De Wageningse Methode
5&6 VWO wiskunde B
Uitgebreidere antwoorden Hoofdstuk 5
Exponentiële functies

Paragraaf 1 Exponentiële functies

1 **a.** Je mag wel van een artikel van 100 euro uitgaan.
Bij de een krijg je: $100 \to 110 \to 110 - 11 = 99$
Bij de ander: $100 \to 90 \to 99$
Beide zijn goedkoper geworden
Met 10% verhogen is vermenigvuldigen met 1,1; met 10% verlagen is vermenigvuldigen met 0,9. Beide vermenigvuldigen met $0{,}9 \cdot 1{,}1 = 0{,}99$, de prijs is dus met 1% verlaagd bij beiden.
b. Even duur

2 **a.** 4% per halfjaar is voordeliger: het tweede halfjaar ontvang je ook nog de rente over de rente van het eerste halfjaar.
Of: 4% per halfjaar is per jaar vermenigvuldigen met $1{,}04^2 > 1{,}08$.

0	1	2	3	4
1000	1210	1331	1464,10	1610,51

c. 1,1
d. $1{,}1^7$
e. $K(t) = 1000 \cdot 1{,}1^t$
f. Groeifactor per 2 jaar is $1{,}1^2 = 1{,}21$, dus 21%

3 **a.** 75% van 75% is $0{,}75 \times 75\% = 56{,}25\%$
b. $y = 100 \cdot 0{,}75^x$
c. $100 \cdot 0{,}75^8 \approx 10$
d. 1,1; 0,75

4 **a.** Als er 20% verdwijnt, blijft er 80% over, dus 0,8.
b. $S(t) = 125 \cdot 0{,}8^t$
c. $125 / 0{,}8^2 \approx 195{,}3$
d. $125 \cdot 0{,}8^t = 1 \to t = 21{,}6$ (Je kunt een tabel maken of de opmerking op blz 182 gebruiken.)

5 **a.** $N(t) = 1000 \cdot 8^t$
c. $1000 \cdot 8^t = 10^8 \to t = {}^8\log 10^5 \approx 5{,}537$
d. Er blijft 10% = $\frac{1}{10}$ over. De kolonie moet 10 keer zo groot worden. $8^t = 10 \to t = {}^8\log 10 \approx 1{,}107$

6 **a.** Afnemen met 8,3% = vermenigvuldigen met $1 - 0{,}083 = 0{,}917$. En $0{,}917^8 = 0{,}49998 \approx 0{,}5$.
b. $2 \cdot 8 = 16$ dagen, $0{,}917^8 \cdot 0{,}917^8 \approx 0{,}5^2 \approx 0{,}25$
c. $J(t) = 100 \cdot 0{,}917^t$
d. $0{,}917^t = 0{,}01 \to t = \dfrac{\log 0{,}01}{\log 0{,}917} \approx 53{,}148$ dagen

7 **a.** 7^{p+1} $\quad$ 7^{p-1}
7^{2p} $\quad$ 14^p
b. $2^3 = 8$ $\quad$ $2^2 = 4$
$2^2 = 4$ $\quad$ $16^{0,5} = 2^{4 \cdot 0,5} = 2^2 = 4$

8 $8^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ $\quad$ $49^{1\frac{1}{2}} = 7^{2 \cdot 1\frac{1}{2}} = 7^3 = 343$
$10000^{\frac{3}{4}} = 10^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 10^3 = 1000$ $\quad$ $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4}$
$49^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{343}$ $\quad$ $10000^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{1000}$

9 **a.** $x = 0{,}8^{-1,5} \to x^2 = 0{,}8^{-3} = (0{,}512)^{-1} = \dfrac{1}{0{,}512} \to$
$x = x = \sqrt{\dfrac{1}{0{,}512}} = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}512}}$
b. $x = 5^{3/4} \to x^4 = 5^3 = 125 \to x = \sqrt[4]{125}$
$x = (\frac{1}{2})^{-1,1} \to x^{10} = (\frac{1}{2})^{-11} = 2^{11} = 2048 \to x = \sqrt[10]{2048}$

10 **a.** Aan de bovenkant van links naar rechts: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 4, 2. De horizontale lijn hoort bij $g = 1$. Als het grondtal kleiner is dan 1, krijg je een dalende functie, anders een stijgende. Hoe verder het grondtal van 1 afligt, hoe steiler de grafiek loopt.
b. Links van (0,1) ligt de grafiek van $y = (1\frac{1}{2})^x$ boven de grafiek van $y = 2^x$ en rechts van (0,1) eronder.
Links van (0,1) ligt de grafiek van $y = (\frac{2}{3})^x$ onder de grafiek van $y = (\frac{1}{2})^x$ en rechts van (0,1) erboven.

