H[redacted] WA Formules en verbanden

Formules en verbanden

Formules en verbanden is een bewerking van het oude hoofdstuk Verbanden 2. De opgaven over asymptoten zijn weggelaten omdat dit begrip vanaf 2017 niet (meer) in het examenprogramma havo wiskunde A zit. Er volgt in februari nog een aanvulling over ongelijkheden en formulevaardigheden. Deze aanvulling zal ongeveer 3 a 4 lessen kosten.

Colofon

© 2008	Stichting De Wageningse Methode
Auteurs	Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen
Illustraties	Wilson Design, Uden
Distributie	Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede
ISBN	97890-5225-0038
Homepage	www.wageningse-methode.nl

Gebroken en negatieve exponenten

$g^2 = g \cdot g$, $g^5 = g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g$, $g^{2,4} = ?$
In dit hoofdstuk staan we stil bij machten die niet direct voorstelbaar zijn, zoals bijvoorbeeld: $g^{2,4}$.

Exponenten kunnen ook een breuk zijn
Stel dat op 1 januari 2000 op mijn spaarrekening een bedrag stond van precies € 2000. Op deze rekening kreeg en krijg ik nog steeds 5% rente per jaar.

jaar 1 jan	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Tijdstip			t=0	t=1	t=2	t=3	t=4
Bedrag(€)			2000				

Bij deze situatie kun je de formule opstellen: $2000 \cdot 1{,}05^{t}$.
a. Vul met behulp van deze formule de tabel in voor $t = 1$ tot en met $t = 4$.

In de financiële wereld werkt men vaak met jaren van 360 dagen en maanden van 30 dagen. Dat doen wij hier ook.
Ik wil nu weten hoe groot mijn bedrag is op 1 april 2001.

Oplossingsmethode
Bij 1 april 2001 hoort $t = 1\frac{3}{12}$.
b. Leg uit dat deze $t = 1\frac{3}{12}$ klopt en bereken met de formule voor deze waarde van t mijn bedrag op 1 april 2001.

Oplossingsmethode
Bereken eerst de groeifactor g per maand en bereken dan daarmee het bedrag op 1 april 2001.
Je vindt g als volgt: $2000 \cdot g^{12} = 2000 \cdot 1{,}05$ (dat is het bedrag op 1 januari 2001). Dus $g = 1{,}05^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1{,}05}$.
1 april 2001 is 15 maanden na 1 januari 2000. Dus moet je € 2000 15 keer met deze g vermenigvuldigen, dus met $g^{15} = (1{,}05^{\frac{1}{12}})^{15} = 1{,}05^{\frac{15}{12}} = 1{,}05^{1\frac{3}{12}}$.
c. Bereken met methode 2 het kapitaal op 1 oktober 2001.

Exponenten kunnen ook negatief zijn

Oplossingsmethode
Als ik wil weten hoe groot mijn bedrag op 1 januari 1998 was kan ik gewoon $t = -2$ invullen in de formule.

Oplossingsmethode
Omdat ik ieder jaar het bedrag moet vermenigvuldigen met 1,05, moet ik voor het bedrag op 1 januari 1998 € 2000 twee maal *delen* door 1,05.

Laat met een berekening zien dat beide methoden dezelfde uitkomst geven.

3 **De bevolking van Utrecht**
In Utrecht woonden in 1900 107000 mensen. In 1990 waren dat er 259600. Neem aan dat het aantal Utrechters met een vast percentage per jaar groeide en dat er dus sprake was van exponentiële groei.
a. Laat met een berekening zien dat de groeifactor per 10 jaar gelijk is aan 1,1035.
b. Bereken het aantal inwoners volgens dit model in 1938.
c. Je had natuurlijk ook eerst de groeifactor *per jaar* kunnen berekenen en deze 38 keer gebruiken.
Demonstreer deze methode.

Een nog andere manier om het aantal Utrechters in 1938 te berekenen is: $259600 \cdot 1{,}1035^{-5{,}2}$.
d. Leg deze manier uit en controleer de uitkomst.
e. Bereken op deze laatste manier ook het aantal inwoners in 1966.

4 $2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = 2$
a. Breid deze rij uit met een term naar boven en met zeven termen naar onder.
b. Maak ook zo'n rij voor $(\frac{1}{2})^x$, met x van -6 tot 6.
Ook voor $(\sqrt{2})^x$, met x van -6 tot 6.

c. Uit deze rijen zie je dat (vul in):
$(\frac{1}{2})^4 = 2^{---}$, $(\frac{1}{2})^6 = 2^{---}$, $(\frac{1}{2})^{-4} = 2^{---}$
$(\sqrt{2})^4 = 2^{---}$, $(\sqrt{2})^6 = 2^{---}$, $(\sqrt{2})^{-4} = 2^{---}$

a. Schrijf *indien mogelijk* als macht van 2:
$2^3 \cdot 2 \ = \ 2^{\text{---}}$
$2^3 \cdot \frac{1}{2}$
$2^3 \cdot 2^4$
$2^3 \cdot \dfrac{1}{2^4}$
$2^3 + 2^3$
$2^3 + 2^4$
b. Schrijf *indien mogelijk* als macht van 5:
$5^3 \cdot 5 \ = \ 5^{\text{---}}$
$5^3 \cdot \frac{1}{5}$
$5^4 \cdot 5^2$
$5^6 \cdot \dfrac{1}{5^6}$
$(5^3)^4$
$5^2 + 5^3$
c. Schrijf *indien mogelijk* de volgende uitdrukkingen eenvoudiger; g is een willekeurig getal.
$g^n + g^m$
$g^n - g^m$
$g^n \cdot g^m$
$\dfrac{g^n}{g^m}$
$(g^n)^m$

De standaardnotatie
Op je rekenmachine kom je bij hele grote en hele kleine uitkomsten de zogenaamde standaardnotatie tegen:
300.000.000 · 6.000.000 = $1{,}8^{15}$ (of 1,8E15 op je GR)
Deze uitkomst is eigenlijk fout geschreven; bedoeld wordt: $1{,}8 \cdot 10^{15}$ = 1.800.000.000.000.000 (de komma 15 plaatsen naar rechts).
a. Bereken 0,0000003 · 0,0000002. Schrijf je antwoord in de standaardnotatie en voluit.
b. Bereken $1{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-9}$; schrijf je antwoord in de standaardnotatie.
c. Zeg wat 10^{-3} betekent.

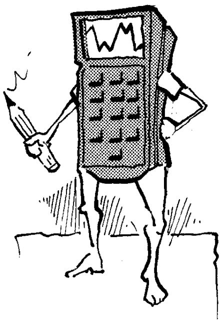
Je zag eerder dat $1{,}05^{-2}$ gelijk was aan $\dfrac{1}{1{,}05^2}$.
In het algemeen geldt: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Ook zag je dat $2^{\frac{3}{2}}$ gelijk is aan $(2^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{2})^3$.
Algemeen geldt: $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ en $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$.

Prehistorische nederzetting

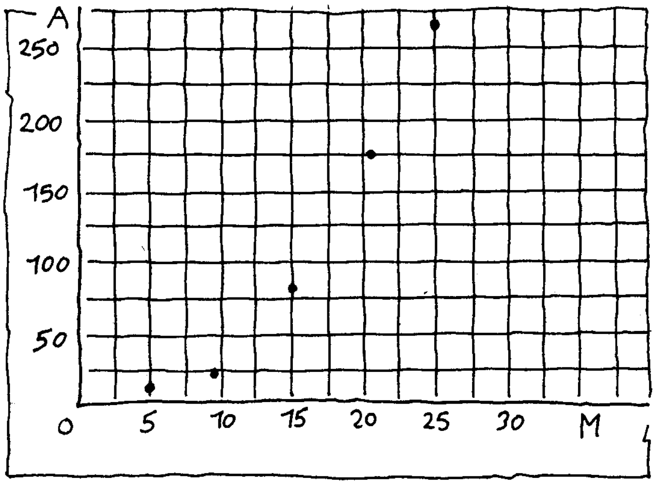
Bij opgravingen worden restanten gevonden van prehistorische nederzettingen. Archeologen zijn geïnteresseerd in vragen zoals: “Wat voor mensen hebben hier gewoond?”, “Hoe leefden ze?” en “Hoeveel waren het er?”.
Men veronderstelt dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van de nederzetting (A) en het aantal mensen dat er woonde (M).
Via allerlei omwegen heeft men voor een aantal nederzettingen A en M bepaald. In de tabel hieronder staan fictieve waarden.

M	5	9	15	21	25
A	6	24	82	175	265



Je kunt bij deze tabel zelf met een grafische rekenmachine een stippengrafiek maken. Als volgt:

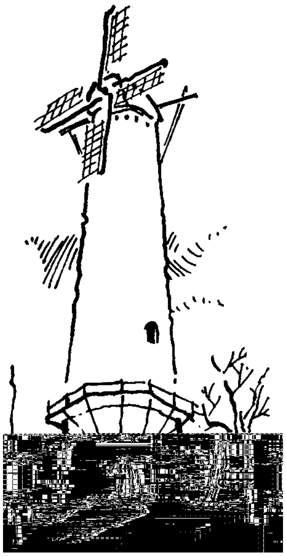
- {5,9,15,21,25} STO→ L_1
  {6,24,82,175,265} STO→ L_2
- STATPLOT , ENTER , on , Type stippengrafiek (linksboven) , Xlist: L_1 , ENTER , Ylist: L_2
- WINDOW Xmin 0
  Xmax 30
  Ymin 0
  Ymax 300
- GRAPH



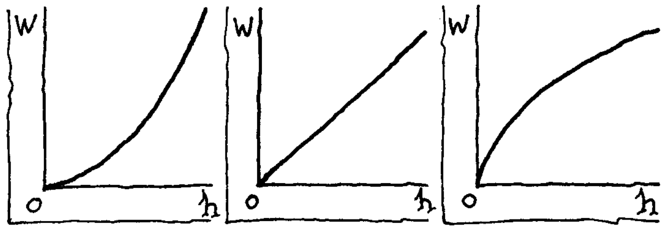
a. Onderzoek welke formule het best past bij deze stippen: $A = 0{,}15 \cdot M^2$, $A = 0{,}15 \cdot M^3$ of $A = 0{,}15 \cdot M^{2{,}32}$.
b. Neem $M = 20$ en bereken met de formule $A = 0{,}15 \cdot M^{2{,}32}$ hoeveel m^2 grond er dan *per persoon* beschikbaar is.
c. Maak een formule voor het aantal m^2 grond per persoon.

d. Stel dat er van een nederzetting bekend is dat de oppervlakte 200 m^2 was.
Zoek uit hoeveel mensen er volgens deze formule gewoond hebben.

Met deze opgave wordt duidelijk gedemonstreerd dat er ook andere dan lineaire en exponentiële formules zijn.
Je zag voorbeelden van machtsformules zoals: $y=x^2$, $y=x^3$, $y=3 \cdot x^2$, $y=0{,}15 \cdot x^{2{,}32}$.



8 Windsnelheid
Voor het meten van de windsnelheid maakt het verschil of je vlak boven de grond of op grotere hoogten meet. Er bestaat een verband tussen de hoogten en de windsnelheid.
Als op 1 meter hoogte de windsnelheid 5 m/s is, dan kan je de windsnelheid op hoogte h vinden met de formule
$W = 5 \cdot h^{0{,}3}$; h in meters, W in m/s.
a. Onderzoek welke van de drie onderstaande grafieken het beste past bij deze formule.



b. Zoek uit op welke hoogte de windsnelheid 13 m/s is.
Zoek eventueel eerst door proberen en zoek daarna uit hoe je dit snel op je rekenmachine kunt intikken.

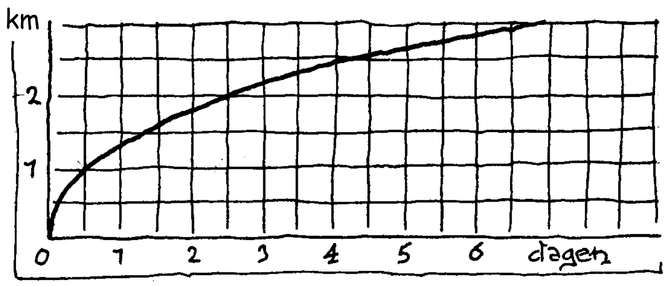
Als de windsnelheid op 1 meter hoogte verandert, moet de formule aangepast worden: $W = W_1 \cdot h^{0{,}3}$; hierbij is W_1 de windsnelheid op 1 meter hoogte.
Stel dat er geen meetresultaten op 1 meter hoogte bekend zijn, maar wel op 5 meter hoogte: de windsnelheid is daar 4 m/s.
c. Bereken voor deze situatie hoe groot de windsnelheid is op 20 meter hoogte.

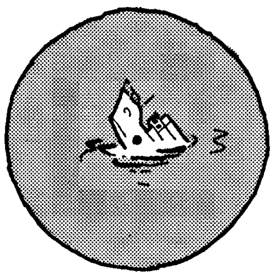
De exponent 0,3 is afhankelijk van de ruwheid van het terrein en kan dus andere waarden hebben. Deze exponent noemen we a. De kleinste waarde van a is 0,16 en de grootste 0,80.
d. Neem $W_1=5$. Teken op de GR de grafiek van W voor $a=0{,}16$, $a=0{,}30$ en $a=0{,}80$.

