vwo wiskunde d

combinatoriek en rekenregels

de Wageningse Methode

Copyright © 2019 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN xxx
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit hoofdstuk is het eerste in een serie over in kansrekening.
De volgende zijn: **Binomiale en normale verdelingen** en **Hypothesetoetsen en Poissonverdeling**.
Deze hoofdstukken behoren tot de stof van het vak 456 vwo wiskunde d.
Belangrijk in de kansrekening is mogelijkheden tellen. Daar beginnen we mee.

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

Echt, moet kunnen
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.

Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

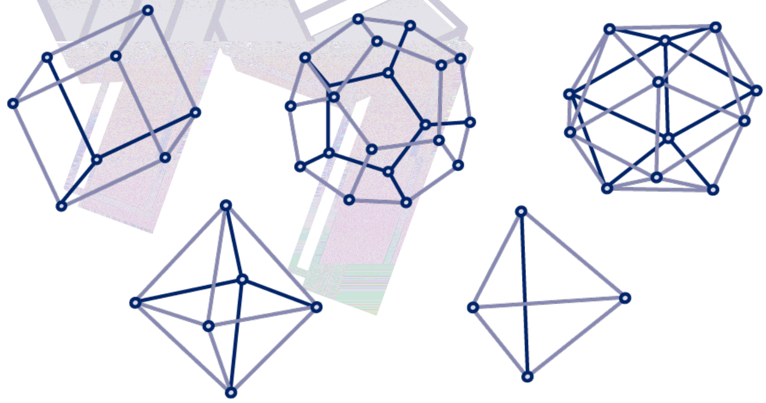
Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.

1.1 Intro

1 In de onderbouw heb je kennisgemaakt met de regelmatige veelvlakken. Deze zijn hieronder afgebeeld.



We tellen het aantal grensvlakken, hoekpunten en ribben van de regelmatige veelvlakken.

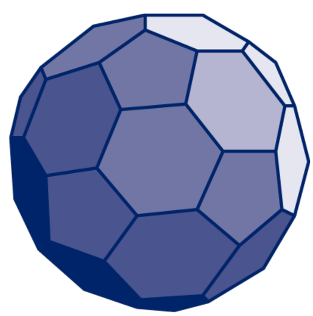
a Neem de tabel over en vul hem in.

veelvlak	grensvlakken	hoekpunten	ribben
4-vlak	4	4	6
6-vlak			
8-vlak			
12-vlak			
20-vlak			

Er is een verband tussen het aantal grensvlakken G, het aantal hoekpunten H en het aantal ribben R van een regelmatig veelvlak.

b Geef een formule voor dit verband.
Het verband staat bekend als de formule van Euler.

Het 32-vlak ontstaat door alle twaalf de hoeken van een icosaëder af te zagen. Het 32-vlak wordt begrensd door twaalf vijfhoeken en twintig zeshoeken en heeft de vorm van een voetbal.



c Ga na of de formule van Euler geldt voor dit 32-vlak.

d Ga na of de formule van Euler geldt voor een n-zijdige piramide en een n-zijdig prisma.

De formule van Euler geldt voor alle sferische veelvlakken. Wil je hier meer over weten, vraag dan je docent eens naar het tijdschrift Pythagoras van december 2002.

2 Er zijn drie proefwerken voor wiskunde A geweest die even zwaar tellen. Een leerling staat gemiddeld precies een 8. Er worden alleen gehele cijfers van 1 tot en met 10 voor de proefwerken gegeven. Deze 8 kan tot stand komen door verschillende cijfercombinaties. Bijvoorbeeld: 8-8-8 of 10-10-4. Bij deze opgave kijken we alleen maar naar het gemiddelde en is de volgorde waarin de cijfers behaald zijn niet van belang. De rijtjes 10-10-4, 10-4-10 en 4-10-10 zien we dus als één mogelijkheid.

a Schrijf alle verschillende cijfercombinaties op die voor een gemiddelde van een 8 zorgen.

b Hoe ben je te werk gegaan?

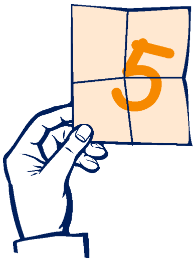
3 Bij een potje Scrabble heb je nog vijf letters over, drie E's, een L en een D. Die vijf letters kun je op een aantal manieren op een rijtje leggen. Soms krijg je een echt woord (bijvoorbeeld EDELE), vaak ook niet. We willen graag weten hoeveel verschillende rijtjes je kunt maken. Bij zulke opgaven is het belangrijk dat je volgens een systeem je rijtjes maakt.

a Doe dit en leg uit hoe je systeem werkt.

b Hoeveel rijtjes zijn er mogelijk?

Bij telproblemen - ook wel combinatoriek genoemd - moet je nauwkeurig en systematisch werken om het spoor niet bijster te raken. In de volgende opdrachten bedenk je telkens zelf een manier om het aantal mogelijkheden systematisch bij te houden.

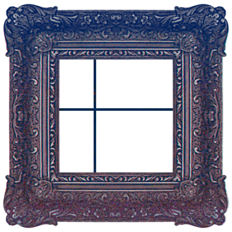
4 In een vaas zitten drie briefjes: een briefje met het cijfer 2, één met het cijfer 5 en een briefje met daarop een 7. Je trekt willekeurig een briefje uit de vaas en noteert het cijfer dat erop staat. Zonder het briefje terug te stoppen, pak je nog een briefje en noteren ook dat cijfer. Tenslotte noteer je het cijfer dat op het laatste briefje staat. Je krijgt zo een getal van drie cijfers, bijvoorbeeld 725.
Hoeveel 3-cijferige getallen zijn er mogelijk?



5 In een vaas zitten twee genummerde briefjes: één met het getal 3 en één met het getal 9. Je haalt zonder te kijken een briefje uit de vaas en noteert het nummer dat erop staat. Daarna doe je het briefje terug in de vaas. Je herhaalt deze handeling nog drie keer. Je krijgt zo een getal van vier cijfers, bijvoorbeeld 3333 of 9339.
Hoeveel getallen van vier cijfers zijn er mogelijk?

6 Vier vriendinnen (Anne, Beatrice, Cathy en Demi) moeten nog twee praktische opdrachten afronden: één voor wiskunde en één voor Nederlands. De vriendinnen besluiten tweetallen te vormen, zodat elk tweetal zich maar in één opdracht hoeft te verdiepen. Bijvoorbeeld: Anne en Cathy maken samen de wiskundeopdracht en Beatrice en Demi ronden de opdracht voor Nederlands af.
In hoeveel samenstellingen kunnen de vier vriendinnen de beide praktische opdrachten afronden?

7 Ines maakt een schilderij door een vierkant wit linnen doek in vier vlakken te verdelen en elk van deze vlakken een kleur te geven. Ze gebruikt de kleuren rood, geel en blauw. Ines kleurt twee vlakken rood omdat dit haar lievelingskleur is.
Hoeveel composities zijn er mogelijk?



8 Vier kinderen (Ebbe, Julia, Sarah en Nils) mogen samen een nachtje logeren bij hun grootmoeder. Oma heeft twee slaapkamers (één op zolder en één beneden) met elk vier bedden. Alle vier de kleinkinderen kunnen dus op één kamer slapen. Maar dat hoeft niet, de kinderen mogen er ook voor kiezen beide kamers te gebruiken. Bijvoorbeeld: Ebbe, Julia en Sarah slapen beneden en Nils slaapt boven op zolder.
Op hoeveel manieren kunnen de vier kleinkinderen zich over de twee slaapkamers verdelen?

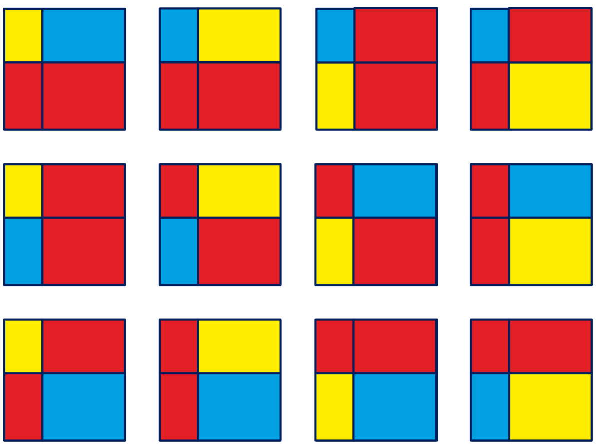
9 Je hebt drie brieven (a, b en c) geschreven aan vrienden en hun adressen op drie enveloppen (A, B en C) gezet. Zonder ergens op te letten, stop je in elk van de enveloppen één brief.
Op hoeveel manieren kunnen de brieven over de enveloppen verdeeld worden?

10 Je hebt drie dezelfde brieven en vijf gekleurde enveloppen: een gele, een blauwe, een rode, een oranje en een paarse. Zonder ergens op te letten, stop je in drie enveloppen een brief. Bijvoorbeeld: één brief in de gele enveloppe, één brief in de blauwe enveloppe en de resterende brief in de paarse enveloppe.
Op hoeveel manieren kunnen de drie identieke brieven over de vijf gekleurde enveloppen verdeeld worden?

Bekijk nog eens opgave 3 en opgave 7. De oplosmethoden van de opgaven 3 en 7 lijken erg op elkaar. Als je in opgave 3 de positie van de D en de L weet, ligt het ‘woord’ vast. We beginnen met het leggen van de letter D; we hebben daarvoor 5 mogelijkheden. Voor de letter L blijven dan nog 4 posities over. In totaal zijn er $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20$ rijtjes mogelijk.

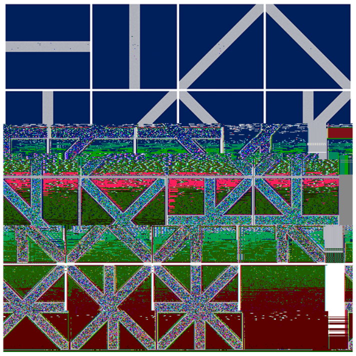
DLEEE	LDEEE	LEDEE	LEEDE	LEEED
DELEE	EDLEE	ELDEE	ELEDE	ELEED
DEELE	EDELE	EEDLE	EELDE	EELED
DEEEL	EDEEL	EEDEL	EEEDL	EEELD

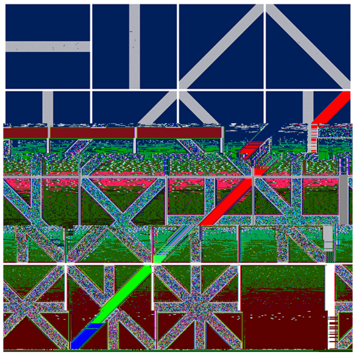
Evenzo geldt dat de compositie van het schilderij vastligt als je de positie van het gele en het blauwe vlak weet (opgave 7). We starten met de kleur geel; we hebben 4 vlakken die we geel kunnen verven. Voor de kleur blauw blijven dan nog 3 vlakken over. In totaal zijn er $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$ composities mogelijk.



11 Noteer zelf ook een tweetal opgaven waarvan je de manier van oplossen op elkaar vindt lijken.

De amerikaans kunstenaar Sol LeWitt (1928-2007) wordt gezien als één van de grondleggers van conceptuele kunst en minimal art. LeWitt is onder andere bekend geworden om zijn muurtekeningen, waarvan exemplaren te zien zijn in het Kröller-Müller Museum en het Stedelijk Museum. In het werk van LeWitt nemen geometrische vormen en combinatorische thema's een prominente plaats in, zoals in "Straight lines in four directions and all their possible combinations". Dit werk bestaat uit een rooster met in elke vierkant één of meerdere horizontale, verticale en diagonale lijnen (zie de linker figuur). Ga na waarom LeWitt aan 15 vierkanten genoeg had.



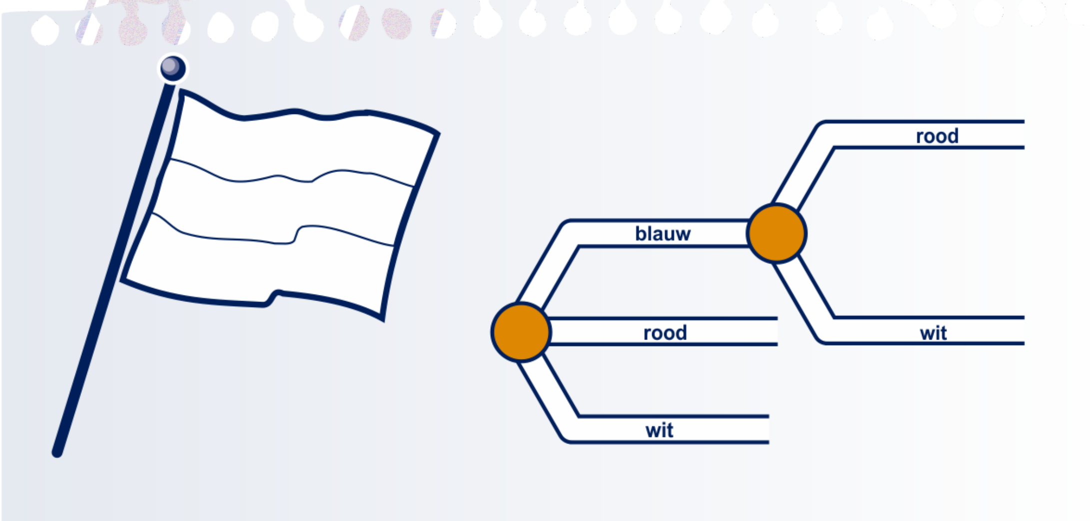


Uit dit werk van LeWitt is een mooie puzzel voortgekomen. Toen de wiskundige en schrijver Barry Cipra het werk van LeWitt zag, werd hij geboeid door het lijnenspel. Cipra merkte op dat sommige diagonale lijnen doorlopen van een zijde van het kunstwerk naar een andere (zoals de rode lijn in de rechter figuur) terwijl alle horizontale en verticale lijnen worden onderbroken (zoals groene lijn in de rechter figuur). Cipra stelde zichzelf de volgende vraag:

Is het mogelijk de 16 vierkantjes - zonder ze te draaien - te herschikken in het 4 bij 4 rooster zo, dat geen enkele horizontale, verticale of diagonale lijn wordt onderbroken?

Het antwoord op deze uitdagende vraag is ja en jij kunt een oplossing vinden. Er zijn zelfs meerdere oplossingen mogelijk! Probeer maar eens. Misschien kun je zelfs een verband vinden tussen verschillende oplossingen. Gebruik hiervoor de applet 'Sol LeWitt' , of knip de benodigde vierkantjes op het werkblad uit. Succes!
Tot slot, als je een oplossing van de LeWitt puzzel hebt gevonden en deze op een donut plakt, dan lopen de lijnen in elkaar door. Bijzonder toch?!

12 De Russische en de Nederlandse vlag bestaan beide uit drie horizontale banen, waarvan er één blauw is, één rood is en één wit is. We bekijken alle mogelijke vlaggen met drie horizontale banen: één blauwe, één rode en één witte.



Bij dit vlaggenprobleem kun je een **boom** of **boomdiagram** tekenen. Hierboven zie je het begin van zo'n boom.

a Neem de boom over en maak hem af.

b Welk eindpunt van de boom hoort bij de Nederlandse vlag?

c Hoeveel eindpunten heeft de boom? Hoeveel vlaggen zijn er dus mogelijk?

13 De vlag van Mauritius - een eiland in de Indische Oceaan - bestaat uit vier horizontale banen: een blauwe, een gele, een groene en een rode. Er zijn veel vlaggen mogelijk met vier horizontale banen, waarvan er één blauw, één geel, één groen en één rood is.

a Teken een bijbehorende boom.

b Hoeveel eindpunten heeft de boom?

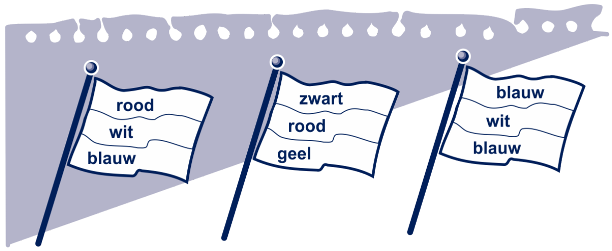
c Hoeveel vlaggen zijn er met de bovenste baan rood?
En hoeveel vlaggen zijn er met de derde baan rood?

d Hoeveel vlaggen zijn er met de bovenste baan rood en de onderste blauw?

Het is een heel karwei om de boom uit opgave 13a te tekenen. Je kunt de boom ook in woorden beschrijven: het is een 4-3-2-1-boom (aan de wortel splitst hij zich in 4 takken; die takken splitsen zich weer in 3 takken; deze splitsen zich vervolgens weer in 2 takken en deze laatste takken vervolgen met 1 tak).

1.3 Bomen en wegendiagrammen

14 Een vlag met drie horizontale banen moet ingekleurd worden. Er is keuze uit vijf kleuren: rood, wit, geel, blauw en zwart.



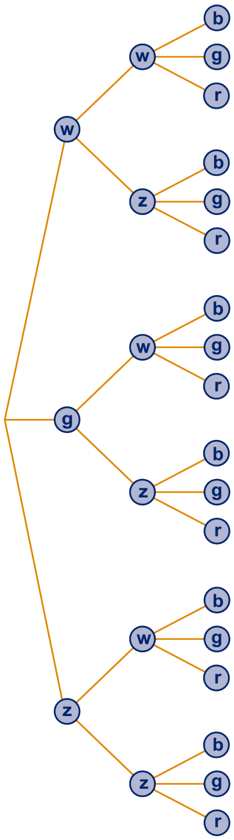
a Hoeveel verschillende vlaggen kunnen er gemaakt worden als alle banen een andere kleur moeten krijgen? Beschrijf de bijbehorende boom.

b Hoeveel verschillende vlaggen kunnen er gemaakt worden als de kleuren meer dan eens gebruikt mogen worden, maar niet in aan elkaar grenzende banen? Beschrijf de bijbehorende boom.

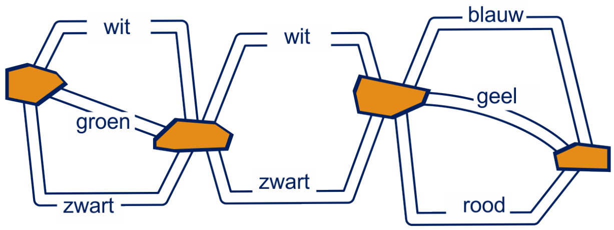
15 Voor het aankleden van een nieuw voetbalteam kan er gekozen worden uit:

- wit, groen of zwart voor de kousen;
- wit of zwart voor de broek en
- blauw, geel of rood voor het shirt.

Hoeveel tenues kunnen er samengesteld worden?



Het aantal tenues is gelijk aan het aantal eindpunten in de boom hiernaast. De boom heeft nogal veel takken! Eenvoudiger kan deze situatie in beeld gebracht worden met het onderstaande **wegendiagram**.



16

a Neem het wegendiagram van hierboven over en kleur daarin de route die hoort bij het tenue witte kousen, witte broek en rood shirt.

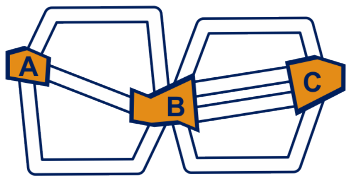
Elk tenue dat je kunt samenstellen, correspondeert met een route in het wegendiagram. Het aantal tenues is dus gelijk aan het aantal routes in het wegendiagram.

b Hoe vind je met het wegendiagram dat er 18 tenues mogelijk zijn?