11 **a.** (0,1), want $g^0 = 1$ voor elk getal $g > 0$.
b. Dan is $g > 1$.
Dan is $0 < g < 1$.
Het geval $g = 1$; dan is de functie constant.
c. Heel licht dalend; bijna horizontaal.
Heel licht stijgend; bijna horizontaal.

12 Stijgend, stijgend, dalend, dalend

13 **a.** De grafiek van $y = x^2$ is symmetrisch in de y-as en heeft een top.
De grafiek van $y = 2^x$ is stijgend en heeft een asymptoot.
b.

4	8	16	1024	2^{100}
5	7	9	21	201

c. Ja, 2^{100} is veel groter dan 201.

14 **a.**

2	2	2	2	2
2,25	1,78	1,56	1,21	1,02

b. De relatieve toenames van 2^x zijn constant 2. De relatieve toenames van x^2 worden steeds kleiner en naderen 1.

15 **a.** 1 omhoog verschuiven, spiegelen in de x-as en dan weer 1 omhoog verschuiven.
b. Nee; ja.
c. $y = 1$; $y = 1$.
d. Bereik f: $y > 1$; bereik g: $y < 1$.

e. $f(x)=4 \Leftrightarrow \left(\tfrac{2}{3}\right)^x = 3 \Leftrightarrow g(x)=1-3=-2$

16 a. $a(t)=2^t$
b. $b(3)=a(1\tfrac{1}{2})$, $b(7)=a(5\tfrac{1}{2})$, $b(t)=a(t-1\tfrac{1}{2})$
d. $1\tfrac{1}{2}$ naar rechts
e. $c(t)=a(t+2)$, 2 naar links
f. $2^{t+2}=2^t\cdot 2^2=2^t\cdot 4$
g. Verticaal met factor 4 (ten opzichte van de x-as).
h. $d(4)=a(6)$, $d(5)=a(7\tfrac{1}{2})$, $d(t)=a(1\tfrac{1}{2}t)$
i. Horizontaal vermenigvuldigen met factor $\tfrac{2}{3}$ (ten opzichte van de y-as).
j. $2^{1\frac{1}{2}}=2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$; $d(t)=(2\sqrt{2}\,)^t$
k. $2^{1\frac{1}{2}t}=(2^{1\frac{1}{2}})^t=(2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}})^t=(2\sqrt{2}\,)^t$, met regel III, I en V.

17 a. (2,0) , $y=(x-2)^2$
b. (2,3) , $y=(x-2)^2+3$

18 b. Horizontale verschuiving 3 naar rechts.
c. Verticale vermenigvuldiging met factor $\tfrac{1}{8}$ (ten opzichte van de x-as).
Uit regel 1 (of II): $2^{x-3}=2^x\cdot 2^{-3}=2^x\cdot\tfrac{1}{8}$

19 a. Gespiegeld ten opzichte van de y-as.
b. Regel VI
c. $x \geq 5$; $x \leq -5$

20 a. Vallen samen.
b. $\tfrac{1}{2}\cdot 2^x=2^x : 2^1=2^{x-1}$; Regel II.
c. Verticaal vermenigvuldigen met factor $\tfrac{1}{2}$ (ten opzichte van de x-as). Horizontaal verschuiven 1 naar rechts.
d. Dan $2^x \geq 64$, dus $x \geq 6$

21 a. De grafiek van $y=8^x$ vind je door de grafiek van $y=2^x$ met factor $\tfrac{1}{3}$ te vermenigvuldigen t.o.v. de y-as.
$8^x=(2^3)^x=2^{3x}$; Regel III
b. $x \geq 1\tfrac{2}{3}$, zie **19c**

22 a. $f(1)=1+(1-2^{-1})=1\tfrac{1}{2}$; $f(5)=1+(1-2^{-5})=\tfrac{63}{32}$.
b. $f(x)=1+(1-2^{-x})=2-2^{-x}$ als $x \geq 0$.
c. Het rechter deel van de grafiek vind je door het linker deel te spiegelen in de y-as.

