfde absolute voordeel heeft (met andere oorden: voldoet die oplossingen aan alle voor aarden)?

De aansluitkosten van A naar C bedragen 7 eenheden. Als de aansluitkosten voor de leiding van A naar C groter orden dan blijft de minimale opspannende boom gelijk. Het toegelaten gebied verandert echter.

b Teken het nieu e toegelaten gebied als de kosten 7,5 ijn.

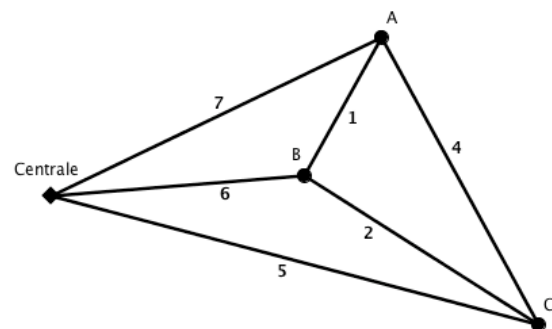
c Hoe verandert het toegelaten gebied bij toenemende kosten?

Als de aansluitkosten van A naar C kleiner worden dan is het mogelijk dat een andere minimale opspannende boom voor de coalitie van drie spelers ontstaat. AC vervangt dan AB of BC in de boom.

- d Bij elke gericht van lijn AC ontstaat er een andere minimale opspannende boom?
- e Bepaal alle voorwaarden en teken het toegestane gebied als lijn AC gericht 4 heeft.
- f Bereken de absolute en de relatieve winst in de hoekpunten van het nieuwe toegelaten gebied.

33

Hiernaast zie je, net als bij ons basisprobleem, een graaf met aanlegkosten van de leidingen. Stel bij de graaf alle voorwaarden op, teken het toegelaten gebied en analyseer absolute en relatieve winst (tov directe kosten) in de hoekpunten van het toegelaten gebied.



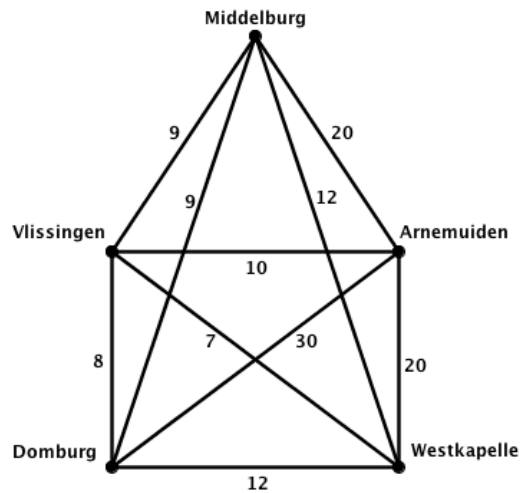
34

Aan het eind van de jaren tachtig is de tijd daarop Nederland televisie ontvangt drastisch veranderd. De klassieke antenne is vervangen door de kabel. Overal in het land verschenen kabelcentrales. Vanuit een kabelcentrale worden de ontvangen signalen (per kabel) naar de omliggende steden geleid.



Beslisk nde

In de e opgave kijken e naar de kabelcentrale Middelburg en vier omliggende steden, te eten Arnemuiden, Domburg, Vlissingen en Westkapelle. De onderstaande figuur geeft schematisch de plaatsen eer en voor ieder t eetal plaatsen de kosten (in miljoenen euro s) voor het aanleggen van een kabelverbinding tussen de e plaatsen.



- a Bereideneer dat de coalitie bestaande uit de spelers Vlissingen, Domburg en Westkapelle een net erk kan laten aanleggen voor 24 miljoen euro.
- b Bepaal voor elke coalitie (van meer dan een speler) de minimale kosten van het net erk dat e ge amenlijk kunnen aanleggen.
- c Als alle spelers samen erken ijn de aanlegkosten minimaal. Om elke kosten gaat het dan?

Noem v de bijdrage van Vlissingen, a de bijdrage van Arnemuiden, en .

Er geldt: $0 \leq v \leq 9$, $0 \leq a \leq 20$, $0 \leq d \leq 9$, $0 \leq w \leq 12$

- d Stel alle andere voor aarden op.
- e Geef een oplossing die aan alle voor aarden voldoet en bereken de inst t.o.v. de directe aansluitkosten van elke speler.
- f Kun je een oplossing vinden aarbij elke partij voordeel heeft?

3 Koppelen

3.1 BASISPROBLEEM



Over de Hongaarse methode

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

Een groot bouw bedrijf heeft vier hijskranen, verspreid over vier machineparken. Toevallig zijn er ook vier nieuwe bouw locaties waar men een hijskraan nodig heeft. Het transport van een hijskraan is een kostbare zaak. In de tabel zie je de afstand in kilometers tussen de vier bouw locaties en de machineparken.

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Hijskraan 1	55	50	17	48
Hijskraan 2	34	31	31	34
Hijskraan 3	57	55	21	45
Hijskraan 4	55	48	20	42

De vraag is nu welke hijskraan je naar elke bouw locatie moet vervoeren als je de totale transportafstand wilt minimaliseren.

35

- Op hoeveel manieren kun je in bovenstaand voorbeeld de 4 hijskranen aan de 4 bouw locaties toewijzen?
- Op hoeveel manieren kun je 6 hijskranen aan 6 bouw locaties toewijzen?
- Op hoeveel manieren kun je n hijskranen aan n bouw locaties toewijzen?