17 De Belgische vlag bestaat uit drie verticale banen in de kleuren geel, rood en zwart. We willen weten hoeveel verschillende vlaggen we kunnen maken met deze drie kleuren als alle banen een andere kleur moeten krijgen.
Waarom kun je bij dit telprobleem geen wegendiagram tekenen?

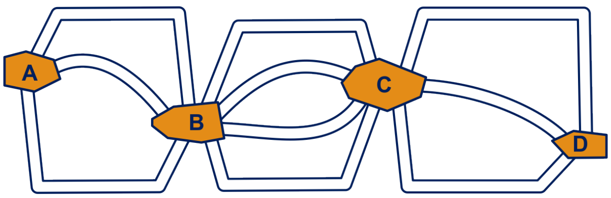
Opmerking
Een boomdiagram tekenen gaat vrijwel altijd, zeker als je wat geduld hebt. Een wegendiagram tekenen is niet altijd mogelijk.

18 In het wegendiagram hiernaast kun je van A, via B, naar C lopen.

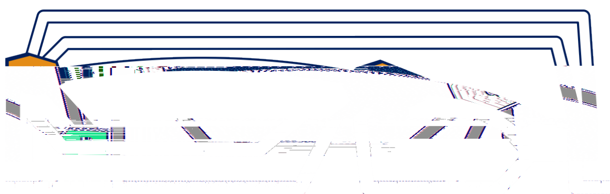


a Stel dat je van A naar B voor de bovenste weg kiest. Op hoeveel manieren kun je de route dan vervolgen naar C?
b Dezelfde vraag als in **a**, maar nu als je van A naar B voor de middelste weg kiest? En als je van A naar B voor de onderste weg kiest?
c Hoeveel routes zijn er in totaal van A, via B, naar C?

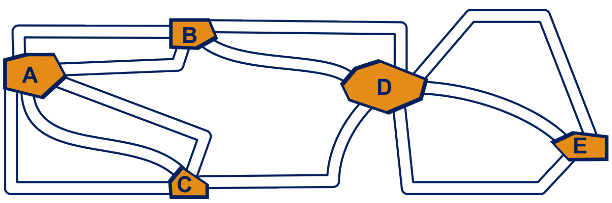
19 **a** Hoeveel routes zijn er in het wegendiagram hieronder van A (via B en C) naar D?
b En hoeveel routes zijn er van A naar D en dan weer terug naar A?



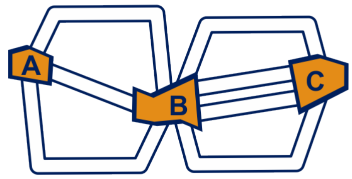
Op het kaartje hieronder zie je dat je van P rechtstreeks naar R kunt, maar je kunt ook via Q.
c Hoeveel routes zijn er in totaal van P naar R?



d Hoeveel verschillende routes zijn er in het wegendiagram hieronder van A naar E?



Het vermenigvuldigprincipe
Het aantal routes van A via B naar C vind je door het aantal wegen van A naar B te vermenigvuldigen met het aantal wegen van B naar C.



Opmerking
Je kunt tellen van wegen in dit soort wegendiagrammen nog extra oefenen met de applet 'wegendiagrammen'. Lukt niveau 2 ook?

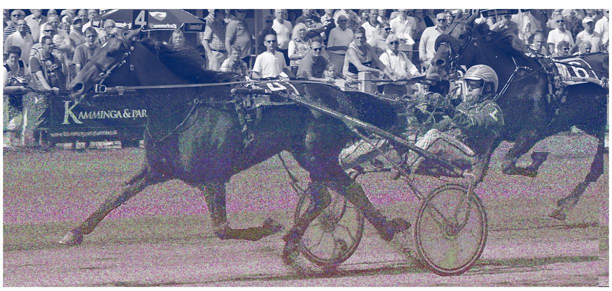
20

Met de cijfers 0, 1, 2, 3, 4 kun je rijtjes maken. Bijvoorbeeld 130334; dit is een rijtje van lengte 6.

- **a** Hoeveel rijtjes van lengte 6 kun je maken? Beschrijf de bijbehorende boom of het bijbehorende wegendiagram.
- **b** Hoeveel rijtjes van lengte 5 kun je maken waarbij je elk cijfer één keer gebruikt? Beschrijf de bijbehorende boom of het bijbehorende wegendiagram.
- **c** Hoeveel rijtjes van lengte 3 kun je maken waarbij je elk cijfer hooguit één keer gebruikt? Beschrijf de bijbehorende boom of het bijbehorende wegendiagram.
- **d** Hoeveel rijtjes van lengte 8 zijn er die beginnen met een 0 en eindigen op een 4? Beschrijf de bijbehorende boom of het bijbehorende wegendiagram.
- **e** Kun je zonder te rekenen verklaren waarom er net zo veel rijtjes van lengte 6 zijn als rijtjes van lengte 8 die beginnen met een 0 en eindigen op een 4?

21

Bij een draverij doen acht paarden mee. Voor het gemak noemen we ze A tot en met H. Piet Ruin is een echte gokker. Hij heeft een zogenaamd triobriefje gehaald. Daarop kan worden voorspeld welke paarden achtereenvolgens als eerste, tweede en derde zullen eindigen. Als hij zijn briefje goed invult, kan hij aardig winst maken.



- **a** Hoeveel verschillende mogelijkheden heeft Piet om zijn briefje in te vullen? Beschrijf eventueel de bijbehorende boom of het bijbehorende wegendiagram.

Piet is niet alleen een gokker. Hij denkt ook een kenner te zijn. Zo is hij er van overtuigd dat paard D of paard G als eerste eindigt. Verder weet hij zeker dat paard F niet bij de eerste drie eindigt.

b Op hoeveel manieren kan hij, gewapend met deze kennis, zijn briefje invullen? Maak eventueel een boom of wegendiagram.

22

Je vriend heeft een telefoonnummer dat bestaat uit de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9. De volgorde van deze cijfers ben je vergeten.

a Hoeveel van die telefoonnummers zijn er mogelijk?

b Hoeveel van die nummers zijn er nog mogelijk als je je herinnert dat het telefoonnummer begint met 35?

c Hoeveel telefoonnummers zijn er met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8, denk je?

Hint 1.

d Verzin een koppeling (zoals in de hint van het vorige onderdeel) tussen telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5 en 7 en telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9. Hoeveel telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9 horen volgens jouw koppeling bij het nummer 135117?

e Hoeveel telefoonnummers zijn er met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5 en 7?

f Probeer eens uit te zoeken, weer met behulp van een koppeling, hoeveel telefoonnummers er zijn met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 7. Leg uit hoe je koppeling werkt (dat kan door een of twee voorbeelden te geven).

1.4 Geordende grepen

23 Vijf vriendinnen (Ada, Betty, Christiane, Diana en Ellen) gaan naar de schouwburg. Ze hebben vijf plaatsen besproken op één rij.

- **a** Op hoeveel manieren kunnen ze de plaatsen onderling verdelen?
- **b** Hoeveel rangschikkingen zijn er mogelijk van zes vriendinnen op één rij?

Vijf vriendinnen (maar ook: letters, cijfers, kleuren, ...) kun je op $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ manieren in volgorde zetten. Elke rangschikking, elk rijtje-van-vijf, noemen we een **permutatie** van vijf elementen.
Voor het product $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ bestaat een afkorting: 5!.
Dit spreek je uit als 5 **faculteit**. (Het uitroepteken is hier dus een nieuw rekensymbool en heeft niets met opwinding te maken.)
Er geldt $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Hieronder staan de uitkomsten van $x!$ voor $x = 1,2,3,4,5$.
$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$

24 De faculteitsgetallen groeien duizelingwekkend snel.

- **a** Neem over en vul in.
  $6! = ...$ $8! = ...$
  $7! = ...$ $9! = ...$

Je hebt net berekend dat er 362880 permutaties van 9 elementen zijn.

- **b** Kun je nu onmiddelijk zeggen hoe groot 10! is?
- **c** Noteer het verband dat tussen $n!$ en $(n-1)!$ bestaat.

Steeds als je een aantal verschillende elementen moet rangschikken (op een rij moet zetten), kun je op je rekenmachine de knop $x!$ gebruiken.

25 Ebbe berekent 12! met zijn rekenmachine. Op het scherm verschijnt de uitkomst: 4,79E08.
Dat betekent: 4,79 maal 10^8 ofwel 479.000.000.
Deze uitkomst is niet helemaal precies.
Bereken de precieze uitkomst van 12! uitgaande van $10! = 3628800$.

26 **a** Bereken op je rekenmachine 15! gedeeld door 14!. Is de uitkomst precies?
b Bereken zonder rekenmachine 25! gedeeld door 23!.

27 Vul de juiste faculteiten in.
a $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 12! : \ldots$
b $41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 = \ldots : \ldots$
c $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) = \ldots : \ldots$

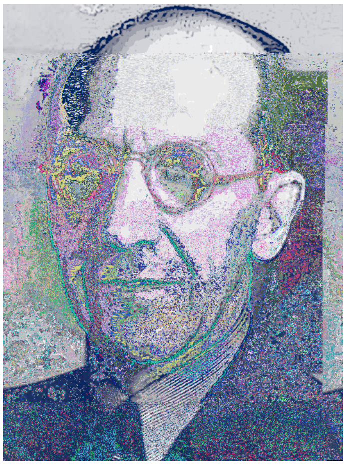
28 Er zijn zes klinkers: A, E, I, O, U en Y. Je kiest vier keer een klinker en schrijft die op een rijtje. Zo'n rijtje waarbij de volgorde van belang is, noemen we ook wel een **geordende greep**. We gaan op twee manieren rijtjes van lengte 4 maken.

- *Manier 1 - trekken zonder terugleggen*:
  een klinker mag maar één keer gekozen worden.
- *Manier 2 - trekken met terugleggen*:
  een klinker mag meerdere keren gekozen worden.

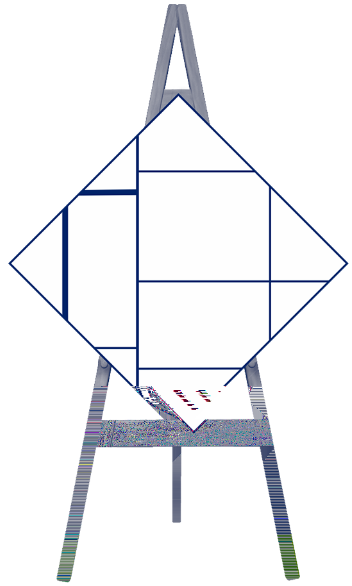
a Hoeveel rangschikkingen kun je maken als elke klinker maar één keer mag voorkomen (manier 1)? Wat voor een soort boom hoort daarbij?
b Hoeveel rangschikkingen kun je maken als een klinker meerdere malen (zelfs zes keer) mag voorkomen (manier 2)? Wat voor een soort wegendiagram hoort daarbij?

Rijtjes die je krijgt op manier 1 heten **geordende grepen van 4 uit 6 zonder herhaling**, of **permutaties van 4 uit 6**.
Rijtjes die je krijgt op manier 2 heten **geordende grepen van 4 uit 6 met herhaling**.

Het werk van de Nederlandse kunstschilder Piet Mondriaan (1872-1944) is wereldberoemd. Zijn composities zijn ogenschijnlijk eenvoudig: horizontale en verticale lijnen, en een beperkt aantal kleuren.
Een leuk weetje: Mondriaans onvoltooide schilderij *Victory Boogie Woogie* werd in 1997 voor 82 miljoen gulden (circa 37 miljoen euro) gekocht door De Nederlandsche Bank, die met dit gebaar afscheid wilde nemen van de gulden. Velen waren het niet met de aankoop eens. Ze vonden het schandalig dat zo'n ongekend hoog bedrag werd betaald voor een schilderij waarop de papieren plakstroken, die Mondriaan gebruikte om rechte lijnen te maken, nog zaten!
Het werk *Victory Boogie Woogie* - waaraan Mondriaan tot enkele dagen voor zijn dood werkte - kun je bezichtigen in het Gemeentemuseum Den Haag.



29 Hiernaast zie je een vlakverdeling in de stijl van Mondriaan. De compositie bestaat uit tien vlakdelen waarvan we er vier kleuren: één rood, één blauw, één geel en één zwart (de overige vlakken laten we wit).
Hoeveel kleurcomposities zijn er mogelijk?



Bij het maken van een kleurcompositie kiezen we vier vlakdelen (uit de tien): het eerste vlak kleuren we rood, het tweede blauw, het derde geel en het vierde zwart. De *volgorde* is bij dit telprobleem van belang en een vlakdeel kleuren we natuurlijk niet tweemaal (ofwel: we kiezen *zonder herhaling*). We spreken dan van een **permutatie van 4 uit 10**. Het aantal kleurcomposities (permutaties) is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

30 **a** Bereken het aantal permutaties van 4 uit 9.

Nils berekent het aantal permutaties van 4 uit 9 met zijn rekenmachine door 9! te delen door 5!, ofwel $\frac{9!}{5!}$.

b Laat zien dat dit aantal inderdaad zo berekend kan worden.

Hint 2.

c Schrijf het aantal permutaties van 13 uit 26 ook als quotiënt van twee faculteiten. Doe hetzelfde voor het aantal permutaties van 20 uit 26.

Als je het aantal permutaties van 3 uit 7 wilt bepalen, kun je op je rekenmachine de optie $n\mathrm{P}r$ gebruiken.
Er geldt $7\mathrm{P}3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

31 **a** Bereken op je GR het aantal permutaties van 13 uit 26.
b Bereken met je GR het aantal permutaties van 20 uit 26. Bereken ook het aantal permutaties van 26 uit 26.
c Typ in op je GR: 26 nPr 30 en druk op ENTER.
Waarom geeft de GR hier het antwoord 0, denk je?

32 Bereken het aantal rangschikkingen van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Doe dat op twee manieren: met de optie ! en met de optie $n\mathrm{P}r$.

Bij een **permutatie van k elementen uit n** (of een **geordende greep van k uit n zonder herhaling**) is niet alleen de keuze van die elementen, maar ook de volgorde belangrijk.
Het *aantal* permutaties van k elementen uit n is: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Bij een **geordende greep van k uit n met herhaling** is het aantal rangschikkingen n^k.

33

Anneke heeft op maandag de eerste zeven uur les, zonder tussenuur. Ze heeft die dag de vakken DU, GS, LO, MU, NA, NE en WI.

a Hoeveel verschillende roosters zijn er voor Anneke die dag mogelijk?

b Hoeveel roosters zijn er nog mogelijk, als je weet dat NE eerder dan GS komt?

c Hoeveel roosters zijn er mogelijk als je weet dat NE en WI vóór de kleine pauze komen, GS en LO tussen de twee pauzes in, en DU, MU en NA na de grote pauze?

34

Tijdens een fancy-fair in een dorpje in Noord-Brabant zijn er honderd loten verkocht, genummerd 1 tot en met 100. Bij de loterij kun je een eerste, een tweede, een derde en een vierde prijs winnen. Een trekkingslijst bestaat uit vier nummers: het nummer van de eerste prijs, dat van de tweede, van de derde en van de vierde prijs.

a Hoeveel verschillende trekkingslijsten zijn er mogelijk?

b Hoeveel verschillende trekkingslijsten zijn er mogelijk met alle vier de nummers oneven?

c Hoeveel verschillende trekkingslijsten zijn er mogelijk, waarbij precies één van de vier nummers oneven is?

35

De nummerborden in Nederland van auto's tussen 1980 en 1999 zijn van de vorm LL-LL-CC (eerst twee letters, dan weer twee letters en daarna twee cijfers). De letters A, C, E, I, M, O, Q, U en W worden niet gebruikt. Verder kunnen alle letters voorkomen. Voor de cijfers wordt gebruik gemaakt van 0 tot en met 9.
Twee voorbeelden: NL-BB-87 en YK-XV-33.

a Hoeveel verschillende nummerborden van dit type zijn er?

b Het nummerbord van een bedrijfswagen begint met een B of een V. Hoeveel verschillende nummerborden voor bedrijfswagens zijn er?

c Hoeveel verschillende nummerborden zijn er waarbij alle vier de letters en beide cijfers verschillend zijn?

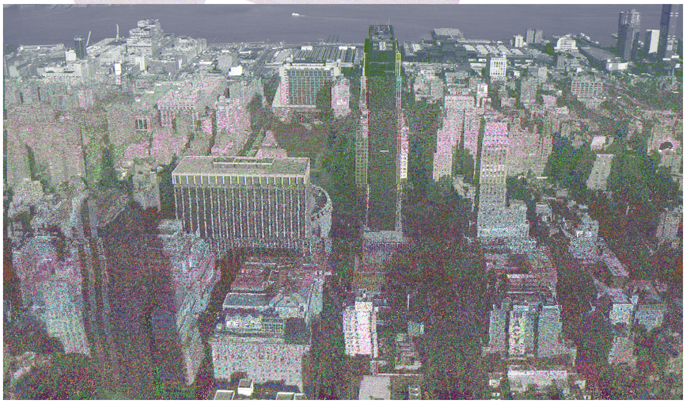
Op een parkeerplaats staan 25 auto's.

d Bij hoeveel van die auto's verwacht je dat alle vier de letters en beide cijfers verschillend zijn?

e Hoeveel verschillende nummerborden zijn er die beginnen met BB en eindigen op 00?

1.5 Roosters

36 De wegenstructuur in Amerikaanse steden is in het algemeen erg overzichtelijk. In de benaming van de wegen is die overzichtelijkheid terug te vinden: 1st street, 2nd street ... en 1st avenue, 2nd avenue,... .

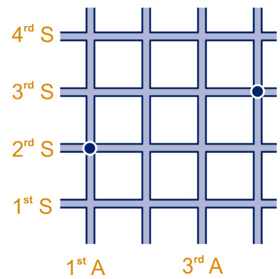


Het karakteristieke schaakbordpatroon van veel Amerikaanse steden. Noord-zuid lopen de avenue's, oost-west de streets.

Randy Walker wandelt van het kruispunt 2nd street, 1st avenue naar het kruispunt 3rd street, 4th avenue zonder omwegen.

a Maak een plattegrond zoals in figuur 1 en teken daarin alle mogelijke wandelingen.

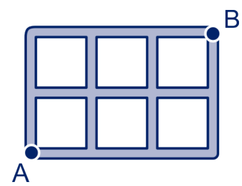
b Doe hetzelfde voor een wandeling van 2nd street, 1st avenue naar 4th street, 3rd avenue.



figuur 1

Bij het stukje plattegrond (figuur 2) zijn 10 verschillende wandelingen van A naar B mogelijk.

c Teken deze wandelingen. Pak het systematisch aan.

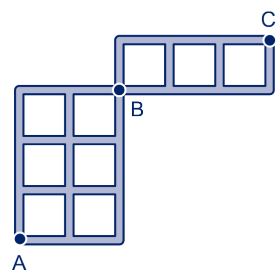


figuur 2

d Hoeveel wandelingen zijn er in de plattegrond (figuur 3) mogelijk:

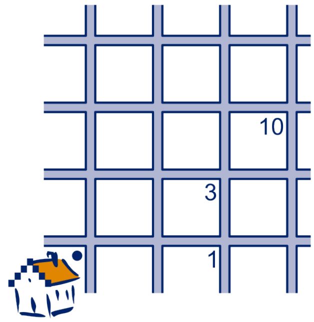
- van A naar B?
- van B naar C?

e Hoe kun je uit je antwoorden op de vorige vraag het aantal wandelingen van A naar C vinden?



