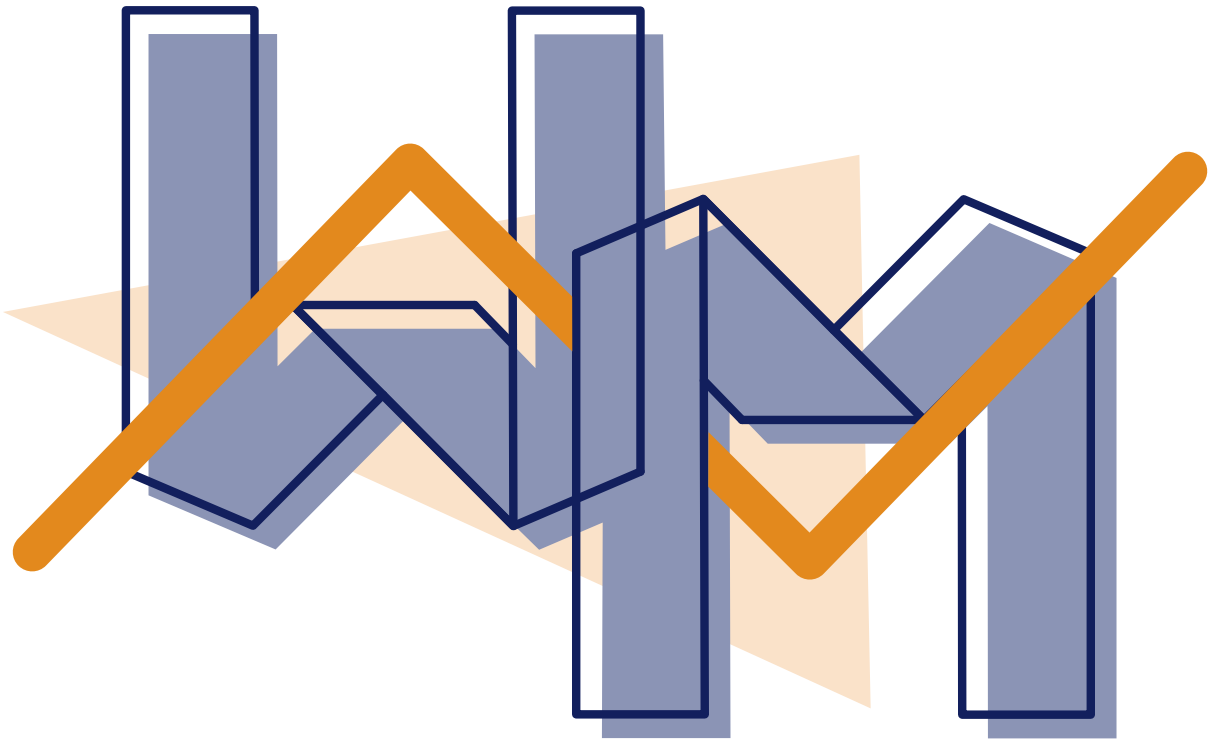
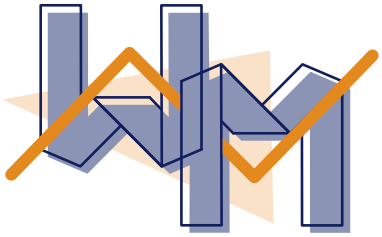


vwo wiskunde d

Conflictlijnen

de Wageningse Methode



Copyright © 2020 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN xxx
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Niets uit deze uitgave mag verveelvuldigd en/of openbaar gemaakt worden door middel van druk, fotokopie, microfilm of op elke andere wijze ook, zonder voorafgaande toestemming van de houder van het copyright.

Inhoudsopgave

10 Conflictlijnen **5**
10.1 Gelijke afstand 6
10.2 Naastebuurprincipe 14
10.3 Ellips, hyperbool, meer parabool 25
10.4 Anders bekeken 31
10.5 De raaklijneigenschap 37
10.6 Gemengde opgaven 44
10.7 Eindpunt 49
10.8 Extra opgaven 54
10.9 Computerpracticum 57

Antwoorden **61**
10 Conflictlijnen 61

Hints **91**
10 Conflictlijnen 91

Index **92**

Voorwoord

Dit hoofdstuk behandelt het onderwerp Conflictlijnen.
Het is onderdeel van het vak 456 vwo wiskunde d.
Het onderwerp heeft meetkundige en analytische kanten.
Je leert onder andere parabolen van een andere kant kennen. De laatste paragraaf doe je op de computer.
Het is handig maar niet noodzakelijk als je hoofdstuk 4 Hoeken en bogen eerst gedaan hebt.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

Deze versie is van 13 juni 2019.

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

Echt, moet kunnen
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.

Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.

10.1 Gelijke afstand

1

In 1961 werd bekend dat er in de bodem van de Noordzee aardgas te vinden was. Toen werd het dus van belang uit te maken welk deel van de Noordzee bij welk land hoort. In 1970 kwam hierover een verdrag tot stand. Uitgangspunt daarbij was dat elk stukje van de zeebodem hoort bij het land waar het het dichtst bij ligt.
Dat noemen we het *naastebuurprincipe*.

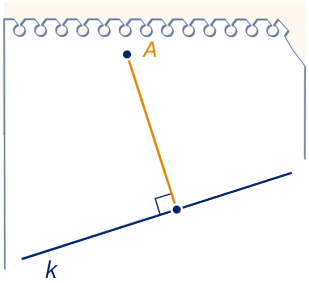
a Hoe ver ligt het 'drielandenpunt' van Noorwegen, Denemarken en Groot-Brittannië van de drie landen af?
b Ga na dat Duitsland meer heeft gekregen dan waar het volgens het naastebuurprincipe recht op had.

Anneke woont in Lobith, waar de Rijn de grens Nederland- Duitsland passeert. Ze wil een dagje gaan zwemmen in de Noordzee.
c Hoe ver woont Anneke (hemelsbreed) van de Noordzee?
d Hoever liggen Duitsland en Engeland van elkaar af?
e Hoe meet je eigenlijk de afstand tussen een punt en een gebied, of tussen twee gebieden?

Afstand meet je langs een kortst recht verbindingslijnstuk.

Stelling

De kortste verbinding van een punt A met een lijn k is een loodlijnstuk vanuit A op k.



Bewijs

Neem aan: de loodrechte projectie van A op k is S en P is een ander punt dan S op lijn k.
Dan is $|AS| < |AP|$ volgens de stelling van Pythagoras.

2 Bewijs de stelling met de driehoeksongelijkheid.

Hint 1.

3 Een kustlijn maakt twee scherpe hoeken: een landinwaartse en een zee-inwaartse. Het plaatje staat ook vergroot op het werkblad. De punten die op afstand 3 mijl uit de kust liggen, vormen de driemijlslijn.

a Teken de driemijlslijn. Pas op: hij loopt bij de landinwaartse hoek heel anders dan bij de zee-inwaartse hoek.

De driemijlslijn bestaat uit drie rechte stukken en één cirkelboog.

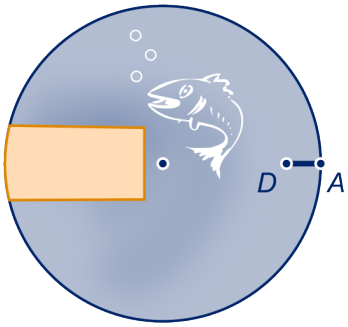
b Geef op het werkblad precies aan waar de cirkelboog aansluit op twee van de rechte stukken.

4 In een perfect rond meertje staat een aanlegsteiger.
Anneke vist in het meertje op forel. Ze kan elke plek aan de rand van de vijver en op de steiger kiezen. In de figuur zie je Anneke op een bepaalde plaats A staan. Als ze haar hengel zo ver mogelijk over de vijver steekt, komt de dobber op plek D.

a Kleur op het werkblad het gebied waar de forellen geen gevaar lopen door Anneke te worden verschalkt.

De diameter van het meertje is 18 meter. De steiger is 4 meter breed en is in het midden 8 meter lang.

b Hoe lang moet Annekes hengel minstens zijn, opdat de vissen alleen nog maar onder de steiger veilig zijn?



Gegeven is een gebied.
De punten die buiten het gebied liggen, op afstand x van de rand van het gebied, vormen de zogenaamde **iso-x-afstandslijn**.

5

a Hoe lang is de iso-x-afstandslijn bij een cirkelvormig gebied met straal 2 (uitdrukken in x)?
b Hoe lang is de iso-x-afstandslijn bij een driehoek met zijden 3, 4 en 5?
c Hoe lang is de iso-x-afstandslijn bij een rechthoek met zijden 2 en 5?

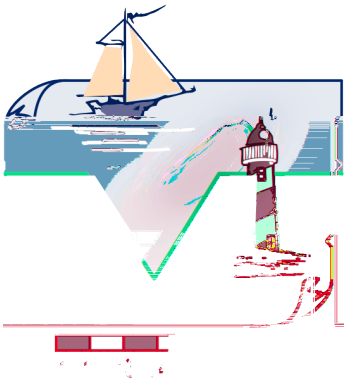
Een vierhoekig gebied heeft zijden van 2, 3, 4 en 5 en heeft geen inspringende hoeken.
d Hoe lang is de iso-x-afstandslijn? Leg uit dat je daarvoor niet de vorm van het gebied hoeft te weten.

6

Dezelfde vragen als bij opgave 5, maar nu voor de oppervlakte van de zone tussen de iso-x-afstandslijn en het gebied.

7

We bekijken een land met een V-vormige inham. De vier stukken kustlijn zijn allemaal recht. Bij het plaatje is een schaalstok getekend. De inham is een gelijkzijdige driehoek met zijde 4.

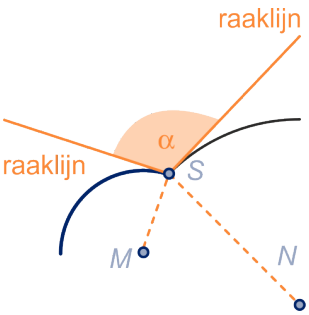


a Teken op het werkblad in zee de iso-1-afstandslijn, de iso-2-afstandslijn en de iso-3-afstandslijn. Geef nauwkeurig aan waar de rechte stukken op de cirkelbogen aansluiten.

De iso-1-afstandslijn en de iso-2-afstandslijn bestaan uit twee cirkelbogen en vier rechte stuken.
De iso-3-afstandslijn bestaat uit twee cirkelbogen en twee rechte stukken.
b Bereken exact de kleinste waarde van x, waarvoor de iso-x-afstandslijn uit twee cirkelbogen en twee rechte stukken bestaat.

In de vorige opgave maken de cirkelbogen van de iso-3- afstandslijn een stompe hoek met elkaar.

Laat S een gemeenschappelijk punt zijn van twee cirkels. Bekijk op beide cirkels een boog met eindpunt S. Onder de **hoek** die deze **cirkelbogen** met elkaar maken, verstaan we de hoek die de bijbehorende halve raaklijnen met elkaar maken, in de figuur α.



Opmerking
In de figuur zijn de middelpunten van de cirkelbogen M en N. Omdat de halve raaklijnen loodrecht op de lijnen MS en NS staan geldt:
$\alpha + \angle MSN = 180°$.

8 Twee even grote cirkels gaan door elkaars middelpunt.

a Hoe groot zijn de hoeken die ze maken?

b Hoe groot zijn de hoeken die twee rakende cirkels met elkaar maken?

Het zal duidelijk zijn wat we verstaan onder de hoeken die een lijn met een cirkel maakt.

9 Een lijn snijdt een cirkel met straal 1 onder hoeken van $45°$ (en van $135°$).

a Hoe lang is het stuk van de lijn dat binnen de cirkel ligt?

b Onder welke hoeken snijdt een lijn door het middelpunt een een cirkel?

10 Bekijk opnieuw de cirkelbogen van de iso-3-afstandlijn van opgave 7.

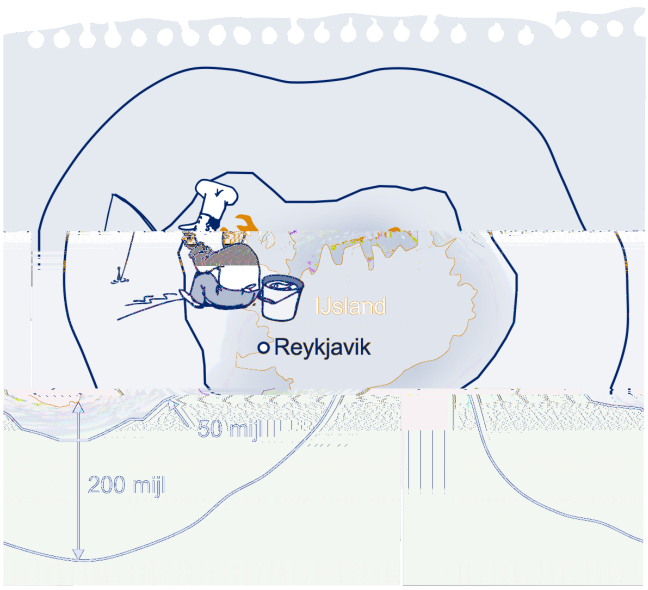
a Bereken de hoek die de cirkelbogen met elkaar maken in graden nauwkeurig.

b Toon aan dat de twee cirkelbogen van de iso-4- afstandslijn elkaar onder een hoek van $120°$ ontmoeten.

c Bereken voor welke x de twee cirkelbogen van de iso=x- afstandslijn elkaar ontmoeten onder een hoek van $170°$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Is er een waarde van x, zo dat de iso-x-afstandslijn geen knik meer heeft?