Paragraaf 2 Het getal e

1 a. Bijvoorbeeld: de functie f is stijgend, dus is $f'(x)>0$ voor alle x. Maar de formule $x\cdot 2^{x-1}$ geeft negatieve waarden als $x<0$.
b. De grafiek is stijgend, loopt naar links toe steeds vlakker naar de x-as en naar rechts steeds steiler, zo steil als je maar wilt, dus alle positieve waarden en geen andere.

2 a. $\dfrac{2^{a+\frac{1}{2}}}{2^a}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ voor alle a
b. $\dfrac{2^{a+0{,}01}}{2^a}=2^{0{,}01}$ voor alle a

3 b. De grafiek van Y_2/Y_1 lijkt een horizontale lijn te zijn.

5 a. Door horizontale vermenigvuldiging met factor $\tfrac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as. De grafiek van $y=4^x$ is in het punt (0,1) dus 2 keer zo steil als de grafiek van $y=2^x$.
b. $c_4=2\,c_2$

6 $c_8=3\,c_2$, $c_{\frac{1}{2}}=-c_2$, $c_{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}c_2$, zie de vorige opgave, want $8^x=2^{3x}$, $\tfrac{1}{2}^x=2^{-x}$ en $\sqrt{2}^x=2^{\frac{1}{2}x}$

7 $2\,c_3\cdot 3^x$ | $c_3\cdot 3^{x+2}$

$-c_3\cdot 3^{-x}$ (kettingregel) | $\tfrac{1}{2}c_3\cdot 3^{\frac{1}{2}x}$ (idem)
nb: $\sqrt{3^x}=3^{\frac{1}{2}x}$

$3^x+x\cdot c_3\cdot 3^x$(productregel) | $\dfrac{c_3\cdot 3^x\cdot x-3^x}{x^2}$

8 a. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\approx 1$ voor kleine waarden van Δx; kies $\Delta x=0{,}001$.
b. $g^{0{,}001}-1\approx 0{,}001 \rightarrow g^{0{,}001}\approx 1{,}001 \rightarrow g \approx 1{,}001^{1000}\approx 2{,}7169...$
c. $g \approx 1{,}00001^{100000}\approx 2{,}7182...$

9 a. $1{,}5^2\approx 2{,}25$ keer zo groot
b. $1{,}25^4\approx 2{,}44$ keer zo groot
c. $1{,}1^{10}\approx 2{,}59$ keer zo groot
d. $1{,}01^{100}\approx 2{,}70$ keer zo groot
e. $\mathrm{e}\approx 1{,}00001^{100000}$ of algemeen $\mathrm{e}\approx(1+\tfrac{1}{n})^n$.

10 De grafieken van $Y_1=\mathrm{e}^x$ en $Y_2=n$Deriv(Y_1,X,X) vallen samen.

11 $y'=2\cdot\mathrm{e}^x$ | $y'=-\,\mathrm{e}^x$
$y'=\mathrm{e}^x$ | $y=\tfrac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^x$, dus $y'=\tfrac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^x$

12 $y'=2\cdot\mathrm{e}^{2x}$ | $y'=2x\cdot\mathrm{e}^{x^2}$
$y'=\mathrm{e}^{2+x}$ | $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
$y'=-2\cdot\mathrm{e}^{5-2x}$ | $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, dus $y'=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^x}$

13 b. Het ziet er naar uit dat ze elkaar raken in het punt met eerste coördinaat 1. Als $x=1$, dan zijn de y-waarden gelijk: $\mathrm{e}^1=\mathrm{e}\cdot 1$ en zijn de y'-waarden gelijk, namelijk allebei e.