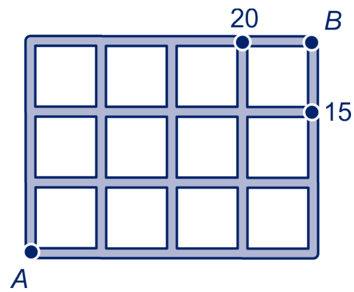
figuur 3

37 In de plattegrond hiernaast wordt bij elk kruispunt vermeld hoeveel routes er zonder omwegen naar dat kruispunt leiden, gerekend vanaf het stadhuis. Bij drie kruispunten is het aantal routes al ingevuld.
Vul zelf de aantallen in bij de andere twaalf kruispunten.



Bij het tellen van het aantal routes raak je makkelijk in de knoop. Daarom is het handig om bij elk 'tussenpunt' het aantal routes naar dat punt te schrijven.

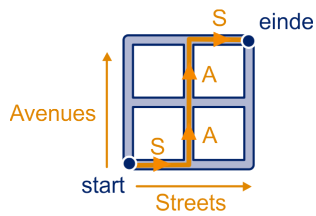
38 Punt B ligt vier hokjes rechts van A en drie hokjes boven A. Nils heeft geteld dat er 20 kortste routes zijn van A naar het punt links van B; hij heeft ook geteld dat er 15 kortste routes zijn van A naar het punt onder B. Die aantallen staan bij de betreffende kruispunten.
Weet je nu ook hoeveel kortste routes er zijn van A naar B?



Je hebt nu een principe ontdekt waarmee je aantallen kortste routes in een rooster kunt uitrekenen.

- Noteer het getal 1 bij elk punt in het rooster dat op maar één manier te bereiken is.
- Gebruik vervolgens de optelmethode om het aantal routes naar de overige roosterpunten te bepalen.

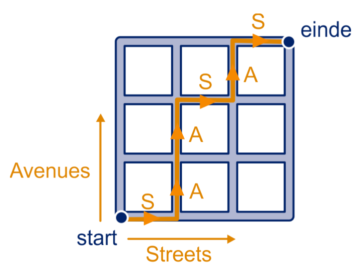
39 De wandelingen die Randy Walker maakt, zijn ook te beschrijven met een rijtje bestaande uit de letters A (avenue) en S (street). In figuur 1 zie je de wandeling bij het rijtje $SAAS$.



figuur 1

Alle wandelingen van opgave 36b kun je zo beschrijven. Je krijgt dan: $SSAA$, $SASA$, $SAAS$, $ASSA$, $ASAS$, $AASS$.

De wandeling in figuur 2 voert langs drie stukken S en drie stukken A.

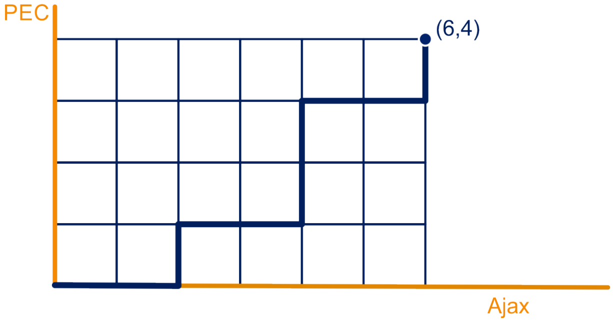


figuur 2

a Teken een tweede mogelijke wandeling van begin naar einde.

b Beschrijf alle mogelijke wandelingen met rijtjes letters. Probeer dit systematisch te doen.

40 Een verslaggever die de wedstrijd Ajax-PEC moest verslaan, is tijdens de wedstrijd in slaap gevallen. Als hij aan het eind van de wedstrijd wakker wordt, hoort hij dat de einduitslag 6-4 is geworden. Hij moet echter gokken naar het scoreverloop tijdens de wedstrijd. Een mogelijk scoreverloop is: 1-0, 2-0, 2-1, 3-1, 4-1, 4-2, 4-3, 5-3, 6-3, 6-4. Dit scoreverloop kan worden voorgesteld door een route in een rooster. De tussenpunten $(1{,}0)$, $(2{,}0)$, $(2{,}1)$, enz. komen overeen met de tussenstanden.



a Uit hoeveel verschillende scoreverlopen kan de verslaggever kiezen?

Later hoort hij van zijn vrouw de ruststand: 4-2.

b Teken in een rooster drie verschillende routes die horen bij een ruststand 4-2.

c Hoeveel scoreverlopen met ruststand 4-2 zijn er mogelijk?

Tenslotte schiet de verslaggever te binnen dat Ajax de gehele wedstrijd heeft voorgestaan.

d Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn er nu nog mogelijk?

Hint 3.

Het is niet toevallig dat een scoreverloop kan worden weergegeven als route in een rooster. Er zijn bij elk doelpunt maar twee mogelijkheden: Ajax scoort òf PEC scoort. Net zoals je bij elk punt in een rooster steeds twee mogelijkheden hebt: naar boven òf naar rechts.
Het scoreverloop kan worden voorgesteld door een rijtje van tien letters, bijvoorbeeld: AAPAAPPAAP. Je kunt alle mogelijke scoreverlopen bij de einduitslag 6-4 vinden door alle rijtjes van zes letters A en vier letters P op te schrijven. Wanneer je dat systematisch doet (en je beschikt over voldoende tijd), dan zul je de 210 mogelijkheden wel vinden. Met de optelmethode vind je het antwoord veel sneller!

Veel telproblemen kunnen worden opgelost met behulp van het onderstaande getallenpatroon: de driehoek van Pascal. Elk getal ($\neq 1$) is de som van zijn twee bovenburen.

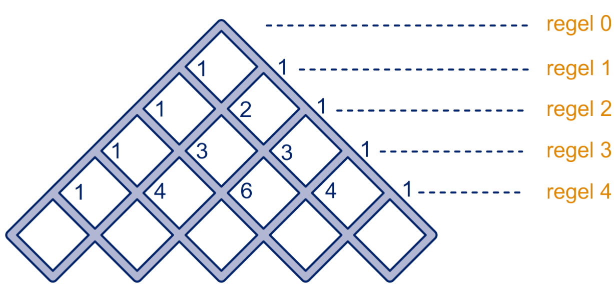
1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Het getallenpatroon is genoemd naar de Franse filosoof en wiskundige Blaise Pascal. Het werd onder zijn naam in 1665 (postuum) gepubliceerd.
Pascal was niet de eerste wiskundige die de tabel ontdekte en gebruikte. In een Chinees wiskundeboek, van de schrijvers Ssu Yuan Yu en Chuh Shih Chieh, uit het jaar 1303, is de tabel al te vinden. De tabel is waarschijnlijk nog veel ouder, want hij wordt in het Chinese boek 'de antieke tabel' genoemd.

Blaise Pascal
(1623 - 1662)

41 Bekijk de driehoek van Pascal. De driehoek begint met regel 0; de onderste regel is regel 9.
Hoe ziet regel 10 er uit?

42 Nog een keer de driehoek van Pascal maar nu in de vorm van een plattegrond.



Op regel 0 staat 1. De getallen op regel 1 zijn opgeteld 2. De getallen op regel 2 zijn opgeteld 4.

a Vul deze lijst aan tot en met regel 6.

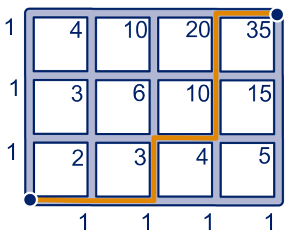
b Heb je enig iedee welke uitkomst je krijgt als je de getallen op regel 10 optelt? En op regel x?

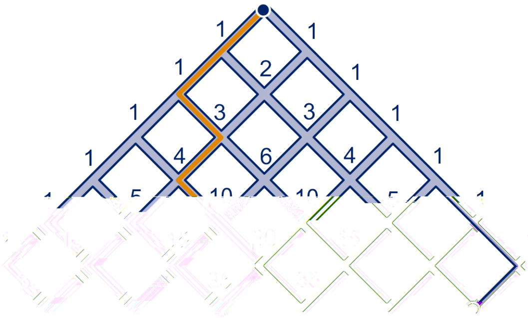
Opvallend, toch? Elke som is een machten van 2.

c Weet je daar een verklaring voor? Welke?

1.5 Roosters

43 In opgave 38 heb je berekend hoeveel kortste routes er zijn in een rooster van $(0,0)$ naar $(4,3)$. Als het goed is, kwam je aan 35. Elke kortste route bestaat uit 7 stappen (een stap is 1 naar boven of 1 naar rechts). Van die 7 stappen moet je er 3 naar boven doen (en 4 naar rechts). Het aantal kortste routes vind je in de driehoek van Pascal in de 7^{e} rij (zie onderstaande figuur).

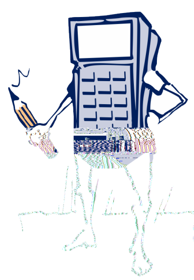




a In welke rij kun je het aantal kortste routes van $(0,0)$ naar $(5,2)$ vinden? Hoeveel van die routes zijn er?

b Hoeveel kortste routes zijn er van $(0,0)$ naar $(6,4)$?

Als je met behulp van de driehoek van Pascal het aantal kortste routes van $(0,0)$ naar $(14,6)$ wilt bepalen, moet je de driehoek aanvullen tot en met de 20^{e} rij. Dat is een heel karwei. Dit getal kun je gelukkig ook eenvoudig op je (grafische) rekenmachine berekenen met de optie $n\mathrm{C}r$.



De rekenmachine geeft $20 \text{ nCr } 6 = 38.760$.

De 20 staat voor het totaal aantal stappen van $(0,0)$ naar $(14,6)$ en de 6 staat voor het aantal stappen dat je naar boven gaat.

Het aantal kortste routes van $(0,0)$ naar $(14,6)$ noteren we met het **combinatiegetal** $\binom{20}{6}$; spreek uit: twintig boven zes.

1.5 Roosters

44 Het aantal kortste routes van $(0{,}0)$ naar $(14{,}6)$ bestaat uit 20 stappen. In plaats van te letten op het aantal stappen dat je naar boven gaat, kun je ook letten op het aantal stappen dat je naar rechts gaat; dat zijn er 14.

a Bereken $\binom{20}{14}$ op je rekenmachine. Geldt $\binom{20}{14} = \binom{20}{6}$?

$\binom{20}{7}$ is het aantal kortste routes van het punt $(0{,}0)$ naar het punt B.

b Wat zijn de coördinaten van B? Er zijn twee mogelijkheden; geef ze beide.

c Met welk combinatiegetal kun je het aantal kortste routes van $(0{,}0)$ naar $(10{,}8)$ noteren? Er zijn twee mogelijkheden; geef ze beide.

d Voor welk getal $n \neq 7$ geldt: $\binom{16}{n} = \binom{16}{7}$?

e Welk combinatiegetal hoort bij het aantal kortste routes van $(2{,}3)$ naar $(8{,}6)$? Bereken dit aantal op je rekenmachine.

45

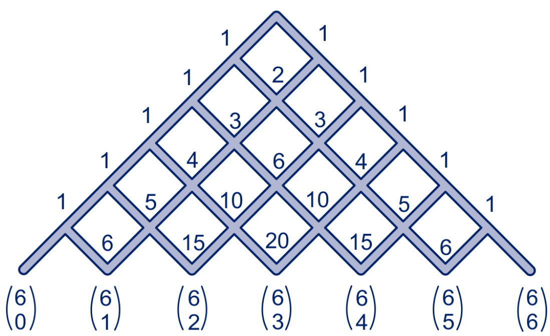
a Hoeveel kortste routes zijn er van $(0{,}0)$ naar $(7{,}3)$?

b Hoeveel kortste routes zijn er van $(7{,}3)$ naar $(10{,}8)$?

c Hoeveel kortste routes zijn er van $(0{,}0)$, via $(7{,}3)$, naar $(10{,}8)$?

d Hoeveel kortste routes zijn er van $(0{,}0)$, via $(7{,}3)$ naar $(10{,}8)$ en dan vervolgens via $(5{,}5)$ terug naar $(0{,}0)$?

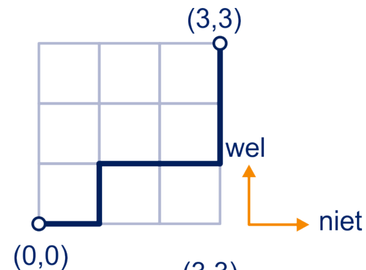
Allerlei situaties waarbij steeds een keus gemaakt moet worden uit twee mogelijkheden, kunnen worden beschreven door rijtjes waarin twee symbolen voorkomen. Elk van die rijtjes is weer te geven als route in een rooster. Met de driehoek van Pascal kun je het aantal routes bepalen.

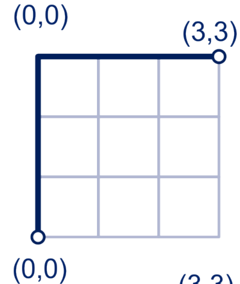


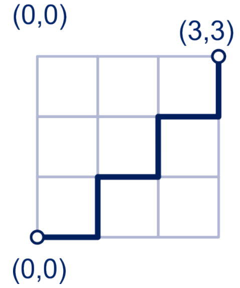
46 Zes leerlingen (Anne, Bas, Claudia, Daan, Ebbe en Fenna) hebben zich opgegeven om de docent Engels te helpen bij de voorbereidingen van een hightea ter gelegenheid van het 80-jarig bestaan van de school. De docent heeft maar drie helpers nodig. Hij kan bijvoorbeeld kiezen voor Anne, Daan en Ebbe, of voor Bas, Claudia en Fenna, of ... .

a Probeer alle mogelijke keuzes op te schrijven. Werk systematisch.

Bij het kiezen van 3 leerlingen uit de 6 moet je zes beslissingen nemen: voor elke leerling moet je kiezen of je die leerling wel of niet neemt. Elke keuze betekent een stap in een rooster; kies je de leerling wel, dan ga je naar boven, kies je de leerling niet, dan ga je naar rechts.
Omdat je drie leerlingen wel kiest (en dus drie niet), kom je - startend in $(0{,}0)$ - uit in het punt $(3{,}3)$.
De route in het bovenste rooster hoort bij de keuze Bas, Ebbe, Fenna.







b Ga voor de routes in de andere twee roosters na bij welke keuze ze horen.

c Teken in je schrift een rooster en geef daarin - in verschillende kleur - de routes aan die horen bij de keuzes:
- Anne, Bas, Daan,
- Daan, Ebbe, Fenna,
- Bas, Claudia, Ebbe.

Bij elke keuze van 3 leerlingen uit de 6 hoort een kortste route in een rooster van $(0{,}0)$ naar $(3{,}3)$. En andersom hoort bij elke kortste route van $(0{,}0)$ naar $(3{,}3)$ een keuze van 3 leerlingen uit de 6.

d Hoeveel kortste routes zijn er van $(0{,}0)$ naar $(3{,}3)$?
Hoeveel keuzes van 3 leerlingen uit de 6 zijn er dus?
Klopt dat aantal met wat je gevonden hebt bij **a**?

47 De gymdocent organiseert ter gelegenheid van het 80-jarig bestaan van de school een viswedstrijd. Ook hij zoekt drie helpers. De gymdocent heeft de keus uit twintig leerlingen.
Bij een keuze van 3 uit de 20 hoort weer een route in een rooster. We beginnen de route weer in $(0{,}0)$.

a Uit hoeveel stappen bestaat zo'n route? Hoe vaak ga je naar boven? En hoe vaak naar rechts? In welk punt eindig je dus?

b Hoeveel keuzes van 3 uit 20 zijn er? Schrijf je antwoord eerst als combinatiegetal dat je vervolgens uitrekent op je GR.

48

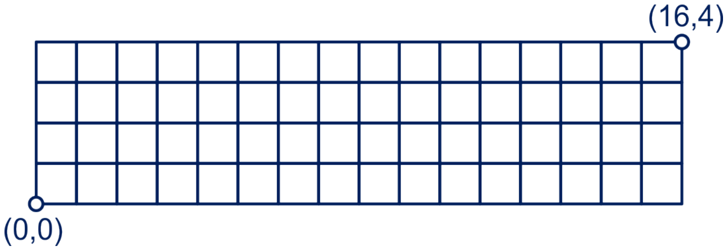
De mentor van klas V1A zoekt vier bovenbouwleerlingen die willen helpen bij de organisatie van een klassenfeest. De mentor kan kiezen uit 20 vrijwilligers: 12 jongens en 8 meisjes.

Het totaal aantal keuzes dat de mentor kan maken is even groot als het aantal kortste routes in een rooster van $(0,0)$ naar een punt B.

a Wat zijn de coördinaten van B?

b Hoeveel keuzes zijn er in totaal mogelijk?

Elke keuze correspondeert met een 20-stapsroute van $(0,0)$ naar $(16,4)$ in het rooster hieronder.



De eerste 12 stappen in zo'n route gaan over de jongens: kiest de mentor de eerste jongen, dan is de eerste stap naar boven; anders naar rechts. De tweede stap correspondeert met de tweede jongen; enzovoort.
De volgende 8 stappen corresponderen met de meisjes.
Stel dat de mentor één jongen kiest (en dus drie meisjes).

c Teken in een rooster drie verschillende routes die horen bij een keuze van 1 jongen en 3 meisjes. Gebruik kleuren.

d Hoeveel keuzemogelijkheden heeft de mentor als hij 1 jongen kiest en 3 meisjes?

e Via welk punt loopt een route die hoort bij een keuze van 3 jongens en 1 meisje? Hoeveel van die keuzes zijn er?

f Hoeveel keuzes zijn er als de mentor 2 jongens kiest en 2 meisjes?

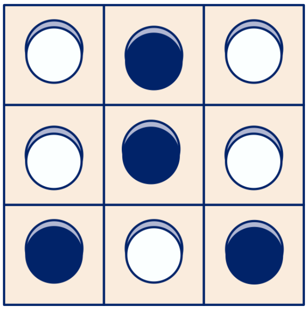
g Hoeveel keuzes zijn er als de mentor alleen jongens kiest?

h Hoeveel keuzes zijn er als de mentor alleen meisjes kiest?

i Tel je antwoorden uit **d** tot en met **h** bij elkaar op.
Klopt je antwoord met dat van **b**?

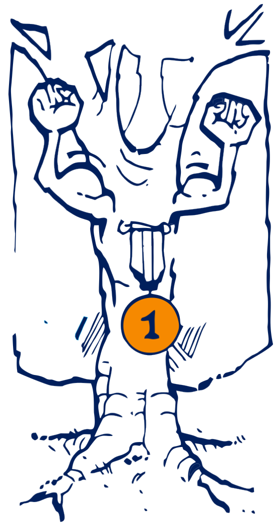
Voorbeeld

Op een bord met negen velden worden vijf witte en vier donkere schijven geplaatst. Een voorbeeld zie je hiernaast.
Hoeveel mogelijkheden zijn er?