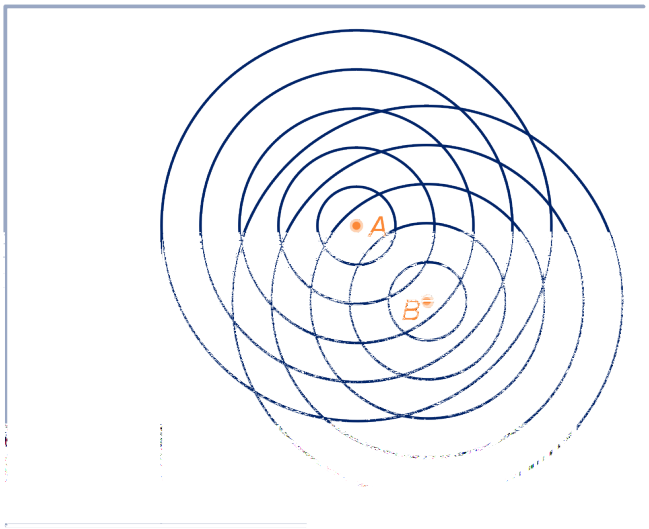
Je ziet dat, hoe verder de iso-afstandslijn van de kust ligt, hoe kleiner de invloed van de inham op de vorm van de iso-afstandslijn wordt. Maar de invloed zal nooit helemaal verdwijnen. Dit wordt ook fraai geïllustreerd door de isoafstandslijnen om IJsland.



In de jaren ’70 waren Engeland en IJsland in een visserijconflict verwikkeld. Internationaal is vastgelegd dat een zone van 50 mijl voor de kust tot het territorium van het land behoort. IJsland had eigenmachtig die zone vergroot tot 200 mijl om zich te verzekeren van ruimere visgronden. Dit ging ten koste van Britse vissers; vandaar het conflict.
Uit: Pythagoras nr 5, april 1976

11

Gegeven zijn twee punten: A en B. De isoafstandslijnen van A zijn cirkels; zo ook van B. Die zijn hieronder getekend.

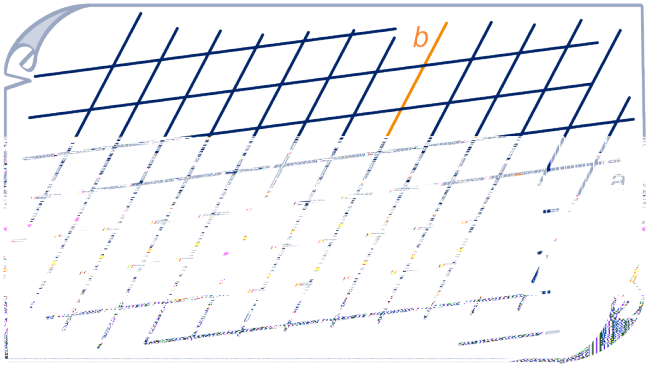


a Hoe vind je in dit plaatje punten die even ver van A als van B af liggen?

b Teken op het werkblad alle punten die even ver van A als van B af liggen.
Weet je een naam voor de verzameling van deze punten?

12

Gegeven zijn twee snijdende lijnen: a en b. De isoafstandslijnen van a zijn paren lijnen; zo ook van b. Die zijn hieronder getekend.



a Hoe vind je in dit plaatje punten die even ver van a als van b af liggen?

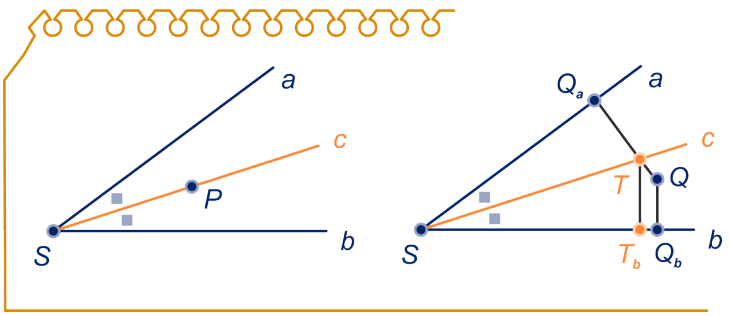
b Teken op het werkblad alle punten die even ver van a als van b af liggen?
Weet je een naam voor de verzameling van deze punten?

De verzameling punten die even ver van twee punten A en B liggen, is de middelloodlijn van lijnstuk AB.
De verzameling punten die even ver van twee snijdende lijnen a en b afliggen, is het tweetal bissectrices of deellijnen van de hoeken die a en b met elkaar maken. Deze staan loodrecht op elkaar.

De eerste bewering hebben we onder andere in hoofdstuk 4 Hoeken en Bogen gezien.
Daar is ook bewezen dat een punt op een van de bissectrices even ver van a als van b liggen. Maar dan ben je nog niet klaar! Je moet ook nog het omgekeerde bewijzen: als een punt niet op een bissectrice ligt, dan ligt het niet even ver van a als van b.

13

In de figuur hieronder links zijn getekend de halve lijnen a en b met beginpunt S en de halve lijn c die de hoek tussen a en b middendoor deelt.
P is een punt op c.



a Toon aan dat P even ver van a als van b ligt.

Hint 2.

Q in de rechter figuur ligt niet op c.
We gaan bewijzen dat Q dichter bij b dan bij a ligt.
Q_a en Q_b zijn de projecties van Q op a en b. Het snijpunt van lijn QQ_a met c is T.
De projectie van T op b is T_b.

b Verklaar waarom geldt:
- $|TQ| + |TT_b| > |QT_b|$
- $|TQ| + |TT_b| > |QQ_b|$
- $|QQ_a| > |QQ_b|$.

14 Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen.

a Omschrijf de verzameling punten die op gelijke afstand van de lijnen liggen,

Gegeven zijn twee cirkels met dezelfde straal die elkaar niet snijden.

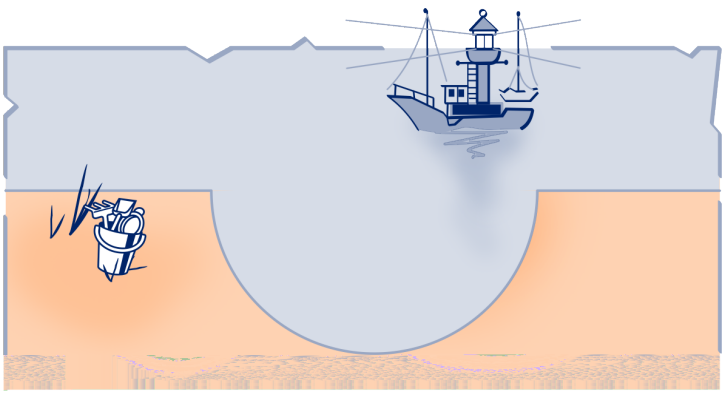
b Omschrijf de verzameling punten die op gelijke afstand van de cirkels liggen.

Gegeven zijn twee gebieden V en W. De punten die even ver van beide gebieden afliggen noemen de **conflictlijn** van V en W.

Voorbeeld

De conflictlijn van twee cirkelvormige gebieden met dezelfde straal r en middelpunten M en N is de middelloodlijn van lijnstuk MN. (We nemen aan $|MN| > 2r$.)

15 De kustlijn hieronder bestaat uit twee halve lijnen en een halve cirkel. De halve cirkel heeft straal 20 km. Het plaatje is getekend op schaal $1 : 10^6$.



a Neem het plaatje over en teken in zee de isoafstandslijn op 20 km uit de kust.

We bekijken bij een zeker gebied een zekere isoafstandslijn. Anneke beweert: "als de rand van het gebied geen knik heeft, heeft de isoafstandslijn ook geen knik".

b Is dat waar? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een voorbeeld waaruit blijkt waarom niet.

Je kunt afstanden ook in tijd meten. Op de volgende bladzijde staat een voorbeeld.

10.1 Gelijke afstand

Afstanden in 1900 en 1932 te bereiken vanuit Utrecht in 1, 2, 3 uur enz.

Het betreft hier voorzover bekend de eerste isochronenkaart van Nederland.

Een isochronenkaart is een kaart met isolijnen, die punten verbinden die in eenzelfde reistijd vanuit een centraal punt kunnen worden bereikt. Dat centrale punt is op deze kaart Utrecht en met gebruikmaking van de dienstregelingen van 1900 en 1932 heeft men uitgerekend hoeveel tijd men nodig had om van Utrecht met de trein andere bestemmingen in het land te bereiken. Men kan bijvoorbeeld uit de kaart aflezen dat, waar men in 1900 vier uur nodig had voor de reis Utrecht-Groningen, dat in 1932 in drie uur mogelijk was.

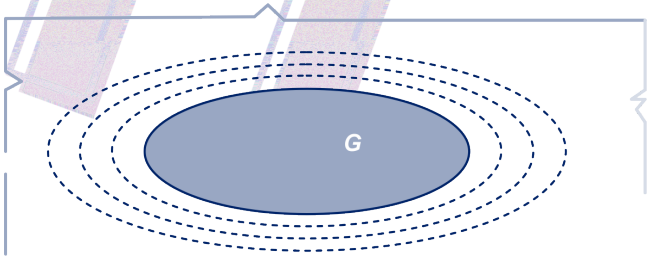
Het is goed om te bedenken dat de kaart alleen geldt voor de bereikbaarheid van stations. Om van Goningen naar Roden te komen, ten zuidwesten van de stad, had men nog weer een uur nodig, ook al ligt Roden zuidelijk van de drie-uur lijn voor 1932.

Isochronenkaart van Nederland.

Verschenen in: Het verkeer te land. A. de spoor- en tramwegen / J.J. Stieltjes. - In: Tijdschrift van het Koninklijk Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap, Ser. 2, dl. 50 (1933), p. 420-478 (p. 460).

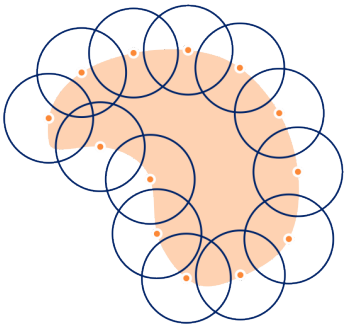
16 **Om een ellipsvormig gebied**

We bekijken een ellipsvormig gebied G: grijs in het plaatje hieronder. Anneke tekent drie isoafstandslijnen van G door de rand van G (zowel horizontaal als verticaal) vanuit het middelpunt te vermenigvuldigen met de factoren $1{,}2$, $1{,}4$ en $1{,}6$.



Geef commentaar.

17 **Om een willekeurig gebied**



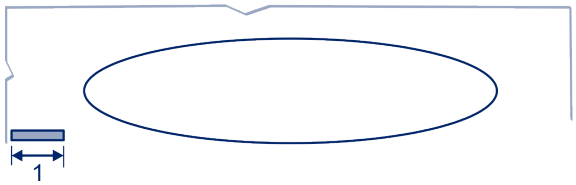
Hoe maak je wel isoafstandslijnen van een gebied? Bijvoorbeeld de 1-isoafstandslijn.

Teken cirkels met straal 1 en middelpunt op de rand van het gebied. Als je genoeg cirkels tekent, wordt de 1-isoafstandlijn goed zichtbaar: het is de omhullende van de cirkels. De cirkels vormen tezamen een zone van breedte 2 om de rand.

a Teken die zone zo goed mogelijk op het werkblad.

b Zijn de buiten- en binnenrand van de zone gelijkvormig?

18 Hieronder is een ellips getekend. Deze staat ook op het werkblad.



a Teken op het werkblad de "buiten-" en de "binnen- "isoafstandslijn op afstand $\frac{1}{2}$ van de ellips.

b Zijn ze gelijkvormig?

c Teken een rechthoek van 2 bij 4 cm en teken de iso-1-afstandslijn buiten en binnen de rechthoek.

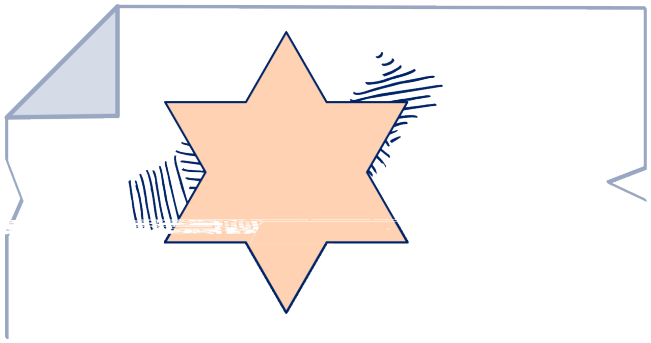
Anneke zegt dat de conflictlijn tussen binnen- en buitenisoafstandlijn de rechthoek zelf is.

d Heeft Anneke gelijk?

19

Davidsster

De zijden van de Davidsster hebben allemaal lengte 2.



a Teken op het werkblad de isoafstandslijn buiten de ster op afstand 1.

b Bereken de exacte lengte van deze isoafstandslijn.

c Bereken exact de oppervlakte van de afstand-1-zone buiten de Davidsster.

20

Twee knikken

Een kustlijn maakt twee rechte knikken. De twee oostwest- kustlijnen zijn 60 en 30 km lang, de noord-zuidkustlijn is 20 km lang; zie de tekening hieronder.

a Teken de kustlijn op schaal, maak de noord-zuidkustlijn 2 cm lang.
Teken daarin ook de twee isoafstandslijnen 10 en 20 km uit de kust,

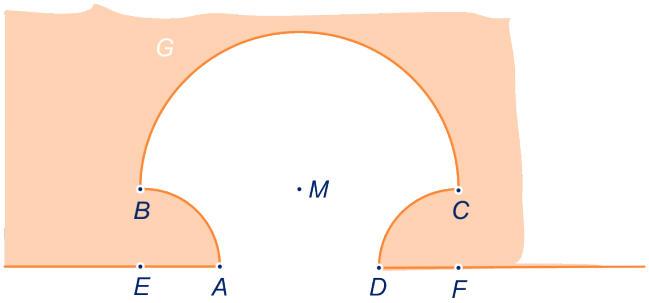
b Bereken de exacte lengte van elk van de isoafstandslijnen.

c Bereken de exacte oppervlakte van de 10-km-zone en van de 20-km-zone (tussen kust en isoafstandslijn).