3.2 EEN ANALYSE VAN HET PROBLEEM

Het probleem houdt in dat je precies vier koppelingen moet leggen tussen de vier hijskranen en de vier bouwlocaties. De som van de *gewichten* moet daarbij minimaal zijn. Je zoekt dus een minimale koppeling tussen de hijskranen en de bouwlocaties en daarom noemt men dit type probleem ook wel een koppelingsprobleem.

In de tabel hiernaast zijn vrij willekeurig vier koppelingen gekozen. Het totaal aantal transportkilometers is bij de eerste keuze $55 + 34 + 57 + 55 = 201$ kilometer.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

Je ziet dat in elke rij en in elke kolom precies één getal is geselecteerd. Dat gegeven is kenmerkend voor een koppeling.

De vraag is nu of het nog goedkoper kan? In principe is dat geen moeilijk probleem. In opgave 1 heb je gezien dat er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschillende koppelingen mogelijk zijn. Je kunt dus in principe de 24 verschillende koppelingen allemaal opschrijven en steeds het totaal aantal kilometers bepalen.

Hiernaast zie je een viertal andere koppelingen:

In de koppeling linksonder is 147 kilometer transport nodig, een behoorlijke verbetering t.o.v. de eerste koppeling. Toch hoeft die koppeling niet de *optimale toewijzing* te zijn. Er zijn immers nog 19 andere koppelingen mogelijk en deze moeten ook berekend worden. De meest eenvoudige manier is daarom ook een vrij tijdsintensieve manier.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
H4	55	48	20	42

Daarnaast hebben e in opgave 35 ge ien dat het aantal koppelingen met het toenemen van het aantal hijskranen snel erg groot ordt. De e methode is dus niet handig. Er is een effici ntere methode, de ogenaamde *Hongaarse methode*, die e gaan bespreken.



3.3 DE HONGAARSE METHODE

- 36**
- Bepaal de som van de ge ichten van de vijf koppelingen uit paragraaf 3.2.
 - Wat gebeurt er met de e som als hijskraan 1 in een machinepark ou staan dat 9 kilometer dichterbij alle bou locaties gelegen is?
 - En at gebeurt er met de e som als bou locatie 2 op een plaats 7 kilometer verder van alle machineparken af ligt?
 - Verandert de optimale toe ij ing als e in tabel I in kolom 2 overal 7 optellen? En als e in rij 1 overal 9 aftrekken? Licht je ant oord toe.

In opgave 36 hebben e ontdekt dat het probleem niet verandert als alle elementen van een kolom (of van een rij) met het elfde getal orden verminderd (of verhoogd).

We kunnen dit principe gebruiken om een eenvoudigere (*gereduceerde*) tabel te maken. Na het verhogen en verminderen van sommige rijen en kolommen, krijgen e de tabel hiernaast (hoe e de e tabel hebben verkregen, ordt later uitgelegd).

	L1	L2	L3	L4
H1	5	3	0	7
H2	0	0	30	9
H3	3	4	0	0
H4	4	0	2	0

- 37**
- Uit de e gereduceerde tabel volgt dat er maar n optimale toe ij ing is, namelijk (H1, L3), (H2, L1), (H3, L4) en (H4, L2).
- Leg toe aarom dit de enige optimale toe ij ing is.
 - Bereken m.b.v. de originele tabel hoeveel kilometers dan in totaal ordt afgelegd.

De gereduceerde tabel is verkregen door gebruik te maken van de Hongaarse methode. Het stappenplan van de e methode is als volgt:

De Hongaarse methode

Stap 0. We starten met een tabel met n rijen en n kolommen.

Vind in elke rij van de tabel het minimale element en verminder de hele rij met dit getal. Vind vervolgens (in de nieuwe tabel) voor elke kolom het minimale element en verminder de hele kolom met dit getal. Ga naar stap 1.

Stap 1. Bekijk of het mogelijk is in de nieuwe tabel een toewijzing te vinden met 0 kosten. Als dit mogelijk is hebben we een optimale toewijzing gevonden en kunnen we stoppen. Als dit niet mogelijk is dan kunnen we alle nullen in de nieuwe tabel bedekken met minder dan n lijnen (horizontaal en verticaal). Trek de lijnen en ga naar stap 2.

Stap 2. Bepaal het kleinste getal dat nog niet bedekt is door een lijn en trek dat getal af van elk getal dat nog niet bedekt is door een horizontale of verticale lijn en tel het op bij elk getal dat bedekt is door twee lijnen. Ga terug naar stap 1.

Als we dit uitwerken aan de hand van ons basisprobleem dan ziet het er als volgt uit:

Stap 0: Eerst alle rijen en vervolgens alle kolommen met het minimum verminderd:

	L1	L2	L3	L4
H1	38	33	0	31
H2	3	0	0	3
H3	36	34	0	24
H4	35	28	0	22

	L1	L2	L3	L4
H1	35	33	0	28
H2	0	0	0	0
H3	33	34	0	21
H4	32	28	0	19

Stap 1: het is niet mogelijk om in de nieuwe tabel een toewijzing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met twee lijnen:

	L1	L2	L3	L4
H1	35	33	0	28
H2	0	0	0	0
H3	33	34	0	21
H4	32	28	0	19

	L1	L2	L3	L4
H1	16	14	0	9
H2	0	0	19	0
H3	14	15	0	2
H4	13	9	0	0

Stap 2a:

We verminderen alle onbedekte elementen met 19 en verhogen het t eemaal bedekte element met 19.