14 richtingscoëfficiënt $PR = e^x = \dfrac{PQ}{RQ} = \dfrac{e^x}{RQ} \to RQ = 1$

15 $y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$ (productregel)

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^x + \sqrt{x}\, e^x$ (productregel)

$x \to 1 + e^x = u \to u^2$, dus $y' = 2u \cdot e^x = 2(1+e^x) \cdot e^x$

$x \to 1 + e^x = u \to u^{\frac{1}{2}}$, dus $y' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot e^x$

16 a. $e^{10} \approx 22026$

b. $\dfrac{dD}{dt} = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t+10}$; op $t = 0$ geeft dit $-0{,}2 \cdot e^{10}$ ≈ -4405

c. Aan het minteken: als t groter wordt, wordt $-0{,}2t + 10$ kleiner, dus wordt dan ook D kleiner.

d. $D = 0$

17 a. $f(x)$ is maximaal 1, namelijk als $x = 0$; $f(x)$ nadert tot 0 als $|x|$ heel groot wordt. Dus neemt $f(x)$ alle positieve waarden aan die ≤ 1 zijn.

b. $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$ $f''(x) = -2\, e^{-x^2} + -2x \cdot -2x\, e^{-x^2} =$ $(-2 + 4x^2)\, e^{-x^2}$, dus $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Buigpunten: $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{e}\sqrt{e})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{e}\sqrt{e})$.

Paragraaf 3 De natuurlijke logaritme

1 a. $p > 0$ en q kan alle waarden aannemen.

b.

0	${}^2\log\sqrt{2} = x \Leftrightarrow 2^x = \sqrt{2}$, dus $x = \frac{1}{2}$
1	-1
3	-3

2 a. Door spiegeling in de lijn $x = y$.

b. $x > 0$; y kan elk getal zijn.

3 $500 \cdot 2^x = 3750 \Leftrightarrow 2^x = 7{,}5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 7{,}5}{\log 2} \approx 2{,}9$ uur.

4 a. Door 2 omhoog te schuiven.
Regel I: ${}^2\log 4x = {}^2\log 4 + {}^2\log x = 2 + {}^2\log x$.

b. Door verticaal met 3 te vermenigvuldigen (ten opzichte van de x-as). Regel III: ${}^2\log x^3 = 3 \cdot {}^2\log x$.

c. Door te spiegelen in de x-as.

Regel II: ${}^2\log \dfrac{1}{x} = {}^2\log 1 - {}^2\log x = -{}^2\log x$.

d. Door verticaal te vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ (ten opzichte van de x-as).

Regel IV: ${}^4\log x = \dfrac{{}^2\log x}{{}^2\log 4} = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log x$.

5 a. Die is $1/0{,}69 \approx 1{,}45$. (Als je een lijn met richtingscoëfficiënt $a \neq 0$ in de lijn $y = x$ spiegelt, dan krijg je een lijn met richtingscoëfficiënt $\dfrac{1}{a}$.)

b. In (4, 2) is de helling ongeveer 0,36.

c. In $(\frac{1}{2}, -1)$ is de helling ongeveer 2,86.

6 a. Afnemende stijging.

b. y' is positief en dalend.

7 b. De positieve getallen; alle getallen.

8

0	$\frac{1}{2}$
1	-1
3	-3

9 a. Het enige verschil is dat grondtal 2 is vervangen door grondtal e.

b. 4,605...; klopt.

10 b. y_2 is het omgekeerde van x; $y_2 = \dfrac{1}{x}$.

11 a. $e^{\ln 3} = 3$

b. $\frac{1}{3}$ (omgekeerde van **a**)

12 a. $\frac{1}{2}$

b. 1

c. $\dfrac{1}{x}$

13 a. 1

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = e^u \cdot \dfrac{du}{dx} = x \cdot \dfrac{du}{dx}$

c. $x \cdot \dfrac{du}{dx} = 1 \to \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

14 a. $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, de richtingscoëfficiënt .
Vergelijking $y = \frac{1}{e}x + b$. De lijn gaat door (e,1), dus $b = 0$. Vergelijking is dus $y = \frac{1}{e}x$.