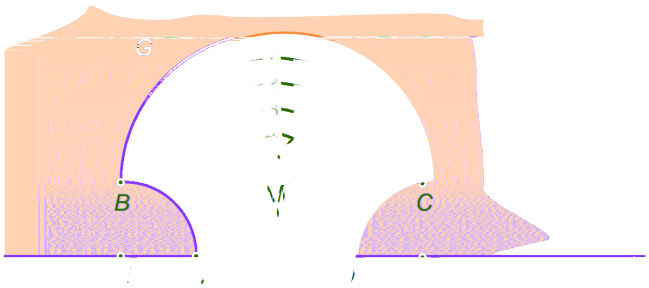
21

Een gebied G heeft aan een van zijn rechte zijden, EF, een inham, waarvan de rand bestaat uit drie cirkelbogen:
- boog AB is een kwartcirkel met straal 3 en middelpunt E,
- boog CD is een kwartcirkel met straal 3 en middelpunt F,
- boog BC is een halve cirkel met straal 6 en middelpunt M.

E, A, D en F liggen op een rechte lijn.

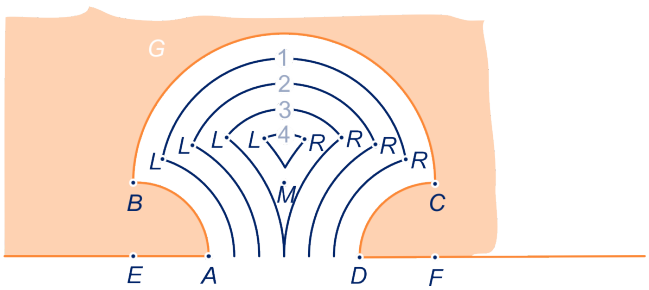


In het plaatje hieronder zijn in de inham de isoafstandslijnen getekend op de afstanden 1, 2, 3 en 4 van het land.



a Teken op het werkblad de isoafstandslijn waarop het punt M ligt. Licht je werkwijze toe.

Elke iso-afstandslijn bestaat uit drie cirkelbogen. Deze drie bogen sluiten op elkaar aan in de punten L (links) en R (rechts). Zie het plaatje hieronder.



Voor alle punten L geldt: $|LM| + |LE| = 9$.

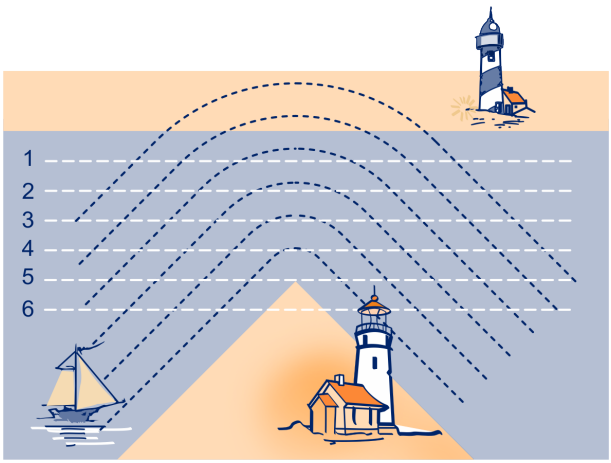
b Toon dit aan.

CSE VWO wiskunde b12 2007 I

Naastebuurprincipe
Twee landen betwisten elkaar de hun omringende wateren. Ze worden het erover eens dat een plek op zee tot dát land behoort, waar hij het dichtste bij ligt. We noemen deze verdeelregel het **naastebuurprincipe**.
De bijbehorende grenslijn heet de **conflictlijn** tussen de twee gebieden.
Zie ook paragraaf 1.

22

Noorderland en Zuiderland verdelen de zee volgens het naastebuurprincipe.



Hierboven zijn de isoafstandslijnen van beide landen getekend op de afstanden 1, 2, 3, 4, 5 en 6 uit de kust.
De snijpunten van de overeenkomstige isoafstandslijnen liggen op de conflictlijn.

a Teken de conflictlijn op het werkblad.

De conflictlijn bestaat uit twee rechte stukken en één gebogen stuk.

b Geef nauwkeurig aan in welke punten de rechte stukken overgaan in het gebogen stuk.

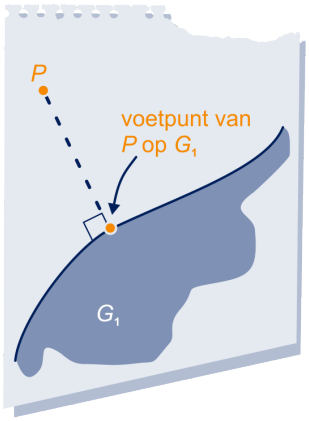
c Leg uit dat de rechte stukken allebei een deel zijn van de bissectrice van een hoek. Van welke hoeken?

Als je de twee rechte stukken van de conflictlijn door trekt, gaan ze een stompe hoek maken.

d Hoe groot is die hoek, als de kustlijn van Zuiderland een rechte hoek maakt?

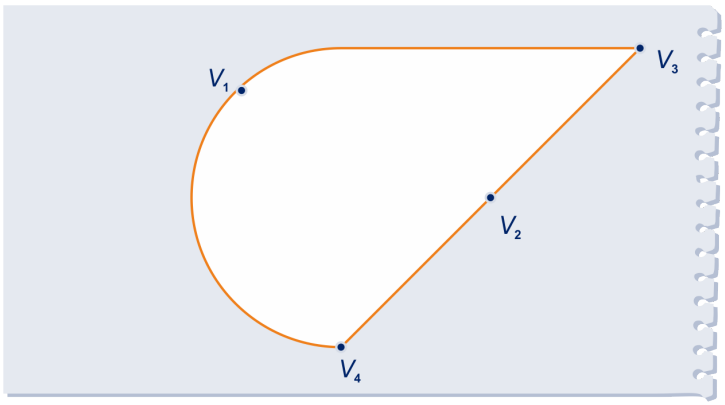
e En als die hoek α is?

De conflictlijn van twee gebieden wordt gevormd door alle punten die gelijke afstand hebben tot beide gebieden.
Noemen we die gebieden G_1 en G_2, dan geldt dus: punt P ligt op de conflictlijn van G_1 en G_1
$\Leftrightarrow d(P, G_1) = d(P, G_2)$.
Een punt van G_1 dat het dichtst bij P ligt, noemen we een **voetpunt** van P op G_1.



23

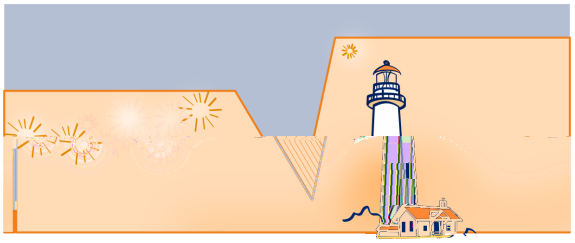
Hieronder is een gebied getekend. De rand bestaat uit een halve cirkel en twee lijnstukken. Op de rand zijn vier punten aangegeven: V_1, V_2, V_3 en V_4.



a Geef op het werkblad met kleur alle punten aan waarvan V_1 het voetpunt is.
b Kleur ook alle punten waarvan V_2 het voetpunt is. En waarvan V_3 het voetpunt is. En waarvan V_4 het voetpunt is.

24

Meer dan één voetpunt
Het gebied hieronder heeft een V-vormige inham.



a Waar binnen de inham liggen de punten die twee voetpunten hebben?
b Geef een voorbeeld van een gebied en een punt dat drie voetpunten heeft op dat gebied.
c Geef een voorbeeld van een gebied en een punt dat oneindig veel voetpunten heeft op dat gebied.

Parabool p_1 snijdt de zijde F_1F_2 in het punt S.

b Bewijs dat de raaklijn in S aan p_1 door F_4 gaat.

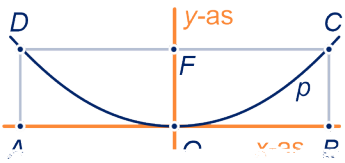
Het raakpunt van de parabolen p_1 en p_2 noemen we R_{12}. Evenzo zijn R_{23}, R_{34}, en R_{41} de raakpunten van p_2 en p_3, van p_3 en p_4, en van p_4 en p_1. De punten R_{12}, R_{23}, R_{34} en R_{41} zijn de hoekpunten van een vierkant V. De vier parabolen p_1, p_2, p_3 en p_4 sluiten een gebied G in.

c Bereken de verhouding van de oppervlakten van G en van het vierkant V.

Profi examen wiskunde B 1998 tweede tijdvak

83

In een assenstelsel is een parabool p getekend met brandpunt F en een rechthoek met hoekpunten A en B op de x-as en C en D op de parabool p op dezelfde hoogte als het brandpunt F.
De top van de parabool is $O(0,0)$.



a Geef een vergelijking van de richtlijn r.

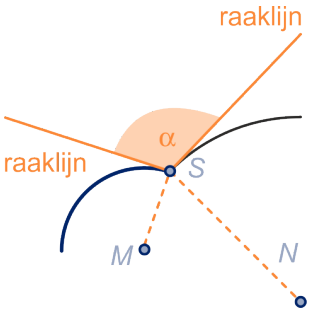
b Geef de coördinaten van C.

c Geef een vergelijking van p.

Isolijnen en conflictlijnen
Gegeven is een gebied.
De punten die buiten het gebied liggen, op afstand x van de rand van het gebied, vormen de zogenaamde **iso-*x*-afstandslijn**.

Bij twee gebieden V en W vormen de punten die even ver van beide gebieden liggen, de **conflictlijn** van V en W.
Bij het tekenen van isolijnen en conflictlijnen is het handig om het volgende te weten.
- De conflictlijn van twee punten A en B is de middelloodlijn van lijnstuk AB.
- De conflictlijn van twee snijdende lijnen a en b bestaat uit het tweetal bissectrices (deellijnen) van de hoeken die a en b met elkaar maken. Deze staan loodrecht op elkaar.

Soms zit er een knik in een punt S van een isolijn of conflictlijn. Dan wordt er naar de grootte van de knik gevraagd.
Dat gebeurt bijvoorbeeld in een gemeenschappelijk punt van twee cirkels.
Bekijk op beide cirkels een boog met eindpunt S. Onder de **hoek** die deze **cirkelbogen** met elkaar maken, verstaan we de hoek die de bijbehorende halve raaklijnen met elkaar maken, in de figuur α.
Neem aan dat de middelpunten van de cirkelbogen M en N zijn, dan geldt: $\alpha + \angle MSN = 180°$.



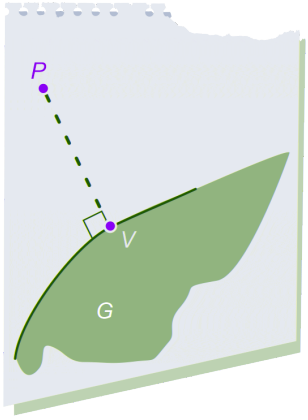
Parabool, ellips, hyperbool
Speciale gevallen van conflictlijnen zijn de parabool, ellips en de hyperbool.

Gegeven zijn een punt F en een lijn of een cirkel r, waarbij F niet op r ligt.
De conflictlijn tussen F en r is een
- **parabool** als r een rechte lijn is.
  Het punt F heet het **brandpunt** en de lijn r heet de **richtlijn** van de parabool.
- **ellips** als r een cirkel is en F binnen r ligt.
  Als r middelpunt M heeft, dan zijn F en M de **brandpunten** en r **richtcirkel** van de ellips.
  De straal van de richtcirkel heet de **ellipsconstante**.

- **hyperbooltak** als r een cirkel is en F buiten r ligt.
  Als r middelpunt M heeft, is F het **brandpunt** van de hyperbooltak en r **richtcirkel** van de hyperbooltak.
  Verwisselen we de plaatsen van M en F, dan is de conflictlijn het spiegelbeeld van de hyperbooltak in de middelloodlijn van het lijnstuk MF.
  De twee hyperbooltakken vormen samen de hyperbool met brandpunten F en M.
  De straal van de richtcirkel heet de **hyperboolconstante**.

Constructie vanuit de voetpunten

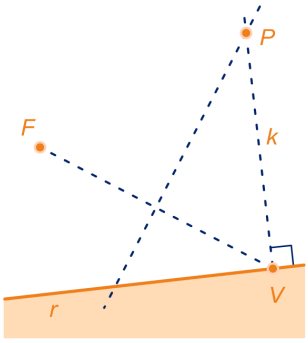
Als je r en F kent, kun je de parabool, ellips of hyperbool *construeren vanuit de voetpunten*.
Een punt van een gebied G dat het dichtst bij P ligt, noemen we een **voetpunt** van P op G.



Als de conflictlijn een parabool is

Bij een punt P, kun je zijn voetpunt V op r bepalen. Omdat $|PF| = |PV|$, ligt P op de middelloodlijn van lijnstuk FV.
Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt V op r het bijbehorende punt P op de parabool bepalen. Als volgt.

- Richt de loodlijn k in V op r op.
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk FV.
- Het snijpunt k met de middelloodlijn is P.