	L1	L2	L3	L4
H1	16	14	0	9
H2	0	0	19	0
H3	14	15	0	2
H4	13	9	0	0

Stap 1:

Het is niet mogelijk om in de nieuwe tabel een toewijzing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met drie lijnen.

	L1	L2	L3	L4
H1	7	5	0	9
H2	0	0	28	9
H3	5	6	0	2
H4	4	0	0	0

Stap 2b:

We verminderen alle onbedekte elementen met 9 en verhogen de t eemaal bedekte elementen met 9.

	L1	L2	L3	L4
H1	7	5	0	9
H2	0	0	28	9
H3	5	6	0	2
H4	4	0	0	0

Stap 1:

Het is nog steeds niet mogelijk om in de nieuwe tabel een toewijzing te vinden met 0 kosten. We bedekken alle nullen in de tabel met drie lijnen.

	L1	L2	L3	L4
H1	5	3	0	7
H2	0	0	30	9
H3	3	4	0	0
H4	4	0	2	0

Stap 2c:

We verminderen alle onbedekte elementen met 2 en verhogen de t eemaal bedekte elementen met 2.

We hebben nu een toewijzing met 0 kosten (zoals we eerder hebben gezien). De optimale toewijzing is in de bovenstaande tabel aangegeven en hebben we hiervoor al besproken.

38

Kijk naar stap 2a hierboven. Ligt toe waarom de e stap geen invloed heeft op de optimale toewijzing.

- 39** Een machinebedrijf heeft 4 machines beschikbaar voor vier opdrachten. Elke machine kan hoogstens n opdracht uitvoeren. De kosten van een opdracht, uitgevoerd door een bepaalde machine, ijn te vinden in onderstaande tabel:

	Opdracht 1	Opdracht 2	Opdracht 3	Opdracht 4
Machine 1	90	75	75	90
Machine 2	35	85	55	65
Machine 3	135	95	90	105
Machine 4	45	110	95	115

Wat is de goedkoopste manier om de opdrachten toe i j en aan de machines?

- 40 a** Gebruik de Hongaarse methode om een optimale toe i j ing voor de volgende kostenmatri te vinden:

	A	B	C
X	1	2	3
Y	4	5	6
Z	7	8	9

- b** Wat valt je op?

3.4 VARIANTEN VAN DE HONGAARSE METHODE

Maximalisatie

In de onderstaande tabel staan de gemiddelde dagverkoopcijfers van vijf erknemers erk aam in een groot arenhuis voor vijf verschillende producten. Het probleem van de erkgever ligt voor de hand: hoe koppel je de erknemers aan de producten odanig dat de totale dagopbrengst ma imaal is?



	Product 1	Product 2	Product 3	Product 4	Product 5
Werknemer 1	30	70	50	60	50
Werknemer 2	45	80	65	60	70
Werknemer 3	40	65	70	65	80
Werknemer 4	60	70	75	55	75
Werknemer 5	55	65	60	70	80

Bij dit koppelingsprobleem moet je vijf werknemers koppelen aan vijf producten en dat kan op $5! = 120$ manieren. Teveel mogelijkheden om een voor een na te lopen. De Hongaarse methode moet dus uitkomst bieden. Die methode werkt echter alleen voor het bepalen van een minimum. Met een truc kun je echter ervoor zorgen dat het zoeken naar een maximum neerkomt op het zoeken van een minimum.

Daarvoor vermenigvuldigen we alle getallen in de tabel met -1 . De vijf getallen uit de oorspronkelijke tabel die samen de maximale som geven hebben dan de vijfde positie als de vijf negatieve getallen die de minimale som geven in de aangepaste tabel. De aangepaste tabel ziet er als volgt uit:

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	-30	-70	-50	-60	-50
W2	-45	-80	-65	-60	-70
W3	-40	-65	-70	-65	-80
W4	-60	-70	-75	-55	-75
W5	-55	-65	-60	-70	-80

Op deze manier staan er nu alleen negatieve getallen in de tabel. Het kleinste getal in de tabel is -80 . Als je nu 80 bij elk getal optelt heb je weer te maken met niet-negatieve getallen. Die tabel ziet er als volgt uit:

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	50	10	30	20	30
W2	35	0	15	20	10
W3	40	15	10	15	0
W4	20	10	5	25	5
W5	25	15	20	10	0

- 41**
- a** Pas op de aangepaste tabel de Hongaarse methode toe en bepaal wat de maximale dagopbrengst is. Bedenk daarbij dat je, om de maximale dagopbrengst te bepalen, de waarden uit de oorspronkelijke tabel moet aflezen.
- b** Hoeveel optimale toewijzingen zijn mogelijk?

Dummy-rij

Stel dat in het basisprobleem waarmee dit hoofdstuk begonnen hijskraan 4 defect is. We krijgen dan de tabel hiernaast.

Het aantal rijen is nu kleiner dan het aantal kolommen en daarom werkt de Hongaarse methode niet.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45

Daarom voegen we een dummy-rij toe en we krijgen dan de volgende, aangepaste tabel.

Hd staat daarbij voor dummy hijskraan. Dit betekent dat de dummy hijskraan niet gebruikt zal worden.

	L1	L2	L3	L4
H1	55	50	17	48
H2	34	31	31	34
H3	57	55	21	45
Hd	0	0	0	0

- 42**
- a** Pas op de aangepaste tabel de Hongaarse methode toe en bepaal de optimale toewijzing. Wat is het totaal aantal kilometers dat wordt afgelegd?
- b** Welke locatie wordt niet voorzien van een hijskraan?