In eerste instantie lijkt het erop dat de grafiek bij a = 0,16 voor elke hoogte onder de grafiek bij a = 0,30 ligt.
e. Onderzoek of dit ook geldt voor de waarden van h tussen 0 en 1.

Iemand heeft een windsnelheid van 20 m/s gemeten. We weten niet boven welk terrein de meting is gedaan; de waarde van a is dus onbekend.
f. Bereken de maximale en minimale hoogte waarop deze 20 m/s gemeten kan zijn.

Olierampen
Olierampen gebeuren nog steeds. Neem aan dat er een olietanker lek geslagen is en dat olie uit de tanker stroomt. In windstil weer zal de olie zich als een cirkel over de zee uitbreiden. De afstand A van de rand van de oliecirkel tot de tanker (het middelpunt) neemt iedere dag toe zoals je ziet in onderstaande grafiek.





Hiernaast staat een “luchtfoto” van de olievlek na enkele dagen op schaal 1 : 100.000.
a. Zoek uit na hoeveel dagen.

A is de straal van de cirkel (in km); het aantal dagen dat de olie uit de tanker stroomt noemen we D. Stel dat een formule van de vorm A = ... · $D^{0,5}$ geldt.
b. Bereken het ontbrekende getal. Geef duidelijke uitleg.

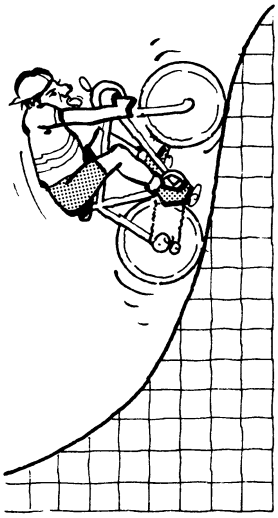
Als je de straal weet, kun je de oppervlakte van een cirkel berekenen met de formule: $\pi \cdot \text{straal}^2$
c. Maak een formule voor de oppervlakte van de olievlek, uitgedrukt in het aantal dagen D.

Men veronderstelt dat de oppervlakte van de olievlek iedere dag evenveel toeneemt en dat er dus sprake is van lineaire groei.
d. Onderzoek of dit inderdaad het geval is.

⌘ **Transportenergie**

Er is uitgebreid onderzoek gedaan naar de hoeveelheid

Alle verbanden op een rijtje



In het hoofdstuk **Meer groei** zijn lineaire en exponentiële functies behandeld. In de vorige paragraaf zijn machtsfuncties bekeken.

Lineaire functies
bijvoorbeeld: $y = -2x + 10$, $N = 1{,}25t + 120$
De grafiek van een lineaire functie is altijd een rechte lijn.

Exponentiële functies
bijvoorbeeld: $y = 200 \cdot 3^x$, $N = 160 \cdot 0{,}8^t$

Machtsfuncties
bijvoorbeeld: $y = 40x^2$, $N = 30 \cdot t^{-1{,}6}$

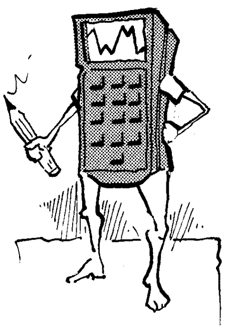
a. Schrijf van elke soort nog eens vier voorbeelden op.

Bij een formule kun je een tabel maken.
b. Hoe herken je aan de tabel dat er sprake is van een lineair verband? Geef een voorbeeld.
c. Hoe herken je aan de tabel dat er sprake is van een exponentieel verband? Geef een voorbeeld.

Voor het herkennen van machtsfuncties aan de hand van een tabel zijn er geen algemene regels. In bijzondere gevallen is het wel mogelijk te zien welke machtsfunctie het betreft. Bijvoorbeeld bij kwadratische verbanden.
Bijvoorbeeld: $y = 2x^2$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	8	18	32		
verschil		2	6	10	14		

De verschilrij maak je op dezelfde manier als een toenamediagram.
a. Maak de tabel verder af tot en met $x = 6$.
Welke regelmaat zie je in de verschilrij?



Op de GR kun je de verschilrij als volgt maken:
$Y_1 = 2x^2$
$Y_2 = Y_1 - Y_1(x-1)$
2nd TABLE
Pas zo nodig de instellingen aan in TBLSET

b. Maak zo de verschilrij bij $y = 3x^2$.
c. Leg uit waarom bij $y = 6x^2$ de uitkomsten van de verschilrij drie keer zo groot zijn als bij $y = 2x^2$ (en twee keer zo groot als bij de verschilrij van $y = 3x^2$).

d. Laat zien dat de regelmaat in de verschilrij die je bij de kwadratische verbanden vond, niet optreedt bij $y = x^3$.
e. Beredeneer dat een regelmaat zoals je vond bij de hierboven genoemde kwadratische verbanden ook bij bijvoorbeeld $y = 0{,}15x^2$ en $y = 86{,}2x^2$ te vinden moet zijn.

Tot nu toe hebben we alleen een verschilrij van de y-waarden gemaakt. We kunnen een stap verder gaan door de verschilrij van de verschilrij te maken. En daarvan weer de verschilrij, enzovoort.
Bijvoorbeeld: $y = x^4$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	16	81	256	625	1296
1e verschilrij		1	15	65	175	369	671
2e verschilrij			14	50	110	194	302
3e verschilrij				36	60	84	108
4e verschilrij					24	24	24

a. Breid het voorbeeld uit tot en met $x = 8$.
b. Hoe zal de vierde verschilrij er uit zien van $y = 3x^4$?

In het algemeen zullen bij een n^{de}-graads machtsfunctie (zoals $y = a \cdot x^n$) de n^{de} verschillen constant zijn.

Met enige handigheid kun je op de GR deze verschillen snel in beeld brengen met TABLE.
c. Probeer dit bij $y = 5x^3$.

Terug naar lineaire verbanden. Vaak hebben we alleen een tabel (of een deel ervan) en geen formule.
Zoek in de volgende gevallen de formule en controleer je formule met de tabel.

x	5	6	7	8
y	28	25	22	19

t	5	9	12

■ Bij exponentiële verbanden is het lastiger om bij een gegeven tabel een formule te maken. We gaan bij de drie onderstaande tabellen een exponentiële formule zoeken.

- Zoek eerst de groeifactor.
- Zoek dan de waarde bij invoer 0.
- Geef ten slotte de formule.

t	2	4	6	8
A	4000	1000	250	62,5

x	2	6	10
y	10	40	160

t	5	9	12
N	60	124,4	215

Als opgave■ niet lukte, helpt misschien de volgende uitleg. Bekijk de tabel hieronder van een exponentieel groeiproces.

x		5				9
y		6				50

Bij $x = 5$ hoort $y = 6$; als de groeifactor 2 zou zijn dan zou je de volgende voortzetting krijgen.

x		5	6	7	8	9
y		6	12	24	48	96

Zoals je ziet kom je nu bij $x = 9$ veel te hoog uit (96 in plaats van 50). Kies nu een kleinere groeifactor bijvoorbeeld 1,5. Reken na dat je dan bij $x = 9$ uitkomt op 30,4.
Je kunt nu net zolang proberen totdat je goed uitkomt bij $x = 9$ (namelijk op $y = 50$). Je kunt ook een berekening maken met groeifactor g; dan moet $6 \cdot g^4$ immers 50 opleveren.

Uit $6 \cdot g^4 = 50$ volgt dat $g = \sqrt[4]{\frac{50}{6}} \approx 1{,}7$.

Door de tabel uit te breiden naar $x = 0$ vind je de beginwaarde: $y = 6 : 1{,}7^5 = 0{,}423$.
De formule is dus: $y = 0{,}423 \cdot 1{,}7^x$.

Zoek in de volgende gevallen voor welke waarde van t de gegeven y-waarde gevonden wordt.

a. $y = 4t + 10$ en $y = 53{,}2$

b. $y = 100 \cdot t^3$ en $y = 250$

c. $y = 100 \cdot 0{,}8^t$ en $y = 20$

d. $y = 2 \cdot t^{4{,}5}$ en $y = 10$

e. $y = 10 \cdot 2{,}5^t$ en $y = 10000$

In de praktijk weet men vaak niet of er (eventueel) sprake is van exponentiële of lineaire verbanden. Op grond van enkele meetgegevens maakt men dan een wiskundig model door te stellen: laten we *aannemen* dat er sprake is van exponentiële groei (of lineaire groei).

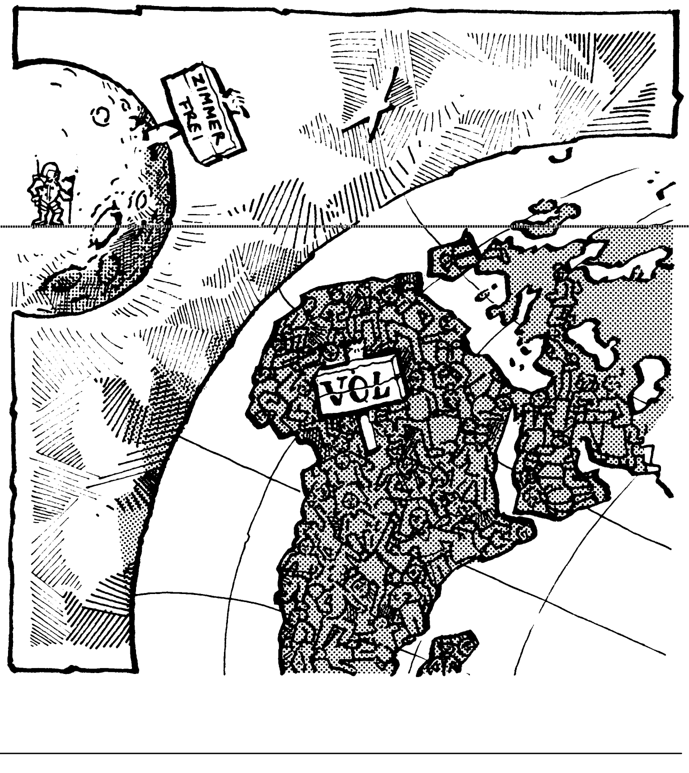
In 1630 was de wereldbevolking 0,5 miljard en in 1960 leefden er 3 miljard mensen op aarde. Neem aan dat de wereldbevolking exponentieel groeit.

a. Bereken de groeifactor per 100 jaar.

b. Bereken de groeifactor per 10 jaar.

c. Met hoeveel procent neemt de wereldbevolking volgens dit model per 100 jaar toe?

d. Hoeveel mensen leefden er rond 1900? En hoeveel zullen er volgens dit model in 2000 leven?

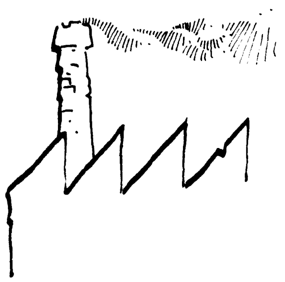


We hadden ook kunnen aannemen dat de bevolking lineair groeit. Weer is het uitgangspunt: 0,5 miljard mensen in 1630 en 3 miljard in 1960.

e. Bereken ook hoeveel mensen er volgens dit model in 1900 waren. En hoeveel zullen er nu in 2000 zijn?

f. Maak een schets van beide modellen in één figuur.

g. Geeft een van de twee modellen ongeveer het juiste aantal mensen in 2000?



8 CO - uitstoot

Koolstofdioxide oftewel CO_2 is een van de veroorzakers van het broeikaseffect. In 1995 kwam de regering met ambitieuze plannen om te zorgen dat de uitstoot van CO_2 in 2020 gehalveerd zou zijn.

De uitstoot in 1995 stellen we op 100. Die van 2020 zou dus uit moeten komen op 50. Natuurlijk zal er in de tussenliggende jaren gekeken worden of men op schema ligt. Welke uitstoot zou er moeten zijn in het jaar 2000, wil men op schema liggen? Als je uitgaat van lineaire afname zal deze vraag een ander antwoord opleveren dan wanneer je uitgaat van een vast percentage daling van de uitstoot per jaar.

a. Bereken de uitstoot in het jaar 2000 volgens het lineaire model en ook volgens het exponentiële model.

b. Schets voor beide modellen de grafiek van de uitstoot CO_2 in de periode van 1995 tot 2020.

9 We noemen twee grootheden **evenredig** als er een constante verhouding tussen de grootheden is. Dit is snel te zien in een tabel. Bij een evenredig verband heb je altijd een verhoudingstabel. Twee voorbeelden:

x	2	3	4	5
y	10	15	20	25

x	2	3	4	5
y	20	25	30	35

a. Ga na dat in het eerste voorbeeld x en y evenredig zijn en in het tweede voorbeeld niet.

b. Wat weet je van de grafiek van een evenredig verband?