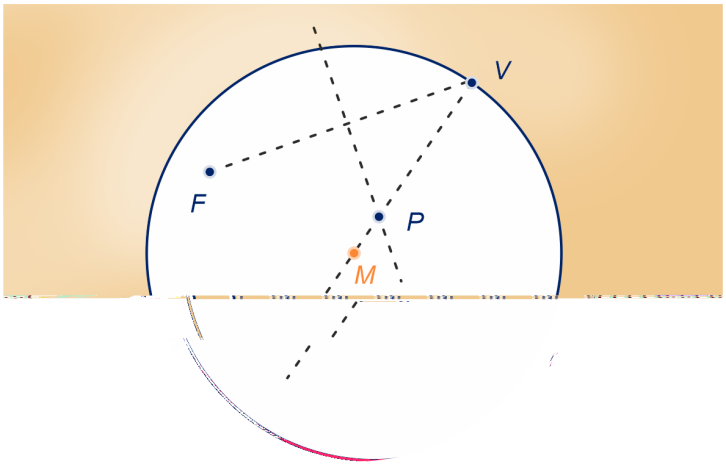


Als de conflictlijn een ellips of hyperbool is

Een punt P ligt op de ellips met brandpunt F en richtcirkel r als $d(P,F) = d(P,r)$. Als je een punt P op de ellips hebt, kun je zijn voetpunt V op r bepalen. Omdat $|PF| = |PV|$, ligt F op de middelloodlijn van lijnstuk FV.

Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt V op r het bijbehorende punt P op de ellips bepalen.
Als volgt zie de figuur op de volgende bladzijdezie hieronder.

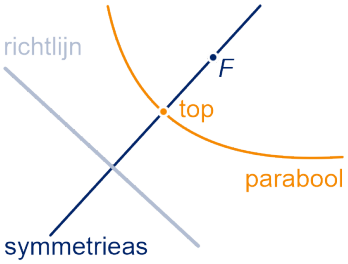
- Richt de loodlijn in V op r op (dat is de lijn van V naar het middelpunt M van r).
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk FV.
- Het snijpunt van deze twee lijnen is P.



Eigenschappen van parabool, ellips, hyperbool

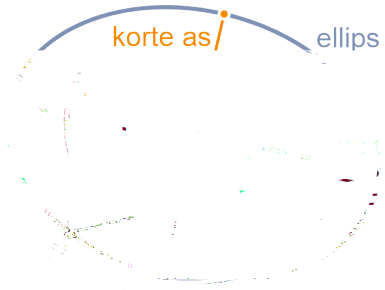
• Parabool

Een parabool heeft een **symmetrieas**, dat is de lijn door het brandpunt loodrecht op de richtlijn.
Het punt dat het dichtst bij de richtlijn ligt, ligt op de symmetrieas. Dat punt heet **top**,
Alle parabolen zijn gelijkvormig.



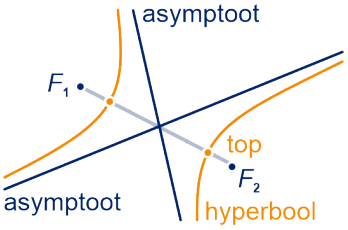
• Ellips

Als F_1 en F_2 de brandpunten zijn van een ellips, dan is voor elk punt P op de ellips de som van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde: $|PF_1| + |PF_2| = R$, waarbij R de ellipsconstante (de straal van de richtcirkel) is.
De ellips heeft twee **symmetrieassen**: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van lijnstuk F_1F_2.
Deze symmetrieassen snijden de ellips in de zogenaamde **toppen**.
Het lijnstuk dat door de ellips van de lijn F_1F_2 wordt afgesneden heet de **lange as**.
Het lijnstuk dat door de ellips van de middelloodlijn van lijnstuk F_1F_2 wordt afgesneden heet de **korte as**.



• Hyperbool

Een hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 heeft twee **symmetrieassen**: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van het lijnstuk F_1F_2. De eerste symmetrieas snijdt de hyperbool in de zogenaamde **toppen**. Het verbindingslijnstuk tussen de toppen heet de **as** van de hyperbool.



Voor elk punt P op de hyperbool is het absolute verschil van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde: $||PF_1|-|PF_2|| = R$, waarbij R hyperboolconstante (de straal van de richtcirkels) is.
Neem aan: de raaklijnen vanuit F_1 aan de richtcirkel met middelpunt F_2 raken de richtcirkel in R en S.
De middelloodlijnen van de lijnstukken RF en SF zijn dan de **asymptoten** van de hyperbool.

In een assenstelsel
Je kunt een assenstelsel aanbrengen. In dat geval krijgt een parabool, ellips, hyperbool een vergelijking.
• **Parabool**
Als het brandpunt $F(0,c)$ en richtlijn $y = -c$ is, dan is een vergelijking $x^2 = 4cy$.
Zie wiskunde b, hoofdstuk 13 paragraaf 7.

• **Ellips**
Neem aan: een ellips heeft ellipsconstante $2e$ en en de afstand van de brandpunten is $2d$.
Dan $e > d$ en de lengte van de lange as is $2e$ en van de korte as $2\sqrt{e^2 - d^2}$.
Als je een assenstelsel aanbrengt zó, dat de brandpunten op de x-as liggen en de y-as de middenloodlijn van de brandpunten is, dan is een vergelijking van de ellips:
$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1.$
• **Hyperbool**
Neem aan: een hyperbool heeft hyperboolconstante $2e$; de afstand van de brandpunten tot elkaar is $2d$. Dan $e < d$.
Als je een assenstelsel aanbrengt zó, dat de x-as door de brandpunten gaat en de y-as middelloodlijn van de brandpunten is, dan is een vergelijking van de hyperbool:
$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1.$

De raaklijneigenschap
Raaklijnstelling
Gegeven is de parabool, ellips, hyperbool met F als brandpunt en r als richtlijn, richtcirkel.
P is een punt daarop en V is het voetpunt van P op r. Dan is de raaklijn in P middelloodlijn van lijnstuk VF en deze maakt gelijke hoeken met de lijnen PF en PV.

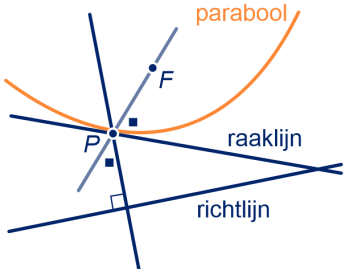
De raaklijnstelling heeft de volgende gevolgen.

• **Parabool**

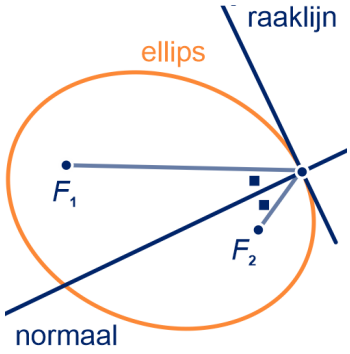
De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn. Zie figuur 1.

• **Ellips, hyperbool**

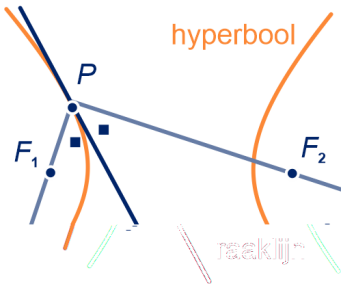
De raaklijn in een punt van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die dat punt verbinden met beide brandpunten. Zie figuur 2 en 3.



figuur 1



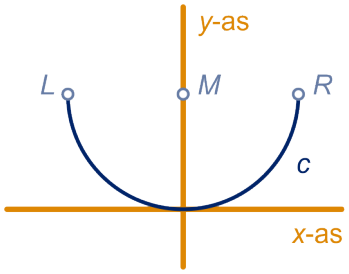
figuur 2



figuur 3

10.8 Extra opgaven

1 In een assenstelsel is de halve cirkel c getekend met middelpunt $M(0,2)$ met daarop de punten $L(-2,2)$ en $R(2,2)$.



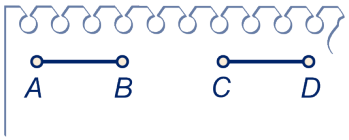
a Neem de figuur over en teken daarin de conflictlijn van c en de x-as.

De conflictlijn bestaat uit drie paraboolstukken.

b Geef van elk van die stukken het brandpunt en de richtlijn.

c Geef de coördinaten van de overgangspunten.

2 Hiernaast zijn twee lijnstukken AB en CD op één lijn getekend. De twee lijnstukken samen vormen het gebied V.

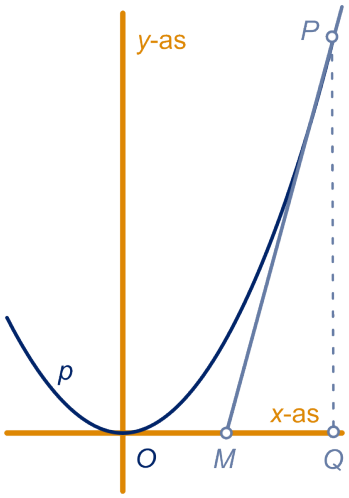


Er geldt: $|AB| = |CD| = 1\frac{1}{2}$ en $|BC| = 2$

a Teken de iso-2-afstandslijn van V.

b Bereken de exacte lengte van die isolijn.

3 Gegeven is een parabool p met daarop een punt P. Door de top O van de parabool is een lijn evenwijdig aan de richtlijn getekend. De projectie van P op die lijn is Q. De raaklijn in P aan p snijdt die lijn in M.



Bewering: M is het midden van lijnstuk OQ.

We bewijzen de bewering eerst met differentiëren.

Daarvoor brengen we een assenstelsel aan met de x-as door O evenwijdig aan de richtlijn en de y-as door O daar loodrecht op.

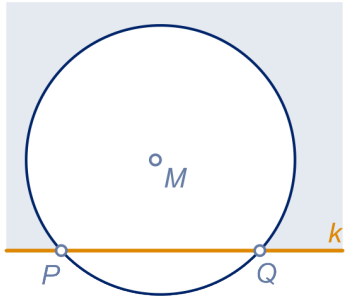
We passen de eenheid zó aan, dat de parabool vergelijking $y = x^2$ heeft. (Dat kan, want alle parabolen zijn gelijkvormig.)

Neem aan $P = (p, p^2)$.

a Bewijs: $Q = \left(\frac{1}{2}p, 0\right)$.

b Bewijs de bewering ook zonder differentiëren.

4 Gegeven is de cirkel c met middelpunt M en straal 3. Lijn k op afstand 2 van M snijdt c in de punten P en Q.



a Teken c en k en ook de conflictlijn van c en k.

b Beschrijf de conflictlijn zo precies mogelijk.

De conflictlijn bestaat uit delen van twee parabolen die elkaar in P en Q snijden.

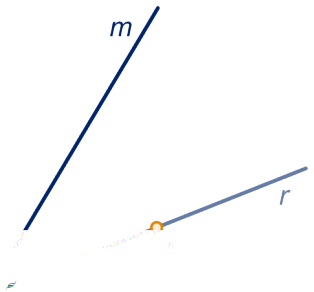
c Bereken de hoek die de raaklijnen aan die paraboolstukken in P met elkaar maken in één decimaal nauwkeurig.

Hint 8.

5

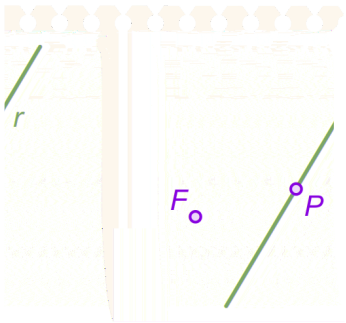
In de figuur is A een punt op een parabool p.
De lijn r is de raaklijn aan p in het punt A.
De lijn m is de as van p.
Teken op het werkblad het brandpunt en de richtlijn van p. Licht je werkwijze toe.

Examen wiskunde B12 (nieuwe stijl) 2002 I



6

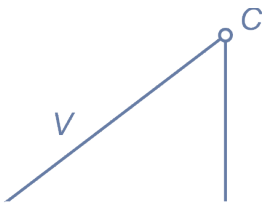
Van een parabool is hiernaast het brandpunt F en een punt P getekend. De lijn r is de raaklijn in P aan de parabool.
Neem de figuur over en teken de richtlijn van de parabool. Licht je werkwijze toe.



7

V is het gebied gevormd door de drie lijnstukken: AB, BC en CD.
c is een halve cirkel met middelpunt M en eindpunten A en D.
M ligt op lijnstuk AD.

a Teken de conflictlijn van c en V binnen vierhoek $ABCD$.



De conflictlijn bestaat uit drie paraboolstukken.

b Geef van elk de richtlijn en het brandpunt.

$ABCD$ is een rechthoekig trapezium.
De 'overgangspunten' van de paraboolstukken noemen we P ('links') en Q.

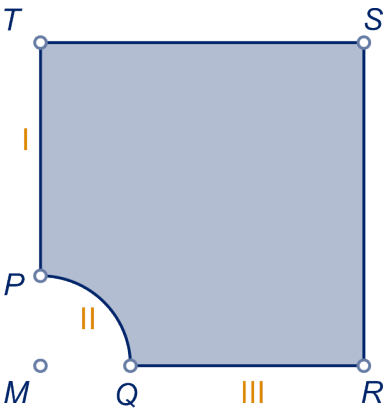
c Bewijs de lijnen BP en CQ loodrecht op elkaar staan.

8

Het gekleurde gebied in de figuur is een deel van het vierkant $MRST$ met zijde 7. De grens PQ is een kwartcirkel met middelpunt M en straal 2. Er zijn drie landen, I, II en III, die alle drie aan het gekleurde gebied grenzen. De grenzen met die landen zijn respectievelijk TP, PQ en QR. Het gekleurde gebied wordt onder de drie landen verdeeld volgens het naastebuur-principe. In het gebied ligt op de lijn MS een punt D dat even ver van de drie landen ligt.

a Bereken de afstand van D tot de drie landen in twee decimalen nauwkeurig.

b Teken op het werkblad de conflictlijnen tussen de drie landen in het gekleurde gebied. Licht je werkwijze toe.