b. Richtingscoëfficiënt $= \frac{1}{5}$, dus een vergelijking is: $y = \frac{1}{5}x + b$. De lijn gaat door (5, ln 5), dus $b = -1 + \ln 5$, een vergelijking is: $y = \frac{1}{5}x - 1 + \ln 5$

15 $y' = \dfrac{1}{x}$ (somregel) $\qquad y' = -\dfrac{1}{x}$

$y' = \dfrac{2}{x}$ (veelvoudregel) $\qquad y' = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$

16 $y' = \dfrac{1}{x}$ (want $\ln 2x = \ln x + \ln 2$, somregel)

$y' = \dfrac{1}{2+x} \cdot 1$ (kettingregel)

$x \to x^2 = u \to \ln u$, dus $y' = 2x \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

$x \to \ln x = u \to u^2$, dus $y' = 2u \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$

17 $y' = 2 + \dfrac{3}{x}$ (somregel en veelvoudregel)

$y' = \dfrac{-\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}$ (quotiëntregel)

$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$(productregel)

$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x$ (productregel)

18 a. $L = 102{,}3 - 4{,}3 \ln 80a - 0{,}03a$. Als a toeneemt, nemen $4{,}3 \ln 80a$ en $0{,}03a$ beide toe en neemt L dus af.

b. $L = 86{,}5 - 4{,}3 \ln 100v + 0{,}16v$.

$L' = \dfrac{-4{,}3}{v} + 0{,}16 = 0$ als $v = \dfrac{4{,}3}{0{,}16} \approx 26{,}875$. Met de grafiek blijkt dat L dan inderdaad minimaal is.

c. $L' = \dfrac{-4{,}3}{av} \cdot a + 0{,}16 = \dfrac{-4{,}3}{v} + 0{,}16$ hangt niet af van a. De waarde van v waarvoor $L' = 0$ (en L minimaal is) hangt dus ook niet af van a.

19 a. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow x = \mathrm{e} \rightarrow$ de top is $(\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}})$

b. $f''(x) = \dfrac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x - 2x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow -1 - (2 - \ln x) = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 1\frac{1}{2} \rightarrow x = \mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}$,het buigpunt is $(\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}, 1\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1\frac{1}{2}})$.

Paragraaf 4 Bij andere grondtallen

1 a. $8^{\frac{1}{3}x}$

b. Horizontale vermenigvuldiging met factor 3 (ten opzichte van de y-as).

2 a. $3^{{}^3\log 2 \cdot x} = \left(3^{{}^3\log 2}\right)^x = 2^x$

b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\dfrac{1}{{}^3\log 2}$ (ten opzichte van de y-as).

3 a. $\mathrm{e}^{\ln 2 \cdot x} = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^x = 2^x$

b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\dfrac{1}{\ln 2}$ (ten opzichte van de y-as).

4 a. $\mathrm{e}^{\ln g \cdot x} = \left(\mathrm{e}^{\ln g}\right)^x = g^x$

b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\dfrac{1}{\ln g}$ (ten opzichte van de y-as).

5 a. 504

b. $1015 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}14h} = 280 \Leftrightarrow -0{,}14h = \ln 280 - \ln 1015$ dus $h \approx 9{,}2$ km

c. $\mathrm{e}^{-0{,}14h} = \left(2^{{}^2\log \mathrm{e}}\right)^{-0{,}14h} = 2^{-0{,}14h \cdot {}^2\log \mathrm{e}} \approx 2^{-0{,}20h}$, dus $L = 1015 \cdot 2^{-0{,}20 \cdot h}$

d. $L = 1015 \cdot 10^{-0{,}06 \cdot h}$, $(10^{\log \mathrm{e} \cdot -0{,}14 \cdot} = 10^{-0{,}06})$

e. Het getal dat er moet komen staan nomen we g. Dan $g^{{}^g\log \mathrm{e} \cdot -0{,}14} = g$, dus ${}^g\log \mathrm{e} = -\frac{1}{0{,}14}$, dus $g = \mathrm{e}^{-0{,}14} \approx 0{,}87$, dus $L = 1015 \cdot 0{,}87^h$