Voor elk vakje heb je de keuze uit twee mogelijkheden: een witte of donkere schijf. Bij de voorbeeldopstelling hoort het volgende rijtje.

vakje	1



50 De toestand van twaalf bomen aan de zuidkant van de Parklaan wordt onderzocht. Zieke exemplaren worden gemerkt met een kruis. Er blijken vijf bomen ziek te zijn.

a Op hoeveel volgordes kunnen die vijf bomen over de Parklaan verspreid staan?

b Hoeveel volgordes zijn er als je weet dat de eerste drie bomen gezond zijn?

Hint 5.

51 Om haar profiel aan te vullen moet Saadet nog drie vakken kiezen uit de vakken: na, ak, ckv, gs, du, bi, wb.

a Op hoeveel manieren kan zij haar profiel aanvullen?

b Bereken het aantal manieren waarop zij haar profiel aan kan vullen als zij geen enkel exact vak (na, bi, wb) kiest.
Doe hetzelfde in het geval zij één exact vak kiest.

c Op hoeveel manieren kan zij dit doen als zij hoogstens één van de exacte vakken wil kiezen?

52 Bij het kaartspel toepen gebruik je niet alle kaarten; van elke kleur (schoppen, harten, ruiten en klaveren) gebruik je acht kaarten: 7, 8, 9, 10, B, V, H, A. In totaal gebruik je dus 32 kaarten. Aan het begin van het spel wordt er gedeeld: iedere speler krijgt 4 kaarten.
Egon speelt mee en krijgt dus 4 kaarten.

a Hoeveel verschillende combinaties van 4 kaarten kan Egon krijgen?

Elke combinatie die Egon kan krijgen, correspondeert met een 32-stapsroute in een rooster van $(0,0)$ naar $(28,4)$.
De eerste stap laten we corresponderen met ♠7, de tweede stap met

1 klaveren?
Hoeveel van die combinaties zijn er?

f Via welk punt in het rooster loopt een route die hoort bij een combinatie waarbij er alleen schoppen en harten zijn (het mogen ook alle vier schoppen of alle vier harten zijn)?
Hoeveel van die combinaties zijn er?

g Hoeveel combinaties zijn er mogelijk als er alleen schoppen en ruiten bij zijn (alle vier schoppen of alle vier ruiten mag ook)?

Hint 6.

h Hoeveel combinaties zijn er mogelijk met twee 9's en twee 10'en? Pas de stappen in het rooster op een geschikte manier aan!

53

De basketbalcompetitie telt tien clubs. De vier clubs die het hoogst eindigen, spelen de zogenaamde play-offs om het kampioenschap van Nederland. Ze bepalen in een onderlinge competitie wie 1, 2, 3 en 4 wordt. Die volgorde noemen we de "uitslag" van de competitie.

a Hoeveel viertallen uit de tien clubs zijn er mogelijk?

Een van die viertallen wordt gevormd door: Weert, Den Bosch, Den Helder en Groningen.

b Hoeveel uitslagen zijn er voor deze vier mogelijk?

c Hoe vind je uit **a** en **b** het aantal uitslagen dat mogelijk is voor de tien clubs?

Het aantal uitslagen voor de tien clubs kun je ook rechtstreeks uitrekenen.

d Doe dat.

Opmerking

Je hebt nu op twee manieren berekend hoeveel permutaties er zijn van 4 uit 10:

$\binom{10}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ en ook $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Hieruit volgt: $\binom{10}{4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

54

Bereken $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$. Klopt dat met de driehoek van Pascal?

Opmerking

Het aantal combinaties van 4 uit 10 kun je uit het aantal permutaties van 4 uit 10 berekenen:

$\dbinom{10}{4} = \dfrac{\text{aantal permutaties van 4 uit 10}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

55

a Leg uit: $\dbinom{10}{4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \;\cdot\; 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \;\cdot\; 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!}$.

b Bereken $\dfrac{10!}{4! \cdot 6!}$ met je rekenmachine.
Controleer je uitkomst in de driehoek van Pascal.

c Geef een uitdrukking zoals in **b** voor $\dbinom{12}{3}$ en bereken de uitkomst daarvan met je rekenmachine.

Het aantal combinaties (van k uit n) kan worden uitgedrukt in drie faculteitsgetallen: $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Voorbeeld

$\dbinom{9}{4} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \;\cdot\; 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \;\cdot\; 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{9!}{4! \cdot 5!}$

Je kunt dit resultaat als volgt verklaren.
9 elementen laten zich op 9! manieren rangschikken; bij elke rangschikking kan je een streep zetten tussen het vierde en vijfde element, bijvoorbeeld:
4 7 1 3 | 8 5 2 6 9.
Bij een combinatie van 4 elementen uit 9 gaat het er alleen om welke getallen VOOR en welke getallen ACHTER de streep staan.
Voor de streep betekent: uitgekozen; achter de streep: niet uitgekozen. Omdat je de getallen voor de streep op 4! en de getallen achter de streep op 5! manieren kunt rangschikken, volgt nu:
$\dbinom{9}{4} = \dfrac{9!}{4! \cdot 5!}$.

Opmerking

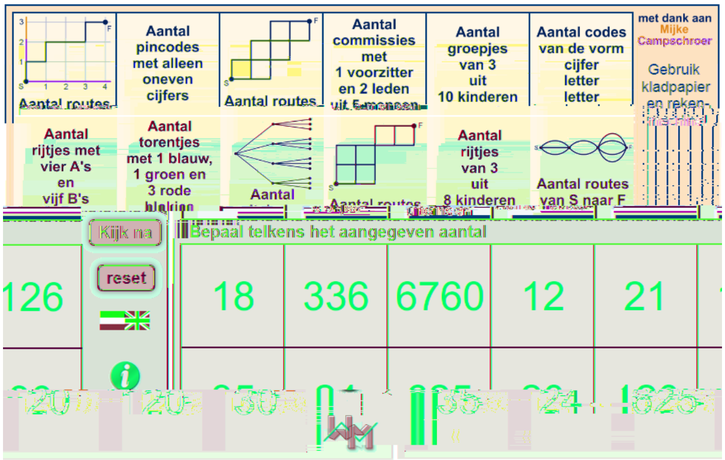
Om de formule die je van $\dbinom{n}{k}$ gevonden hebt ook goed te krijgen voor het randgeval $k = n$, spreken we af: $0! = 1$.

Er geldt dan $\dbinom{n}{n} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = \dfrac{n!}{n! \cdot 1} = 1$.

Ook het combinatiegetal $\binom{n}{0}$ krijgt nu betekenis:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1.$$

Je kunt je kennis testen in de miniloco 'Telproblemen'.



1.7 Herhalingscombinaties

56 In een ijssalon wordt Italiaans ijs verkocht. Je kunt er kiezen uit zeven verschillende smaken: aardbei, citroen, hazelnoot, mokka, pistache, stracciatella en vanille. Anne besluit een ijsje met drie bolletjes te nemen.

a Uit hoeveel verschillende ijsjes kan Anne kiezen als de drie bolletjes verschillende smaken hebben?

Egon neemt ook een ijsje met drie bolletjes met verschillende smaken. Hij houdt niet van pistache, dus dat neemt hij niet. Verder wil hij er per se hazelnoot bij hebben.

b Uit hoeveel verschillende ijsjes kan Egon kiezen?

Natuurlijk kun je ook besluiten een smaak meerdere keren te nemen. We gaan uitzoeken hoeveel ijsjes van drie bolletjes er zijn, als elke smaak meerdere keren gekozen kan worden. Ook dit probleem kun je goed met een rooster aanpakken. De routes in het rooster corresponderen nu op een andere manier met de mogelijke ijsjes van drie bolletjes: elke verticale baan in het rooster correspondeert met één van de 7 smaken.
In het rooster hiernaast is de route aangegeven die correspondeert met 2 bolletjes mokka en 1 bolletje vanille.

c Teken in een rooster de route die hoort bij 3 bolletjes pistache. Geef met een andere kleur de route aan die correspondeert met 1 bolletje citroen, 1 bolletje mokka en 1 bolletje stracciatella.

d Hoeveel verschillende ijsjes van drie bolletjes zijn er mogelijk als elke smaak meerdere keren mag voorkomen?

e Hoeveel verschillende ijsjes van drie bolletjes zijn er mogelijk als je minstens één bolletje hazelnoot wilt en geen enkel bolletje pistache? (Pas eventueel de volgorde van de smaken in het rooster aan.)

Een combinatie van 3 bolletjes uit 7 waarbij elke smaak maar één keer mag voorkomen, wordt een **ongeordende greep van 3 uit 7 zonder herhaling** of een **combinatie van 3 uit 7** genoemd.
Een combinatie van 3 bolletjes uit 7 waarbij elke smaak meerdere keren mag voorkomen, wordt een **ongeordende greep van 3 uit 7 met herhaling** of een **herhalingscombinatie van 3 uit 7** genoemd.

57 **a** Teken een rooster, zoals in de vorige opgave, waarin je alle ongeordende grepen met herhaling van 4 bolletjes uit de 7 smaken kunt aangeven.

b Hoeveel ongeordende grepen van 4 uit 7 met herhaling zijn er?

In een megabeker kun je tien bolletjes ijs krijgen.

c Hoeveel verschillende megabekers zijn er? Met andere woorden: hoeveel combinaties van 10 uit 7 met herhaling zijn er?

d Op hoeveel manieren kun je de megabeker vullen als van elke smaak minstens één bolletje aanwezig moet zijn? (Probeer dit niet uit het rooster van onderdeel **c** te halen.)

58 Iemand heeft vier munten in zijn hand. Jij moet raden welke munten het zijn. Mogelijk zijn munten van 1 cent, 2 cent, 5 cent, 10 cent, 20 cent. Zo kun je bijvoorbeeld raden: 2 munten van 1 cent, 1 munt van 2 cent en 1 munt van 10 cent.

a Teken een rooster waarin je alle mogelijkheden met een route kunt aangeven. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

We kijken naar routes die horen bij de mogelijkheden waarbij er geen munten van 1 of 2 cent zijn.

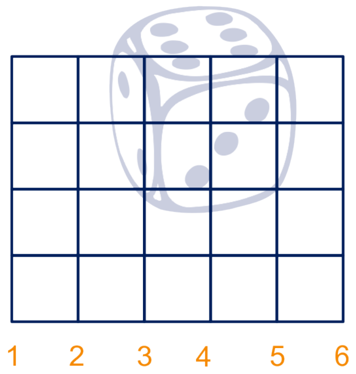
b Teken drie van dit soort routes.
Hoeveel mogelijkheden zijn er nog als er geen munten van 1 of 2 cent bij zijn?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er als je weet dat er minstens twee munten van 10 cent bij zijn (verander eventueel de volgorde van de munten in je rooster)?

d Hoeveel mogelijkheden zijn er als je weet dat er precies twee munten van 10 cent bij zijn?

e Hoeveel mogelijkheden zijn er als elke munt hooguit één keer mag voorkomen?

59 Als je met vier dobbelstenen werpt, is 3, 4, 4, 6 een mogelijke worp (dit is: één keer 3 ogen, twee keer 4 ogen en één keer 6 ogen). Hiernaast zie je een rooster waarin je alle mogelijke worpen systematisch kunt aangeven.

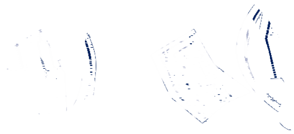


a Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk?

b Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk waarbij het laagste aantal ogen 3 is (3 mag hierbij meer dan één keer voorkomen)? Laat in een rooster zien hoe het beginstuk van een route die bij zo'n uitkomst hoort eruit ziet.

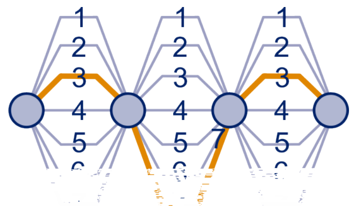
c Hoeveel worpen zijn er mogelijk waarbij alleen even aantallen ogen voorkomen (de even aantallen zijn 2, 4 en 6)?

In de vorige paragrafen heb je kennis gemaakt met geordende en ongeordende grepen. In deze paragraaf maken we een model bij deze grepen: het **vaasmodel**. Dit model kan je helpen te herkennen of je te maken hebt met een ongeordende greep of een geordende greep (al dan niet met herhaling). Tevens helpt het model je een juiste boom of rooster bij het probleem te vinden.



Voorbeeld

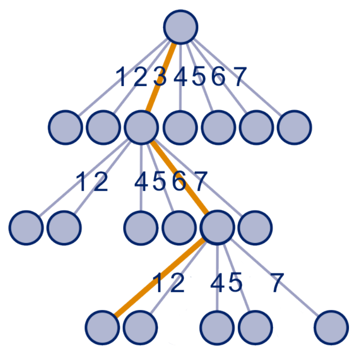
In een vaas zitten zeven briefjes met daarop de nummers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7. Je kunt nu op de volgende vier manieren drie briefjes uit de vaas trekken.



Trekken met terugleggen, waarbij je let op de volgorde waarin de briefjes getrokken worden. Je hebt dan te maken met een **geordende greep met herhaling**.

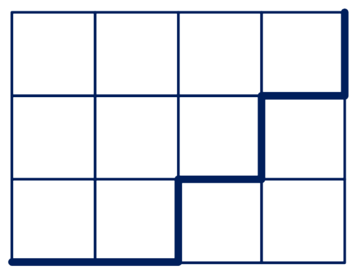
Om het aantal grepen te bepalen kun je een **wegendiagram** tekenen. Elke (driewegs)route van links naar rechts correspondeert met een geordende greep met herhaling. De aangegeven route hoort bij de geordende greep 3-7-3.

Het aantal grepen is $7^3 = 343$.



Trekken zonder terugleggen, waarbij je let op de volgorde. Je hebt dan te maken met een **permutatie** (een geordende greep zonder herhaling). Om het aantal permutaties te bepalen kun je een **boom** tekenen. Elk eindpunt van de boom correspondeert met een permutatie. Het aangegeven eindpunt hoort bij de permutatie 3-6-1.

Het aantal is dan $7 \times 6 \times 5 = 210$.

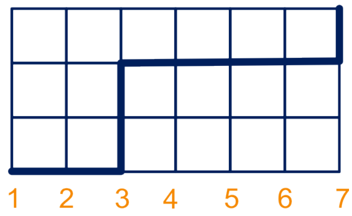


Trekken zonder terugleggen, waarbij je niet let op de volgorde. Je hebt dan te maken met een **combinatie** (een ongeordende greep zonder herhaling).

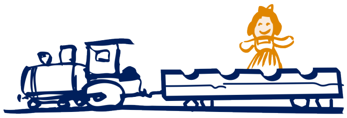
Om het aantal combinaties te berekenen kun je een **rooster** tekenen. Elke kortste route van linksonder naar rechtsboven correspondeert met een combinatie. De route hiernaast hoort bij de combinatie 3-5-7. Het aantal is $\binom{7}{3} = 35$.

Als je de vorige paragraaf (Herhalingscombinaties) hebt overgeslagen, sla dan ook het volgende stukje theorie en de opgaven die als facultatief zijn gemarkeerd over.

Trekken met terugleggen, waarbij je niet let op de volgorde. Je hebt dan te maken met een **herhalingscombinatie** (een ongeordende greep met herhaling).
Om het aantal grepen te bepalen kun je een **rooster** tekenen. Elke kortste route in het rooster van linksonder naar rechtsboven correspondeert met een ongeordende greep met herhaling. De aangegeven route hoort bij de greep 3-3-7.

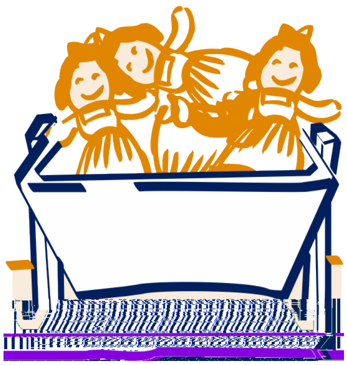


Het aantal is $\binom{9}{3} = 84$.



60 Marco heeft een treintje waar plaats is voor vier poppetjes. De poppetjes zitten netjes achter elkaar. Marco heeft poppetjes in vijf kleuren: blauw, geel, oranje, paars en rood. Van elke kleur heeft hij er meer dan genoeg.

- **a** Op hoeveel manieren kan Marco zijn treintje vullen met vier poppetjes?
- **b** Op hoeveel manieren kan Marco zijn treintje "vullen" als er ook plaatsen leeg mogen blijven (helemaal leeg is ook een "vulling")?
- **c** Op hoeveel manieren kan Marco zijn treintje vullen met vier poppetjes als hij alleen blauwe en rode poppetjes gebruikt (alleen rode of alleen blauwe poppen mag ook)?
- **d** Op hoeveel manieren kan Marco zijn treintje vullen met vier poppetjes als hij wil dat alle poppetjes verschillend van kleur zijn?



61 Estera speelt mee met Marco. Ze heeft een kiepwagon. Zij vult haar kiepwagon door er vier poppetjes in te stoppen.
Geef bij elk van de volgende onderdelen weer het bijbehorende vaasmodel.

- **a** Op hoeveel manieren kan Estera haar kiepwagon vullen?
- **b** Bij hoeveel van die manieren zitten er geen paarse poppetjes in de wagon?
- **c** Hoeveel vullingen van de wagon zijn er waarbij er precies twee gele poppetjes aanwezig zijn?
- **d** Hoeveel vullingen zijn er mogelijk waarbij alle poppetjes verschillend van kleur zijn?

62 We bekijken rijtjes met nullen en enen van lengte 8. Bijvoorbeeld 11010011.

- **a** Hoeveel van die rijtjes zijn er (alleen nullen of alleen enen mag ook)? Welk vaasmodel hoort hierbij?
- **b** Hoeveel van die rijtjes zijn er met precies één een? Schrijf al die rijtjes op.
- **c** Heb je enig idee hoeveel rijtjes er zijn met precies twee enen?

Het valt niet mee om alle rijtjes op te schrijven die precies twee enen bevatten: het zijn er 28. We kunnen hier wel een vaasmodel bij maken. In de vaas zitten de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 (deze getallen staan voor de acht plaatsen in de rij). Uit de vaas trek je, zonder terugleggen en zonder op de volgorde te letten, twee getallen. Deze twee getallen geven de plaatsen aan waar de twee enen komen. Trek je bijvoorbeeld 3 en 7, dan hoort daar het rijtje 00100010 bij.

d Welk rijtje hoort bij de trekking 1 en 8? En welke trekking hoort bij het rijtje 00110000?

e Hoeveel verschillende trekkingen zijn er mogelijk? Hoeveel rijtjes van lengte 8 met precies twee enen zijn er?

Je zou uit de vaas ook zes nummers kunnen trekken: die geven dan de plaats van de zes nullen aan.

f Hoeveel van die trekkingen zijn er mogelijk? Klopt dat met je antwoord op **c**?

g Hoeveel rijtjes van lengte 8 zijn er met precies drie enen? En met vijf enen?

h Hoeveel rijtjes van lengte 10 zijn er met drie enen en zeven nullen? Welk vaasmodel hoort hierbij?

63 We maken nu rijtjes van lengte 8 bestaande uit nullen, enen en tweeën.

a Hoeveel van die rijtjes zijn er in totaal mogelijk?

b Hoeveel van die rijtjes bevatten geen nullen?