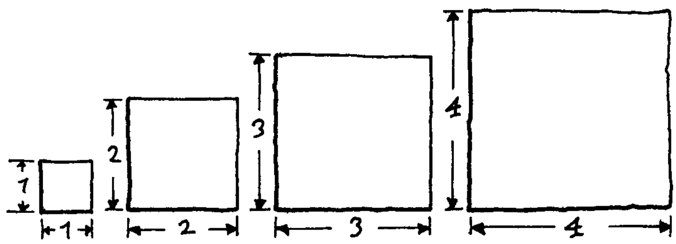
En wat van de bijbehorende formule?

c. Bekijk de mededeling: *Het aantal parkeerplaatsen dat nodig is bij een winkelcentrum is evenredig met het aantal winkels.*

Zeg in eigen woorden welke informatie hier gegeven wordt. Maak een tabel, grafiek en formule. Verzin zelf aanvullende gegevens.

Bekijk de mededeling: *De wereldrecords hardlopen zijn evenredig met de afstand*. Deze uitspraak klopt bij grove benadering. Neem even aan dat hij waar is.
Op de 1500 meter is het wereldrecord ongeveer 3 minuten en 28 seconden (dus 208 seconden).
d. Bereken het wereldrecord op de 5000 m.
Ook op de 10000 m en op de marathon (42,195 km).
e. Hoeveel meter zou men in één uur kunnen lopen?

⌘ We bekijken een serie vierkante metalen platen. De platen kosten € 2,40 per dm^2.



A

In opgave [illegible] zijn we de uitspraak tegengekomen: *de wereldrecords hardlopen zijn evenredig met de afstand*. Dit was een wel hele grove benadering. Iets realistischer is het om te zeggen: *de wereldrecords T zijn evenredig met* $A^{0,75}$, waarbij A de afstand in meters is.
De verhoudingstabel ziet er nu als volgt uit:

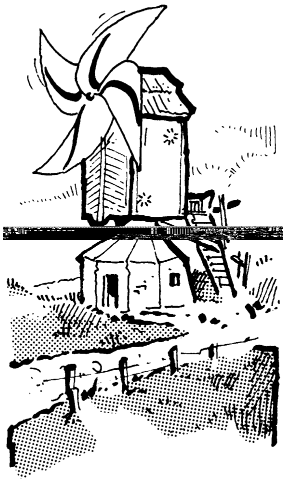
A	1500	5000	10000
$A^{0,75}$	$1500^{0,75}$	$5000^{0,75}$	$10000^{0,75}$
T	208		

a. Bereken de wereldrecords op de 5000 en 10000 meter volgens dit model.
b. Welke formule kun je voor T maken?

V^3	
P	

D^2	
P	

Het vermogen P dat een windmolen levert, is evenredig met de derde macht van de windsnelheid (V^3). Een tabel voor V^3 en P is dus een verhoudingstabel.
Het vermogen is ook evenredig met het kwadraat van de diameter van de rotor (D^2). Een tabel voor D^2 en P is dus een verhoudingstabel.
a. Waarom is het aannemelijk dat P evenredig is met D^2 en niet met D?



Uit de twee evenredigheden volgt dat P te schrijven is in de vorm $P = \text{'getal a'} \cdot V^3$ en ook als $P = \text{'getal b'} \cdot D^2$. Deze formules kunnen we combineren tot: $P = \text{'getal c'} \cdot V^3 \cdot D^2$.
Neem aan dat $P = 0{,}1 \cdot V^3 \cdot D^2$.
Stel dat een windmolen ten minste 700 watt moet produceren. De gemiddelde windsnelheid ter plaatse is 5 m/s. Er wordt advies gevraagd over de diameter die de windmolen ten minste moet zijn.
b. Wat voor advies zou jij geven over de diameter?

Een bijzonder geval krijg je als je twee grootheden x en y hebt waarvoor geldt dat y evenredig is met het omgekeerde van x (ofwel x^{-1} of $\frac{1}{x}$).

Voorbeeld

x	1	2	3	4	5
1/x	1	1/2	1/3	1/4	1/5
y	100	50	33 1/3	25	20

Voorbeeld

x	1	2	3	4	5
1/x	1	1/2	1/3	1/4	1/5
y	60	30	20	15	12

a. Toon aan dat in beide voorbeelden y en $\frac{1}{x}$ evenredig zijn.
b. Geef voor beide voorbeelden een formule in de gedaante: y = 'getal' $\cdot \frac{1}{x}$.

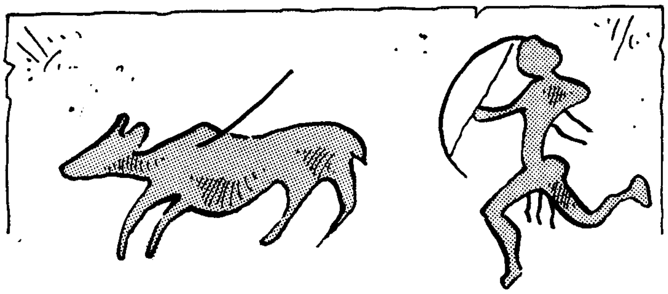
De grootheden x en y in deze voorbeelden zijn **omgekeerd evenredig**. De uitkomst van $x \cdot y$ is steeds hetzelfde.
c. Laat dit zien voor beide voorbeelden.
d. Leg uit dat dit ook volgt uit de formules bij **b**.

Elke maand legt Anneke 120 euro opzij. Ze koopt er aandelen voor op de beurs (dat doet ze niet zelf, maar via een beleggingskantoor). De waarde van de aandelen varieert nogal. Als de koers laag is, krijgt ze meer aandelen voor de 120 euro dan wanneer koers hoog is.
a. Hoeveel aandelen krijgt ze als de koers € 4,8 per aandeel is?

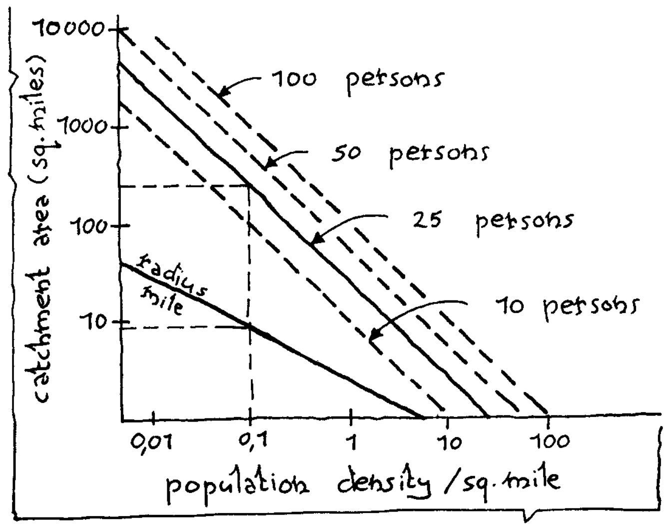
De koers per aandeel noemen we k (in euro). Het aantal aandelen dat Anneke voor haar 120 euro krijgt, noemen we a.
b. Leg uit dat a en k omgekeerd evenredig zijn.
c. Geef een formule voor a, uitgedrukt in k.
Geef een formule voor k, uitgedrukt in a.

Verbanden in de praktijk

Jachtgebieden



Vroeger leefden mensen uitsluitend van de jacht. De grootte van het gebied waarin gejaagd werd, was afhankelijk van de groep waarin de mensen leefden; een kleinere groep had een kleiner jachtgebied nodig dan een grotere groep. Maar ook de bevolkingsdichtheid van de streek was van invloed. Deze bevolkingsdichtheid wordt gemeten in het aantal personen per vierkante mijl.
In de figuur hieronder is het verband tussen groepsgrootte, oppervlakte van het jachtgebied en de bevolkingsdichtheid weergegeven. Zo zie je bijvoorbeeld dat bij een groepsgrootte van 25 personen en een bevolkingsdichtheid van 0,1 het jachtgebied 250 vierkante mijl is.



a. Hoe groot moet het vangstgebied zijn voor een groep van 100 personen bij een bevolkingsdichtheid van 5?
b. Wat is de bevolkingsdichtheid als het vangstgebied 200 vierkante mijl is en de groepsgrootte 10 personen?
c. Hoeveel personen horen bij een vangstgebied van 30 vierkante mijl als de bevolkingsdichtheid 2 is?

d. Neem een groep van 25 personen. Bij toenemende bevolkingsdichtheid daalt het vangstgebied.
Wat voor daling is dat: een lineaire daling, een toenemende daling of een afnemende daling?

e. Maak voor een groep van 10 personen een tabel:

bevolkingsdichtheid	0,01	0,1	1	10
vangstgebied				

f. Maak voor een groep van 10 personen een formule voor het verband tussen bevolkingsdichtheid D en jachtgebied G.
g. Waarom, denk je, neemt de grootte van G af als D groter wordt?

Helikopter I

Er zijn indertijd proeven genomen met het gebruik van helikopters bij het storten van betonblokken voor de aanleg van een dijk. Bij het depot pikt de helikopter drie blokken op, vliegt naar de stortplaats en deponeert ze daar. Na het terugvliegen is één vlucht voltooid. Het is voor het uitvoeren van dit soort werk belangrijk om te weten hoeveel vluchten per uur (VL) zo gemaakt kunnen worden. Dat aantal zal afhankelijk zijn van de afstand tussen depot en stortplaats:

$VL = \frac{3600}{0{,}08d + 48}$, waarbij VL = aantal vluchten per uur en d = afstand depot-stortplaats (in meters) .

a. Toon met behulp van de formule aan dat VL kleiner wordt als d groter wordt.
b. Teken de grafiek van VL op de GR.

Voor een bepaald karwei is het wenselijk dat er minstens 52 vluchten per uur gemaakt worden (VL = 52).
c. Bereken hoe groot de afstand depot-stortplaats mag zijn.
d. Bij welke afstand komt het aantal vluchten onder de 12?
e. Bij welke waarden van d geeft deze formule voor VL een waarde onder de 1?
f. VL kan nog verder dalen. Tot welke waarde?

Helikopter IIee glemt h4Let d4L d4Lan d4Leme d4Lormule v4Loor V4LL Vtts

Een derde helikopter geeft de formule: $VL_3 = \frac{900}{0{,}05d + 15}$.

b. Zoals $\frac{1}{2}$ te schrijven is als $\frac{4}{8}$, is deze formule te schrijven als $VL_3 = \frac{3600}{?}$. Doe dit.

c. Leg uit door de formules te vergelijken of deze helikopter betere of slechtere prestaties levert dan de andere twee helikopters.

Helikopter IV

We kijken nu naar het aantal kilometer dat de eerste helikopter per uur vliegt. We noemen deze afgelegde afstand A.

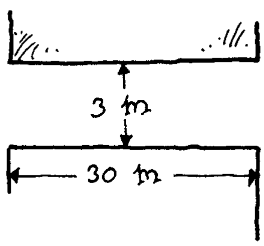
a. Bereken A bij d = 500.

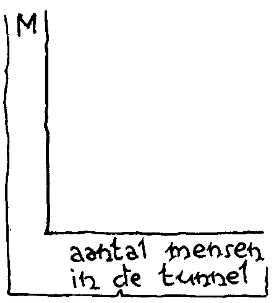
Nu is het nog niet duidelijk of A toeneemt, afneemt of soms toeneemt en soms afneemt als d groter wordt.

b. Het aantal gevlogen km per uur A vind je door het aantal vluchten per uur te vermenigvuldigen met de gevlogen afstand van één vlucht (2·d).

Maak een formule voor A als functie van d en teken de grafiek op de GR.

c. Onderzoek tot welke waarde A nadert als d heel groot wordt.





Passagiersstromen

Treinreizigers die op een bepaald station uitstappen, kunnen de uitgang van het station alleen bereiken via een voetgangerstunnel. De tunnel is 30 meter lang en 3 meter breed.

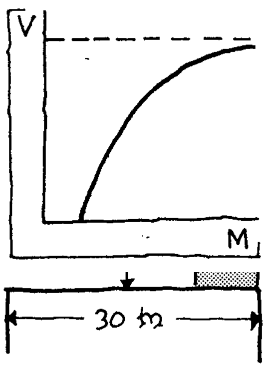
De snelheid van de voetgangersstroom in de tunnel is afhankelijk van de drukte. Een maat voor de drukte is het gemiddeld aantal vierkante meter per voetganger. Deze maat noemen we de module.

Op een zeker moment bevinden zich 120 mensen in de tunnel die allen in de richting van de uitgang lopen.

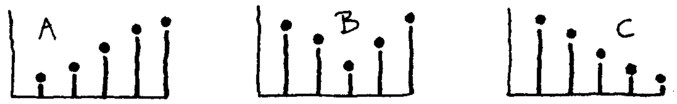
a. Bereken voor deze situatie de module.

b. Toon aan dat het aantal mensen in de tunnel en de module M omgekeerd evenredig zijn.

c. Schets de grafiek voor de module M. Verzin een formule.



Passagiersstromen II
Het verband tussen de snelheid van de voetgangersstroom V en de module M wordt gegeven door de formule: $V = 87 - \dfrac{26}{M + 0{,}05}$,
V in meters per minuut (m/min), M in m^2 per voetganger.
In de figuur hiernaast zie je een schets van de grafiek van V tegen M. Van deze grafiek kun je een toenamediagram maken.
Hieronder zie je enkele toenamediagrammen.