6 a. $\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^{\ln 2 \cdot x} = (\mathrm{e}^{\ln 2})^x = 2^x = y$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \cdot \dfrac{dy}{du} = \ln 2 \cdot \mathrm{e}^u = \ln 2 \cdot 2^x$

c. $c_2 = 0{,}6931471806$

7 a. $\ln 10 \cdot 10^x \approx 2{,}3 \cdot 10^x$

b. $\ln \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot (\frac{1}{\mathrm{e}})^x = -(\frac{1}{\mathrm{e}})^x$

c. $\ln \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$

8 a. $(\ln 2) \cdot 2^2 = (\ln 2) \cdot 4 = \ln 2^4 = \ln 16$

b. $\ln \sqrt{2}$

9 a. ${}^4\log x = \dfrac{{}^2\log x}{{}^2\log 4} = \dfrac{{}^2\log x}{2} = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log x$

b. ${}^8\log x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log x$

c. ${}^{\frac{1}{2}}\log x = -1 \cdot {}^2\log x$

10 a. Verticale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ (ten opzichte van de x-as).

b. Verticale vermenigvuldiging met achtereenvolgens de factoren $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ en -1 (ten opzichte van de x-as).

11 a. ${}^2\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

b. Verticale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{\ln 2}$ (ten opzichte van de x-as).

12 $\frac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{x}$

13 a. $\frac{1}{\ln 10} \cdot \dfrac{1}{x} \approx 0{,}43 \cdot \dfrac{1}{x}$

b. $\frac{1}{\ln \frac{1}{\mathrm{e}}} \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x}$

c. $\frac{1}{\ln \mathrm{e}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

14 a. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 790 = 1{,}961$ km ≈ 1960 meter.

b. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 950 = 0{,}633$ km ≈ 635 meter.

c. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 900 = 1{,}023$ km ≈ 1020 meter.

d. $7{,}2 \cdot \ln L = 7{,}2 \cdot \dfrac{{}^2\log L}{{}^2\log \mathrm{e}} = \dfrac{7{,}2}{{}^2\log \mathrm{e}}\ {}^2\log L$, dus $h = 50 - 4{,}99 \cdot {}^2\log L$

e. $\dfrac{7{,}2}{\log \mathrm{e}} \approx 16{,}58$, dus $h = 50 - 16{,}58 \cdot \log L$

f. $\dfrac{7{,}2}{{}^{g}\log \mathrm{e}} = 1 \Leftrightarrow g^{7{,}2} = \mathrm{e}$, dus $g = \mathrm{e}^{1/7{,}2} \approx 1{,}15$, dus $h = 50 - {}^{1{,}15}\log L$

g. $h = 50 - 7{,}2 \cdot \ln L \to \ln L = 6{,}94 - 0{,}14h \to$ $L = \mathrm{e}^{6{,}94 - 0{,}14h} = \mathrm{e}^{6{,}94} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}14h} \approx 1033 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}14h}$; klopt redelijk.

15 $x \to x^2 + 1 = u \to {}^{2}\log u = y$, dan $y' = 2x \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{u}$, dus

$y' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$y' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{x}$ want ${}^{2}\log(\mathrm{e}x) = {}^{2}\log \mathrm{e} + {}^{2}\log x$

$x \to \dfrac{1 - x}{1 + x} = u \to {}^{3}\log u = y$, dan

$y' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{1 + x}{1 - x} \cdot \dfrac{-(1 + x) - (1 - x)}{(1 + x)^2} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{1 + x}{1 - x} \cdot \dfrac{-2}{(1 + x)^2}$

$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{1}{1 - x} \cdot \dfrac{-2}{1 + x} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{-2}{1 - x^2}$

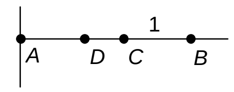
$y' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$, want $\log \sqrt{\mathrm{e}x} = \frac{1}{2}\log \mathrm{e} + \frac{1}{2}\log x$.