We gaan berekenen hoeveel rijtjes er zijn met twee nullen, vijf enen en één twee.
In de vaas zitten weer de plaatsen 1 tot en met 8. Eerst trekken we uit de vaas twee getallen die de plaatsen voor de twee nullen aangeven. Vervolgens trekken we uit de vaas - waar dan nog zes plaatsen in zitten - vijf getallen die de plaatsen voor de vijf enen aangeven. Het getal dat overblijft geeft de plaats voor de twee aan.
Stel dat je eerst de nummers 3 en 6 trekt en vervolgens de nummers 1, 2, 5, 7 en 8.

c Welk rijtje krijg je dan?

d Op hoeveel manieren kun je de twee plaatsen voor de nullen trekken? Op hoeveel manieren kun je vervolgens de vijf plaatsen voor de enen trekken? Hoeveel rijtjes zijn er dus in totaal met twee nullen, vijf enen en één twee?

e Je kunt ook eerst de plaats voor de twee trekken en daarna de twee plaatsen voor de nullen. Op hoeveel rijtjes kom je dan in totaal uit?

f Bereken op nog een derde manier het aantal rijtjes met twee nullen, vijf enen en één twee.

g Bereken het aantal rijtjes van lengte 10 met één nul, twee enen, drie tweeën en vier drieën.

64

a Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9?

b Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8?

c Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5, en 7?

d Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 7?

Kijk nog eens terug naar opgave 22.

e Vind je dezelfde antwoorden?

65

Ad verft voor Pasen 10 eieren: 2 blauw, 3 geel en 5 rood.
Hij legt de eieren mooi op een rij.
Laat zien dat hij $\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$ rijtjes kan maken.

Er zijn $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4}$ rijtjes van lengte 10 met twee 0'en, drie 1'en, vier 2'en en één 3.

Opmerking

Als je eerst de drie 1'en aanwijst, dan de vier 2'en en dan de twee 0'en, vind je voor dit aantal: $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2}$.

Verder geldt:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4} = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1} = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}.$$

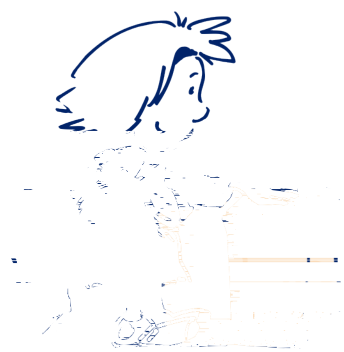
66

In een bak zitten de letters a, b, c, d, e, f en g.

a Hoeveel verschillende geordende grepen van 3 kun je nemen uit de bak?

b Hoeveel verschillende ongeordende grepen van 3 kun je nemen uit de bak?

c Hoeveel geordende grepen zijn er waar alleen de letters a, b en c in voorkomen? Schrijf ze allemaal op.



Bij de ongeordende greep a, b, c kun je zes geordende grepen maken.
Algemener: bij elke ongeordende greep van 3 horen zes geordende grepen van 3. Er zijn dus zes keer zoveel geordende grepen van 3 uit 7 als ongeordende grepen van 3 uit 7.

d Ga na of dit in overeenstemming is met je antwoorden bij **a** en **b**.

Op je GR kun je niet rechtstreeks het aantal geordende grepen van 60 uit 100 berekenen. Typ maar eens in: 100 *nPr* 60 ... .

e Bereken op je GR hoeveel verschillende ongeordende grepen er zijn van 60 uit 100.

f Hoeveel geordende grepen van 60 uit 100 horen er bij één ongeordende greep van 60 uit 100?

g Ga na dat er ongeveer $1{,}144 \cdot 10^{110}$ geordende grepen zijn van 60 uit 100.

67

In een vaas zitten de getallen 1, 2 en 3.

a Hoeveel geordende grepen van 4 met herhaling kun je nemen uit deze vaas?

b Hoeveel ongeordende grepen van 4 met herhaling kun je nemen uit de vaas?

Bij de ongeordende greep 1, 1, 1, 2 horen vier geordende grepen: 1112, 1121, 1211 en 2111.

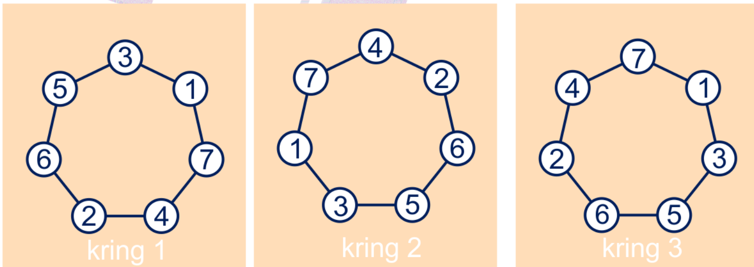
c Hoeveel geordende grepen horen er bij de ongeordende greep 1, 1, 2, 3?

d Schrijf alle ongeordende grepen op en schrijf erachter hoeveel geordende grepen bij elk van de ongeordende grepen horen. Klopt het totaal met het antwoord van **a**?

1.9 Combinatorische vraagstukken

In deze paragraaf vind je allerlei vraagstukken waarbij je voor de oplossing creatief gebruik moet maken van alles wat je in de voorgaande paragrafen hebt geleerd. Je zult van de meeste vragen niet een-twee-drie de oplossing zien. Bij die vragen wordt een tip gegeven.

68 De cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 kun je in een kring plaatsen. Hieronder zie je drie manieren waarop dat kan.



Kring 1 en kring 2 zijn hetzelfde: kring 2 kun je krijgen door kring 1 te draaien.
Kring 1 en kring 3 lijken ook veel op elkaar: in beide kringen heeft elk getal dezelfde twee buren. Toch zijn ze verschillend: in kring 1 staat 7 rechts van 1 en in kring 3 staat 7 juist links van 1.
Eigenlijk staan hierboven dus maar twee verschillende kringen.

a Hoeveel verschillende kringen zijn er in totaal mogelijk?

Hint 7.

We bekijken dezelfde kring; met zeven plaatsen dus. Nu plaatsen we de getallen 1, 2, 3, 4, 5 en 6 in de kring. Er blijft dus één plaats open.

b Hoeveel verschillende kringen zijn er op deze manier mogelijk?

c Hoeveel verschillende kringen zijn er mogelijk als we de getallen 1, 2, 3, 4 en 5 er in plaatsen? Er blijven dan dus twee plaatsen open.

69 Anne heeft morgen zes lessen. Het eerste uur heeft ze les en ook het achtste uur; ze heeft dus twee tussenuren. Ze heeft de vakken: Nederlands, Duits, Frans, geschiedenis, wiskunde en scheikunde.
Hoeveel verschillende roosters zijn er die dag voor Anne mogelijk?

Hint 8.

70 We werpen met vier dobbelstenen. We kunnen dan bijvoorbeeld twee 1'en, een 3 en een 4 gooien.

a Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk?

Hint 9.

b Wat is de kans dat de som van de ogen gelijk is aan 8?

Hint 10.

71 Op een cocktailparty kun je cocktails drinken. Cocktails zijn mixen van verschillende dranken. Er zijn zes verschillende dranken aanwezig: cognac, jus d'orange, rum, tonic, vieux en wodka. Allerlei mixen worden geschonken. De enige beperking is dat je minstens twee dranken moet mixen (anders is het ook geen cocktail!). Zo kun je een jus-tonic nemen, of een cognac-jus-rum-wodka.

a Hoeveel cocktails zijn er mogelijk met twee dranken?
En met drie? En met vier, vijf en zes?

b Hoeveel cocktails zijn er in totaal mogelijk?

72 We bekijken de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Deze cijfers kun je op verschillende manieren splitsen in twee groepen. Bijvoorbeeld in $\{1,3\}$ en $\{2,4,5,6\}$. Je hebt de cijfers dan gesplitst in een groep van 2 en een groep van 4.

a Op hoeveel manieren kun je de cijfers splitsen in een groep van 2 en een groep van 4?
Op hoeveel manieren kun je de cijfers splitsen in een groep van 1 en een groep van 5?

b Op hoeveel manieren kun je de cijfers splitsen in twee groepen van 3? Pas op: 20 is niet het goede antwoord.

c Op hoeveel manieren in totaal kun je de cijfers splitsen in twee groepen?

73 Een coupe ijs bestaat uit drie bolletjes. Je kunt kiezen uit zes smaken: vanille, aardbeien, mokka, pistache, stracciatella en citroen. Je mag ook smaken vaker nemen.

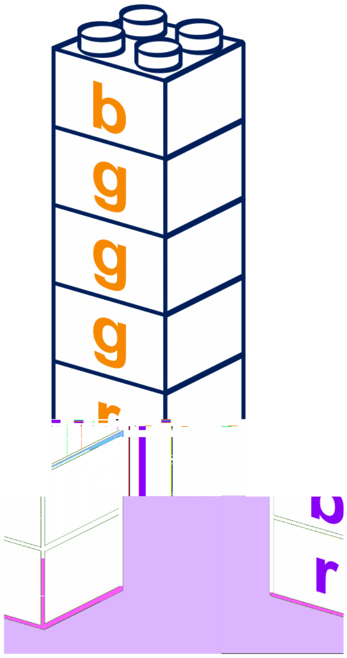
a Hoeveel verschillende coupes zijn er mogelijk?

b Hoeveel verschillende coupes zijn er mogelijk met drie verschillende smaken?

c Hoeveel coupes zijn er mogelijk met precies twee verschillende smaken?

Hint 11.

74 Carolientje heeft een heleboel vierkante legoblokken in drie kleuren: blauw, geel en rood. Ze bouwt torentjes van zeven blokken hoog.



a Hoeveel torentjes kan Carolientje in totaal maken?

b Hoeveel verschillende torentjes zijn er waarbij alle drie de kleuren voor komen?

Hint 12.

c Hoeveel torentjes zijn er waarbij precies twee kleuren voorkomen?

d Hoeveel torentjes zijn er met één kleur.

e Kloppen de vier antwoorden met elkaar?

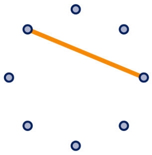
75 Een korfbalteam bestaat uit vier dames en vier heren. De coach wijst voor de wedstrijd uit de twaalf beschikbare spelers (zes dames en zes heren) een team aan.

a Hoeveel keuzen heeft hij?

Korfbal wordt gespeeld in twee vakken: een verdedigingsvak en een aanvalsvak. In ieder vak staan van een team twee dames en twee heren. (Waar in het vak de spelers staan, doet er niet toe.)

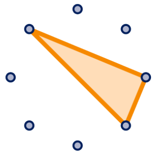
b Op hoeveel manieren kan de coach uit de al aangewezen vier dames en vier heren een beginopstelling vormen?

76 Hiernaast zie je acht stippen. Tussen twee stippen is een verbindingslijnstuk getekend.



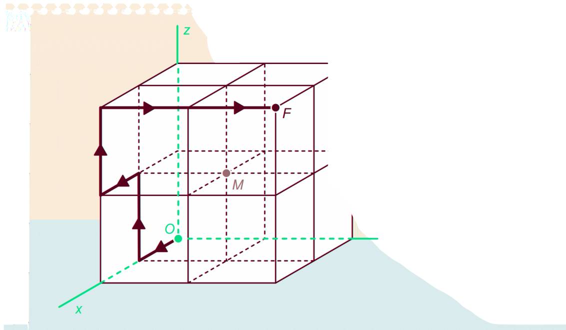
a Hoeveel verbindingslijnstukken zijn er in totaal tussen deze acht punten?

Hiernaast zie je dezelfde acht stippen. Nu is er een verbindingsdriehoek getekend.



b Hoeveel verschillende verbindingsdriehoeken zijn er in totaal te maken?

77 We bekijken kortste routes vanuit $O(0,0,0)$ over roosterlijnen naar $F(2,2,2)$.
Hieronder zie je een plaatje waarin zo'n kortste route is aangegeven.

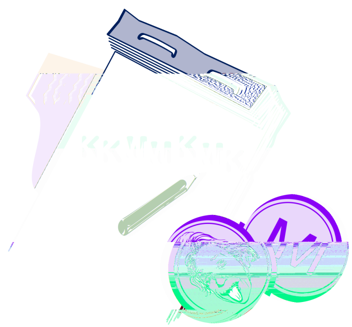


a Hoeveel kortste routes zijn er in totaal van O naar F?

Hint 13.

b Hoeveel kortste routes zijn er van O, via $M(1,1,1)$ naar F?

78 Michelle gooit tien maal met een muntstuk en noteert steeds of ze kop (K) of munt (M) heeft gegooid. Zo ontstaan series als KKMMKMKMMM.



a Hoeveel verschillende series zijn er mogelijk?

b Hoeveel mogelijke series zijn er als je weet dat zij even vaak kop als munt heeft gegooid?

c Hoeveel mogelijke series zijn er met precies 5 keer kop op rij?

Hint 14.

In deze paragraaf gaan we wat formeler te werk.

Als je met twee dobbelstenen gooit, heb je 36 mogelijke **uitkomsten**. Die kun je bijvoorbeeld door paren getallen weergeven, de **uitkomstenverzameling**:
(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).   )

Een **gebeurtenis** bestaat uit een deel van de uitkomsten.
Zo bestaat de gebeurtenis *het verschil van de aantallen ogen is minstens* 2 uit het deel:
(1,3),, (1,4),,)

79 We gooien twee keer met een dobbelsteen. A de gebeurtenis *de som van de ogen is* 10 en B *de som van de ogen is* 11.

a Geef $P(A)$, $P(B)$ en $P(A \text{ of } B)$.

Er geldt: $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$.

E is de gebeurtenis: *de eerste keer wordt zes gegooid*. F is de gebeurtenis: *de tweede keer wordt zes gegooid*.

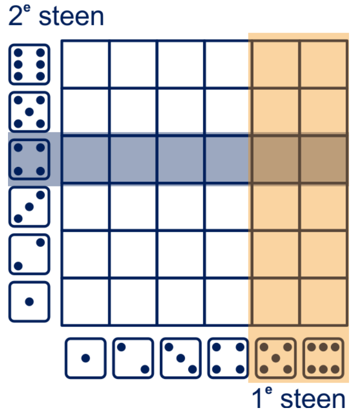
b Geef $P(E)$, $P(F)$ en $P(E \text{ of } F)$.

c Geldt: $P(E \text{ of } F) = P(E) + P(F)$?

d Wat kun je over twee gebeurtenissen S en T opmerken als geldt: $P(S \text{ of } T) = P(S) + P(T)$?

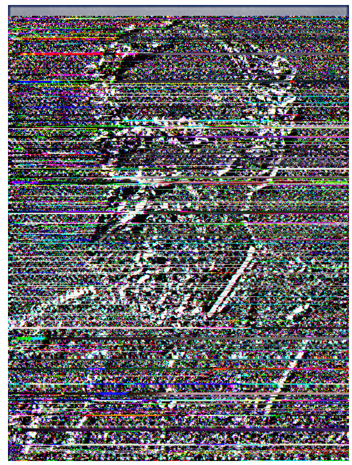
We bekijken de gebeurtenissen G en H, met G: *geen van de beide keren wordt zes gegooid* en H: *minstens één van de beide keren wordt zes gegooid*

1.10 Rekenregels voor kansen



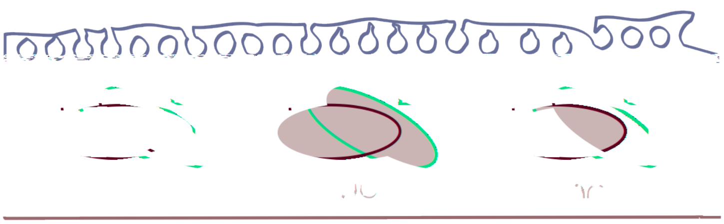
We gooien twee keer met een dobbelsteen.
Hiernaast zijn gekleurd de **verzamelingen** S: *de eerste keer gooi je minstens vijf* en T: *de tweede keer gooi je vier*.
Met $S \cup T$ (spreek uit de vereniging van S en T) geven de verzameling aan bestaande uit de uitkomsten: *de eerste keer gooi je minstens vijf of de tweede keer gooi je vier*. Dat is de verzameling van alle gekleurde worpen in de figuur.
Met $S \cap T$ (spreek uit de doorsnede van S en T) geven we de verzameling aan bestaande uit de uitkomsten: *de eerste keer gooi je minstens vijf en de tweede keer gooi je vier*. Dat is de verzameling van alle dubbel gekleurde worpen in de figuur.

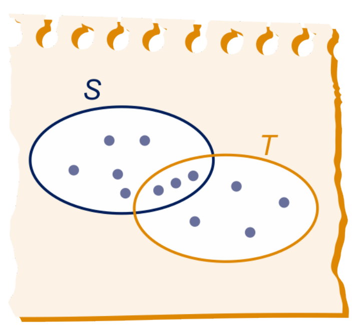
John Venn (1834-1923) was begin twintigste eeuw de bekendste logicus ter wereld. Hij schreef verschillende boeken over logica, waaronder *The Logic of Chance* en *Symbolic Logic*. Venn werd onder meer bekend door de introductie van het naar hem vernoemde Venndiagram, een grafische voorstelling van logische relaties tussen meerdere verzamelingen.
Uit Wikipedia



John Venn

In een Venn-diagram kun je de vereniging en de doorsnede van twee verzamelingen A en B weergeven, zie de figuur hieronder.





81 In het Venndiagram hiernaast stelt elke stip een **element** voor van de verzameling waarin hij getekend is. Zo heeft S 8 elementen.
Wat is het verband tussen $\#S$, $\#T$, $\#S \cup T$ en $\#S \cap T$?

Somregel
Gegeven zijn twee gebeurtenissen A en B, dan:
$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$.

Bovenstaande regel volgt uit de volgende regel voor twee verzamelingen S en T:
$\#S + \#T = \#S \cup T + \#S \cap T$.

In het volgende kijken we naar *onafhankelijkheid van twee gebeurtenissen.* Daartoe een inleiding uit Wikipedia (12-09-2007).

Als we willekeurig een mens op aarde aanwijzen, zal de kans dat het een vrouw blijkt te zijn gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$. Vertelt iemand ons dat de aangewezen persoon uit Afrika komt, dan nog zal het in de helft van de gevallen een vrouw blijken te zijn, dat wil zeggen ook dan zal de kans op een vrouw $\frac{1}{2}$ zijn.
Anders wordt het voor de kans op een donkere huidskleur. Mogelijk is die kans ca $0{,}1$- $0{,}2$. Weten we echter dat de gekozen persoon uit Afrika komt, dan zal de kans op een donkere huidskleur praktisch 1 bedragen. Het optreden van de gebeurtenis A(frika) verandert niets aan de kans op de gebeurtenis V(rouw), maar wel aan de kans op de gebeurtenis D(onkere huidskleur). We noemen daarom de gebeurtenissen A en V (onderling) onafhankelijk. De gebeurtenissen A en D daarentegen heten (onderling) afhankelijk. Een formele definitie wordt meestal in termen van het gelijktijdig optreden van beide gebeurtenissen gegeven, waaruit de bovengenoemde eigenschap volgt.

82 **Een voorbeeld met dobbelstenen**

Ad gooit twee keer met een dobbelsteen. Hij verklapt je dat de som van het aantal gegooide ogen even is.

a Wat is dan de kans dat de som van het aantal ogen minstens 8 is?