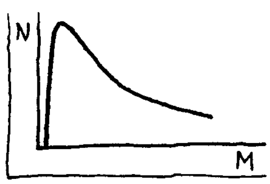


a. Welke van deze drie geeft het beste het toenamediagram van V weer?
b. Bereken voor welke M geldt: $V = 80$.
c. Met welke snelheid (in km per uur) lopen mensen volgens dit model als ze ongestoord kunnen lopen?

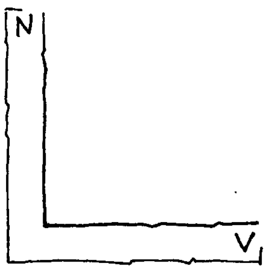
Als M heel groot wordt, zullen de mensen ongehinderd in hun gewenste snelheid door kunnen lopen. De grafiek van V zal naar een lijn naderen. Deze lijn is in de figuur gestippeld getekend.
d. Bij welke waarde van V ligt deze lijn? Geef aan de hand van de formule een toelichting.
e. Leg aan de hand van de formule van V uit dat V toeneemt als M groter wordt.

8 Passagiersstromen III
Het aantal voetgangers dat de tunnel per minuut verlaat noemen we N. Bij deze tunnel geldt: $N = \dfrac{3V}{M}$.
a. Wat is de oppervlakte van het grijze deel? Hoeveel mensen lopen daar?

De mensen in het grijze gedeelte zullen de volgende minuut de tunnel verlaten.
b. Leg uit waarom formule voor N niet onredelijk is.



De grafiek van N (uitgezet tegen M) staat hiernaast.
Kies op de GR: $Y_1 = 87 - 26/(X+0.05)$ en $Y_2 = 3 \cdot Y_1/x$
Kies eerst het x-domein van 0 tot 5.
c. Zoek met behulp van de GR of de computer uit wat het maximale aantal mensen is dat per minuut de tunnel kan verlaten en bij welke M dat is



We kunnen ook de grafiek maken van N, uitgezet tegen V. Die laat zien hoe het aantal mensen dat per minuut de tunnel verlaat, afhangt van de snelheid van de voetgangersstroom.

In de formule $N = \frac{3V}{M}$ zou je M moeten vervangen door een uitdrukking met V. Dat moet mogelijk zijn omdat je, als V bekend is, M kunt berekenen.

a. Bereken M als $V = 60$. Probeer nu op dezelfde wijze een formule af te leiden voor M.

Deze formule kun je op je GR bij Y_1 invoeren. Y_2 wordt nu: $3X / Y_1$

b. Maak een grafiek op je GR van N, uitgezet tegen V en zoek de maximale waarde van N en bij welke V deze optreedt.

We gaan wat wiskundige technieken oefenen.

a. Substitueer (vul in) steeds $x = 3{,}2$ in de volgende vier formules:

$$y_1 = 3(x-1)^2 + 30$$

$$y_2 = 10 + x^{-2{,}4}$$

$$y_3 = \frac{200}{2 + 1{,}25^x}$$

$$y_4 = \frac{200x^2}{5x^{2{,}4}}$$

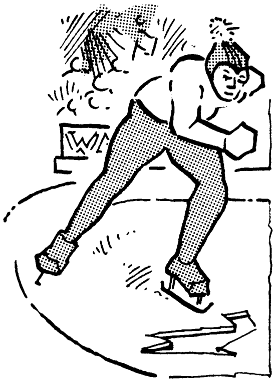
We bekijken de functies y_1 tot en met y_4 alleen voor $x > 0$. Beantwoord de volgende vragen voor elk van deze vier functies.

b. Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek òf overal stijgt, òf overal daalt òf een minimum/maximum heeft.

c. Zoek naar het getal x (of de getallen x) waarvoor geldt: $y = 20$.

Los de vergelijking op of zoek door slim te proberen.

Schakelen van formules



Schaatsen
Verslaggevers van schaatswedstrijden voorspellen vaak aan de hand van een tussentijd de eindtijd. We bekijken in deze opgave de 10.000 meter hardrijden. De schaatsers rijden dan 25 rondjes van 400 meter. Aan de hand van de tijd op 8.000 meter (T) wordt met behulp van een model de waarschijnlijke eindtijd (E) berekend. Dit gebeurt als volgt:

tussentijd op 8000 m. (T)	gem. tijd per ronde (G)	waarschijnlijke eindtijd (E)
11:05:00	33,25 sec	13:48:25

13:48:25 betekent: 13 minuten en 48,25 seconden.

Je zou verwachten dat E als volgt berekend wordt: deel T door 20 en vermenigvuldig de uitkomst met 25.
a. Leg uit waarom dit een aannemelijke gedachte is, maar dat dit niet klopt in dit voorbeeld.

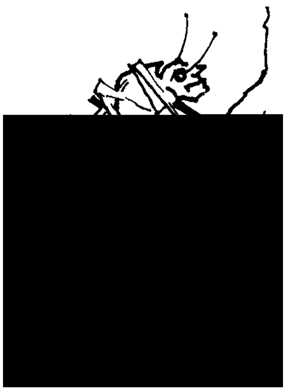
De formules die in het model gebruikt worden zijn:
G = T/ 20 en E = 25G – 3.
b. Geef een mogelijke verklaring waarom er in het model '– 3' is opgenomen bij de formule van E.
c. Bereken met behulp van de formules op welke eindtijd iemand uitkomt die een tussentijd op 8.000 meter heeft van 10:30:00 (= 10 min. en 30 sec. precies).
d. Een rijder wil op 13:30:00 uitkomen. Welke tussentijd moet hij op de 8.000 meter halen?

In dit soort modellen met twee (of meer) formules is het vaak handig de formules te schakelen. Dat gaat als volgt:

$$T \xrightarrow{G = T/20} G \xrightarrow{E = 25G - 3} E$$

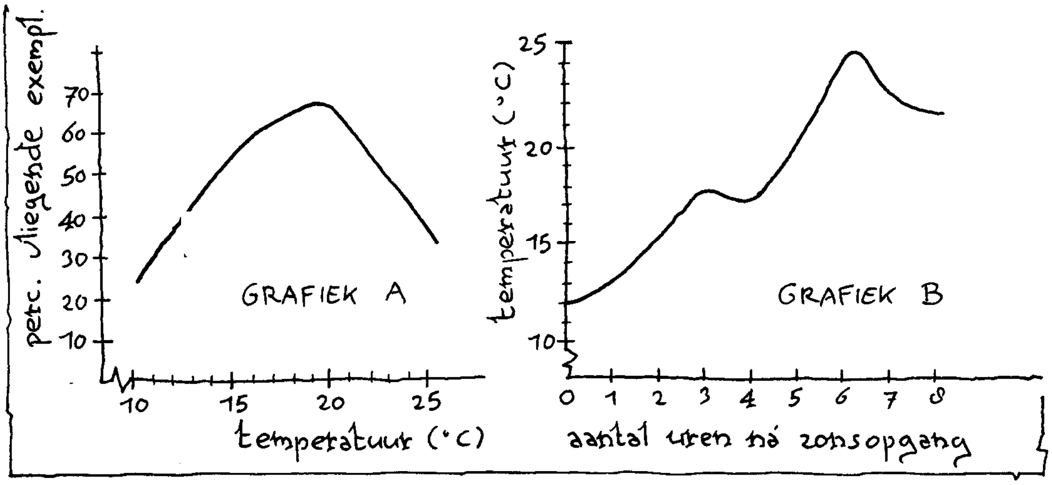
Vervang G in de 2^{e} formule door T / 20 uit de 1^{e} formule.

$$T \xrightarrow{E = 25(T/20) - 3} E$$



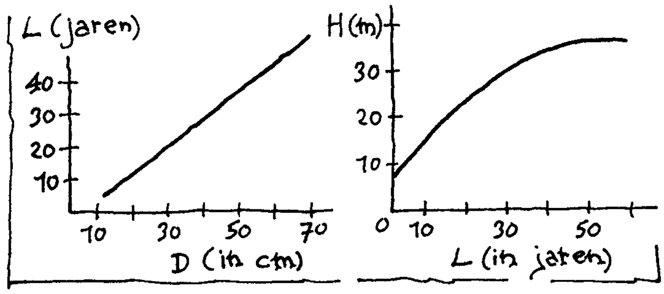
Muggen
Een zekere muggensoort heeft een voorliefde voor een bepaalde plant. Daarop zitten dan ook zeer veel exemplaren. Zodra de zon opkomt, gaat een deel van het muggenvolkje vliegen. En zolang het licht is, zijn er muggen in de lucht. Het percentage vliegende exemplaren blijkt afhankelijk te zijn van de luchttemperatuur.
Dat verband is uit vroegere proeven bekend en is weergegeven in grafiek A. Nu wil men een grafiek hebben die voor een bepaalde dag het percentage vliegende muggen

weergeeft voor de eerste 8 uren na zonsopgang. Het temperatuurverloop op die dag is af te lezen uit grafiek B.



Voorbeeld: Neem het tijdstip 1 uur na zonsondergang. Dan is het 13 °C (zie grafiek B). Dan vliegen er ongeveer 40 muggen (zie grafiek A). Dit geeft dus het punt (1,40) op de gevraagde grafiek.
Schets de grafiek van het verband tussen het aantal uren na zonsopgang (horizontaal uitgezet) en het percentage vliegende exemplaren (verticaal uitgezet).

2 **Populier**
Van een populierensoort is het verband tussen de diameter (op 1,3 meter hoogte) D en de leeftijd L bekend in de vorm van een grafiek. Ook het verband tussen de hoogte van de boom H en zijn leeftijd is zo gegeven.



a. Teken de grafiek die het verband tussen H en D geeft.

Bij de grafieken zijn ook formules bekend: $L = 0{,}8D - 3$ en $H = -0{,}01L^2 + 1{,}1 + 6$.
b. Kies $Y_1 = 0{,}8x - 3$ en $Y_2 = -0{,}01Y_1^2 + 1{,}1Y_1 + 6$ en teken de grafiek van Y_2 op de GR.
c. Maak een formule voor H uitgedrukt in D.
d. Teken de grafiek van H (tegen D) ook op de GR.

Maak een formule voor y_2 uitgedrukt in x.

a.	$y_2 = 3y_1 + 6$	$y_1 = 4 - x$
b.	$y_2 = 4y_1^2 + 7$	$y_1 = 4x$
c.	$y_1 + y_2 = 8$	$y_1 = 2x + 1$
d.	$2y_1 + y_2 = 10$	$x + y_1 = 8$
e.	$4y_1 + 3y_2 = 8$	$4x + 2y_1 = 20$
f.	$y_1 \cdot y_2 = 8$	$2x + y_1 = 10$

De schakeling van twee lineaire formules geeft altijd weer een lineaire formule.
Stel $y_2 = 3y_1 + 2$ en $y_1 = 5x + 1$.
a. Laat zien dat er een lineair verband is tussen y_2 en x.
b. De schakeling levert geen kwadratische formule op als $y_2 = y_1^2$ en $y_1 = 4x^2$. Laat dat zien.

Bij het schakelen van formules moet je soms uit een van de formules een variabele 'vrij maken'.
Voorbeeld $y_2 = 3y_1$ en $x + y_1 = 6$.
Uit de tweede formule moet je eerst y_1 vrijmaken, voordat je die y_1 in de eerste formule kunt invullen. Hier is dat simpel: $y_1 = 6 - x$ en dus $y_2 = 3(6 - x) = 18 - 3x$.

Maak in de volgende gevallen y_1 vrij.

a. $2x + 3y_1 = 10$ **b.** $4x + 8y_1 - 20 = 0$

c. $x \cdot y_1 = 8$ **d.** $x = y_1 + \frac{3}{x}$

Het schakelen van formules kun je ook gebruiken als je een formule wilt aanpassen, omdat je de grootheden in andere eenheden wilt geven. Oftewel als je met een andere maat wilt meten.

Voorbeeld
Een bepaalde kabel kost € 2500 per kilometer. De kosten van x kilometer kabel kun je dus berekenen met de formule $K = 2500x$, waarbij x in kilometers en K in euro's.
We willen deze formule ombouwen tot een formule waarmee je bij x *meter* de kosten in euro's kunt berekenen. Noem de afstand in meters x' in plaats van x om niet in de war te komen.

Als $x = 15$, dan $x' = 15000$.

Algemeen: $x = \frac{x'}{1000}$.

$K = 2500 \cdot x$ wordt dan $K = 2500 \cdot \frac{x'}{1000} = 2{,}5x'$.

Nog een voorbeeld

Neem de helikopterformule $VL = \frac{3600}{0{,}08d + 48}$,

VL = aantal vluchten per uur

d = afstand depot-stortplaats in meters.

Stel we willen deze formule ombouwen tot een formule waarbij we VL uitrekenen door de afstand depot-stortplaats in kilometers in te vullen. Deze afstand in kilometers noemen we d'.

Als d = 3000, dan d' = 3.

Algemeen: d = 1000d'.