Paragraaf 5 Gemengde opgaven

1 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\ln a \cdot x}$. Als $x = 1$, dan $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\ln a}$. Als $a > 1$, ligt P onder de x-as. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dan $\dfrac{OP}{1} = \dfrac{3}{1}$. Dus $\dfrac{1}{\ln a} = 3$. Dus $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$. Als $a < 1$, ligt P boven de x-as. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dan -3. Dan $\dfrac{1}{\ln a} = -3$. Dus $a = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

2 **a.** $f'(x) = 2^x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot x = 2^x(1 + \ln 2 \cdot x)$;
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln 2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\ln 2} = -{}^{2}\log \mathrm{e}$ met regel IV.
b. $p \cdot 2^p = (p + 2) \cdot 2^{p+2} \to p = (p + 2) \cdot 2^2 \to p = 4p + 8 \to p = -2\frac{2}{3}$.

3 **a.** $g(x) = 2^{2x} = f(2x)$, dus horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{2}$ (ten opzichte van de y-as).
$h(x) = 2^{3x} = f(3x)$, dus horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ (ten opzichte van de y-as).
b.



Uit **a** volgt $AC = \frac{1}{2}AB$ en $AD = \frac{1}{3}AB$. $\to$ $AD = \frac{2}{3}$ en $CD = \frac{1}{3}$.

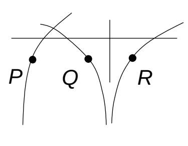
c. $P = (p, 2^p)$; $f'(p) = \ln 2 \cdot 2^p$. Omdat de raaklijn door de oorsprong gaat, geldt $\dfrac{f(p)}{p} = \ln 2 \cdot 2^p \to$ $\dfrac{2^p}{p} = \ln 2 \cdot 2^p \to p = \frac{1}{\ln 2} = {}^{2}\log \mathrm{e}$.

4 **a.** $f(x) = 0 \to \ln x(\ln x - 2) = 0 \to x = 1$ of $x = \mathrm{e}^2$, dus (1,0) en $(\mathrm{e}^2{,}0)$
b. $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2\ln x - 2}{x}$; $f'(x) = 0 \to x = \mathrm{e}$; top: (e, -1).
c. $f''(x) = \dfrac{4 - 2\ln x}{x^2}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$, dus $x = \mathrm{e}^2$ $\to$ buigpunt: $(\mathrm{e}^2, 0)$.
$f'(\mathrm{e}^2) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$, dus buigraaklijn: $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}x + b$; $(\mathrm{e}^2, 0)$ ligt op de lijn $\to b = -2 \to$ buigraaklijn: $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}x - 2$.
d. $f(x) = 3 \to (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0 \to (\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0 \to x = \mathrm{e}^3$ of $x = \mathrm{e}^{-1}$.

5 $A(x)$ is de afstand in het kwadraat van punt $(x, f(x))$ tot O. $A(x) = x^2 + 4\mathrm{e}^{-2x^2}$. $A(x)$ minimaal $\to A'(x) = 0$ $\Leftrightarrow 2x - 16x \cdot \mathrm{e}^{-2x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 8\mathrm{e}^{-2x^2}) = 0 \Leftrightarrow$ $x = 0$ of $\mathrm{e}^{-2x^2} = \frac{1}{8}$.
$x = 0$ voldoet niet, dus $\mathrm{e}^{-2x^2} = \frac{1}{8} \to 2x^2 = \ln 8 \to$ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\ln 8}$.

6 **a.** $2\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{\ln 2} \cdot \mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{x+1+\ln 2}$
b. $f(x) = 0 \to \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x+1+\ln 2} \to 2x = x + 1 + \ln 2 \to$ $x = 1 + \ln 2$.
c. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x+1}$; $f'(x) = 0 \to \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x+1} \to$ $2x = x + 1 \to x = 1$; $f(1) = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2$.
d. $f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x+1}$; $f''(x) = 0 \to 2\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x+1} \to$ $\mathrm{e}^{2x+\ln 2} = \mathrm{e}^{x+1} \to 2x + \ln 2 = x + 1 \to x = 1 - \ln 2$.