A is de gebeurtenis: *de som van het aantal ogen is even*.
B is de gebeurtenis: *de som van het aantal ogen is minstens* 8.
De kans die je in a hebt berekend noemen we een **voorwaardelijke kans**: *de kans dat de som van het aantal ogen minstens* 8 *is* **onder de voorwaarde** *dat de som van het aantal ogen even is*.

C is de gebeurtenis: *de eerste keer wordt meer dan* 4 *gegooid.*

b Bereken de kans op A onder de voorwaarde C.

c Bereken de kans op B onder de voorwaarde C.

Notatie

Met $B|A$ bedoelen we B onder voorwaarde A.

In opgave 82 a staat een voorbeeld van $B|A$.
Als je het goed hebt gedaan heb je het antwoord gevonden met de volgende regel: $P(B|A) = \frac{\#A \cap B}{\#A}$.

Dus $P(B|A) = \dfrac{\frac{\#A\cap B}{\#U}}{\frac{\#A}{\#U}} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

A en B zijn gebeurtenissen, dan $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

83 Op weg naar school passeert Anne twee verkeerslichten. Die werken onafhankelijk van elkaar. Voor het eerste licht moet ze met 30% kans wachten, voor het tweede met 20% kans. Op school vertelt ze dat voor één van de lichten heeft moeten wachten.
Bereken de kans dat dat voor het eerste licht was in twee decimalen.

84 **Is lucifer trekken eerlijk?**
Bij lucifertrekken tussen bijvoorbeeld vier spelers, houdt één van hen vier lucifers in de hand waarvan er één korter is dan de andere drie. Maar dat kun je niet zien als je naar de vier stukjes kijkt die zichtbaar zijn. Om beurten trekken de drie anderen een lucifer tot de kortere lucifer getrokken is. Die speler is dan de klos. Als de kortere lucifer niet getrokken wordt, verliest de speler die de lucifers vasthield.

- **a** Wat is de kans dat de eerste speler de kortere lucifer trekt?
- **b** Wat is de kans dat de derde speler de kortere lucifer trekt?
- **c** Is het spel eerlijk?

85 In een vaas zitten twee rode en drie witte ballen. Arno trekt twee keer een bal uit de vaas zonder terugleggen.
S is de gebeurtenis: de eerste bal is rood,
T is de gebeurtenis: de tweede bal is rood.
- **a** Laat zien dat $P(T) = \frac{2}{5}$.
- **b** Geef $P(S \cap T)$.
- **c** Bereken $P(T|S)$.

86 Arno herhaalt het experiment, met dit verschil dat hij nu met terugleggen trekt.
S is de gebeurtenis: de eerste bal is rood,
T is de gebeurtenis: de tweede bal is rood.
- **a** Bereken $P(S)$, $P(T)$ en $P(S \cap T)$.
- **b** Bereken $P(T|S)$.

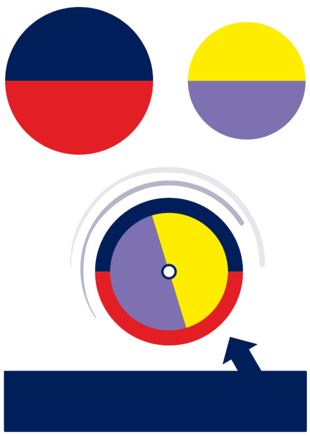
Definitie
Twee gebeurtenissen S en T zijn onafhankelijk als
$P(T|S) = P(T)$.
Dit komt op hetzelfde neer als:
de gebeurtenissen S en T zijn onafhankelijk als
$P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T)$.

In opgave 85 vind je $P(T|S) \neq P(T)$, in opgave 86 $P(T|S) = P(T)$.

Vergelijk dit met het verhaal uit Wikipedia.
In opgave 85 verandert de kans op T als je die onder de voorwaarde S bekijkt omdat S en T in die opgave afhankelijk zijn.
In opgave 86 verandert die kans niet, omdat S en T daar onafhankelijk zijn.

87 Laat zien dat $P(T|S) = P(T)$ op hetzelfde neerkomt als $P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T)$

88 Twee ronde kartonnetjes worden (concentrisch) op elkaar geplakt. De schijf die je zo krijgt wordt gedraaid en op een willekeurig moment gestopt. Er wordt genoteerd wat de pijl aanwijst. Dat kan zijn R (rood), B (blauw), G (geel) of P (paars). In het plaatje wordt G en R aangewezen. De kans daarop is $\frac{1}{8}$.



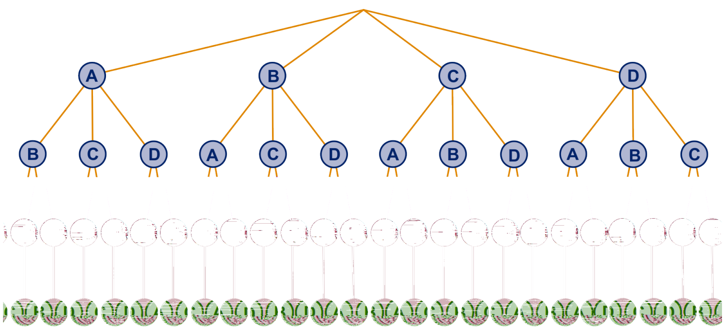
a Bereken $P(B|G)$, $P(R|G)$ en $P(P|G)$
b Zijn B en G onafhankelijk?
c Kun je de twee kartonnetjes zó op elkaar plakken dat B en G onafhankelijk zijn?

89 Ad gooit twee keer met een dobbelsteen. A is de gebeurtenis: met de eerste steen wordt hoger dan vier gegooid.
B is de gebeurtenis: de som van de ogen is lager dan zes.
C is de gebeurtenis: de som van de ogen is even.
Zijn A en B onafhankelijk?
En B en C?
En A en C?

In dit hoofdstuk is het tellen van aantallen mogelijkheden aan de orde geweest. **Combinatoriek** wordt dat genoemd. We vatten de vier basis telmethoden nog eens samen. Bij veel telproblemen moet je verschillende telmethoden combineren om tot een oplossing te komen.

Geordende greep zonder herhaling
Aan een wedstrijd doen vier deelnemers mee (zeg: A, B, C en D). De deelnemers kunnen in verschillende volgorden de finish passeren. Eén mogelijke einduitslag is BCAD. Zo'n rijtje-van-vier waarbij de volgorde van belang is, noem je een **permutatie** (ook wel **geordende greep zonder herhaling** genoemd). Het aantal mogelijke einduitslagen (permutaties) kun je op verschillende manieren vinden.

- Door de mogelijkheden **systematisch uit te schrijven**.
- Door een **boomdiagram** te tekenen.



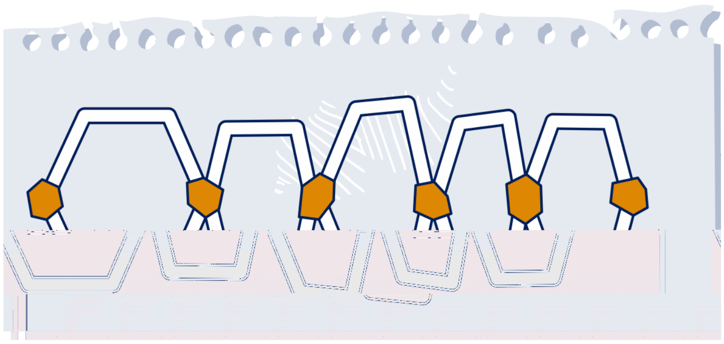
Vier deelnemers (maar ook: letters, cijfers, kleuren, ...) kun je op $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ manieren in volgorde zetten.
Voor het product $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ bestaat een afkorting: 4!.
Dit spreek je uit als 4 **faculteit**.
Er geldt: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
4! kun je ook met de optie $x!$ op je rekenmachine berekenen.

We bekijken ook nog een wedstrijd waar 7 deelnemers aan meedoen (zeg: A, B, C, D, E, F en G). Het aantal mogelijke erepodia (zoals BCA, ACB, FAD en FGE) is:
$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!} = 210$.
Anders gezegd: Het aantal **permutaties van 3 uit 7** (of **geordende grepen van 3 uit 7 zonder herhaling**) is $7 \cdot 6 \cdot 5$.
Het aantal permutaties van 3 uit 7 kun je berekenen met de optie nPr op je rekenmachine.

Geordende greep met herhaling

Een meerkeuzetoets bestaat uit 5 vragen. Bij iedere vraag staan drie antwoorden, waarvan er één moet worden aangekruist. Er is altijd maar één antwoord goed. We vragen ons af op hoeveel manieren je de toets kunt maken.

Dit telprobleem kun je oplossen door een **wegendiagram** te tekenen.

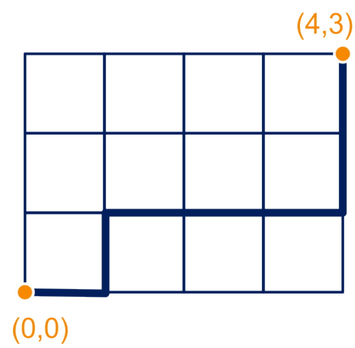


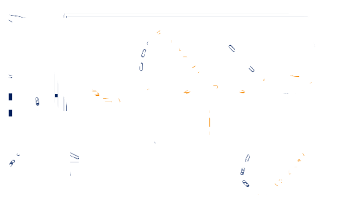
Het aantal mogelijkheden (of **geordende grepen met herhaling**) is $3^5 = 243$.

Ongeordende greep zonder herhaling

We bekijken drie telproblemen:

- alle rijtjes van lengte 7 met 3 enen en 4 nullen;
- alle kortste routes van $(0{,}0)$ naar $(4{,}3)$;
- alle selecties (of combinaties) van 3 dingen uit 7 verschillende dingen. (Bij een combinatie letten we niet op de volgorde.)





Hiernaast zie je van elk van de drie telproblemen een mogelijke uitkomst.

Er zijn evenveel rijtjes als routes als selecties. Immers, je kunt bij alle drie de telproblemen een rijtje maken, bijvoorbeeld:

- 0100011
- RBRRRBB
- - B - - - F G

Deze rijtjes komen op hetzelfde neer.

Het aantal routes van $(0{,}0)$ naar $(4{,}3)$ noteren we met het **combinatiegetal** $\binom{7}{3}$.

Dus $\binom{7}{3} = \ldots$

... het aantal 0-1-rijtjes van lengte 7 met 3 enen,

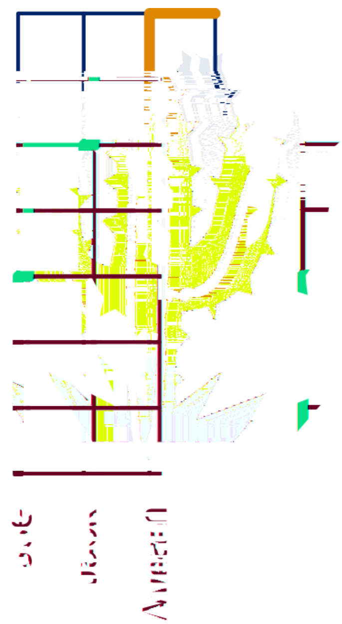
... het aantal routes van lengte 7 met 3 stappen naar boven,

... het aantal **combinaties** van 3 elementen uit 7.

Ongeordende greep met herhaling

Sla het laatste stuk van Eindpunt over als je de paragraaf Herhalingscombinaties niet hebt gemaakt.

Joe, Jack, William en Averell hebben tijdens een overval zeven goudstaven buit gemaakt. We vragen ons af - net als Lucky Luke - op hoeveel manieren de Daltons de goudstaven onderling kunnen verdelen.



Bij dit telprobleem is alleen het aantal goudstaven per Dalton van belang (en dus *niet* de volgorde). Omdat elke Dalton meerdere goudstaven kan bezitten is er sprake van *herhaling*. Elke mogelijke verdeling kunnen we weergeven als route in nevenstaand rooster. De gekleurde route hoort bij de verdeling: Joe drie goudstaven, Jack en William twee, en Averell nul. Het aantal mogelijkheden (het aantal **herhalingscombinaties**) is $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$.

Venn diagram

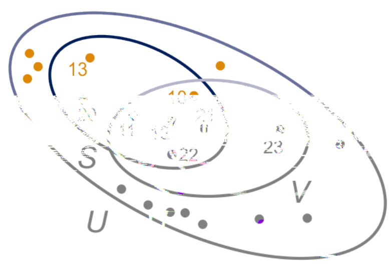
Verzamelingen en hun 'samenhang' geven we vaak aan in een Venn-diagram.

We geven een voorbeeld.

Bekijk de *verzameling* U van alle getallen van 10 tot en met 29.

S is de *deelverzameling* bestaande uit de *elementen* van U waarvan de som der cijfers hoogstens 4 is en V is de *deelverzameling* bestaande uit de *elementen* van U waarvan het verschil der cijfers hoogstens 1 is.

Hiernaast zie je een Venn-diagram van de ligging van S en V in U.



We gebruiken de volgende

Notaties

$\#S$: het aantal elementen in S;

$S \cap V$: de elementen die zowel in S als in V zitten;

$S \cup V$: de elementen die in S en/of V zitten.

In ons voorbeeld: S bestaat uit de elementen 10, 11, 12, 13, 20 en

V bestaat uit de elementen $10, 11, 12, 21, 22, 23$.

In het Venn-diagram zie je $\#S \cap V = 5$ en $\#S \cup V = 8$.

We doen het volgende *kansexperiment*.

Laat Anne een willekeurig getal uit U (de *uitkomstenverzameling*) opschrijven.
De kans dat ze een getal uit S opschrijft, noteren we met $P(S)$.
Die kans is $\frac{7}{20}$.

Rekenregels
Gegeven een *kansexperiment* met uitkomstenverzameling U.
Neem aan dat elke uitkomst evenveel kans heeft.
A en B zijn twee gebeurtenissen (deelverzamelingen van U).
Dan:
$P(A) = \dfrac{\#A}{\#U}$;
$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.
Als $A \cap B$ leeg is, dan $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. We zeggen dan dat A en B **elkaar uitsluiten**.

Voorwaardelijke kansen
We gaan verder met het voorbeeld hierboven.
Anne verklapt dat de som van de cijfers in het getal dat ze heeft opgeschreven hoogstens 4 is.
De kans dat het getal dan in V zit, noemen we een **voorwaardelijke kans**: de kans op een uitkomst in V onder de voorwaarde dat die uit S komt.
Die kans is $\dfrac{\#S \cap V}{\#S} = \frac{5}{7}$.

Neem aan A en B zijn twee gebeurtenissen. De kans op een uitkomst uit A onder voorwaarde B noteren we met $P(A|\,B)$.
Er geldt:
$P(A|\,B) = \dfrac{\#A \cap B}{\#B} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
We noemen twee gebeurtenissen A en B **onafhankelijk** als $P(A|\,B) = P(A)$.
Er geldt: A en B onafhankelijk $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

In ons voorbeeld geldt: $P(V|\,S) = \frac{5}{7}$ en $P(V) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, dus S en V zijn afhankelijk.

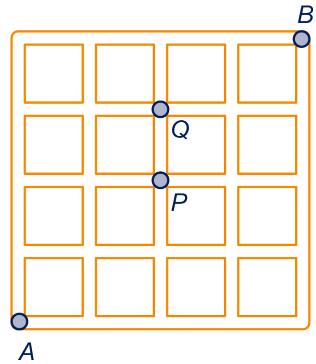
We geven nog een voorbeeld.
In de klassen 4A en 4B zitten 30 leerlingen. In 4A zitten 10 meisjes en in 4B 20.
In 4A rookt 10% van de jongens en 10% van de meisjes en in 4B 20% van de jongens en 10% van de meisjes.
De leraar wijst willekeurig een leerling aan. Bekijk de volgende gebeurtenissen.

J: hij wijst een jongen aan; M: hij wijst een meisje aan;
R: hij wijst iemand aan die rookt; N: hij wijst iemand aan die niet rookt.
Ga na dat in 4A:
$P(J) = \frac{2}{3}$, $P(R) = \frac{1}{10}$ en $P(J \cap R) = \frac{1}{15}$, dus J en R zijn onafhankelijk want $P(J \cap R) = P(J) \cdot P(R)$.
En dat in 4B:
$P(J) = \frac{1}{3}$, $P(R) = \frac{2}{15}$ en $P(J \cap R) = \frac{1}{15}$, dus J en R zijn afhankelijk want $P(J \cap R) \neq P(J) \cdot P(R)$.

1 Bij een proefwerk krijg je een blaadje met twaalf vragen. Je mag zelf weten welke vragen je maakt, als je er maar precies tien maakt.
Hoeveel verschillende proefwerken kun je op deze manier maken?
BRON: Het televisieprogramma Schoolstrijd op 23 januari 1998

2 De firma Neeplus verkoopt zakjes die elk precies tien gomballen bevatten. Er zijn blauwe, groene en rode gomballen en elk zakje bevat tenminste één gombal van elke kleur.
Hoeveel verschillende zakjes kunnen er voorkomen?
Een opgave uit de estafette van de KUN-wiskundewedstrijd 1997

3 Hiernaast staat het wegennet van een moderne stad.



a Hoeveel kortste wegen zijn er van A naar B?
b Hoeveel kortste wegen zijn er van A naar B die niet langs P gaan?

Op een dag is de weg van P naar Q afgesloten.
c Hoeveel kortste wegen zijn er dan nog van A naar B mogelijk?

4 Een pincode bestaat uit 4 cijfers. Het cijfer 0 komt ook voor. Voorbeelden: 2015, 0017 en 9319.
a Hoeveel verschillende pincodes zijn er?
b Hoeveel verschillende pincodes zijn er met vier verschillende cijfers?

Bart is zijn pincode vergeten. Hij weet nog wel dat er twee 1'en in stonden, één 3 en één 9. De volgorde weet hij niet meer. Hij wil toch geld opnemen en toetst dus een willekeurige pincode in met twee 1'en, een 3 en een 9.
c Wat is de kans dat hij de juiste pincode intoetst?
d Hoeveel pincodes zijn er waar geen nullen in voorkomen?
e Hoeveel pincodes zijn er met alleen nullen en enen (beide cijfers moeten minstens één keer voorkomen)?
f Hoeveel pincodes zijn er met precies twee verschillende cijfers?

In Nederland zijn zo'n 20 miljoen bankpasjes met pincodes in omloop.
g Hoeveel mensen verwacht je dat dezelfde pincode hebben als jij? (Heb jij geen pincode, denk dan aan de pincode van je vader of moeder.)

5

Op een sportdag wordt er voetbal, basketbal, volleybal en badminton gespeeld. Er doen vier teams van elk 12 spelers mee: team A, B, C en D. Het voetbal wordt gespeeld met het hele team van 12 spelers. Voor het basketbal zijn 8 spelers nodig, voor het volleybal 6.

Eerst wordt er gevoetbald door de vier teams. Door loting wordt bepaald welk team tegen welk team speelt.

a Wat is de kans dat team A tegen team B speelt (en dus team C tegen team D)?

Vervolgens wordt er gebasketbald. Uit elk team worden acht spelers gekozen die gaan basketballen. De overige vier spelers gaan badminton spelen.

b Op hoeveel manieren kan team A worden opgedeeld in een basketbalteam (van 8) en een badmintonteam (van 4)?

Tenslotte wordt er volleybal gespeeld. Hiervoor wordt team A gesplitst in twee teams van 6.

c Op hoeveel manieren kan dat?