$VL = \frac{3600}{0{,}08 \cdot d + 48}$ wordt dan $VL = \frac{3600}{0{,}08 \cdot 1000d' + 48} = \frac{3600}{80d' + 48}$

We controleren nog even het laatste voorbeeld.

a. Als d = 2500, dan d' = ___.

b. Test of de nieuwe formule voor deze d' dezelfde waarde voor VL oplevert als de oude formule voor d = 2500.

8 Remweg

De remweg van een auto wordt vaak berekend met de vuistregel: $R = \frac{1}{8}v^2$, waarbij R de remweg in meters is en v de snelheid in meters per seconde.

We willen de formule ombouwen, zodat een snelheid in km/uur ingevuld kan worden. Noem deze snelheid in km/uur: v'.

Voorbeeld: v = 30 m/s moet dezelfde remweg geven als v' = 108 km/uur.

a. Ga dit na. Bereken ook welke v' hoort bij v = 25 m/s.

b. Druk v uit in v', dus v = ___.

c. Welke formule drukt R uit in v'?

d. Test de nieuwe formule met v = 25 en v' = 90.

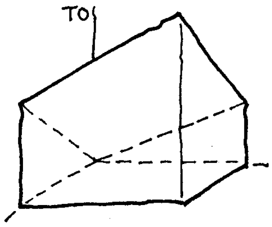
Formules met twee variabelen

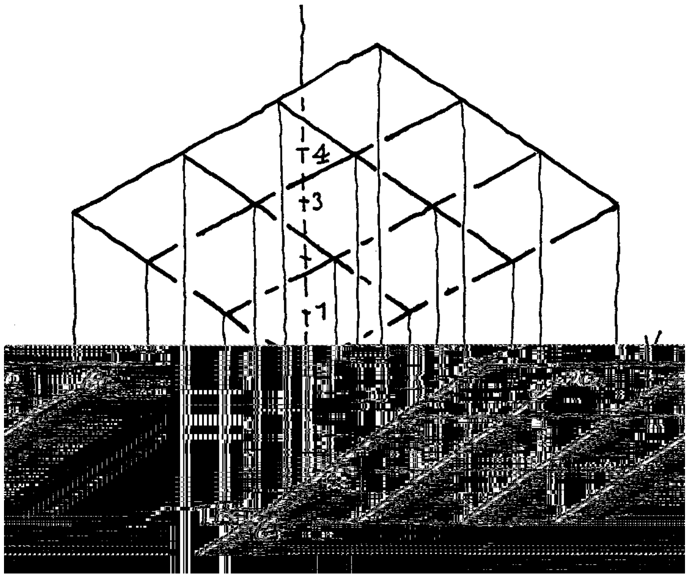
Stoplichten

Hoe lang moet een stoplicht op oranje staan? Niet te kort natuurlijk, want de automobilist moet tijd hebben om te reageren en te stoppen. Ook niet te lang natuurlijk, want dan denken de automobilisten dat ze gemakkelijk nog even door kunnen rijden.

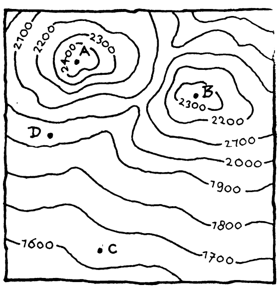
De tijd om te reageren op het licht noemen we de reactietijd TR.
De tijd om de auto te laten stoppen, is afhankelijk van de snelheid: we nemen hiervoor $0{,}05 \cdot V$, waarbij V de snelheid is in km/u.
Zo ontstaat de formule voor de tijdsduur van het oranje licht: $TO = TR + 0{,}05 \cdot V$.

Het is lastig om hier een grafiek van te maken: het wordt een **driedimensionale grafiek**.
In de figuur hieronder zie je TO aangegeven voor zestien waarden van V en TR.



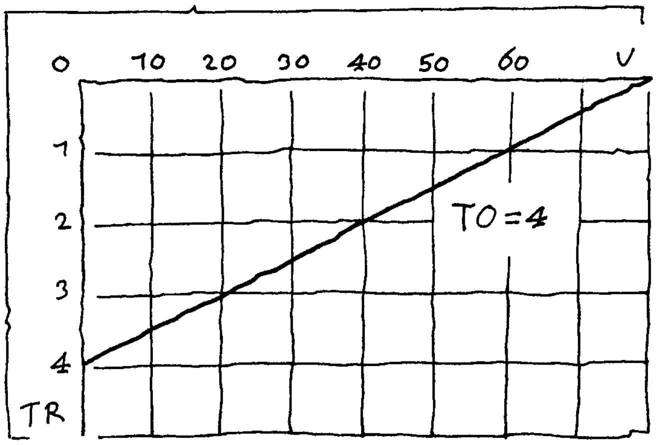


a. Lees uit de grafiek af wat TO moet zijn bij een reactietijd van 2 seconde en een snelheid van 40 km/u. Controleer je antwoord met behulp van de formule.



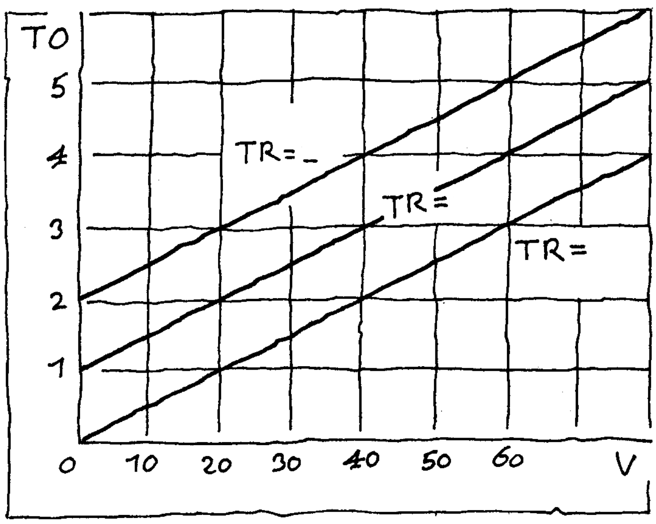
Het aflezen in zo'n grafiek is lastig. Daarom maakt men zogenaamde hoogtekaarten. Zo'n hoogtekaart bestaat uit hoogtelijnen, bekend uit de aardrijkskunde.
Om een hoogtelijn te tekenen, verbinden we alle punten met een bepaalde, vaste waarde van TO.

Neem bijvoorbeeld TO = 4, dus TR + 0,05·V = 4. Combinaties van TR en V die TO = 4 geven zijn:
TR = 0 en V = 80,
TR = 1 en V = 60,
TR = 2 en V = 40,
enzovoort.
Deze combinaties liggen op een rechte lijn. Die is in de volgende figuur getekend.



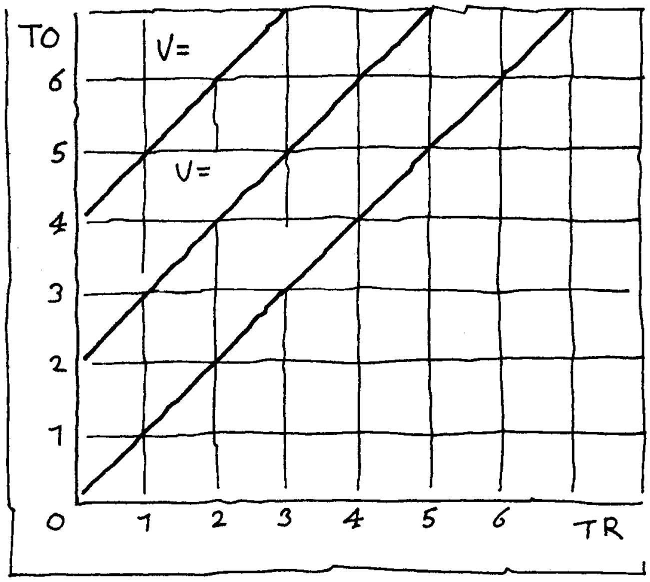
b. Neem de figuur over en teken daarin de lijn waarop de combinaties liggen die TO = 2 opleveren.
Doe hetzelfde voor TO = 6.

We kunnen ook voor allerlei vaste waarden van TR zoeken welke combinaties van TO en V die bepaalde waarde van TR geven en deze combinaties tekenen. Zo ontstaat de volgende figuur.



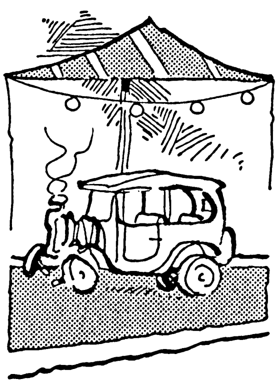
c. Welke vaste waarden van TR horen bij de getekende lijnen?

Tenslotte is op een zelfde wijze de figuur hieronder ontstaan; nu voor vaste waarden van V.



d. Welke vaste waarden van V horen bij de getekende lijnen?

e. Lees in elk van de drie figuren de volgende waarden af:
- gegeven TR = 2 en V = 60; lees af hoe groot TO is.
- gegeven V = 30 en TO = 4; lees af hoe groot TR is.



Kermis

In de tijd rond koninginnedag worden er in veel gemeenten in Nederland kermissen georganiseerd. Een kermisexploitant die een plaats wil hebben op de kermis moet staangeld aan de gemeente betalen. Dat staangeld wordt berekend naar het elektriciteitsverbruik en de oppervlakte van de plaats die hij nodig heeft.

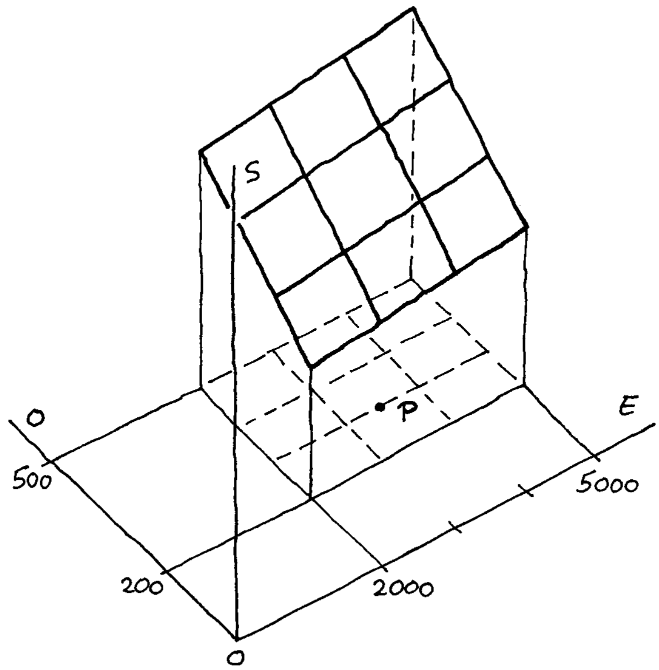
Hieronder zijn van zes kermisattracties de oppervlakte en het elektriciteitsverbruik vermeld.

attractie	oppervlakte (m^2)	elektr. (kWh) per dag
Reuzenrad	320	4000
Surfer	300	3500
Spookhuis	350	3000
Draaimolen	230	3000
Breakdance	450	5000
Vliegend Tapijt	300	4500

Een gemeente rekent 5 euro per m^2 grond per dag en € 0,25 per kWh.

a. Maak een formule voor het staangeld per dag S, uitgedrukt in de oppervlakte O en elektriciteitsverbruik E.

Hieronder zie je de grafiek voor het staangeld per dag.



Bij het voorste hoekpunt hoort de waarde S = 1500.

b. Controleer deze waarde en bereken de waarden van S die horen bij de andere drie hoekpunten.

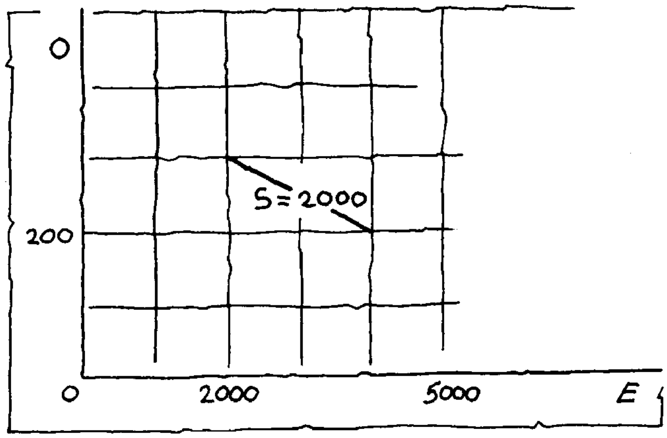
c. Bij welke attractie hoort punt P in de figuur? Hoeveel moet die attractie aan staangeld per dag betalen?

We kunnen S ook in beeld brengen door middel van hoogtelijnen. Op de volgende bladzijde is de hoogtelijn S = 2000 getekend; daarop liggen de combinaties van O en E waarvoor S = 2000.

d. Neem de figuur over en teken er de lijnen met S = 2500 en S = 3000 bij.

e. Geef de formules (met de variabelen O en E) die bij deze drie hoogtelijnen horen.

De hoogtelijnen worden ook wel **isolijnen** genoemd. Alle punten op een isolijn, geven dezelfde waarde voor de functie; iso = gelijk.