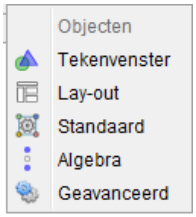


c Bereken de hoek die de twee paraboolstukken in P met elkaar maken in graden nauwkeurig.

Naar examen wiskunde B12 (nieuwe stijl) 2002 II

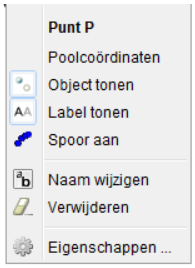
10.9 Computerpracticum

Parabolen, ellipsen en hyperbolen kun je goed tekenen met een meetkunde-computerprogramma. Daarvoor construeer je vanuit een voetpunt op de richtlijn of richtcirkel een punt van de conflictlijn. Vervolgens sleep je het voetpunt over de richtlijn/richtcirkel. Het 'spoor' van het geconstrueerde punt is de conflictlijn.
We gebruiken het programma GeoGebra.
Maak de assen onzichtbaar, via de knop 'voorkeuren' (rechtsboven). Je krijgt het menu in de figuur rechts.
Klik vervolgens op 'tekenvenster'.



1

a Teken een lijn r en een punt F.
Kies een voetpunt V op r, met de knop 'punt op object'.
Construeer hierbij een punt P van de parabool met richtlijn r en brandpunt F.
Sleep V over r; dan beweegt P over de parabool.
Je maakt het 'spoor' van P zichtbaar via 'spoor aan'. (Klik met de rechter muisknop op P, je krijgt het menu in de figuur hiernaast.).



Het punt P is het snijpunt van de loodlijn in V op r en de middelloodlijn van lijnstuk FV.

b Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de parabool?

2

We gaan verder met de parabool van opgave 1.

a Hoe verandert de parabool als je r draait?

b Hoe verandert de parabool als je het punt F naar r toe beweegt?

3

a Teken een cirkel r en een punt F daarbinnen.
Kies een voetpunt V op r.
Construeer hierbij een punt P van de ellips met richtcirkel r en brandpunt F.
Sleep V over r; dan beweegt P over de ellips.

Het punt P is het snijpunt van de loodlijn in V op r en de middelloodlijn van FV.

b Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de ellips?

4

We gaan verder met de ellips van opgave 3.

a Hoe verandert de ellips als je F om het middelpunt van r draait?

b Hoe verandert de ellips als je het punt F naar r toe beweegt?
En als je F naar het middelpunt van r toe beweegt?

5

a Teken een cirkel r en een punt F daarbuiten.
Kies een voetpunt V op r.
Construeer hierbij een punt P van de hyperbooltak met richtcirkel r en brandpunt F.
Sleep V over r; dan beweegt P over de hyperbooltak.

Het punt P is het snijpunt van de loodlijn in V op r en de middelloodlijn van lijnstuk FV.

b Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de hyperbooltak?

c Welke punten kunnen als voetpunt optreden?

6

We gaan verder met de hyperbool van opgave 5.

a Hoe verandert de hyperbool als je F om het middelpunt van r draait?

b Hoe verandert de hyperbool als je het punt F naar r toe beweegt?

Met GeoGebra kun je de baan tekenen die een punt beschrijft als een ander punt wordt versleept. Een conflictlijn is ook zo'n baan: het is de verzameling punten met een zekere eigenschap. Zo'n verzameling punten noemt men ook wel LOCUS of MEETKUNDIGE PLAATS.

7

Gegeven zijn twee punten A en B.

a Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en B liggen?

Gegeven zijn twee lijnen a en b.

b Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van a en A liggen? Onderscheid twee gevallen.

Gegeven is een punt A en een positief getal r.

c Wat is de meetkundige plaats van de punten die op afstand r van A liggen?

Gegeven zijn een cirkel c met middelpunt M en straal r en een positief getal s.

d Wat is de meetkundige plaats van de punten die op afstand s van c liggen? Onderscheid drie gevallen.

Gegeven zijn een lijn a en een punt A dat niet op a ligt.

e Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en a liggen?

Gegeven zijn een lijn a en daarop een punt A.

f Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en a liggen?

Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarbinnen.

g Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarbuiten.

h Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

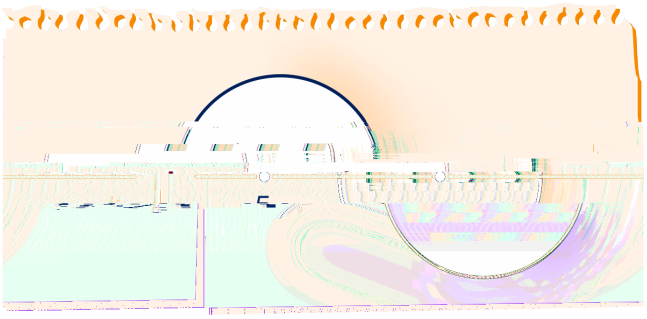
Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarop.

i Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

8

Met dezelfde richtcirkel

Teken op het scherm een cirkel en een lijn k door zijn middelpunt.
Teken op k een punt F (met 'punt op object').



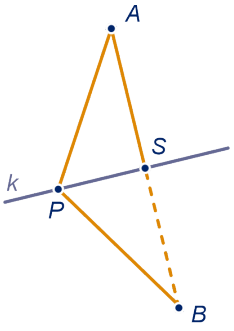
Construeer de conflictlijn met de cirkel als richtcirkel en F als brandpunt.
Versleep F over k en constateer hoe de conflictlijn verandert.

10.9 Computerpracticum

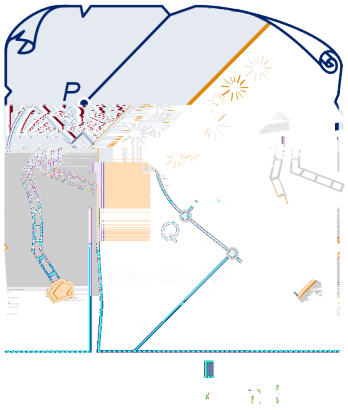
Gelijke afstand

1
a 450 km
b Het drielandenpunt van Duitsland, Denemarken en Groot-Brittannië ligt verder van Duitsland (540 km) dan van Groot-Brittannië (390 km).
c 195 km
d 520 km
e Langs het kortste verbindingslijnstuk.

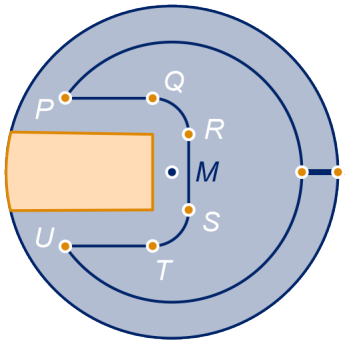
2
Zie figuur.
Het spiegelbeeld van A in k noemen we B. Dan is k de middelloodlijn van lijnstuk AB.
Volgens de driehoeksongelijkheid geldt:
$|AS| + |BS| < |AP| + |BP|$.
Omdat $|AS| = |BS|$ en $|AP| = |BP|$ volgt hieruit $|AS| < |AP|$.



3
a Zie volgend onderdeel.
b Zie figuur.



4
a Zie figuur.



b 5 meter

5

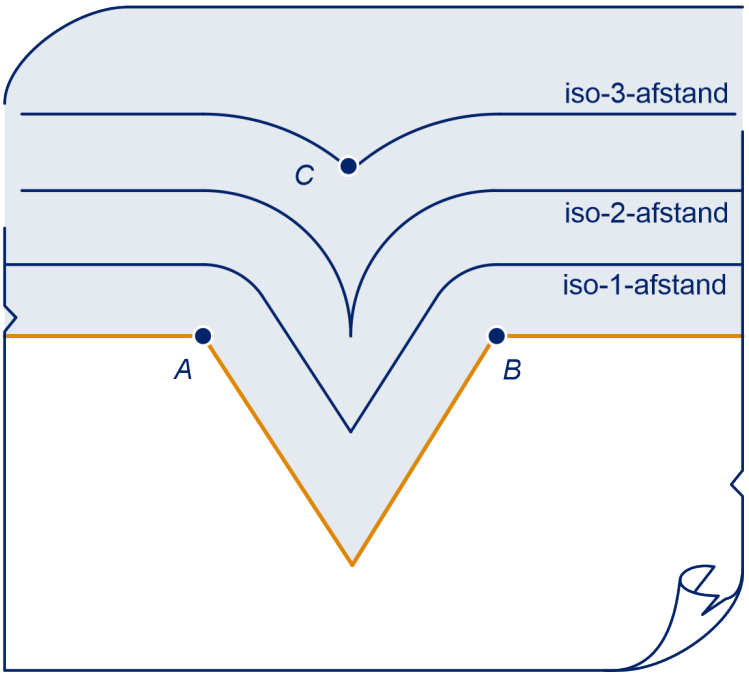
a $2\pi \cdot (2 + x)$
b $12 + 2\pi \cdot x$
c $14 + 2\pi \cdot x$
d $14 + 2\pi \cdot x$
De iso-x-afstandslijn bestaat uit vier rechte stukken van lengte 2, 3, 4 en 5 en uit vier sectoren van een cirkel met straal 2.
Als de hoeken van de vierhoek α, β, γ en δ zijn, zijn de hoeken van de sectoren $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$ en $180° - \delta$. Deze vullen elkaar exact aan tot een volle cirkel.

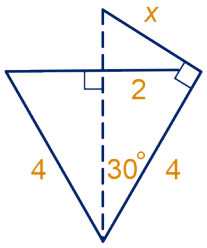
6

$\pi \cdot (2 + x)^2 - \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot (x^2 + 4x)$,
$12x + \pi \cdot x^2$,
$14x + \pi \cdot x^2$,
$14x + \pi \cdot x^2$

7

a Zie de figuur hieronder links. De middelpunten van de cirkelbogen zijn A en B.





b Zie de figuur hierboven rechts.
$\frac{x}{4} = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$

8

a 60° en 120°
b 0° en 180°

9

a $\sqrt{2}$
b 90°

10

a Zie de figuur bij opgave 7. Noem de gevraagde hoek α. Er geldt: $\alpha + \angle ACB = 180°$.
$\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \angle ACB\right) = \frac{2}{3}$, dus $\alpha = 180° - 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 96°$.

b Noem het gemeenschappelijk punt van de twee bogen D, dan is driehoek ABD gelijkzijdig, dus de gevraagde hoek is $180° - \angle ADB = 120°$.

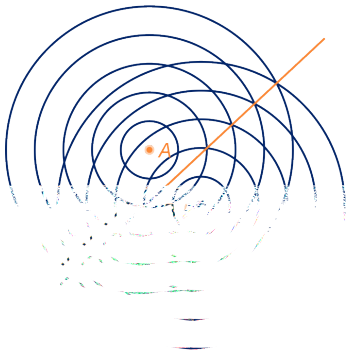
c Noem het knikpunt E. Dan is driehoek ABE gelijkbenig met twee zijden met lengte x en tophoek $\angle AEB = 180° - 170° = 10°$, dus $\frac{2}{x} = \sin(5°) \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sin(5°)} \approx 22{,}95$.

d Nee, als S het 'overgangspunt' is, dan zouden AS en BS evenwijdig zijn.

11

a De snijpunten van de cirkels met dezelfde straal.

b Zie figuur.

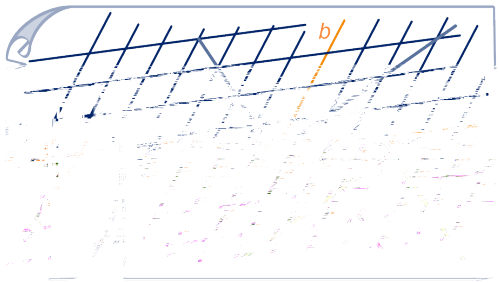


De middelloodlijn van lijnstuk AB.

12

a Dat zijn de snijpunten van de lijnen die op gelijke afstand van a en b liggen.

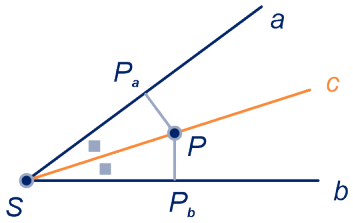
b Zie figuur.



De vier bissectrices van de hoeken die a en b met elkaar maken.

13

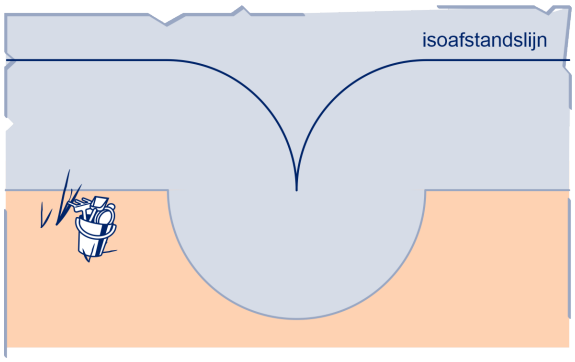
a Zie figuur.
De loodrechte projecties van P op a en b P_a en P_b.
Dan zijn de driehoeken SPP_a en SPP_b congruent, want ze hebben beide een rechte hoek, de hoeken PSP_a en PSP_b zijn even groot en de zijde SP hebben ze gemeen (HZH). Dus $|PP_a| = |PP_b|$.