6

Dolf bracht voor een groot warenhuis huis-aan-huis-folders rond. Maar hij is ontslagen: vandaag doet hij dit werk voor het laatst. Bij de Dennenstraat aangekomen besluit hij zijn laatste tien folders op een willekeurige manier over de brievenbussen te verdelen. In de Dennenstraat staan zes huizen.

a Op hoeveel manieren kan hij de tien folders over de zes huizen verdelen?

b Op hoeveel manieren kan hij de folders verdelen als hij bij elk huis minstens één folder bezorgt?

c Op hoeveel manieren kan hij de folders verdelen als hij bij het vierde huis geen folders bezorgt en bij de rest van de huizen minstens één?

7

Anne heeft tien blokken: vier blauwe, drie gele, twee rode en één witte.

a Hoeveel verschillende torentjes van tien hoog kan ze daarvan bouwen?

b Hoeveel torentjes van negen hoog kan ze daarmee bouwen?

c Hoeveel torentjes van vijf hoog kan ze daarmee bouwen als alle vier de kleuren aanwezig moeten zijn?

d Hoeveel torentjes van zes hoog kan ze daarmee bouwen als alle kleuren aanwezig moeten zijn?

8 Anne, Bert, Carole, Dirk en Ellen gaan vaak met z'n vijven stappen. Ze bezoeken dan een café waar een ronde tafel staat waar plaats is voor precies vijf personen.

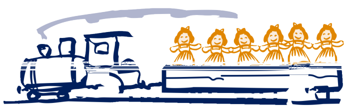
a Op hoeveel manieren kunnen ze rond die tafel gaan zitten? We letten er alleen op hoe ze ten opzichte van elkaar zitten: de stoelen zijn allemaal hetzelfde.

Anne wil niet naast Bert zitten.

b Op hoeveel manieren kunnen ze nu nog rond de tafel gaan zitten?

Op een avond zijn Anne en Bert ziek. De anderen besluiten met zijn drieën te gaan stappen. Op een gegeven moment komen ze stomdronken het café binnen en nemen allemaal plaats op een stoel rond de tafel met vijf plaatsen. Er blijven dus twee plaatsen leeg.

c Op hoeveel manieren kunnen ze nu gaan zitten?



9 Anneke heeft een treintje met zes plaatsen. De reizigers zijn poppetjes. Er mogen, net als in het echt, ook plaatsen onbezet blijven. Zelfs de hele trein kan leeg blijven. Maar vol is vol: er kunnen niet meer dan zes passagiers mee.
Bepaal in elk van de volgende gevallen op hoeveel manieren Anneke de trein van reizigers kan voorzien.

a Anneke heeft zes verschillend gekleurde poppen, die allemaal meereizen.

b Anneke heeft zes dezelfde poppen (waar dus helemaal geen verschil tussen is).

c Anneke laat één blauwe en één rode pop meereizen.

d Anneke laat twee rode poppen meereizen.

e Anneke heeft blauwe en rode poppen. Er moeten meer rode dan blauwe poppen meereizen en het treintje is helemaal vol.

10 Codes zijn vaak gedigitaliseerd, dat wil zeggen dat ze alleen uit enen en nullen bestaan. 110010 is zo'n code. We kijken in deze opgave alleen naar codes die uit zes cijfers bestaan.

a Hoeveel van zulke codes zijn er?

Als een andere code op één plek afwijkt van het voorbeeld hierboven, dan zeggen we dat de afstand tussen deze twee codes 1 is. Wijken er twee cijfers af, dan is de afstand 2, enzovoort. Voorbeeld: de afstand tussen 100100 en 001101 is 3.
Neem weer onze voorbeeldcode 110010.

b Hoeveel codes zijn er die afstand 2 hebben tot deze code?

11 Anne gooit vijf maal een munt op.
T is de gebeurtenis: de tweede keer gooit ze kop en D is de gebeurtenis: ze gooit drie maal kop.

a Bereken $\#T$, $\#D$ en $\#T \cap D$.

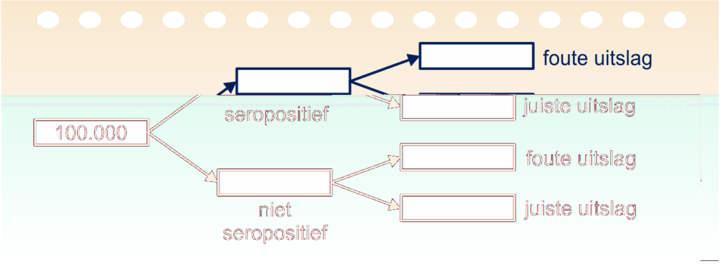
b Bereken $P(T|D)$ en $P(D|T)$.

c Zijn T en D onafhankelijk?

12 Anne gooit zes maal een munt op.
T is de gebeurtenis: de tweede keer gooit ze kop en D is de gebeurtenis: ze gooit drie maal kop.
Bereken $\#D$, $\#T$ en $\#D \cap T$.
Zijn T en D onafhankelijk?

13 **Seropositief?**
Een test op seropositiviteit is met 98% betrouwbaar, dat wil zeggen dat de test in 98% van de gevallen de juiste uitslag (wel/niet seropositief) geeft. We nemen aan dat 1 promille (één duizendste) van de Nederlandse bevolking seropositief is.

a Neem het stroomdiagram hieronder over en vul het in.



Een willekeurige persoon ondergaat de test.

b Bereken de kans dat de test deze persoon als seropositief aanwijst.

Stel dat die willekeurige persoon bij zo'n test als seropositief wordt aangewezen.

c Wat is de kans dat die persoon ook inderdaad seropositief is?

Je ziet dus dat een op het oog behoorlijk betrouwbare test tot zeer onbetrouwbare uitspraken kan leiden.

Intro

1

a Zie figuur.

veelvlak	grensvlakken	hoekpunten	ribben
4-vlak	4	4	6
6-vlak	6	8	12
8-vlak	8	6	12
12-vlak	12	20	30
20-vlak	20	12	30

b $G + H = R + 2$

c Het 32-vlak heeft: $(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) : 3 = 60$ hoekpunten en
$(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) : 2 = 90$ ribben. Er geldt: $32 + 60 = 90 + 2$.
Dus de formule van Euler geldt voor het 32-vlak.

d Een n-zijdige piramide heeft:
$n + 1$ grensvlakken, $n + 1$ hoekpunten en $2n$ ribben.
Dus $G + H = n + 1 + n + 1 = 2n + 2$ en $R + 2 = 2n + 2$.
Dus de formule van Euler geldt voor een willekeurige piramide.
Een n-zijdige prisma heeft:
$n + 2$ grensvlakken, $2n$ hoekpunten en $3n$ ribben.
Dus $G + H = n + 2 + 2n = 3n + 2$ en $R + 2 = 3n + 2$.
Dus de formule van Euler geldt voor een willekeurig prisma.

Systematisch uitschrijven

2

a 4-10-10 ; 5-10-9 ; 6-10-8 ; 6-9-9 ; 7-10-7 ; 7-9-8 ; 8-8-8
7 mogelijkheden

b -

3

a

LDEEE	ELEDE
DLEEE	EDELE
LEDEE	ELEED
DELEE	EDEEL
LEEDE	EELDE
DEELE	EEDLE
LEEED	EELED
DEEEL	EEDEL
ELDEE	EEELD
EDLEE	EEEDL

Bekijk op hoeveel manieren je de letters L en D tussen de 3 E's kunt leggen.

b 20 rijtjes

4

6 getallen

5

16 getallen

6 6 samenstellingen

7 12 composities

8 16 manieren

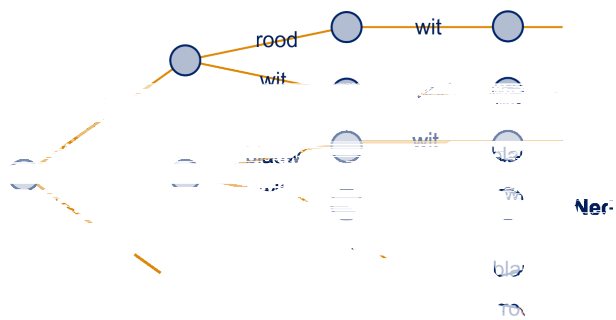
9 6 manieren

10 10 manieren

11 -

Bomen en wegendiagrammen

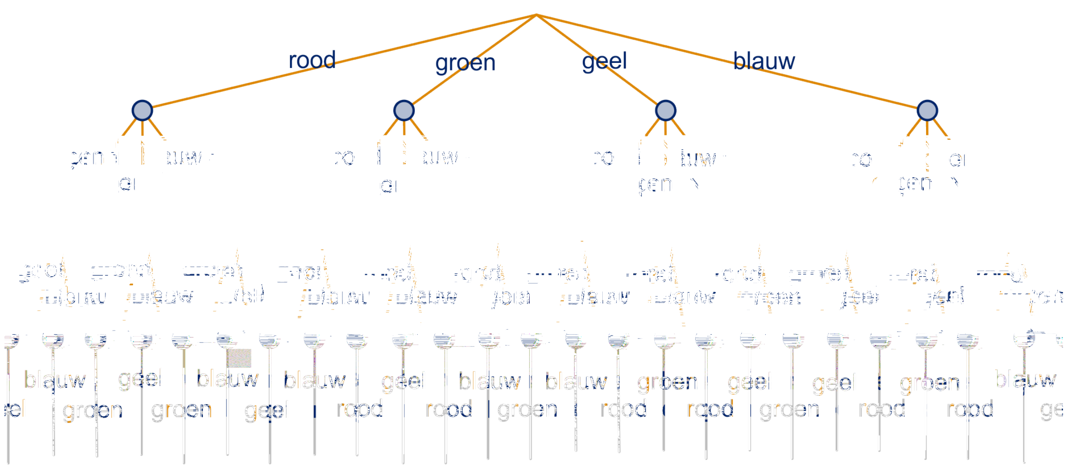
12 **a** Zie figuur.



b Zie antwoord onderdeel **a**.

c 6 eindpunten ; 6 vlaggen

13 **a** Zie figuur.



b $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ eindpunten

c 6 vlaggen ; 6 vlaggen

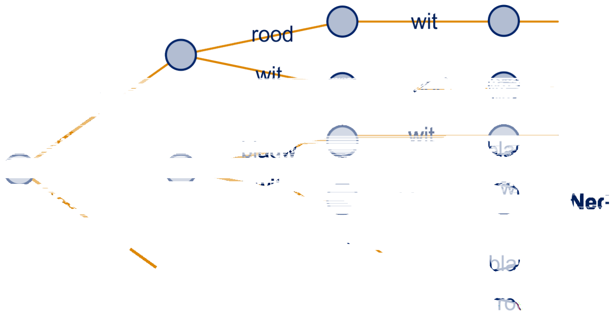
d 2 vlaggen

14 **a** 60 vlaggen ; 5-4-3-boom

b 80 vlaggen ; 5-4-4-boom

15 18 tenues

16 **a** Zie figuur.



b Door het aantal wegen met elkaar te vermenigvuldigen, dus $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ tenues.

17 Het is onmogelijk een wegendiagram te tekenen omdat de keuzes die je voor de tweede baan kunt maken, afhangen van de keuze die je voor de eerste baan gemaakt hebt.

18
a 4 manieren
b 4 manieren ; 4 manieren
c 12 manieren

19
a $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ routes
b $36 \cdot 36 = 1296$ routes
c $2 + 3 \cdot 2 = 8$ routes
d $(2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot 3 = 21$ routes

20
a $5^6 = 15.625$ rijtjes ; 5-5-5-5-5-5-wegendiagram
b $5! = 120$ rijtjes ; 5-4-3-2-1-boom
c $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ rijtjes ; 5-4-3-boom
d $1 \cdot 5^6 \cdot 1 = 15.625$ rijtjes ; (1-) 5-5-5-5-5-5(-1)-wegendiagram
e Van een rijtje uit **d** kun je een rijtje uit **a** maken door het voorste en achterste getal weg te laten; andersom maak je van en rijtje uit **a** een rijtje uit **d** door er een 0 voor te zetten en een 4 erachter.

21
a $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ mogelijkheden ; 8-7-6-boom
b $2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$ manieren ; 2-6-5-boom

22
a $6! = 720$ telefoonnummers
b $1 \cdot 1 \cdot 4! = 24$ nummers
c $720 : 2 = 360$ telefoonnummers
d Vervang twee van de drie enen door een 8 en een 9;

$$\begin{array}{lll} 135117 \rightarrow & 835917 & \\ & & \text{eerste 1 vervangen door een 8} \\ & 835197 & \\ & 935817 & \\ & & \text{tweede 1 vervangen door een 8} \\ & 135897 & \\ & 935187 & \\ & & \text{derde 1 vervangen door een 8} \\ & 135987 & \end{array}$$

Ook bij jouw koppeling zullen er 6 bij horen.

e Er zijn 720 : 6 = 120 nummers mogelijk.

f Door één 1 door een 8 te vervangen en één 3 door een 9 krijg je een koppeling met nummers uit **a**.

$$\begin{array}{ll} 113357 \rightarrow & 819357 \\ & 813957 \\ & 189357 \\ & 183957 \end{array}$$

Er zijn 720 : 4 = 180 nummers mogelijk.

Geordende grepen

23

a Een manier van oplossen is als volgt.
- Ada mag als eerste kiezen; zij heeft keuze uit vijf plaatsen.
- Betty heeft dan nog keuze uit vier stoelen.
- Christiane kan nog uit drie stoelen kiezen.
- Voor Diana zijn er nog twee mogelijkheden.
- En Ellen rest slechts één stoel.

Het aantal rangschikkingen is:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{keus 1} & & \text{keus 2} & & \text{keus 3} & & \text{keus 4} & & \text{geen keus} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & \cdot & 4 & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot & 1 \end{array} = 120$$

b $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ rangschikkingen

24

a $6! = 720$ $\quad$ $8! = 40320$

$7! = 5040$ $\quad$ $9! = 362880$

b Ja, want $10! = 9! \cdot 10$.

c $n! = n \cdot (n-1)!$

25

$10! \cdot 11 \cdot 12 = 479.001.600$

26

a 15. Ja, dit klopt.

b $\dfrac{25!}{23!} = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = 25 \cdot 24 = 600$

27
- **a** $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 12! : 7!$
- **b** $41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 = 41! : 35!$
- **c** $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) = n! : (n-5)!$

28
- **a** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ rangschikkingen ; 6-5-4-3-wegendiagram
- **b** $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ rangschikkingen ; 6-6-6-6-wegendiagram

29

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

30
- **a** $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$
- **b** $\frac{9!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$
- **c** $\frac{26!}{13!}$; $\frac{26!}{6!}$

31
- **a** $6{,}48 \cdot 10^{16}$
- **b** $5{,}60 \cdot 10^{23}$; $4{,}03 \cdot 10^{26}$
- **c** Je kunt geen permutatie van 30 uit 26 nemen; het is zonder terugleggen.

32

$9! = 362.880$; 9P9 $= 362.880$

33
- **a** $7! = 5040$ roosters
- **b** $5040 : 2 = 2520$ roosters
- **c** $2! \cdot 2! \cdot 3! = 24$ roosters

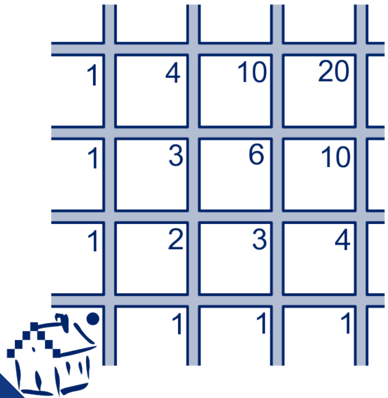
34
- **a** 100P4 $= 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 94.109.400$ trekkingslijsten
- **b** 50P4 $= 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = 5.527.200$ trekkingslijsten
- **c** Dat kan op vier manieren: oeee, eoee, eeoe, eeeo
  $4 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 23.520.000$ trekkingslijsten

35
- **a** $17^2 \cdot 17^2 \cdot 10^2 = 8.352.100$ nummerborden
- **b** $2 \cdot 17 \cdot 17^2 \cdot 10^2 = 982.600$ nummerborden
- **c** $17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 10 \cdot 9 = 5.140.800$ nummerborden
- **d** $\frac{5.140.800}{8.352.100} \cdot 100\% = 61{,}55...\%$; $61{,}55...\%$ van 25 = 15 auto's
- **e** $17^2 = 289$ nummerborden

Roosters

36
- **a** 4 mogelijke wandelingen
- **b** 6 mogelijke wandelingen
- **c** -
- **d** 10 wandelingen ; 4 wandelingen
- **e** Vermenigvuldigen (dus 40 mogelijke routes).

Zie figuur.



[redacted] routes zijn en er vanuit elk van deze punten maar één [redacted] getallen gewoon optellen.

[redacted]

b $(13,7)$ of $(7,13)$

c $\binom{18}{8}$ of $\binom{18}{10}$

d $n = 9$

e $\binom{9}{3} = 84$ of $\binom{9}{6} = 84$

45

a $\binom{10}{3} = 120$ routes

b Er zijn evenveel kortste routes van $(7,3)$ naar $(10,8)$ als van $(0,0)$ naar $(3,5)$. Er zijn dus $\binom{8}{3} = 56$ routes mogelijk.

c $\binom{10}{3} \cdot \binom{8}{3} = 120 \cdot 56 = 6720$ routes

d $\binom{10}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{10}{5} = 94.832.640$ routes

Combinaties

46

a ABC; ABD; ABE; ABF; ACD; ACE; ACF; ADE; ADF; AEF; BCD; BCE; BCF; BDE; BDF; BEF; CDE; CDF; CEF; DEF

b Anne, Bas, Claudia; Bas, Daan, Fenna

c Zie figuur.

d $\binom{6}{3} = 20$; dus 20 keuzes ; klopt

47

a 20 ; 17 ; 17 ; $(17,3)$

b $\binom{20}{3} = 1140$ keuzes

48

a $(16,4)$

b $\binom{20}{4} = 4845$ keuzes

c -

d $\binom{12}{1} \cdot \binom{8}{3} = 12 \cdot 56 = 672$ keuzemogelijkheden

e $(9,3)$; $\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{1} = 220 \cdot 8 = 1760$ keuzes

f $\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{2} = 66 \cdot 28 = 1848$ keuzes

g $\binom{12}{4} = 495$ keuzes

h $\binom{8}{4} = 70$ keuzes

i $672 + 1760 + 1848 + 495 + 70 = 4845$; Ja, klopt.

49 $3 \cdot \binom{6}{3} = 60$ mogelijkheden

50 **a** $\binom{12}{5} = 792$ volgordes

b $\binom{9}{4} = 126$ volgordes

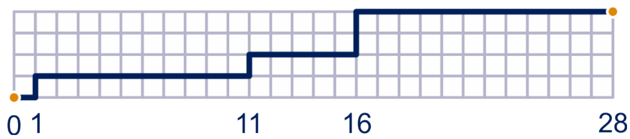
51 **a** $\binom{7}{3} = 35$ manieren

b $\binom{4}{3} = 4$ manieren ; $\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} = 3 \cdot 6 = 18$ manieren

c $4 + 18 = 22$ manieren

52 **a** $\binom{32}{4} = 35.960$ combinaties

b Zie figuur.



c $(8,0)$ en $(12,4)$; 70 combinaties

d $(6,2)$ en $(12,4)$; 784 combinaties

e $(7,1)$, $(14,2)$ en $(21,3)$; 4096 combinaties

f $(12,4)$; 1820 combinaties

g 1820 combinaties

h Laat de eerste vier stappen corresponderen met de 9's en de volgende vier stappen met de 10'en; de overige 24 stappen met de rest. De route gaat dan langs $(2,2)$ en $(4,4)$, dus 36 combinaties.