Verboden karweitjes

43

In een bedrijfshal kunnen vijf kar eitjes op vijf verschillende machines worden uitgevoerd. In de tabel hieronder staan de kosten van het uitvoeren van een kar ei op een bepaalde machine. Het oneindigheidssteken ∞ in het schema geeft aan dat dat kar eitje niet op die machine kan worden uitgevoerd. Dat teken is gekozen omdat het uitvoeren van dat kar ei op die machine bij ij e van spreken oneindig veel tijd kost.

	Kar ei 1	Kar ei 2	Kar ei 3	Kar ei 4	Kar ei 5
Machine 1	∞	8	6	12	1
Machine 2	15	12	7	∞	10
Machine 3	10	∞	5	14	∞
Machine 4	12	∞	12	16	15
Machine 5	18	17	14	∞	13

Hoe moet je de kar eitjes aan de machines koppelen als de totale kosten minimaal moeten ij n? (Tip: gebruik ge oon de Hongaarse methode en bedenk daarbij dat oneindig min een vast getal ge oon oneindig blijft). Wat ij n de totale kosten?

3.5 EXTRA OPGAVEN

44

Ook combinaties van varianten ij n mogelijk: Vijf personen moeten vier opdrachten uitvoeren. De tijd die een persoon nodig heeft om een bepaalde opdracht uit te voeren is te vinden in de tabel hiernaast. Een geeft aan dat de persoon die opdracht niet kan uitvoeren.

	O1	O2	O3	O4
P1	22	18	30	18
P2	18	-	27	22
P3	26	20	28	28
P4	16	22	-	14
P5	21	-	25	28

- a Bepaal de toe ij ng van opdrachten aan personen odat de totale tijd voor het uitvoeren van de vier opdrachten minimaal is.
- b Welke persoon heeft geluk?

45

Hiernaast zie je een tabel waarin de afstanden tussen drie hijskranen en drie bouwlocaties staan. Net zoals in het basisprobleem moet precies één hijskraan naar één locatie worden getransporteerd.

- a Hoeveel verschillende koppelingen zijn er mogelijk?
- b Bepaal bij iedere koppeling het totaal aantal kilometers dat de drie hijskranen moeten afleggen.
- c Welke koppelingen zijn het gunstigst wat betreft de afgelegde kilometers?
- d Bepaal de optimale koppeling ook met de Hongaarse methode.

46

Bij de estafette 4 keer 50 meter visselslag emmen zijn er vier onderdelen die door vier verschillende emmers moeten worden gedommen. Hieronder zie je de persoonlijke records van elke emmer op elk onderdeel -0.2 (ke). 2 (r) 0 ec -0.2 (ke)nd -0.2 (ke).. -0.2 (rs)

47

De coach van een baseballteam wil een optimale opstelling bedenken voor zijn team dat bestaat uit 9 spelers. Op grond van de eerder geleverde prestaties op de training heeft hij aan iedere speler een rangnummer tussen 0 en 26 toegekend voor elk van de negen posities. Hoe hoger het rangnummer, hoe beter die speler op die positie uit de voeten kan. In de tabel hieronder zie je zijn beoordelingen:



	Jan	Andr	Ab	Hans	Bert	Camiel	Ma	Piet	Ernst
Pitcher	20	15	10	10	17	23	25	5	15
Catcher	10	10	12	15	9	7	8	7	8
First baseman	12	9	9	10	10	5	7	13	9
Second baseman	13	14	10	15	15	5	8	20	10
Third baseman	12	13	10	15	14	5	9	20	10
Shortstop	15	14	15	16	15	5	10	20	10
Outfielder 1	7	9	12	12	7	6	7	15	12
Outfielder 2	5	6	8	8	5	4	5	10	7
Outfielder 3	5	6	8	8	5	4	5	10	7

- a Hoe moet de coach zijn team samenstellen? Pas op, de beantwoording van deze vragen vraagt veel stappen, dus werk secuur. Als alternatief kun je opgave 47b maken.
- b Zoek op internet naar een programma waarmee je de optimale toewijzing automatisch kunt laten uitrekenen. Welke toewijzing geeft dit programma?

48

Een bedrijf heeft vijf machines en produceert vijf producten. De kosten voor het produceren van een product op een bepaalde machine zijn eergegeven in de tabel hiernaast:

	P1	P2	P3	P4	P5
M1		9	8	2	7
M2	3	9	2	8	5
M3	5	3	5	7	7
M4	8	4	5	4	5
M5	5	9	9	4	3

- a Neem $x = 6$. Wat is een optimale toewijzing van de producten aan de machines die de totale kosten minimaliseert? Wat zijn dan de kosten?
- b Stel machine M1 moet product P1 produceren. Wat is een optimale toewijzing van de andere producten? Wat zijn daarbij de totale kosten, als functie van x ?
- c Wat is de maximale waarde van x zodat in een optimale toewijzing (onder restricties) machine M1 product P1 produceert?

4 Macht

4.1 BASISPROBLEEM



Maar nu eens Niet over exponenten en grondtallen

Aan de hand van het volgende probleem wordt een deel van de basistheorie uitgelegd.

De mede eggenchapsraad van een school bestaat uit tien personen: de directeur van de school, vier docenten, drie leerlingen en t ee ouders. In de raad is afgesproken dat een voorstel ordt aangenomen als meer dan vijf personen ervoor ijn.

Wie heeft nu eigenlijk de meeste macht? Als de verschillende groepen allemaal het elfde stemmen, hebben de docenten dan t ee keer oveel macht als de ouders? En at is eigenlijk de macht van de directeur?