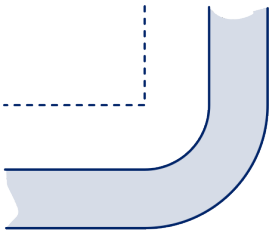
b
- Vanwege de driehoeksongelijkheid in driehoek TQQ_b
- Vanwege het vorige punt en $|TQ_b| > |QQ_b|$ (afstand punt tot lijn)
- Vanweg het vorige punt en $|TQ| + |TT_b| = |QQ_a|$

14
a Dat is de lijn die "halverwege" de twee evenwijdige lijnen ligt.
b Dat is de middelloodlijn van de middelpunten van de twee cirkels.

15
a Zie figuur.



b Nee. Hiernaast staat een voorbeeld.
De rand van het gebied bestaat uit een kwart cirkel met straal 1 en twee halve lijnen; hij heeft geen knik. De iso-1-afstandslijn (gestippeld) maakt een hoek van $90°$.

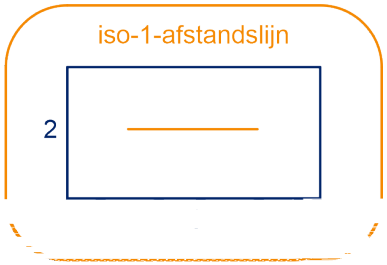


Naastebuurprincipe

16
Het zijn geen isoafstandslijnen, want bij de "west-" en "oostpunt" liggen ze verder van G dan bij de "noord-" en "zuidpunt".

17
a -
b Nee

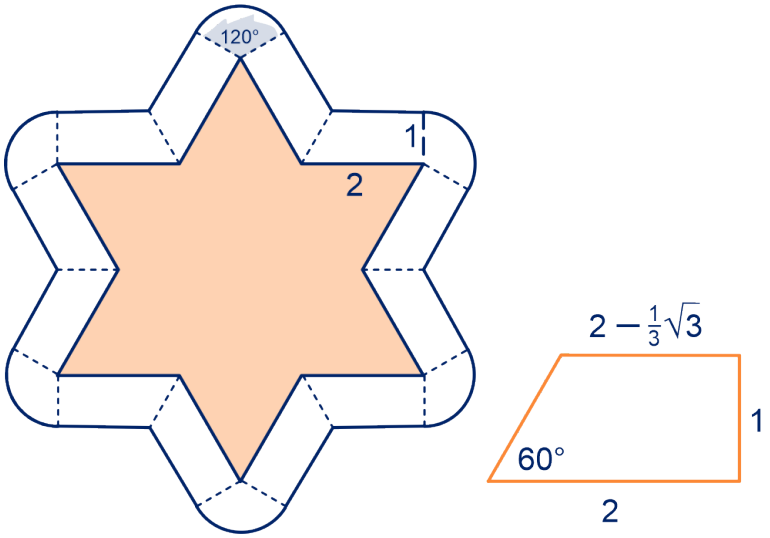
18
b - Nee
c Zie figuur.



d Nee. Een hoekpunt van de rechthoek ligt op afstand 1 van de buitenisoafstandslijn en op afstand $\sqrt{2}$ van de binnenisoafstandslijn.

19

a Zie figuur.

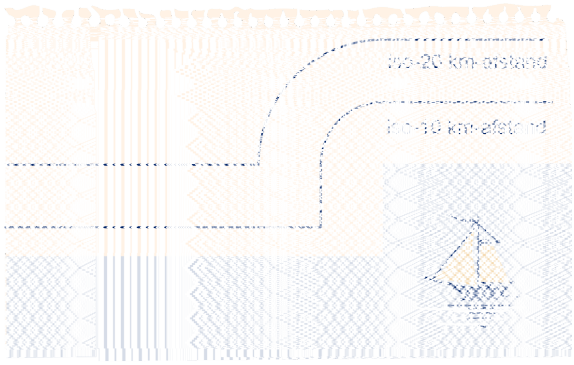


b Die bestaat uit 12 lijnstukken gelijk aan de zijde van lengte $2-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ van het rechthoekig trapezium in de figuur en 6 cirkelbogen van 120° en straal 1.
Dus de lengte is: $12\left(2-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)+6\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\pi = 24-4\sqrt{3}+4\pi$.

c Die bestaat uit de oppervlakte van 12 trapezia en 6 cirkelsectoren van 120° met straal 1.
De oppervlakte van een trapezium is $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(2+2-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$.
De gevraagde oppervlakte is dus $6\cdot 1\cdot\left(2+2-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)+6\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2 = 24-2\sqrt{3}+2\pi$.

20

a Zie figuur.

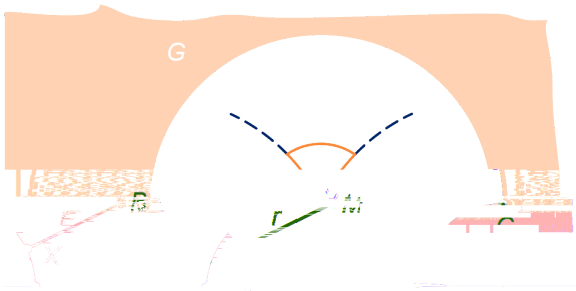


b $90+5\pi$, $70+10\pi$

c $1000+25\pi$, $1800+100\pi$

21

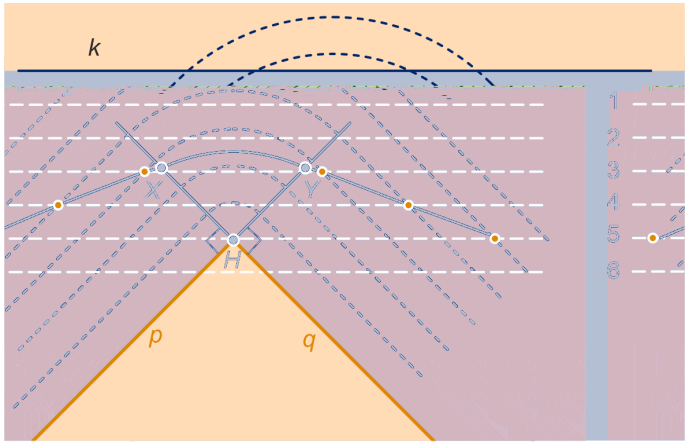
a Zie figuur op de volgende bladzijde.
Het snijpunt van de lijn EM met boog AB noemen we X en de afstand van X tot M noemen we r. Dan moete we de iso-r-afstandslijn tot de kust tekenen.
Die bestaat uit twee cirkelbogen door M de een met middelpunt E en de ander met middelpunt F en een cirkelboog met middelpunt M en straal $6-r$.



b L ligt op de cirkel met middelpunt E, ligt dus op de iso-x-afstandslijn waarbij $x = |LE| - |AE|$.
L ligt ook een cirkel met middelpunt M waarbij $|ML| + x = 6$.
Dus $|LM| + |LE| = 6 - x + x + |AE| = 9$.

22

a Zie figuur.

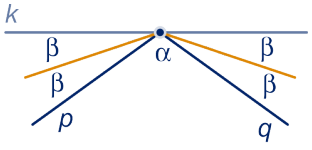


b De punten X en Y, zie figuur.

c De punten op de conflictlijn 'links' van X liggen even ver van k als van p, dus op de bissectrice van k en p.
De punten rechts van Y liggen op de bissectrice van k en q.

d $135°$
Voor uitleg, zie volgend onderdeel.

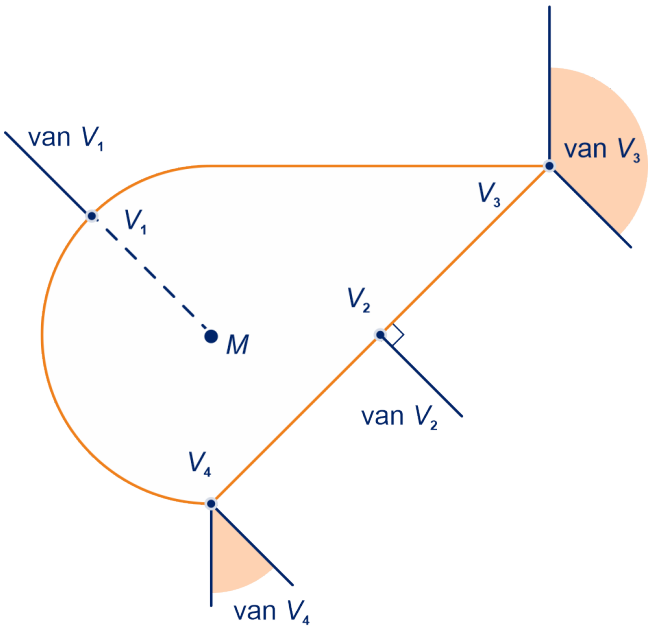
e Zie figuur.
De gevraagde hoek is $\alpha + 2\beta$.
Er geldt: $\alpha + 4\beta = 180°$, dus $\alpha + 2\beta = \alpha + \frac{1}{2}(180° - \alpha) = \frac{1}{2}\alpha + 90°$.



23

a Zie figuur bij het volgend onderdeel.

b Zie figuur.



24

a Op de bissectrice van de hoek van de inham, vanaf het hoekpunt tot aan de loodrechte projectie van het linker beginpunt van de inham op de bissectrice.

b Het gebied buiten een driehoek en het middelpunt van de ingeschreven cirkel van die driehoek.

c Het gebied buiten een cirkel en het middelpunt van die cirkel.

25

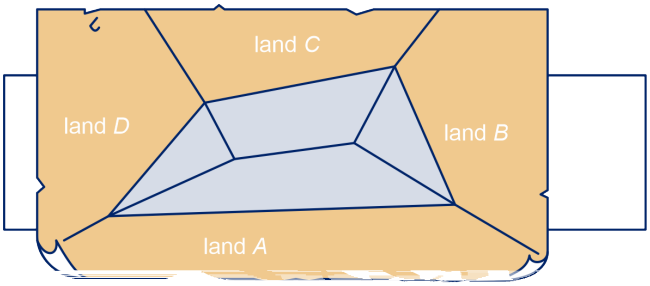
a De binnenzee wordt verdeeld door de drie bissectrices van de de driehoek.

b Dat zijn de bissectrices van de hoeken van de binnenzee. De bissectrices gaan door één punt.

c Die zijn even groot.

26

a Zie figuur.



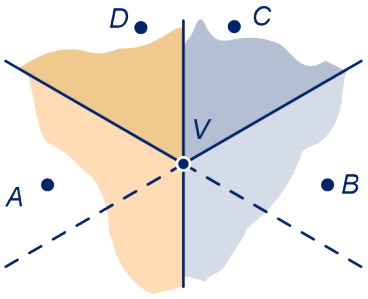
b

27

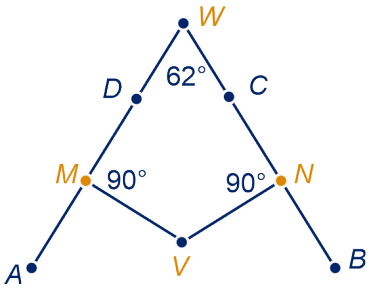
a Zie figuur 1 hieronder. De 'grenzen' zijn middelloodlijnen van zijden van het trapezium.

b Neem aan: V is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC, ligt dus even ver de punten A, B en C.
Omdat de middelloodlijn van AB symmetrieas van het trapezium is, is deze lijn ook middelloodlijn van CD, dus ligt V even ver van C als van D.

c Zie figuur 2. De lijnen AD en BC snijden elkaar in W. Dan $\angle AWB = 180° - 2 \cdot 59° = 62°$, dus M en N zijn de middens van de opstaande zijden van het trapezium. Dan $\angle MVN = 180° - 62° = 118°$, dus de gevraagde hoeken zijn: $\frac{1}{2} \cdot 118° = 59°$, $59°$, $180° - 59° = 121°$ en $121°$.



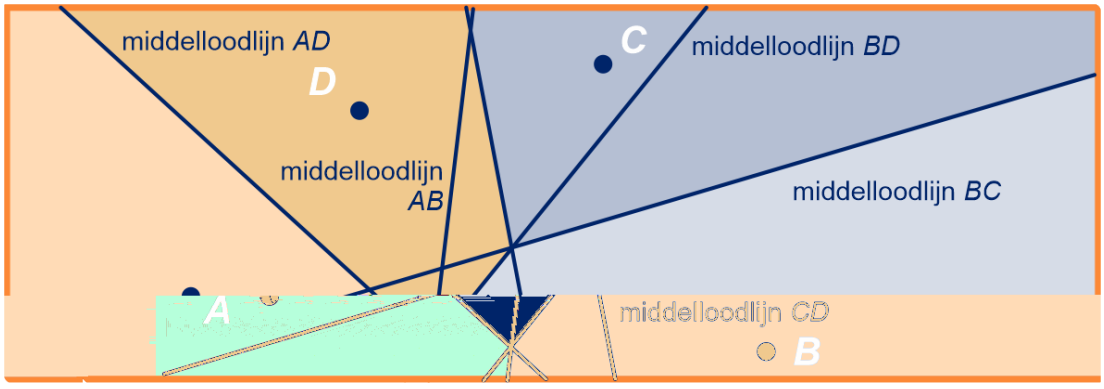
figuur 1



figuur 2

28

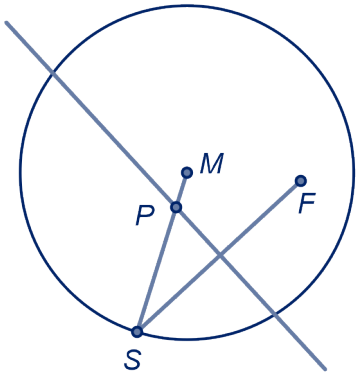
Zie figuur.