Bij vaststelling van het staangeld, worden door de gemeente ook nog kosten voor reiniging in rekening gebracht. De kosten zijn 500 euro per attractie per dag. Het totale staangeld wordt daardoor S + 500.

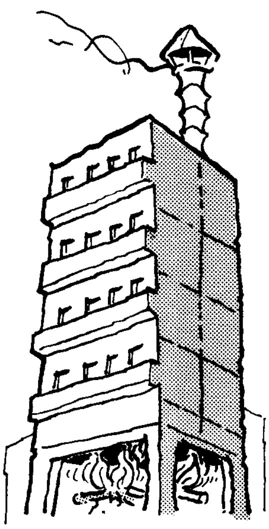
f. Hoe ligt de grafiek van S + 500 in vergelijking met de grafiek van S?

Gemiddeld duurt een ritje in de breakdance 5 minuten (inclusief de in- en uitstaptijd). Een kaartje voor een rit kost 5 euro. De kermis is 10 uur per dag open.

g. Bereken hoeveel mensen er gemiddeld per rit mee moeten om de kosten van de staanplaats (inclusief reinigingskosten) eruit te halen.

Uit examen havo wiskunde A, [illegible]8[illegible] eerste tijdvak

Verwarming



De woningen in een flatgebouw worden centraal verwarmd. De bewoners moeten de verwarmingskosten gezamenlijk betalen. Met metertjes op de radiatoren wordt geregistreerd hoeveel warmte-eenheden in een woning zijn verbruikt. Bij de jaarlijkse afrekening let men ook op het vloeroppervlak van elke woning (de woningen zijn niet even groot).

In een zeker jaar zijn de kosten:

- Totale energiekosten (kosten van het gas) € 37760,
- Overige kosten (onderhoud en afschrijving) € 3810.

In alle woningen tezamen zijn 2360 warmte-eenheden verbruikt. Het vloeroppervlak van alle woningen tezamen is 5936 m^2.

De kosten worden op een speciale manier aan de bewoners doorberekend:

- 70% van de totale energiekosten wordt verdeeld over de verbruikte warmte-eenheden,
- de rest van de totale energiekosten en de overige kosten worden verdeeld op basis van het vloeroppervlak van de woningen.

a. Toon aan dat de kosten per verbruikte warmte-eenheid € 11,20 en de kosten per m^2 € 2,55 bedragen.

Een bewoner van een flat waarin W warmte-eenheden verbruikt worden en waarvan het vloeroppervlak V m^2 is, kan zijn verwarmingskosten K met behulp van de volgende formule berekenen: $K = 11{,}20W + 2{,}55V$.
De bewoners zijn van mening dat zuiniger stoken gestimuleerd moet worden. Om dat voor elkaar te krijgen, worden de kosten per bewoner meer afhankelijk gemaakt van het verbruikte aantal warmte-eenheden en minder afhankelijk van het aantal m^2 vloeroppervlak. De nieuwe formule voor de berekening van de kosten per bewoner wordt:
$K = 14{,}40W + 1{,}28V$.
b. Verzin een voorbeeld van iemand die in de nieuwe situatie goedkoper uit is dan in de oude situatie.

Voor alle situaties waarbij bewoners in de oude en nieuwe situatie even duur uit zijn, geldt: $V = 2{,}52W$.
c. Leidt deze formule af uit de oude en de nieuwe formule voor K.
d. Teken het gebied waarin met de nieuwe formule minder betaald hoeft te worden dan met de oude formule.

De nieuwe formule om de kosten te berekenen is tot stand gekomen door een groter deel van de totale energiekosten te verdelen over de verbruikte warmte-eenheden.
e. Bereken hoeveel procent van de totale energiekosten nu verdeeld wordt over de verbruikte warmte-eenheden. Gebruik de gegevens van de vorige bladzijde.

Wissellijsten
Een lijstenmakerij levert wissellijsten in alle gewenste afmetingen. De prijs van een wissellijst bestaat uit de prijs voor het glas en de prijs voor de omlijsting. Glas kost 1 euro per dm^2 en de omlijsting kost 0,25 euro per dm.
a. Wat kost een lijst van 4 bij 6 dm?

Noem de hoogte van de lijst H (dm) en de breedte B (dm)
b. Wat is de oppervlakte van een rechthoekig stuk glas van H bij B dm? Wat zijn dus de kosten voor de glasplaat?
Wat is de omtrek van een rechthoekig stuk glas van H bij B dm? Wat zijn dus de kosten voor de omlijsting?
c. Stel een formule op voor de prijs P van een wissellijst met hoogte H dm en breedte B dm.

Voedingswaarde

Eten doe je niet alleen omdat het lekker is of omdat het zo af en toe gezellig is, maar in eerste instantie om aan energie te komen voor je lichaam. Hoeveel energie het voedsel je oplevert, hangt natuurlijk af van wat je eet. De energie die het voedsel oplevert, noemt men wel de voedingswaarde. De stoffen die bepalend zijn voor de voedingswaarde zijn eiwitten, vetten en koolhydraten (onder andere suikers). Hoe meer van deze stoffen voorkomen in het voedsel, des te hoger is de voedingswaarde. De rest van het voedsel bestaat voornamelijk uit water en dat levert geen energie op. De grootste leveranciers van energie zijn vetten. Eiwitten en koolhydraten leveren ongeveer evenveel energie.

Om de voedingswaarde van verschillende producten te vergelijken, bekijkt men altijd 100 gram van een product. Als je de hoeveelheid eiwitten, vetten en koolhydraten in 100 gram weet, kun je de voedingswaarde berekenen met de formule VW = 16,7E + 37,6V + 16,7K.

De voedingswaarde wordt uitgedrukt in kilojoule; E, V en K in grammen.

Voedingswaarde per	**gram**
Energie	768 kJ
eiwit	0,5 g
koolhydraten	13,1 g
vet	14,4 g

a. Controleer met behulp van de formule de gegeven voedingswaarde van selderiesalade.

In 100 gram pasta zit 12,9 gram eiwitten en 2,0 gram vetten. De voedingswaarde van 100 gram spaghetti is 1455 kJ.

b. Bereken met behulp van de formule de hoeveelheid koolhydraten die in 100 gram spaghetti zit.

Van alle voedingsmiddelen heeft levertraan de hoogste voedingswaarde. 100 gram levertraan heeft een voedingswaarde van 3760 kJ.

c. Hoeveel gram eiwitten, hoeveel gram vetten en hoeveel gram koolhydraten zitten er in 100 gram levertraan?

Om bij de formule VW = 16,7E + 37,6V + 16,7K een grafiek te tekenen, wordt erg lastig. Dit kunnen we oplossen door de hoeveelheid eiwitten en koolhydraten op één hoop te gooien. Het totale gewicht aan eiwitten plus koolhydraten noemen we EK. De nieuwe formule wordt dan: VW = 16,7EK + 37,6V.

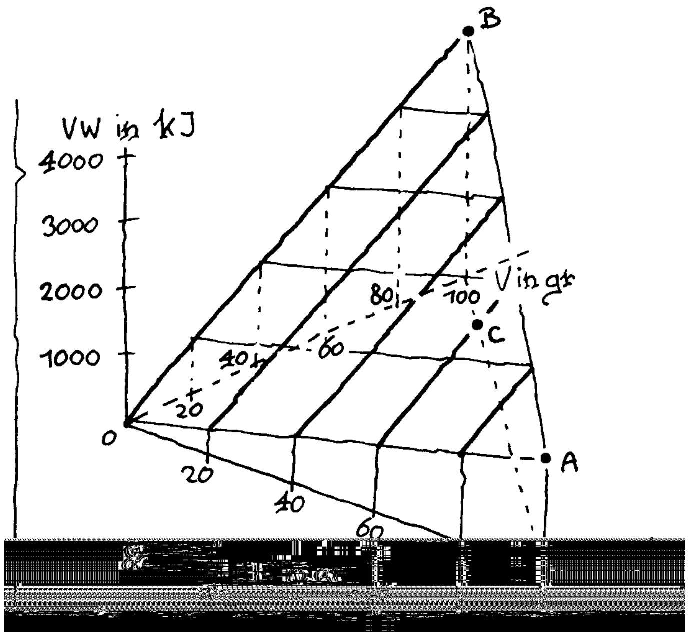
De grafiek die hier bij hoort, zie je op de volgende bladzijde. Er zijn drie stippen aangegeven: A, B en C.

d. Welke voedingswaarden horen bij de stippen A en B?

e. Stip C hoort bij een reep melkchocolade.

Wat is de voedingswaarde van een reep melkchocolade van 100 gram?

f. Teken in de grafiek de lijn die hoort bij een voedingswaarde van 1000 kJ.

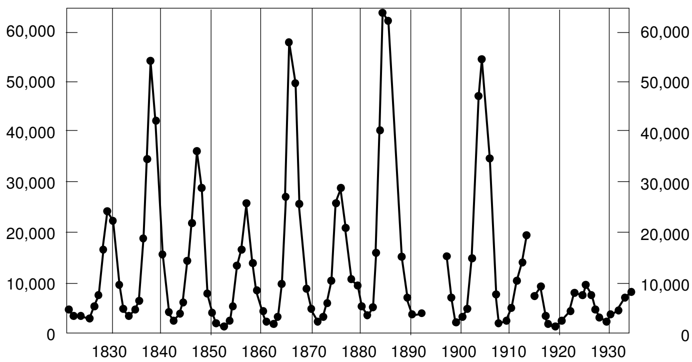

B
VW in kJ
4000
3000
2000
1000
0
20
40
60
80
100
V in gr
C
A
20
40
60

Keuzeopgaven

De lynx

Dierpopulaties schommelen nogal in omvang. Het ene jaar zijn er veel beesten, het andere jaar beduidend minder. Een voorbeeld hiervan is de Canadese lynx.

Een onderzoeker vermoedde dat het aantal lynxen in Canada niet zomaar schommelde, maar dat er een zekere regelmaat in de schommelingen zat. Een Canadese maatschappij handelt al een paar honderd jaar in de pels van de lynx. Op grond van de boeken van die maatschappij kon de volgende grafiek gemaakt worden.



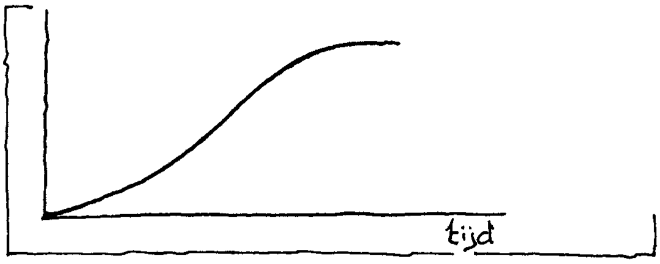
Uit de boeken van de Hudson's Bay Company, 1821-1913 en 1915-1934.

a. Lees af hoeveel jaren er meer dan 40.000 lynxen waren.

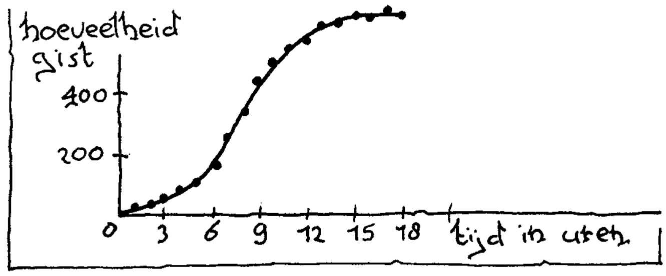
b. Beschrijf de regelmaat van de grafiek.

2 **S-curve**

Bij veel groeiverschijnselen heeft de grafiek de volgende vorm:



Deze S-vormige grafieken zie je bijvoorbeeld bij de groei van bomen en bij bevolkingsgroei.
In het begin is er sprake van exponentiële groei. Deze kan (natuurlijk) niet onbeperkt doorgaan. De hoogte van een boom of omvang van een bevolking heeft een bovengrens. Dus, zodra deze beperking voelbaar wordt, buigt de grafiek af: de toenemende stijging gaat over in afnemende stijging.
We kijken naar een grafiek van de groei van gistcellen .



De formule die hoort bij deze grafiek is nogal ingewikkeld:

$N = \dfrac{665}{1 + 2{,}7^{4{,}19-0{,}54t}}$.

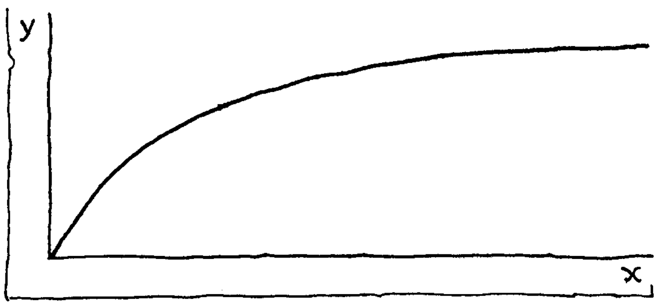
Om enig inzicht te krijgen in de formule ontleden we de formule als ketting van vijf stappen:

$t \to -0{,}54\,t \to 4{,}19-0{,}54t \to 2{,}7^{4{,}19-0{,}54t} \to 1+2{,}7^{4{,}19-0{,}54t} \to \dfrac{665}{1+2{,}7^{4{,}19-0{,}54t}}$.

a. Begin met $t = 6$ in de ketting en bereken N; geef alle tussenuitkomsten.
b. Voor welke t geldt dat N boven de 400 komt?