Aan de hand van dit basisprobleem gaan e de theorie uitleggen. Daarnaast ga je onder oek doen naar de machtsverhoudingen in de Nederlandse politiek.

4.2 DEFINITIES

Laten e allereerst aan de hand van het basisprobleem enkele definities geven: Bij veel k esties stemmen groepen (docenten, ouders, en .) het elfde. Ze stemmen allemaal voor of allemaal tegen. We noemen on groep een blok. In de speltheorie noem je on blok een *speler*. Een speler kan dus uit meerdere personen bestaan. En omdat een speler uit meerdere personen kan bestaan hebben spelers niet allemaal het elfde aantal stemmen.

49 a Hoeveel spelers zijn er in de mede-eigenschapsraad? En hoeveel stemmen heeft iedere speler?

b Gebruik internet om uit te zoeken hoeveel spelers (politieke partijen, fracties) er in de Tweede Kamer zitten en hoeveel stemmen ieder van die spelers heeft.

c En hoe is dat in de Eerste Kamer?

In de mede-eigenschapsraad is afgesproken dat een voorstel wordt aangenomen bij meerderheid van stemmen. Zes stemmen zijn dus genoeg om een voorstel aan te nemen. Dat getal heet het *quotum*. Het quotum is het minimaal aantal stemmen dat nodig is om een voorstel aangenomen te krijgen. Het aantal stemmen kun je zien als het *gewicht* van de speler.

Het kiesstelsel van de mede-eigenschapsraad wordt dus door vijf getallen vastgelegd. Het quotum en de vier gewichten van de spelers. In de besliskunde wordt daarvoor dan de verkorte notatie [6; 4, 3, 2, 1] gebruikt. De getallen staan tussen rechte haken en worden gescheiden door een puntkomma en daarachter door komma's. Voor de puntkomma staat het quotum en achter de puntkomma staan de gewichten van de spelers.

50 a Geef op dezelfde manier de gegevens van de Tweede Kamer weer.

b Doe dat ook voor de Eerste Kamer.

Hoe zit het nu met de macht in de mede-eigenschapsraad? Welke speler kan het meest bepalen wat er besloten wordt? In de situatie van de mede-eigenschapsraad geldt [6; 4, 3, 2, 1].

Geen enkele speler heeft 6 of meer stemmen en haalt op eigen kracht het quotum. Dat wil zeggen dat geen enkele speler *dictator* is. Als dat het geval is dan heeft die speler de absolute macht. In de besliskunde ken je aan een dictator dan het getal 1 toe en aan alle andere spelers het getal 0. Die spelers kunnen namelijk nooit een voorstel aangenomen krijgen onder dat die dictator instemt. Een getal dat je toekent aan de macht van een speler heet een *machtsindex*. Het is een getal groter dan of gelijk aan nul en kleiner dan of gelijk aan 1.

51 In het Huis van Afgevaardigden in Amerika zitten 435 stemgerechtigde leden. Op enig moment waren dat 242 Republikeinen en 193 Democraten.

a Beschrijf de situatie (in termen van [.....]) en geef gewichten voor iedere speler.

b Geef twee redenen waarom in Amerika toch niet één speler alle macht heeft.

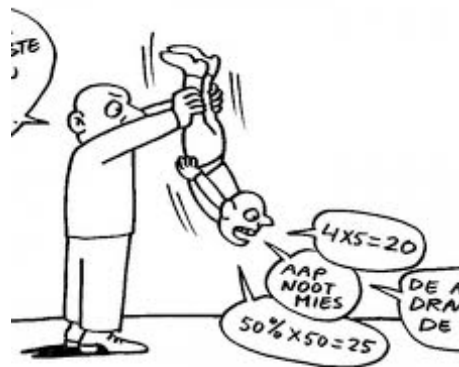
Als het gaat om macht dan zegt de verhouding van de getichten niet zoveel. De machtsindices in een democratie met twee partijen waarbij de verkiezingen geleid hebben tot [150; 76, 74] zijn 1 en 0 (waarom?).

De partij met 76 stemmen heeft absolute macht gekregen.

Je mag dus ook niet ondermeer zeggen dat in de medebeslissingsraad de docenten vier keer zoveel macht hebben als de directeur omdat het geticht vier zo groot is. Wel is duidelijk dat de directeur de minste macht moet hebben. Met één stem kan hij niet veel invloed uitoefenen. Sterker nog, ook samen met een andere speler haalt hij geen meerderheid. De ouders (speler 3) hebben meer macht dan de directeur, zij kunnen namelijk op meer manieren een voorstel aangenomen krijgen. Dat lukt

In de volgende tabel staan nogmaals de innende coalities maar dit keer zijn de niet-kritieke spelers grijs gemaakt.

Winnende coalities	Aantal stemmen
1, 2	7
1, 3	6
1, 2, 3	9
1, 2, 4	8
1, 3, 4	7
2, 3, 4	6
1, 2, 3, 4	10



In het schema is 12 keer een speler niet grijs gemaakt.

De directeur is in dit schema nog maar 1 van de 12 keer te ien.

De ouders en de leerlingen zijn 3 van de 12 keer te ien en de docenten zijn 5 van de 12 keer te ien.

4.3 DE MACHTSINDEX VAN BANZHAF

Definitie (machtsindex van Banzhaf)

De machtsinde van een speler is de verhouding tussen het aantal keren dat een speler kritiek is en het totaal aantal keren dat alle spelers samen kritiek zijn.