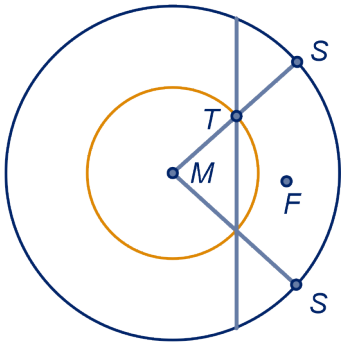
29

a Zie figuur 1.
P is het snijpunt van de middelloodlijn van lijnstuk SF met lijn SM.

b Zie figuur 2.
Teken de cirkel met middelpunt M en een straal die half zo groot is als de straal van de gegeven cirkel. De punten T zijn snijpunt van die cirkel en de middelloodlijn van MF. De gevraagde punten S zijn de snijpunten van een lijn MT met de oorspronkelijke cirkel.



figuur 1



figuur 2

30

De antwoorden bij de opgaven 30, 31 en 32 staan na de antwoorden van paragraaf 9.

33

a -

b -

34

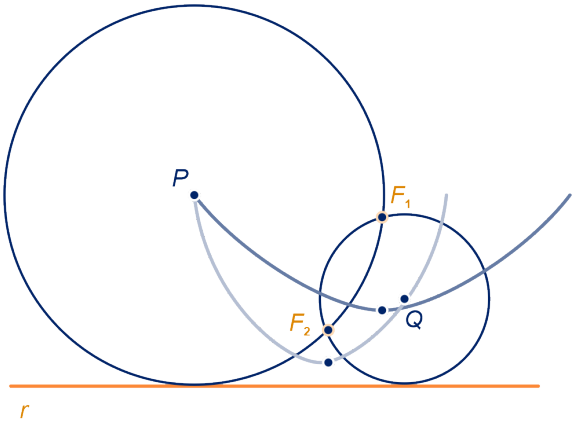
a De drie figuren die je getekend hebt zijn gelijkvormig.

b De hoekpunten van de rechthoek die op de parabool liggen noemen we P en Q.
P ligt op de parabool, dus $|PV| = |FV|$. Verder: $|QF| = |PF|$, dus de verhouding is $2 : 1$.

35

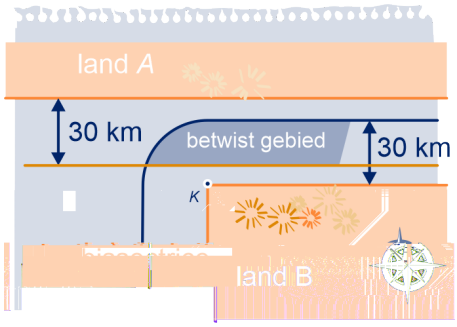
a Zie figuur.
Teken de cirkels met middelpunt P en Q die de richtlijn raken. Hun snijpunten zijn de mogelijke brandpunten.

b Zie figuur. Merk op dat de lijn door het brandpunt loodrecht op de richtlijn symmetrieas van de parabool is en dat de top van de parabool op de symmetrieas ligt op gelijke afstand van het brandpunt en de richlijn.

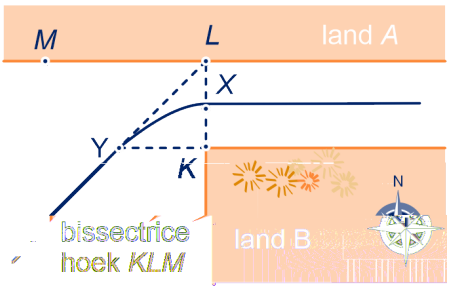


36

a Zie figuur 1.



figuur 1



figuur 2

b Zie figuur 2.
'Links' van Y is de conflictlijn de bissectrice van hoek KLM, 'tussen' X en Y deel van de parabool met brandpunt K en richtlijn de kustlijn van land A en 'rechts' van X de middenparallel van de oost-west-kustlijnen.

c $|PK| = |PD|$ want P ligt op de conflictlijn en $|KE| = |PD| = 30$, Dus $|PE| = |PF|$.

37

a $(1,3)$, $(3,1)$ en $(7,3)$

b Brandpunt in beide gevallen $(3,3)$ en richtlijnen $x = -1$ en $y = -1$.

c De afstand punt $(2,y)$ tot de x-as is y, dus de afstand tot de cirkel is ook y, dus de afstand tot $(3,3)$ is $y + 1$.

De afstand van $(2,y)$ tot $(3,3)$ is $\sqrt{1 + (y-3)^2}$.

Dus: $y + 1 = \sqrt{1 + (y-3)^2}$.

Deze vergelijking lossen we op:

$$\begin{aligned} y + 1 &= \sqrt{1 + (y-3)^2} && \text{kwadrateren} \\ (y+1)^2 &= 1 + (y-3)^2 && \text{haakjes wegwerken} \\ y^2 + 2y + 1 &= y^2 - 6y + 10 \end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking is dus $y = 1\frac{1}{8}$.

d Het andere punt heeft een y-coördinaat groter dan 3. Het ligt even ver van de y-as als van de cirkel. De afstand tot de y-as is 2, dus de afstand tot $(3,3)$ is 3.

Dus: $3 = \sqrt{1 + (y-3)^2} \Leftrightarrow (y-3)^2 = 8 \Leftrightarrow y - 3 = \pm 2\sqrt{2}$, dus $y = 3 + 2\sqrt{2}$.

38

a $(0,0)$; de y-as

b De afstand van (x,y) tot de lijn $y = -1$ is $|y+1|$ en de afstand tot $(0,1)$ is $\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

herschrijven:

$|y+1| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$
$y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$.

c Een punt op P is van de vorm $\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$. Als je dit punt met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van O vermenigvuldigt, krijg je het punt $\left(\frac{1}{4}a, \frac{1}{16}a^2\right)$. Dit punt voldoet aan de vergelijking $y = x^2$.
Je krijgt ook alle punten van de parabool met vergelijking $y = x^2$, want $\frac{1}{4}a$ neemt alle waarden aan als a dat doet.

39

a De parabool met richtlijn $y = -1$ en brandpunt $(0,1)$ moet je met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van O vermenigvuldigen om de standaard-parabool te krijgen. Dus de richtlijn heeft vergelijking $y = -\frac{1}{4}$ en het brandpunt is $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

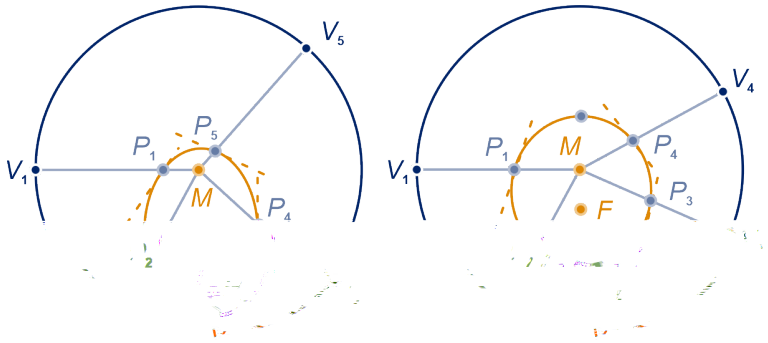
b Stel de richtlijn heeft vergelijking $y = -a$, met $a > 0$, dan is het brandpunt $(-2,a-2)$, want de top van de parabool is $(-2,-1)$. Een punt van de parabool is bijvoorbeeld $(0,1)$.
De afstand van $(0,1)$ tot de lijn $y = -a$ is hetzelfde als de afstand van $(0,1)$ tot $(-2,a-2)$, dus $a + 1 = \sqrt{2^2 + (a-3)^2}$;
dit geeft $a = 1\frac{1}{2}$, dus het brandpunt is $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ en de richtlijn heeft vergelijking $y = -1\frac{1}{2}$.

Ellips, hyperbool, meer parabool

40

a Zie figuur 1 hieronder.

b Zie figuur 2 hieronder.

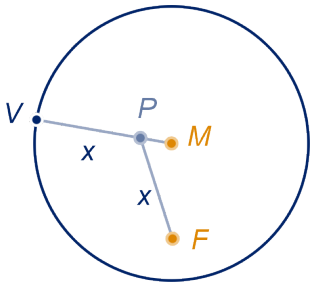


c Noem de "uiterste punten" van de ellips P en Q en de bijbehorende voetpunten V en W, met P het dichtst bij F.
Neem aan $|FM| = 1$.
Uit $|VP| + |PF| = 3$ en $|VP| = |PF|$ volgt: $|PF| = 1\frac{1}{2}$.
Uit $|WQ| + |QF| = 5$ en $|WQ| = |QF|$ volgt: $|QF| = 2\frac{1}{2}$.
Dus $|PQ| = |PF| + |QF| = 4$.
Als $|FM| = 3$ vind je op dezelfde manier dat $|PQ| = 4$.

d Nee in de twee voorbeelden zie al dat dit niet zo is.
De verhouding van de lange en de korte as is niet voor elke ellips hetzelfde. Die verhouding varieert zelfs van $1 : 1$ (bij een cirkel) tot $1 :$ willekeurig groot getal (bij een "lange-platte" ellips).

41

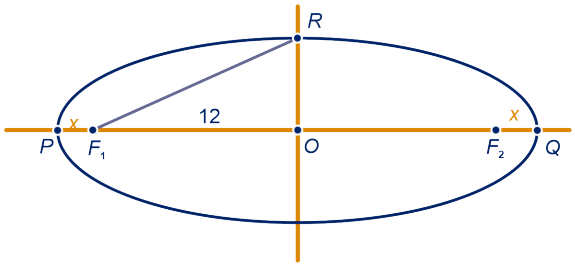
a Zie figuur.
Noem de straal van de cirkel R.
Dan geldt: $|PF| + |PM| = x + R - x = R$.



b Die bestaat ook uit de punten P waarvoor geldt: $|PF| + |PM| = R$. Het is dus precies dezelfde ellips.

42

a Zie figuur.



Stel dat lijn F_1F_2 de ellips in P en Q snijdt.
Stel $|PF_1| = x$, dan vanwege symmetrie: $|QF_2| = x$. Er geldt: $|PF_1| + |PF_2| = 26$, dus $|PF_2| = 26 - x$.
Dan $|PQ| = |PF_2| + x = 26 - x + x = 26$.
Dus de lange as heeft lengte 26.

b Neem aan dat R op de korte as ligt en het snijpunt van de assen O is.

Dan $|RF_1| = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13$ en $|OF_1| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ vanwege symmetrie.
Uit de stelling van Pythagoras volgt dan dat $|OR| = \sqrt{13 - 12^2} = 5$, dus de korte as heeft lengte 10.

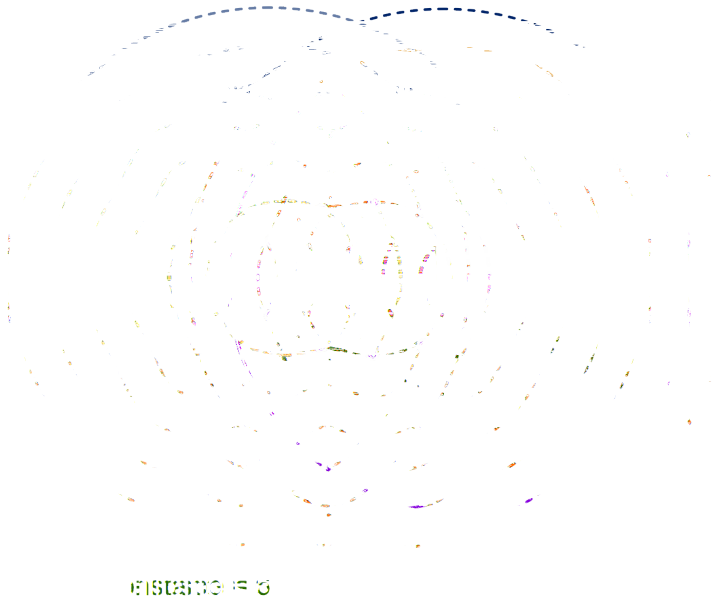
43

a 34

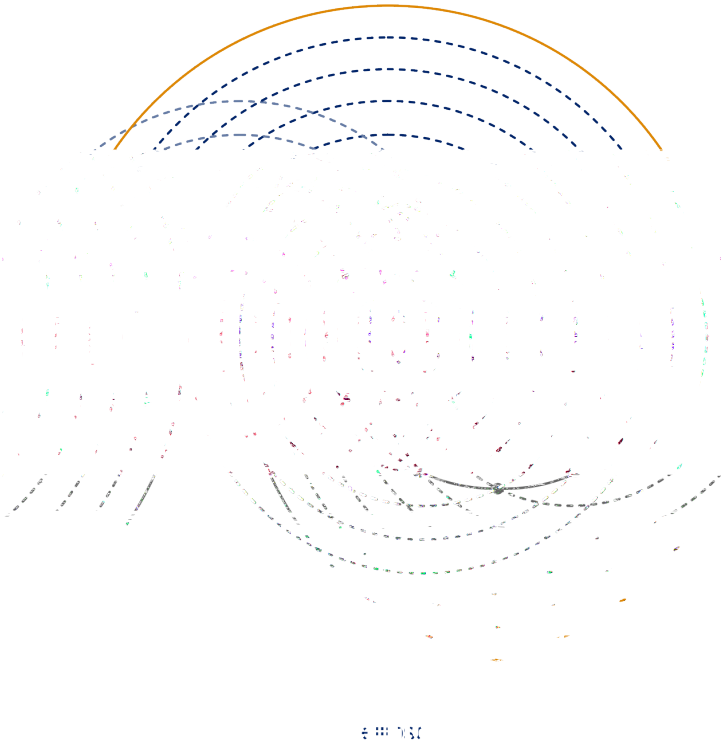
b Zeg R is het punt $(0,8)$ en F (op de x-as) is een van de brandpunten, dan $|RF| = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17$.
Uit de stelling van Pythagoras in driehoek OFR volgt dan: $|OF| = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. Dus de brandpunten zijn $(\pm 15,0)$.