Als t heel groot wordt ($t = 50$, $t = 60$, $t = 70$, enz.) dan zal de uitkomst N niet veel meer veranderen.
c. Hoe groot wordt N dan ongeveer?
d. Leg uit hoe je dit aan de hand van de formule of ketting kunt beredeneren.

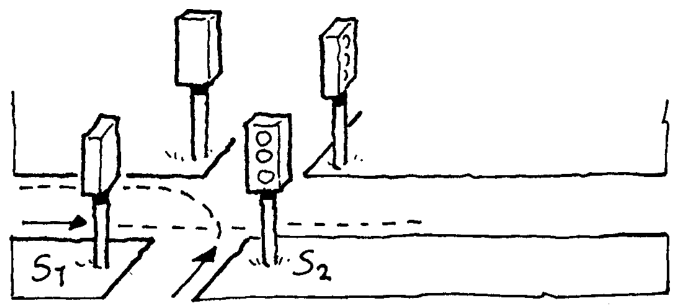
2 Een bioloog wil het aantal soorten diertjes dat in een gebied voorkomt vaststellen door *een deel* van het gebied te onderzoeken. Het lijkt redelijk te stellen dat hoe groter het te onderzoeken gebied is, hij meer soorten zal vinden.
De grafiek heeft de volgende vorm:



De formule die bij dit soort grafieken past is van de vorm:
$y = m \cdot (1 - 2{,}7^{-n \cdot x})$. Hierbij is y het aantal diersoorten en x de grootte van het proefgebied.
a. n kan in de formule allerlei waarden hebben, bijvoorbeeld 0,1 of 0,3. Maar n moet in elk geval positief zijn.
Leg uit waarom het niet redelijk is voor n een negatief getal te nemen.
b. We nemen nu $n = 0{,}1$. Voor m kiezen we achtereenvolgens 10, 20 en 30.
Onderzoek hoe de grafiek van y verandert voor deze drie waarden van m.

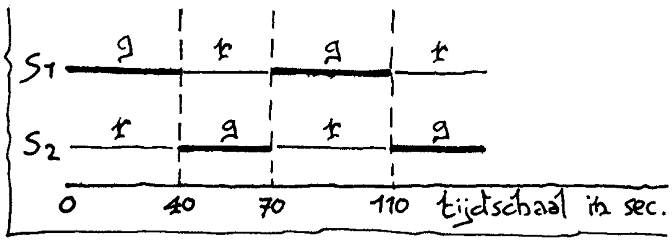
Kies $n = 0{,}3$ en $m = 100$.
c. Maak een ketting voor y.
d. Bereken voor welke x geldt dat $y = 60$.

4 **Verkeerslichten**
Verkeerslichten op een kruispunt moeten goed op elkaar afgestemd zijn.



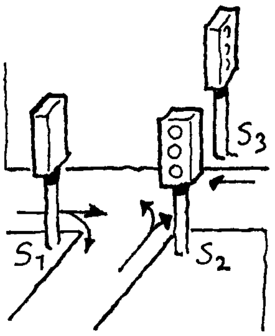
We beperken ons alleen tot de lichten S1 en S2 en tot de twee aangegeven richtingen.

Hieronder staat een mogelijk regelingsprogramma. Na een aantal seconden herhaalt het patroon zich.



De **periode**, dat is de kortste tijd waarna het patroon zich herhaalt, is 70 seconden.

a. Hoe staan de verkeerslichten 10 minuten na het begin?



Wij bekijken een wat eenvoudigere situatie, namelijk een T-splitsing. Alle toegestane richtingen zijn hiernaast aangegeven en voor elke richting is er een apart verkeerslicht.

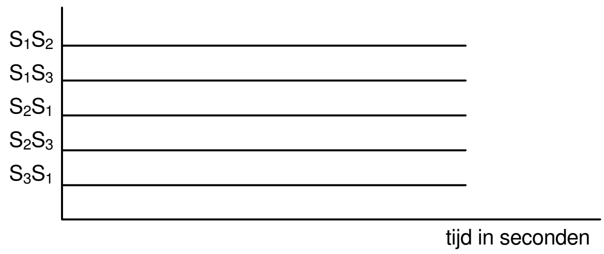
b. Geef in het schema hieronder aan in welke richtingen het verkeer niet tegelijkertijd kan rijden, om geen ongelukken te laten gebeuren. Zet op die plaatsen een **x**.

	S_1S_2	S_1S_3	S_2S_1	S_2S_3	S_3S_1
S_1S_2	**x**				
S_1S_3		**x**			
S_2S_1			**x**		
S_2S_3				**x**	
S_3S_1					**x**

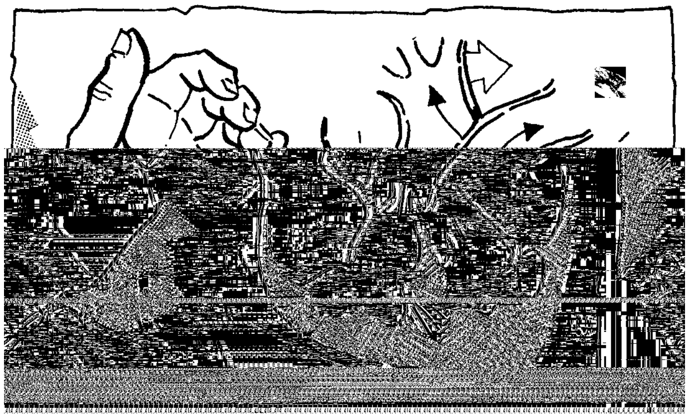
Op grond van verkeerstellingen wil men per uur de volgende groentijden in de aangegeven richtingen hebben.

S_1S_2 : 40 min S_1S_3 : 40 min S_2S_1 : 20 min
S_2S_3 : 20 min S_3S_1 : 20 min

c. Maak een ontwerp van een regelingsprogramma met een periode van 3 minuten of kleiner zodat per uur de gegeven tijden gehaald worden.



Hartslag



Je kunt je hartslagfrequentie bepalen door je vingers te leggen op je pols, je hals of je slaap en gedurende een korte tijd de slagen te tellen. Tijdens en vlak na een grote inspanning zal je slagfrequentie veel hoger zijn dan wanneer je in rust bent.

a. Meet je eigen hartslagfrequentie per minuut door het aantal slagen in 15 seconden te tellen.

Een hoge hartslagfrequentie kan iemand maar gedurende korte tijd volhouden. Daarom is het bij duurtraining (een bepaalde activiteit langere tijd doen) belangrijk dat de atleet zichzelf niet overbelast. Om die reden wordt bij duurtraining een streefwaarde voor de hartslagfrequentie bepaald (HF_{streef}). Dit gebeurt volgens de methode van Karvonen.

Eerst wordt de reserve hartslagfrequentie (HF_{res}) berekend: dit is het verschil tussen de maximale hartslagfrequentie (HF_{max}) en de hartslagfrequentie in rust (HF_{rust}).

Alle frequenties zijn in slagen per minuut.

Dus $HF_{res} = HF_{max} - HF_{rust}$.

Voor duurtraining wordt nu de streeffrequentie berekend met de formule: $HF_{streef} = 0{,}75 \cdot HF_{res} + Hf_{rust}$.

b. Stel dat $HF_{max} = 200$. Neem je eigen HF_{rust} uit vraag **a** en bereken voor jezelf HF_{streef}.

Door schakelen van formules kun je een formule maken voor HF_{streef}, uitgedrukt in HF_{max} en HF_{rust}.

c. Bepaal deze formule voor Hf_{streef}.

HF_{max} hangt af van de leeftijd: $HF_{max} = 220 - L$, waarbij L de leeftijd in jaren is.

d. Neem aan dat $HF_{rust} = 60$ en maak een formule voor HF_{streef} uitgedrukt in L. Maak een grafiek voor HF_{streef}.

e. Teken in dezelfde figuur de grafiek voor het geval $HF_{rust} = 70$.

Antwoorden

Paragraaf Gebroken en negatieve exponenten

a.

jaar	2000	2001	2002	2003	2004
tijdstip	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
bedrag	2000	2100	2205	2315,25	2431,0

b. Januari is maand 0, februari maand 1, enz.
bijvoorbeeld: 1 januari 1997 = $1\frac{0}{12} = 1$
$2000 \cdot 1{,}05^{15/12} = € \ 2125{,}77$
c. 2178,27

a. Oplossing 1: $2000 \cdot 1{,}05^{-2} = 1814{,}06$
b. Oplossing 2: $(2000 / 1{,}05) / 1{,}05 = 1814{,}06$

a. $107000 \cdot x^9 = 259600$; $x = 1{,}1035$
b. $107000 \cdot 1{,}1035^{3,8} \approx 155600$
d. Met deze manier bereken je vanuit 1990 het aantal inwoners in 1938 ($9 - 3{,}8 = 5{,}2$).
e. $259600 \cdot 1{,}1035^{-2,4} \approx 205.000$

a. $2^6 = 64$; $2^0 = 1$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $2^{-2} = \frac{1}{4}$; $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $2^{-4} = \frac{1}{16}$;
$2^{-5} = \frac{1}{32}$; $2^{-6} = \frac{1}{64}$
b. $(\frac{1}{2})^{-6} = 64$ $(\frac{1}{2})^{-5} = 32$ $(\frac{1}{2})^{-4} = 16$ $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$
$(\frac{1}{2})^{-2} = 4$ $(\frac{1}{2})^{-1} = 2$ $(\frac{1}{2})^{0} = 1$ $(\frac{1}{2})^{1} = \frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2})^{2} = \frac{1}{4}$ $(\frac{1}{2})^{3} = \frac{1}{8}$ $(\frac{1}{2})^{4} = \frac{1}{16}$ $(\frac{1}{2})^{5} = \frac{1}{32}$ $(\frac{1}{2})^{6} = \frac{1}{64}$

$(\sqrt{2})^{-6} = \frac{1}{8}$ $(\sqrt{2})^{-5} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ $(\sqrt{2})^{-4} = \frac{1}{4}$ $(\sqrt{2})^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
$(\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{2}$ $(\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\sqrt{2})^{0} = 1$ $(\sqrt{2})^{1} = \sqrt{2}$
$(\sqrt{2})^{2} = 2$ $(\sqrt{2})^{3} = 2\sqrt{2}$ $(\sqrt{2})^{4} = 4$ $(\sqrt{2})^{5} = 4\sqrt{2}$
$(\sqrt{2})^{6} = 8$
c. 2^{-4} 2^{-6} 2^{4}
2^{2} 2^{3} 2^{-2}

a. 2^4 , 2^2 , 2^7 , 2^{-1} , 2^4 , kan niet
b. 5^4 , 5^2 , 5^6 , 5^0 , 5^{12} , kan niet
c. kan niet , kan niet , g^{n+m} , g^{n-m} , $g^{n \cdot m}$

a. $6 \cdot 10^{-14}$; 0,00000000000006
b. $1{,}29 \cdot 10^{-12}$
c. 0,001

a. $A = 0{,}15 \cdot M^{2,32}$
b. 7,8 m^2 per persoon
c. $A_{pp}(M) = (0{,}15 \cdot M^{2,32}) / M = 0{,}15 \cdot M^{1,32}$

d. $200 = 0{,}15 \cdot M^{2{,}32}$; M = 22,2, dus 22 personen.

8 **a.** De laatste grafiek
b. 24,2 meter
c. 6,06 m/s
e. Nee, voor $0 < h < 1$ ligt hij erboven.
f. Min. hoogte: 5,66 meter ; max. hoogte: 5792,62 meter.

a. 2 dagen
b. $2 = x \cdot 2{,}5^{0{,}5}$; x = 1,265
c. $O(D) = (1{,}265 \cdot D^{0{,}5}) \cdot \pi$
d. Ja, dit is het geval.

a. $3 \cdot 2^{-0{,}34} \approx 2{,}37$ wattuur per kg → 4,74 wattuur
b. De hond: 25,1 wattuur, de olifant: 828,8 wattuur. De olifant is het meeste energie kwijt.
c. $M \cdot 3 \cdot M^{-0{,}34} = 3 \cdot M^{0{,}66}$
d. $M < 3{,}4$
e. Dat is alleen zo als $M < 2{,}7$.