Op die manier is de som van de indices gelijk aan 1, een mooie eigenschap die snel de onderlinge machtsverhoudingen laat ien. De resultaten zijn:

Speler	Machtsindex van Banzhaf
1) Docenten	$\frac{5}{12} \approx 0,417$
2) Leerlingen	$\frac{3}{12} \approx 0,25$
3) Ouders	$\frac{3}{12} \approx 0,25$
4) Directeur	$\frac{1}{12} \approx 0,083$

52 Bij een kleine verandering van de getallen of bij een geheime coalitie kunnen de machtindices behoorlijk veranderen. Stel dat de directeur altijd het elfde stemt als de ouders.

In feite zijn er dan nog maar drie spelers.

- a Beschrijf de situatie ([...]).
- b Bepaal de machtsindex van Ban Haf voor iedere speler.

53 Een bedrijf heeft 4 aandeelhouders, A, B, C en D. A, B en C hebben ieder 26% van de aandelen en D heeft de resterende 22%.

- a Bepaal de innende coalities.
- b Bepaal de machtsindex van Ban Haf voor iedere speler.

54 In de Tweede Kamer is op enig moment sprake van 10 spelers. Als de er van uit gaan dat iedere speler voor of tegen kan stemmen, hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er dan?

Je begrijpt uit het bovenstaande dat het niet zomaar even mogelijk is om voor de spelers uit de Tweede Kamer de machtsindices te bepalen. Gelukkig is voor het bepalen van al die coalities en voor het berekenen van de index van Ban Haf geschikte software ontwikkeld waarin je alleen de gegevens en het quorum hoeft in te voeren. Een geschikte site is bijvoorbeeld: <http://www.math.temple.edu/~co/bpi.html>

- 55** a Bepaal voor de spelers uit de Tweede Kamer de machtsindex van Ban Haf.
- b Doe datzelfde voor de spelers uit de Eerste Kamer.

56 In Nederland bestaat een regering (bijna) altijd uit een combinatie van partijen. De combinatie wordt gevormd dat de een in de Tweede Kamer het dictatorschap heeft. Feitelijk kun je zeggen dat de combinatie in zowat de Eerste Kamer als de Tweede Kamer één speler vormt.

- a Bepaal voor de ene situatie opnieuw de machtsindices van Ban Haf voor de spelers in de Eerste en Tweede Kamer.
- b Is de ene combinatie ook in de Eerste Kamer op te vatten als een dictator?

Informatief:

De machtsinde van Ban haf is door John F. Ban haf in 1965 bedacht toen hij het stemgedrag anal seerde in onder andere het Amerikaanse verkie ingss steem.



4.4 DE MACHTSINDEX VAN SHAPLEY-SHUBIK

Later ijn er meer machtsindices bedacht en een van de bekendste en meest gebruikte naast de inde van Ban haf is de machtsinde van Llo d Shaple en Martin Shubik.

Shaple en Shubik gaan uit van alle mogelijke volgordes van stemmen aarin alle spelers om de beurt v r stemmen. Zo n volgorde ordt een sequential coalition genoemd.



Lloyd Shapley

Martin Shubik

In het voorbeeld van de mede eggenchapsraad - [6; 4, 3, 2, 1] - ijn er 24 mogelijke volgordes, je kunt immers vier spelers op $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ manieren in een rij etten.

In de tabel hiernaast zie je in de eerste kolom de 24 rijtjes.

In de kolom ernaast zie je de groei van het aantal stemmen in de coalitie als een speler in de coalitie deelneemt.

Bij elke rij wordt ergens het quotum van 6 overschreden. Dat getal is rood gemaakt. De speler waarbij dat gebeurt heet de spilspeler of as speler.

Sequential coalition	Toename aantal stemmen
1, 2, 3, 4	4 → 7 → 9 → 10
1, 2, 4, 3	4 → 7 → 8 → 10
1, 3, 2, 4	4 → 6 → 9 → 10
1, 3, 4, 2	4 → 6 → 7 → 10
1, 4, 2, 3	4 → 5 → 8 → 10
1, 4, 3, 2	4 → 5 → 7 → 10
2, 1, 3, 4	3 → 7 → 9 → 10
2, 1, 4, 3	3 → 7 → 8 → 10
2, 3, 1, 4	3 → 5 → 9 → 10
2, 3, 4, 1	3 → 5 → 6 → 10
2, 4, 1, 3	3 → 4 → 8 → 10
2, 4, 3, 1	3 → 4 → 6 → 10
3, 1, 2, 4	2 → 6 → 9 → 10
3, 1, 4, 2	2 → 6 → 7 → 10
3, 2, 1, 4	2 → 5 → 9 → 10
3, 2, 4, 1	2 → 5 → 6 → 10
3, 4, 1, 2	2 → 3 → 7 → 10
3, 4, 2, 1	2 → 3 → 6 → 10
4, 1, 2, 3	1 → 5 → 8 → 10
4, 1, 3, 2	1 → 5 → 7 → 10
4, 2, 1, 3	1 → 4 → 8 → 10
4, 2, 3, 1	1 → 4 → 6 → 10
4, 3, 1, 2	1 → 3 → 7 → 10
4, 3, 2, 1	1 → 3 → 6 → 10

Definitie (machtsindex van Shapley-Shubik)

De machtsindex van een speler is de verhouding tussen het aantal keren dat de speler spilspeler is en het totaal aantal sequential coalitions.