7 **a.** Voor $x < 0$ geldt $g(x) = \ln(-x)$; $g'(x) = -1 \cdot \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$ $\to$
$g'(-1) = -1 \to$ vergelijking raaklijn: $y = -x - 1$.
b. $P = (p, 0)$.
$f(p) = 0 \to \ln(2p + 4) = 0 \to 2p + 4 = 1 \to p = -1\frac{1}{2}$.
$f'(x) = \dfrac{1}{x + 2} \to f'(-1\frac{1}{2}) = 2$, raaklijn heeft vergelijking $y = 2x + b$ en raaklijn gaat door $(-1\frac{1}{2}, 0)$, dus vergelijking is $y = 2x + 3$.
c.

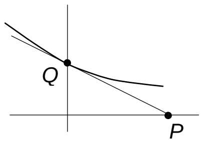


Neem aan: $R = (r, g(r))$, dan $Q = (-r, g(-r))$ en $P = (-3r, f(-3r))$.
Er geldt $f(-3r) = g(r)$, dus $\ln(-6r + 4) = \ln r$, dus

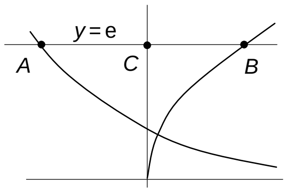
$-6r + 4 = r \rightarrow r = \frac{4}{7} \rightarrow a = g(r) = \ln \frac{4}{7}$.

8 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$; $f'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{x}$ en $x \neq 0 \rightarrow x = 1$.
$f(1) = 2$. De extreme waarde is 2.
b. $f''(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-\sqrt{x} + 2}{2x^2}$;
$f''(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 2 \rightarrow x = 4$.
Buigpunt: $(4, 4 - \ln 4)$; $f'(4) = \frac{1}{4}$, dus vergelijking buigraaklijn: $y = \frac{1}{4}x + 3 - \ln 4$.

9 **a.**



$f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$; $f'(0) = -\frac{1}{2}$, dus $\dfrac{OQ}{OP} = \frac{1}{2}$; verder $OQ = 1$, dus $OP = 2$; opp. $\Delta OPQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.
b.



Stel $A = (a, f(a))$m, dan $f(a) = e$, dus $a = -2$.
$B = (b, f(b))$; $a = -2$, dus $b = 2$; $g(2) = e$, dus $p\sqrt{2} = e$, dus $p = \frac{1}{2} e\sqrt{2}$.

10 **a.** Het gemiddelde van $f(x)$ en $g(x)$ is 1, dus $f(x) + g(x) = 2$, dus $g(x) = 2 - f(x) = 2 - (\ln x)^2$.
b. Snijpunt links van de lijn: $B = (b, f(b))$; dan $f(a) = f(b) \rightarrow (\ln a)^2 = (\ln b)^2 \rightarrow \ln b = -\ln a = \ln \frac{1}{a}$, dus $b = \frac{1}{a}$.
c. $a - \frac{1}{a} = 4\frac{4}{5} \Leftrightarrow a^2 - 4\frac{4}{5}a - 1 = 0 \Leftrightarrow (a - 5)(a + \frac{1}{5}) = 0$, dus $a = 5$ (want a ligt rechts van 1).

Rekentechniek

1 $y_1 = {}^2\log e + {}^2\log x$, dus y_1 en z_1 verschillen een constante.
Dat $y_2 = z_2$ volgt uit de regel: $\log a - \log b = \log \dfrac{a}{b}$.
$y_3 = \frac{1}{2}(\log ex) = \frac{1}{2}\log e + \frac{1}{2}\log x$, dus y_3 en z_3 verschillen een constante.

2 2e $\quad$ $e\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}e$ $\quad$ $\frac{1}{2}e^3$

3 e^2, $\frac{1}{e^2}$ $\quad$ $\dfrac{2e}{e - 1}$
e^2, $\frac{1}{e^2}$ $\quad$ 1

4 e $\quad$ e^3
voor alle $x > 0$ $\quad$ 4

5 e^3, $\frac{1}{e}$ $\quad$ e^2, $\sqrt{e}$
e^2, $\frac{1}{e}$ $\quad$ e^{25}

6 $\ln 3$ $\quad$ $\ln 2$, $\ln \frac{1}{2}$
0 $\quad$ 0

7 2
10, 100
$\ln 3$
3
1, $\log 2$

8 $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$