Paragraaf Alle verbanden op een rijtje

a. Lineair: $y = 3x + 10$, $y = 100 - 5t$, $y = 30x - 14$, $y = 2t$
Exponentieel: $y = 100 \cdot 0{,}9^t$, $y = 50 \cdot 1{,}2^t$, $y = 10 \cdot 1{,}05^t$, $y = 5^t$
Machtsfunctie: $y = 5 \cdot x^{0{,}5}$, $y = 10 \cdot x^2$, $y = x^{100}$, $y = 2 \cdot x^{-2}$
b. Vaste toename per tijdseenheid.
c. Vaste groeifactor per tijdseenheid.

a. 50 72
18 22
b. 0 3 9 15 21 27 33
c. Alle y-waarden 3 keer zo groot dus de verschillen ook.
d.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	8	27	64	125	216
verschil		1	7	19	37	61	91

e. De y-waarden zijn steeds vast getal keer zo groot dus de verschillen ook.

b. Overal 72.

a. $y = -3x + 43$
b. $N = 7t + 35$
c. $C = -63t + 10336$

a. groeifactor = ½ ; A(0) = 16000 ; $A = 16000 \cdot 0{,}5^t$
b. groeifactor ≈ 1,41 ; y(0) = 5 ; $y = 5 \cdot 1{,}41^x$
c. groeifactor ≈ 1,20 ; N(0) ≈ 24,1 ; $N = 24{,}1 \cdot 1{,}20^t$

a. 10,8
b. 1,36

c. 7,21
d. 1,43
e. 7,54

a. 1,72
b. 1,0558
c. 72%
d. In 1900: 2,17 miljard ; in 2000: 3,73 miljard
e. In 1900: 2,55 miljard ; in 2000: 3,30 miljard
g. Nee, in 2000 waren er 6 miljard mensen!

8 **a.** Lineair: C = 90
Exponentieel: C = 87,1

a. In het eerste voorbeeld geldt steeds: x : y = 1 : 5.
In het tweede voorbeeld is 2 : 20 $\neq$ 3 : 25.
b. Rechte lijn door (0,0)
Formule van de vorm y = …·x.
c. Als het aantal winkels verdubbelt, verdubbelt ook het aantal parkeerplaatsen.
aantal P = getal · aantal W.
d. 5000 : 693,3 ; 10000 : 1386,7 ; 42000 : 5824
e. 25961,5 meter

a.

Zijde	1	2	3	4
Prijs	2,40	9,60	21,60	38,40

b.

Zijde	1	2	3	4
$Zijde^2$	1	4	9	16
Prijs	2,40	9,60	21,60	38,40

c. Prijs = 2,40 · $zijde^2$.

a.

T	208	513	863

b. $T = 208 \cdot A^{0,75} / 1500^{0,75}$

a. Het vermogen hangt af van de oppervlakte waarop de rotor wind vangt. De oppervlakte van dit cirkelvormige gebied is evenredig met D^2.
b. Minstens 7,5 meter diameter.

a. Dan geldt x·y = constant.
b. Vermenigvuldig beide kanten met x.
c. Als de ene grootheid twee keer zo groot wordt, wordt de ander grootheid twee keer zo klein.

a. 25
b. Als de koers bijvoorbeeld 2 keer zo hoog is, krijgt ze maar half zoveel aandelen.
c. $a = \frac{120}{k}$; $k = \frac{120}{a}$

Paragraaf Verbanden in de praktijk

a. 20 vierkante mijl
b. 0,05
c. 50 personen
d. Afnemende daling
e. Gebied 1000 100 10 1
f. $G = 10/D$ of $D \cdot G = 10$
g. Hoe meer mensen, hoe kleiner het vangstgebied.

a. Als d groter wordt, wordt de noemer groter en wordt de uitkomst van de breuk kleiner.
c. 265 meter.
d. 3150 meter.
e. Bij meer dan 44,4 kilometer.
f. Tot praktisch 0.

a. 88 s
b. 40,9 vluchten per uur
c. Tijd voor laden, vliegen, lossen en terugvliegen is
$28 + \frac{600}{25} + 20 + \frac{600}{25} = 96$ s ;
$VL = \frac{3600}{96} = 37{,}5$

d. $VL = \dfrac{3600}{28 + \frac{d}{25} + 20 + \frac{d}{25}} = \dfrac{3600}{\frac{2d}{25} + 48} = \dfrac{3600}{0{,}08d + 48}$

e. $VL = \dfrac{3600}{\frac{1000}{v} + 48}$ (of $VL = \dfrac{3600v}{1000 + 48v}$)

a. Bij een waarde van d is de noemer van (2) altijd groter dan de noemer bij (1) (dat komt omdat 0,167 > 0,08 en 50 > 48). Dus: bij elke waarde van d is VL groter dan VL_2. De eerste helikopter levert dus altijd de beste prestaties.
b. Vermenigvuldig teller en noemer met 4, dan krijg je: $VL_3 = \dfrac{3600}{0{,}20d + 60}$.
c. De teller is nu gelijk aan de tellers van de formules (1) en (2), maar de noemer is groter dan de noemers van de andere formules. Dus levert de derde helikopter slechtere prestaties (minder vluchten).

a. 40,9 kilometer (nl. 40,9 vluchten van $2 \cdot 500$ meter).
b. $A = VL \cdot 2d / 1000$, dus $A = \dfrac{7{,}2d}{0{,}08d + 48}$.
c. Dan wordt A nagenoeg 90 km/uur.

a. $M = 0{,}75$
b. Als er twee keer zoveel mensen in de tunnel zijn, heeft iedereen gemiddeld twee keer zo weinig ruimte.

c. M = 90 / aantal mensen

a. Diagram C
b. M = 3,7
c. 87 meter/min = 5,2 km/uur
d. 87; 5,2 km/uur
e. Als M groter wordt, wordt de noemer groter en dus de breuk kleiner. Als je van 87 een kleiner getal aftrekt, wordt de uitkomst groter.

8 **a.** De oppervlakte is 3V; daar lopen 3V/M mensen
b. De oppervlakte van het gebied dat leegloopt in een minuut is 3·V. Het aantal mensen dat in dat gebied loopt is 3V / M.
c. N = 239 bij M = 0,52.

a. M = 0,91
b. V = 41,5

a. y_1 = 44,52
y_2 = 10,06133
y_3 = 49,477214
y_4 = 25,118864
b. De grafiek van y_1 is een dalparabool: y_1 heeft een minimum (voor x = 1).
De exponent is negatief; $y_2 = 10 + 1/x^{2,4}$; $y = x^{2,4}$ is stijgend, dus y_2 is dalend.
$y = 1{,}25^x$ is stijgend, omdat het grondtal 1,25 > 1. Dus is y_3 dalend.
$y_4 = \frac{40}{x^{0,4}}$; de noemer is stijgend, dus y_4 is dalend.
c. Geen oplossing
0,3831
9,32
5,6569

Paragraaf Schakelen van formules

a. Je zou er vanuit kunnen gaan dat de schaatser gemiddeld even hard blijft rijden.
In dit voorbeeld zou dat opleveren: 33,25 · 25 = 831,25 s. Dat is een tijd van 13:51:25. Dus 3 seconden trager.
b. Meestal persen de schaatsers er nog een paar snelle laatste rondjes uit.
c. G = 31,5; E = 13:04:50
d. T = 10:50:40

c. $H = -0{,}1(0{,}8D-3)^2 + 1{,}1(0{,}8D-3) + 6$ of
$H = -0{,}064D^2 + 1{,}36D + 1{,}8$

a. $y_2 = 18 - 3x$
b. $y_2 = 64x^2 + 7$
c. $y_2 = 7 - 2x$
d. $y_2 = 2x - 6$
e. $y_2 = 2\tfrac{2}{3}x - 10\tfrac{2}{3}$
f. $y_2 = \dfrac{8}{10-2x}$

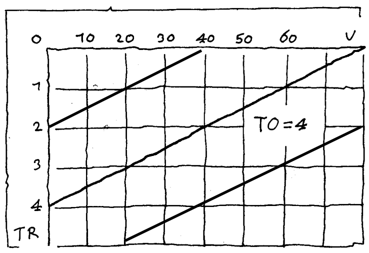
a. $y_2 = 15x + 5$
b. $y_2 = 16x^4$

a. $y_1 = 3\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}x$
b. $y_1 = 2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x$
c. $y_1 = \tfrac{8}{x}$
d. $y_1 = x - \tfrac{3}{x}$

a. d' = 2,5
b. Klopt.

8 **a.** v' = 90
b. $v = \dfrac{v'}{3{,}6}$
c. $\dfrac{(v')^2}{103{,}68}$
d. Klopt.

Paragraaf Formules met drie variabelen

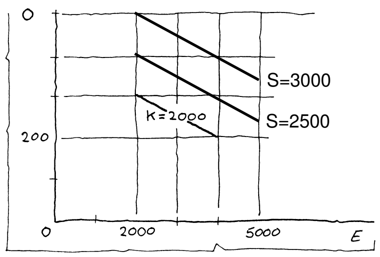
a. TO = 4 ; 2 + 0,05·40 = 4 , klopt.
b.


c. 0, 1, 2
d. 0, 40, 80
e. TO = 5 ; TR = $2\tfrac{1}{2}$

a. S = 5O + 0,25E
b. S = 5·200 + 0,25·2000 = 1500
S = 2250 , S = 3000 , S = 3750

c. Surfer ; 5·300 + 0,25·3500 = 2375 euro

d.



e. 5O+ 0,25E = 2000 of 20O + E = 8000,
5O+ 0,25E = 2500 of 20O + E = 10000,
5O+ 0,25E = 3000 of 20O + E = 12000

f. De grafiek van S + 500 ligt evenwijdig aan de grafiek van S, maar 500 hoger.

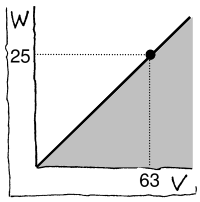
g. Er zijn per dag 120 ritten. Het totale staangeld op een dag bedraagt 4000 euro. Dus het gemiddelde aantal mensen per rit moet zijn: 4000 : 5 : 120 = 6,7.

a. 0,70 · 37760 : 2360 = 11,20 ,
(0,30 · 37760 + 3810) : 5936 = 2,55

b. Bijvoorbeeld: W = 50 , V = 150

c. $K_{nieuw} = K_{oud}$ als 14,40W + 1,28V = 11,20W + 2,55V → 3,20W = 1,27V → V = 2,52W

d.



e. 14,40 = p · 37760 : 2360 → p = 0,9, dus 90%.

a. 24 + 20 · 0,25 = 29 euro

b. H · B ; H · B
2H + 2B ; $\frac{1}{2}$H + $\frac{1}{2}$B

c. P = H · B + $\frac{1}{2}$H + $\frac{1}{2}$B

d. 5H + $\frac{1}{2}$H + 2$\frac{1}{2}$ = 46,5 → H = 8

e. 2H^2 + $\frac{1}{2}$H + H = 100 → H = 6,7 → 67 bij 134 cm

a. 16,7 · 0,5 + 37,6 · 14,4 + 16,7 · 13,1 = 768,56

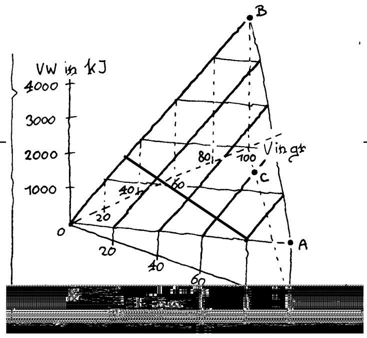
b. K = (1455 – 16,7 · 12,9 – 37,6 · 2,0) : 16,7 = 69,7

c. 0 gram eiwit, 100 gram vet, 0 gram koolhydraten

d. Bij A: 1670 kJ ; bij B: 3760 kJ.

e. EK = 60 en V = 30 → VW = 2130

f. Eindpunten lijnstuk: V = 0, EK = 59,9 en EK = 0, V = 26,6



Paragraaf Keuzeopgaven

a. 9 jaren
b. Elke periode duurt ongeveer 11 jaar. In elke periode zit een top. Deze toppen variëren van zo'n 10000 tot zo'n 60000 lynxen. Elke periode heeft ook een dal. In elk dal is de periode ongeveer 2000 lynxen.

a. $6 \rightarrow -3{,}24 \rightarrow 0{,}\ 95 \rightarrow 2{,}57 \rightarrow 3{,}57 \rightarrow 186{,}3$
b. $t \geq 9$
c. 665
d. Als t heel groot wordt, wordt $4{,}19 - 0{,}54t$ heel negatief, waardoor $2{,}7^{4{,}19-0{,}54t}$ bijna 0 wordt, en dus $1 + 2{,}7^{4{,}19-0{,}54t}$ bijna 1 wordt, waardoor de breuk nadert tot 665.

a. Bij toenemende x zou anders y afnemen en zelfs negatief worden.
b. Voor grotere m komt de grafiek hoger te liggen.
c. $x \rightarrow -0{,}3x \rightarrow 2{,}7^{-0{,}3x} \rightarrow 1 - 2{,}7^{-0{,}3x} \rightarrow 100(1 - 2{,}7^{-0{,}3x})$
d. $x = 3{,}075$

a. Zoals na 40 seconden
c. S1-S3: 16s ; S2-S3: 8s ; S3-S1 : 16s ; S4-S3: 12s
S2-S1 :12s ; S2-S4: 48s ; S4-S2 : 48s
Periode: 160 seconden

c. $HF_{streef} = 0{,}75HF_{max} + 0{,}25Hf_{rust}$
d. $HF_{streef} = 180 - 0{,}75L$
e. $HF_{streef} = 182{,}5 - 0{,}75L$