Deze definitie leidt tot de volgende resultaten:

Speler	Machtsindex van Shapley-Shubik
1) Docenten	$\frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0,417$
2) Leerlingen	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25$
3) Ouders	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25$
4) Directeur	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12} \approx 0,083$

De indices zijn in dit voorbeeld precies het elfde als de indices van Banhaf.

57 De uitgangssituatie is [8; 7, 5, 2].

- a Bereken de machtsindices van Ban-haf.
- b Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik.

58 Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik voor de situatie van opgave 53.

Net als bij de machtsindex van Ban-haf is het berekenen van de index van Shapley-Shubik met de hand niet mogelijk als het aantal spelers groot is. Gelukkig is ook voor het berekenen van de index van Shapley-Shubik geschikte software ontwikkeld waarin je alleen de gewichten en het quotum hoeft in te voeren. Geschikte sites zijn bijvoorbeeld: <http://www.marick.ac.uk/eceae/ssdirect.html> en <http://homepages.marick.ac.uk/eceae/ssgenf.html>

- 59**
- a Hoeveel verschillende sequentiale coalities bestaan er voor de spelers uit de Tweede Kamer? Vat de regering daarbij op als één speler.
 - b Bepaal voor de spelers uit de Tweede Kamer de machtsindex van Shapley-Shubik.
 - c Doe datzelfde voor de spelers uit de Eerste Kamer.

Je ziet dat de index van Shapley-Shubik bij elke partij slechts een beetje afwijkt van de index van Ban-haf. Ook is de volgorde van afnemende indices gelijk.

4.5 EXTRA OPGAVEN

60 Oneerlijk? Ban-haf heeft zijn index uitgedacht toen hij het Nassau County kiesstelsel bestudeerde. Nassau County is een district in de staat New York van de USA met meer dan 1 miljoen inwoners. Het kiesstelsel was volgens hem oneerlijk en om dat aan te tonen heeft hij zijn index bedacht. In dat kiesstelsel van Nassau waren er toen zes steden en gebieden met stemrecht:

- A. Hempstead #1
- B. Hempstead #2
- C. North-Hempstead
- D. Oyster Bay
- E. Glen Cove
- F. Long Beach



In de laatste drie steden oonde toen in totaal 16% van het totaal aantal in oners van Nassau. Het quotum en de ge ichten in het stems steem aren [16; 9, 9, 7, 3, 1, 1].

- a Bepaal alle (maar liefst 32) innende coalities
- b Bepaal in elke innende coalitie de kritieke spelers.
- c Bereken de machtsindices van Ban haf van alle spelers.
- d Wat vond Ban haf oneerlijk aan het s steem van Nassau?

61

Ban haf versus Shaple -Shubik.

Hieronder staan drie kiesstelsels. Steeds ijn er vier spelers (A, B, C en D).

[8; 8, 5, 1, 1]

[11; 8, 6, 4, 2]

[11; 7, 7, 5, 1]

- a Bereken in elk stelsel van elke speler de machtsinde van Ban haf.
- b Bereken in elk stelsel van elke speler de machtsinde van Shaple -Shubik.
- c Vergelijk de resultaten bij elk s steem. Is de volgorde van toenemende macht steeds gelijk?

62

Tegenspraak?

- a Bereken de machtindices van Ban haf in de situatie [100; 99, 99, 1].
- b Stel dat speler 3 in plaats van 1 nu 98 stemmen heeft: [quotum; 99, 99, 98]. Bereken voor de e situatie het nieu e minimale quotum. Verandert hierdoor de machtsverdeling tussen de drie spelers? Zo ja, hoe?
- c Het quotum hoeft niet de helft plus 1 te ijn. Stel dat een voorstel ordt aangenomen bij 198 stemmen. Hoe is nu de verdeling van de macht bij de situatie [198; 99, 99, 98]?
- d Vergelijk de situatie van onderdeel a) met onderdeel c). Geef commentaar.

63

Een speler met veel macht

In een spel hebben alle spelers n stem, op een persoon na.

Die speler speler 1 - heeft 2 stemmen.

- a Bereken de machtsindices van Shaple -Shubik als er drie spelers (A, B en C) ijn. Dus voor [3; 2, 1, 1].
- b Bereken de machtsindices van Shaple -Shubik als er vier spelers ijn.

De berekeningen in a) en b) zijn snel gemaakt. Als het aantal spelers groter wordt dan moet je slim tellen.

- c Bereken het quotum q als er n spelers zijn, dus 1 speler met 2 stemmen en $n-1$ spelers met 1 stem. (Tip: onderscheid de situaties dat n even en n oneven is)



www.foksuk.nl

- d Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik voor de situatie $\left[q; \underbrace{2, 1, 1, \dots, 1}_{n-1} \right]$.

64

Het Europese parlement
De EU bestond in juni 2006 uit 27 landen.
Het aantal zetels in het parlement wordt bepaald door de omvang van de bevolking van het land. In de tabel zie je de landen van de EU en het aantal zetels.



- a Bepaal de machtsverdeling volgens Banzhaf in de EU als je ervan uit gaat dat landen zich als blokken gedragen die het elfde stemmen. Op elke plaats staat Nederland?
- b Idem maar nu volgens het systeem van Shapley-Shubik.