53 **a** $\binom{10}{4} = 210$ viertallen

b $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ uitslagen

c Vermenigvuldigen: $210 \cdot 24 = 5040$ uitslagen

d $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ uitslagen

54 210 ; ja

55 **a** -

b 210

c $\frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$

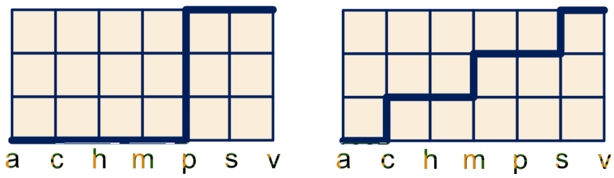
Herhalingscombinaties

56

a $\binom{7}{3} = 35$ ijsjes

b $\binom{5}{2} = 10$ ijsjes

c Zie figuur.

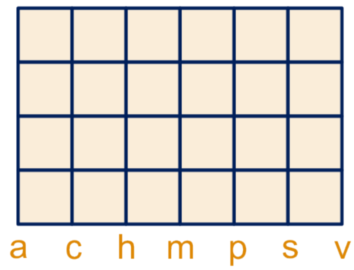


d $\binom{9}{3} = 84$ ijsjes

e $\binom{7}{2} = 21$ ijsjes

57

a Zie figuur.



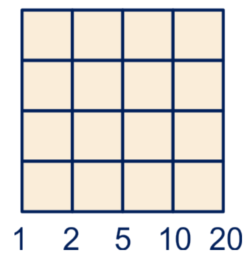
b $\binom{10}{4} = 210$ ongeordende grepen

c $\binom{16}{10} = 8008$ megabekers

d $\binom{9}{3} = 84$ manieren

58

a Zie figuur.



$\binom{8}{4} = 70$ mogelijkheden

b De eerste twee stappen in zo'n route gaan naar rechts. $\binom{6}{4} =$ 15 mogelijkheden

c $\binom{6}{2} = 15$ mogelijkheden

d $\binom{5}{2} = 10$ mogelijkheden

e Dat is het aantal combinaties van 4 uit 5: $\binom{5}{4} = 5$ mogelijkheden.

59

a $\binom{9}{4} = 126$ worpen

b $\binom{6}{3} = 20$ worpen; de eerste twee stappen in zo'n route zijn naar rechts en de derde naar boven.

c $\binom{6}{4} = 15$ worpen

Het vaasmodel

60

a Vijf kleuren in de vaas; je trekt met terugleggen vier keer, waarbij je let op de volgorde; $5^4 = 625$ manieren.

b Zes kleuren in de vaas (ook blanco); je trekt weer met terugleggen vier keer, waarbij je let op de volgorde; $6^4 = 1296$ manieren.

c Twee kleuren in de vaas; je trekt weer met terugleggen vier keer waarbij je let op de volgorde; $2^4 = 16$ manieren.

d Vijf kleuren in de vaas; nu trek je zonder terugleggen vier keer, waarbij je let op de volgorde; $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ manieren.

61

a Vijf kleuren in de vaas; je trekt met terugleggen vier keer uit de vaas zonder op de volgorde te letten; $\binom{8}{4} = 70$ manieren.

b Vier kleuren in de vaas (geen paars); je trekt met terugleggen en zonder op de volgorde te letten vier keer; $\binom{7}{4} = 35$ manieren.

c Vier kleuren in de vaas (geen geel); je trekt met terugleggen twee keer zonder op de volgorde te letten; $\binom{5}{2} = 10$ manieren.

d Vijf kleuren in de vaas; je trekt zonder terugleggen en zonder op de volgorde te letten vier keer; $\binom{5}{4} = 5$ manieren.

62

a Vaas met 0 en 1 erin; je trekt met terugleggen acht keer uit de vaas waarbij je let op de volgorde; $2^8 = 256$.

b 8 ; 10000000 ; 01000000 ; 00100000 ; 00010000 ; 00001000 ; 00000100 ; 00000010 ; 00000001

c -

d 10000001 ; 3 en 4

e $\binom{8}{2} = 28$ trekkingen ; 28 rijtjes

f $\binom{8}{6} = 28$ trekkingen ; klopt

g $\binom{8}{3} = 56$ rijtjes ; $\binom{8}{5} = 56$ rijtjes

h $\binom{10}{3} = 120$ rijtjes ; vaas met de nummers 1 t/m 10 ; je trekt zonder terugleggen 3 keer uit de vaas, zonder op de volgorde te letten.

63

a $3^8 = 6561$ rijtjes

b $2^8 = 256$ rijtjes

c 11021011

d $\binom{8}{2} = 28$ rijtjes ; $\binom{6}{1} = 6$ rijtjes ; $28 \cdot 6 = 168$ rijtjes

e $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2} = 8 \cdot 21 = 168$ rijtjes

f $\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{2}$ of $\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{1}\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{1}$ of $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{5}$

g $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 10 \cdot 36 \cdot 35 = 12.600$ rijtjes

64

a $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 720$ telefoonnummers

b $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 360$ telefoonnummers

c $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 120$ telefoonnummers

d $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 180$ telefoonnummers

e -

65

Eerst vijf plaatsen voor rode eieren kiezen, dan drie voor de gele en twee voor de blauwe, geeft:

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 1 = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$$

66

a 7P3 = 120 grepen

b $\binom{7}{3} = 35$ grepen

c 6 ; *abc, acb, bac, bca, cab, cba*

d $35 \cdot 6 = 210$; klopt

e $1{,}3746 \cdot 10^{28}$

f $60! = 8{,}3210 \cdot 10^{81}$ grepen

g $1{,}3746 \cdot 10^{28} \cdot 8{,}3210 \cdot 10^{81} = 1{,}3746 \cdot 8{,}3210 \cdot 10^{28} \cdot 10^{81} \approx 1{,}144 \cdot 10^{110}$ grepen

67

a $3^4 = 81$ grepen

b $\binom{6}{4} = 15$ grepen

c 12

d

1111: 1	2221: 4	1133: 6
2222: 1	2223: 4	2233: 6
3333: 1	3331: 4	1123: 12
1112: 4	3332: 4	2213: 12
1113: 4	1122: 6	3312: 12

totaal: 81 ; klopt

Combinatorische vraagstukken

68

a $\frac{7!}{7} = 6! = 720$ kringen

b De lege plek kun je zien als een '7', dus hetzelfde als vorige vraag: $6! = 720$ kringen

c 360 kringen. (We vervangen de 6 en de 7 bij alle mogelijkheden van vraag **a** door een open plaats. Dan krijg je elke mogelijkheid twee keer.)

Of: eerst de lege plekken op $\binom{7}{2}$ manieren en dan de 5 getallen plaatsen en delen door 7 draaiingen: $\frac{\binom{7}{2} \cdot 5!}{7} = 360$.

69 Op 1e en 8e uur: $6 \cdot 5$ mogelijkeden; dan voor de overige vier vakken nog $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ plaatsen mogelijk, dus $6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 10.800$ roosters

of $6 \cdot \frac{6!}{2} \cdot 5 = 10.800$ roosters,

of $6 \cdot 5 \cdot \binom{6}{2} \cdot 4! = 10.800$ roosters.

70

a $\binom{9}{4} = 126$ manieren

b De mogelijkheden zijn: 1-1-1-5, 1-1-2-4, 1-1-3-3, 1-2-2-3 en 2-2-2-2.
Respectievelijk kan dat op 4, 12, 6, 12 en 1 manieren.
De kans is $\frac{4 + 12 + 6 + 12 + 1}{6^4} = \frac{35}{1296}$.

71

a $\binom{6}{2} = 15$, $\binom{6}{3} = 20$, $\binom{6}{4} = 15$, $\binom{6}{5} = 6$, $\binom{6}{6} = 1$

b $15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 57$ cocktails

72

a $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ manieren ; $\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$ manieren

b $\binom{6}{3} : 2 = 10$ manieren

c $15 + 6 + 10 = 31$ manieren

73

a $\binom{8}{3} = 56$ coupes

b $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ coupes

c Als je bijvoorbeeld twee bolletjes vanille kiest, kun je nog kiezen uit vijf andere bolletjes.
Totaal zijn er dus $5 \cdot 6 = 30$ coupes.

74

a $3^7 = 2187$ torentjes

b De mogelijkheden zijn: 1-1-5, 1-2-4, 1-3-3 en 2-2-3.
Respectievelijk kan dat op $3 \cdot \binom{7}{5} \cdot \binom{2}{1} = 126$, $6 \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} = 630$, $3 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} = 420$ en $3 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = 630$ manieren.
In totaal $126 + 630 + 420 + 630 = 1806$ torentjes.

c $\left(2^7 - 2\right) \cdot 3 = 378$ torentjes

d 3 torentjes

e $1806 + 378 + 3 = 2187$ torentjes, klopt.

75

a $\binom{6}{4} \cdot \binom{6}{4} = 15 \cdot 15 = 225$ keuzes

b $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 6 \cdot 6 = 36$ keuzes

76

a $8 \cdot 7 : 2 = 28$ verbindingslijnstukken

b $\binom{8}{3} = 56$ verbindingsdriehoeken

77

a $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 90$ routes

b $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 36$ routes

78

a $2^{10} = 1024$ series

b $\binom{10}{5} = 252$ series

c $16 + 8 + 8 + 8 + 8 + 16 = 64$ series

Rekenregels voor kansen

79

a $P(A) = \frac{1}{12}$, $P(B) = \frac{1}{18}$, $P(A \text{ of } B) = \frac{1}{6}$.

b $P(E) = \frac{1}{6}$, $P(F) = \frac{1}{6}$ en $P(E \text{ of } F) = \frac{11}{36}$

c Nee

d S en T hebben geen gemeenschappelijke uitkomsten.

e $P(G) = 1 - P(H) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$

80

a Nee, als dat wel zo was dan $P(V \text{ of } N) = P(V) + P(N)$, en dat is niet zo, want $P(V) = 0{,}3$, $P(N) = 0{,}2$ en $P(V \text{ of } N) = 1 - 0{,}57 = 0{,}43$.

b 7%

c 0,3; 0,2; 0,43; 0,07

d $P(V \text{ of } N) = P(V) + P(N) - P(V \text{ en } N)$

81

$\#S + \#T = \#S \cup T + \#S \cap T$

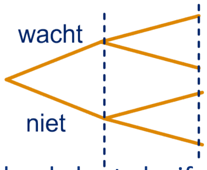
82

a Ad kan het volgende geworpen hebben:
(1,1), (1,3), (1,5), (2,2) (2,4) (2,6) (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6). Hiervan zijn er 9, waarvan de som minstens 8 is.
De kans is dus $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

b De worpen van C zijn: (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6). Daarvan is bij de helft de som van de ogen even.
De kans is dus $\frac{1}{2}$.

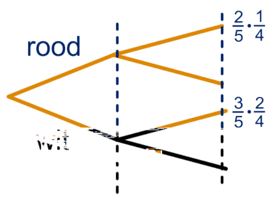
c Bij de worpen van C zijn 3 waarbij de som van de ogen minstens 8.
De kans is dus $\frac{1}{2}$.

83 Zie figuur.
De kans dat je moet wachten is $1 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}44$; de kans dat je voor het eerste licht moet wachten is 0,3 Dus de gevraagde kans is $\dfrac{0{,}3}{0{,}44} \approx 0{,}68$.



84
a $\frac{1}{4}$
b $\frac{1}{4}$, en als je dat niet gelooft: dit is de kans dat de eerste speler de korte lucifer niet trekt, de tweede de korte lucifer niet trekt en de derde wel. Die kans is: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ dus de speler heeft kans $\frac{1}{4}$ om de korte lucifer te trekken.
c Ja, elke speler heeft kans $\frac{1}{4}$ om de korte lucifer te trekken.

85
a Zie figuur.
$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$
b $P(S \cap T) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$
c $P(T|S) = \dfrac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{1}{4}$

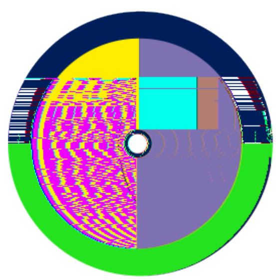


86
a $P(S) = \frac{2}{5}$, $P(T) = \frac{2}{5}$ en $P(S \cap T) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
b $P(T|S) = \frac{2}{5}$

87 $P(T|S) = P(T) \Leftrightarrow \dfrac{P(S \cap T)}{P(S)} = P(T)$. Als je in de laatste gelijkheid beide leden met $P(S)$ vermenigvuldigt vind je: $P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T)$.

88
a $P(B|G) = \frac{3}{4}$, $P(R|G) = \frac{1}{4}$ en $P(P|G) = 0$.
b Nee, want $P(B|G) \neq P(B)$.
c Ja, zie figuur.

89 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{5}{18}$, $P(C) = \frac{1}{2}$.
$P(A \cap B) = 0$, dus $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$,
dus A en B zijn afhankelijk.
$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$, dus $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$,
dus A en C zijn onafhankelijk.
$P(B \cap C) = \frac{1}{9}$, dus $P(B \cap C) \neq P(B) \cdot P(C)$,
dus B en C zijn afhankelijk.


figuur bij opgave 88

Extra opgaven

1 $\binom{12}{2} = 66$ proefwerken

2 $\binom{9}{2} = 36$ zakjes

3

a $\binom{8}{4} = 70$ wegen

b $70 - \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 34$ wegen

c 52 wegen

4

a $10^4 = 10.000$ pincodes

b $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ pincodes

c Aantal mogelijkheden is $\frac{4!}{2} = 12$. Dus kans $\frac{1}{12}$.

d $9^4 = 6561$ pincodes

e $2^4 - 2 = 14$ pincodes

f $\binom{10}{2} \cdot 14 = 630$ pincodes

g $\frac{20.000.000}{10.000} = 2000$ mensen

5

a Kans is $\frac{1}{3}$.

b $\binom{12}{4} = 495$ manieren

c $\binom{12}{6} : 2 = 462$ manieren

6

a $\binom{15}{10} = 3003$ manieren

b $\binom{9}{4} = 126$ manieren

c $\binom{9}{5} = 126$ manieren

7

a $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 12.600$ torentjes

b Splits op in: 1 blauwe doet niet mee, 1 gele doet niet mee, 1 rode doet niet mee en 1 witte doet niet mee:

$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} = 12.600$ torentjes.

Nog veel slimmer: je kunt een koppeling maken tussen torens van 10 en torens van 9: haal het bovenste blok eraf.

c Blauw kan 2 keer voorkomen; geel kan 2 keer voorkomen of rood kan 2 keer voorkomen:

$3 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 180$ torentjes.

d $3b1g1r1w:\quad \binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1} = 120$

$2b2g1r1w:\quad \binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1} = 180$

$2b1g2r1w:\quad \binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2} = 180$

$1b3g1r1w:\quad \binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{1} = 120$

$1b2g2r1w:\quad \binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2} = 180$

Totaal 780 torentjes.

8

a $4! = 24$ manieren
b 12 manieren
c 12 manieren

9

a $6! = 720$ manieren
b $2^6 = 64$ manieren
c $6 \cdot 5 = 30$ manieren
d $\binom{6}{2} = 15$ manieren
e $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$ manieren

10

a $2^6 = 64$ codes
b $\binom{6}{2} = 15$ codes

11

a $\#T = 2^4 = 16$, $\#D = \binom{5}{3} = 10$ en $\#T \cap D = \binom{4}{2} = 6$.
b $P(T|D) = \dfrac{\#T \cap D}{\#D} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ en $P(D|T) = \dfrac{\#T \cap D}{\#T} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
c Nee, want $P(T|D) \neq P(T)$.

12

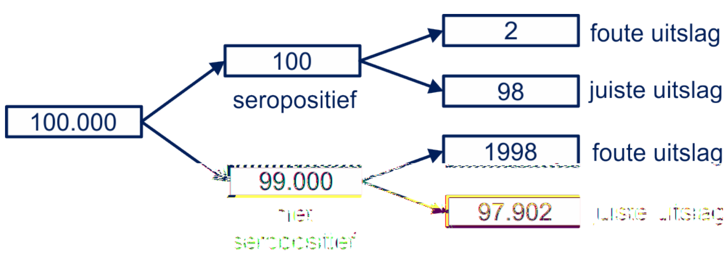
$\#D = \binom{6}{3} = 20$, $\#T = 2^5 = 32$ en $D \cap T = \binom{5}{2} = 10$.

$P(D|T)\ \dfrac{\#D \cap T}{\#T} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$ en $P(D) = \dfrac{\#D}{\#U} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

Dus T en D zijn onafhankelijk.

13

a Zie figuur.



b $\frac{98 + 1998}{100.000} = 0,02096$

c $\frac{98}{98 + 1998} = 0,0467...$

1 Combinatoriek en Rekenregels

1 Bij elk telefoonnummer met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8 kun je twee telefoonnummers maken met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9 op de volgende manier. Bij 131578 horen 931578 en 139578 (vervang de eerste 1 door een 9 of vervang de tweede 1 door een 9).
2 Schrijf 9! en 5! eerst als product van respectievelijk 9 en 5 getallen.
3 Maak opnieuw een rooster. Welke wegen moet je nu weglaten?
4 Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de eerste rij? En hoeveel voor de tweede en derde rij?
5 De eerste drie bomen zijn gezond, dus GGG?????????.
6 Het antwoord is niet zo eenvoudig uit het rooster af te leiden. Maar je kunt het rooster aanpassen: laat de eerste 16 stappen corresponderen met de schoppenkaarten en de ruitenkaarten en de volgende 16 stappen met de harten- en de klaverenkaarten.
7 Omdat de kring door draaiing niet verandert, kun je er vanuit gaan dat de 1 bovenaan staat. Op hoeveel manieren kun je de overige cijfers dan nog plaatsen?
8 Plaats eerst twee vakken op het eerste en het laatste uur, en plaats de tussenuren als laatste.
9 In opgave 8 van paragraaf 4 heb je net zo'n vraag gehad. Kijk daar nog eens naar.
10 In opgave 13 van paragraaf 5 heb je net zo'n vraag gehad. Kijk daar nog eens naar.
11 Eén smaak komt twee keer voor en een smaak komt één keer voor. Er moeten dus twee smaken worden aangewezen uit de zes.
12 Maak een lijst van alle mogelijkheden waarbij alle drie de kleuren voorkomen, zoals 1-1-5 (twee kleuren komen 1 keer voor en een kleur komt 5 keer voor). Bepaal dan voor elk van die mogelijkheden hoeveel verschillende torentjes er zijn.
13 Zo'n route bestaat uit 6 stappen; daarvan ga je er twee in de x-richting; twee in de y-richting en twee in de z-richting. Je kunt zo'n route dus coderen met een rijtje van lengte 6 met 2 x'en, 2 y'en en 2 z'en.
14 Bekijk de rijtjes KKKKKM...., MKKKKKM... , .MKKKKKM.. , enzovoorts.