Zetelverdeling tussen de landen (na de Europese verkiezingen van 2004)					
Duitsland	99	Griekenland	24	Slovenië	14
Frankrijk	78	Portugal	24	Ierland	13
Italië	78	Tsjechië	24	Litouwen	13
UK	78	Hongarije	24	Letland	9
Spanje	54	Zweden	19	Slovenië	7
Polen	54	Oostenrijk	18	Estland	6
Roemenië	35	Bulgarije	18	Luxemburg	6
Nederland	27	Denemarken	14	Cyprus	6
België	24	Finland	14	Malta	5

Bij toename van het aantal landen wordt de macht van de kleine landen erg klein. Nederland zou meer macht krijgen als het in een blok samen werkt met een paar lotgenoten. Bijvoorbeeld met België en Luxemburg (de nog altijd bestaande BeNeLux).

c Bereken het effect van die samenwerking

65

Een andere machtsindex (uit vorige samenkomst A 22 juni 2005)

Sinds 1 mei 2004 bestaat de Europese Unie uit 25 landen. In de Raad van Ministers heeft elk land een stem. In de Raad worden veel beslissingen genomen. Daarbij heeft niet elk land evenveel stemmen. Zo heeft Frankrijk 29 stemmen, Nederland 13 stemmen en Denemarken 7 stemmen.

Op de eerste bijeenkomsten beschikken de 25 landen samen over 321 stemmen. Een land stemt of voor of tegen en kan zich dus niet van stemming onthouden of met een deel van zijn stemmen voor en een ander deel tegen stemmen.

Vaak worden beslissingen genomen bij meerderheid van stemmen. Dat betekent dat een voorstel alleen wordt aangenomen als meer dan de helft van de stemmen voor dat voorstel is. Dan kan het gebeuren dat de stemmen van Nederland de doorslag geven bij het wel of niet aannemen van een voorstel. Dat is bijvoorbeeld het geval wanneer van de overige landen 152 stemmen voor zijn en 156 stemmen tegen.

a Bereken bij welke aantallen voorstemmen van de overige landen de stemmen van Nederland de doorslag geven om een meerderheid voor een voorstel te krijgen.

Bij een stemming kan dus één van de partijen soms de doorslag geven. Hoeveel invloed een partij bij de stemming heeft, geven we aan met de *machtsindex* (*mi*). Aan de hand van een voorbeeld laten we zien hoe je die kunt uitrekenen. We gaan uit van drie partijen A, B en C. Partij A heeft 6 stemmen, partij B heeft 4 stemmen en partij C heeft 3 stemmen. Zij beslissen over een voorstel bij meerderheid van stemmen. Een van de mogelijkheden is de volgende: A stemt voor, B stemt voor en C stemt tegen. De eerste mogelijkheid noteren we met (V,V,T).

We gaan nu de machtsindex van een van de drie partijen, partij B, berekenen. Daarvoor kijken we alleen naar de mogelijkheden waarbij de eerste partij voor stemt. Dat levert de volgende mogelijkheden op:

- mogelijkheid I (V,V,V)
- mogelijkheid II (V,V,T)
- mogelijkheid III (T,V,V)
- mogelijkheid IV (T,V,T)

Omdat de partijen samen 13 stemmen hebben, zijn er minstens 7 stemmen nodig voor een meerderheid. Bij de mogelijkheden I, II en III is er een meerderheid voor het voorstel. Bij de mogelijkheden II en III zijn de 4 voorstemmen van B onmisbaar om een meerderheid te realiseren. Bij mogelijkheid I zou die meerderheid ook behaald zijn als B niet voor zou stemmen. Bij mogelijkheid IV is er geen meerderheid. Omdat de stemmen van B bij 2 van de 4 mogelijkheden doorslaggevend zijn, zeggen we: de machtsindex van B is $mi_B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

We gebruiken dus de volgende definitie van de machtsindex (mi) van een partij:

$$mi = \frac{\text{aantal mogelijkheden waarbij de voorstemmen van die partij doorslaggevend zijn voor de meerderheid}}{\text{aantal aan alle mogelijkheden waarbij die partij voorstemt}}$$

Wanneer er sprake is van vier partijen, zijn er meer mogelijkheden. We nemen de volgende situatie: partij A heeft 7 stemmen, partij B heeft 4 stemmen, partij C heeft 4 stemmen en partij D heeft 2 stemmen. Ook nu beslissen de partijen bij meerderheid van stemmen.

- b** Bereken de machtsindex van A in de nieuwe situatie.

De verdeling van de stemmen kan tot vreemde situaties leiden wanneer er een partij is met weinig stemmen. Er zijn 3 partijen. Partij A heeft 6 stemmen, partij B 4 stemmen en partij C slechts 1 stem. De partijen B en C stellen nu een nieuwe verdeling voor waarbij A en B elk 5 stemmen hebben en C nog steeds 1 stem. Het aantal stemmen van C is dan weliswaar niet groter geworden, maar de machtsverhoudingen zijn wel veranderd.

- c** Toon dit aan door in beide situaties de machtsindex van elk van de drie partijen te berekenen.

Extra opgaven (dus geen onderdeel van de examenopgave)

Bereken ook de Shapley-Shubik machtsindices van A, B en C voor de twee situaties waarbij:

- d** Partij A 6 stemmen heeft, partij B 4 stemmen en partij C 1 stem.
e Partij A 5 stemmen heeft, partij B 5 stemmen en partij C 1 stem.
f Vergelijk de indices net als in onderdeel c. Is ook nu die verschuiving van macht aanwezig?

We nemen nu een situatie met vijf partijen A, B, C, D en E. Partij A heeft 3 stemmen en de overige partijen hebben elk 1 stem. We gebruiken de definitie van machtsindex zoals hierboven gegeven.

- g** Onderzoek of de machtsindex van A meer dan drie maal zo groot is als de machtsindex van B.