44

a Zie figuur.



b Zie figuur.



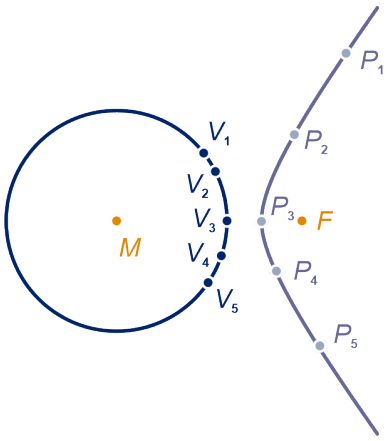
45

a $10\frac{1}{2}$

b $14\frac{1}{2}$

46

Zie figuur.

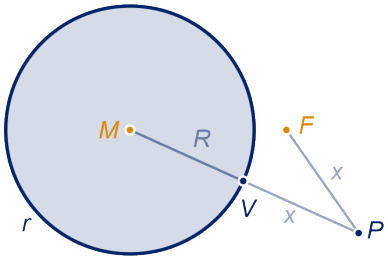


47

a Zie figuur.
De straal van r noemen we R.
Dan $|PM| - |PF| = R$.

b Die is tegengesteld aan de straal van de richtcirkel.

c Die zijn elkaars spiegelbeeld in de middelloodlijn van lijnstuk FM.



48

a Dat is de cirkel met middelpunt F_1 en straal 4.

b Zie figuur.
De toppen noemen we P en Q en $|PF_1| = x$.
Er geldt: $|PF_2| - |PF_1| = 4$, dus $|PF_2| = 4 + x$. Vanwege symmetrie geldt ook $|PF_2| = 6 - x$, dus $6 - x = 4 + x \Leftrightarrow x = 1$, dus de as heeft lengte 4.

49

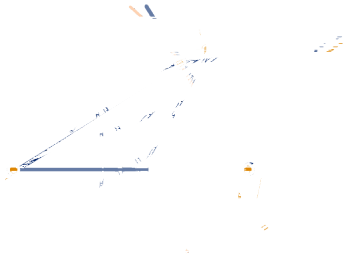
a Verderop vind je het antwoord.

b -

c Neem aan: R_1 het voetpunt is van een punt P van de hyperbooltak. Dan ligt P op de lijn MR_1. Die lijn staat loodrecht op lijn R_1F (want R_1F is raaklijn aan de cirkel). Dus de middelloodlijn van lijnstuk FR_1 is evenwijdig met lijn MR_1, dus ligt P niet op de middelloodlijn. Dus $d(P,F) \neq d(P,r)$.

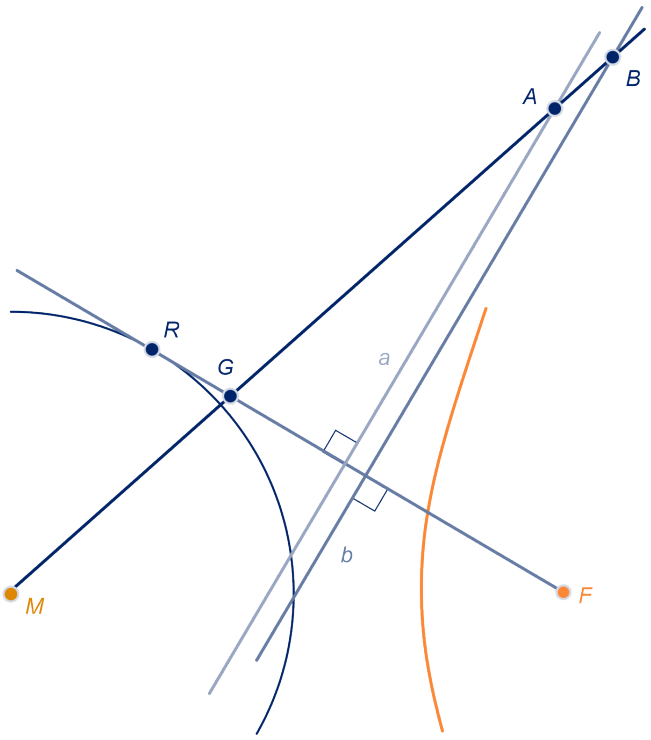
d a_1 en MR_1 zijn evenwijdig (zie **c**). Dus is a_1 middenparallel in driehoek FMR_1. Omdat a_1 door het midden van lijnstuk RF, gaat a_1 ook door het midden van lijnstuk MF.

e Zie figuur.
Als Q op a_1 ligt, is $|QF| = |QR_1|$.
Het snijpunt van lijn QM met de richtcirkel noemen we V. Dan volgt uit de driehoeksongelijkheid dat $|MR_1| + |QR_1| > |QM|$, dus $|VQ| < |QR_1|$, want $|MR_1| = |MV|$. Dus $d(Q,F) > d(Q,r)$.



50

a Zie figuur.



b De lijn RF ligt geheel buiten r (op het punt R na), want RF is raaklijn aan r. Dus ligt G buiten r. Dus is $d(B, r) > |BG|$.
En $|BG| = |BF|$, want B ligt op de middelloodlijn van lijnstuk FG. Dus $d(B, r) > |BF|$.

c $d(A, r) < |AR| = |AF|$.

d A ligt links van de conflictlijn (dat is de kant waar r ook ligt) en B ligt rechts van de conflictlijn (dat is de kant waar F ook ligt). De conflictlijn van r en F loopt dus tussen A en B door. Het snijpunt van de conflictlijn met lijnstuk AB is een punt dat tussen de lijnen a en b ligt.

Anders bekeken

51

a $\alpha = 90°$

b Voor α iets groter dan β

c Door de top van de kegel

d Die zijn gelijkvormig (ze ontstaan uit elkaar door een vermenigvuldiging vanuit de top van de kegel).

52

a Een stuk parabool

b Een stuk hyperbool

c Een (stuk) ellips

53

a De bovenste rand van de lichtkegel is evenwijdig aan de vloer.

b De lichtkegel moet steiler omlaag schijnen.
De lichtkegel moet minder steil omlaag schijnen.

c Een deel van een hyperbool

54 De lichtbron bevindt zich op dezelfde hoogte als het hoogste punt van de bol.

55
a -
b Bijvoorbeeld $(x(t), y(t)) = (4 \cdot \cos(t), 3 \cdot \sin(t))$

56
a Volgens de theorie uit 6v krijg je: $\frac{y}{a} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4a} \cdot x^2$
b Dan $a = \frac{1}{4}$, dus de richtlijn heeft verglijking $y = -\frac{1}{4}$ en het brandpunt is $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

57
a Voor elk punt P op de ellips geldt: $|PF_1| + |PF_2| = 20$. Stel je voor dat je een koordje van F_1 via P naar F_2 gespannen hebt. Als P in B ligt, dan zit het koordje dubbel over het stuk van B naar F_2. $|AF_1| = |BF_2|$, dus de lange as is gelijk aan de ellipsconstante 20. Als P in D ligt, zie je dat de schuine zijde van driehoek ODF_1 de helft van de ellipsconstante is, dus 10. De korte as is dus $2\sqrt{10^2 - 8^2} = 12$.
b $a = 10$ en $b = 6$
c Het linkerlid van de gelijkheid is $|PF_1|$ en het rechterlid $20 - |PF_2|$.

$$32x - 400 = -40\sqrt{(x-8)^2 + y^2}$$

delen door -8

$$50 - 4x =$$

middenparallel in driehoek MRF evenwijdig aan lijn RF, dus gaat door O en heeft richtingscoëfficiënt -1, dus is de lijn $y = -x$.

De raaklijneigenschap

60

1. Dit volgt uit: $d(Q,V) + d(M,V) < d(Q,W) + d(M,W)$, driehoeksongelijkheid in driehoek QVM en $d(M,V) = d(M,W)$.
2. Want Q ligt op de middelloodlijn van lijnstuk VF.
3. Uit 1 en 2 volgt dat de conflictlijn aan die kant van m waar F ligt. Dus is m steunlijn van de conflictlijn.

61

Het snijpunt van lijn VF met m noemen we N.

1. $|VN| = |NF|$, want N op m,
2. $|VP| = |PF|$, want P op m,
3. $|PN| = |PN|$

Uit 1, 2 en 3 volgt dat de driehoeken VPN en FPN congruent zijn (ZZZ), dus is m bissectrice vann hoek VPF.

62

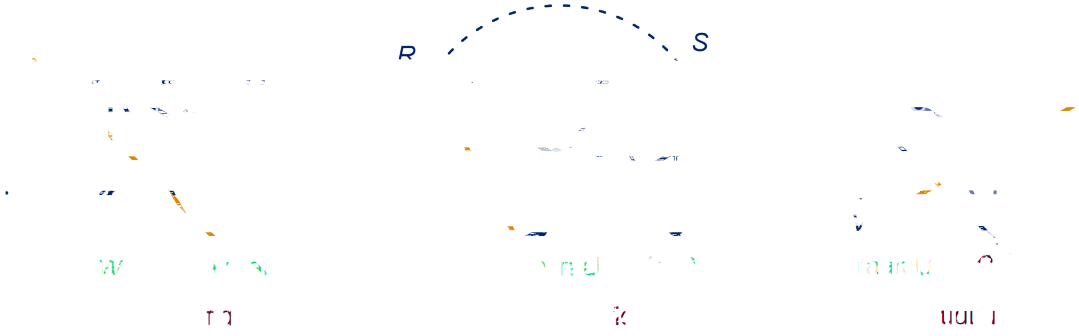
a Zie figuur 1 hieronder. De punten zijn P en Q. Hun afstand tot F is $d(k,r)$.

b Het voetpunt van P op r noemen we V.
Hoek VPF is recht, dus de bissectrice van deze hoek maakt een hoek van 45° met k.

c Zie figuur 2. De gevraagde punten zijn R en S, de snijpunten van l met de cirkel met middelpunt F en straal $d(F,r)$.

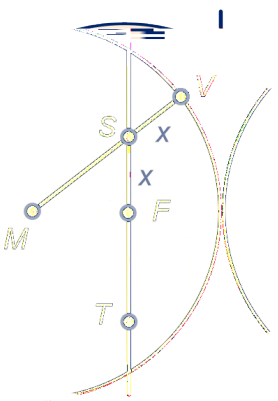
d Zie figuur 2. Het voetpunt van R noemen we W en het midden van lijnstuk RW is M. Dan is RMF een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde twee keer zo lang is als de korte rechthoekszijde, dus $\angle RFM = 30°$. Dus is driehoek RFW gelijkzijdig. De bissectrice van hoek FRW maakt dus een hoek van 60° met l.

e Zie figuur 3. U is het raaklunt van m met de parabool. Het voetpunt van U is X, de projectie van F op m is Y en het snijpunt van de raaklijn met r is Z.
Dan $\angle ZUX = 60°$ en $\angle FUZ = \angle ZUX$, dus $\angle FUY = 30°$. Dus als $FY = x$, dan $FU = 2x$ en $UX = FU = 2x$.



63

a Zie figuur.
De gevraagde punten zijn S en T.



b De rechthoekszijden van driehoek SMF zijn x en 4. Volgens de stelling van Pythagoras is de schuine zijde dan $\sqrt{16+x^2}$. Verder geldt: $|SM|+|VS|=8$.

c $x+\sqrt{16+x^2}=8 \Leftrightarrow \sqrt{16+x^2}=8-x$; kwadrateren geeft: $16+x^2=64-16x+x^2$, dus $x=3$.

d $\tan(\angle MSF)=\frac{4}{3}$, dus $\angle MSF=53{,}13...°$ en de gevraagde hoek is bissectrice van hoek VSF, dus $\frac{1}{2}\cdot(180$

68

a -

b De lange as van de ellips

c Dan is de limietbaan ook de lange as.

69

a In de richting van het andere brandpunt (waar bal F niet ligt).

b Langs de lijn FB, weg van F. Dan gaat de baan van B via een band door het andere brandpunt en dan via weer een band naar F.

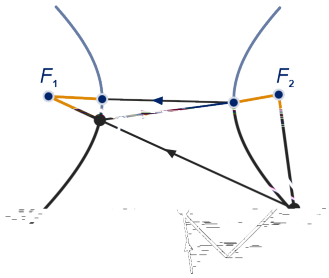
c Als de baan van de bal door het rechter brandpunt gaat, treft hij bal F al na één band. Als de bal achter het rechter brandpunt gaat, gaat hij ook achter F door. Als de bal voor het rechter bandpunt langs gaat, gaat hij ook voor F langs. Het kan dus niet.

70

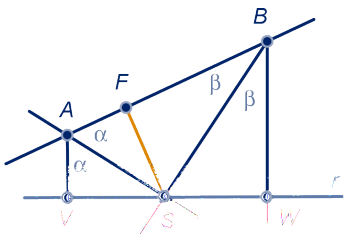
a Zie figuur.

b De as van de hyperbool

c Dan is de limietbaan ook de as.



a



71

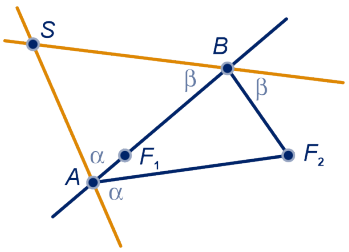
De voetpunten van A en B noemen we V en W. De middelloodlijnen van de lijnstukken FV en FW zijn de raaklijnen in A en B aan de parabool.

b Zie figuur. Het snijpunt van de raaklijnen noemen we S. Er geldt: $2\alpha + 2\beta = 180°$ (hoekensom in vierhoek $VWBA$), dus $\alpha + \beta = 90°$. Dus is hoek ASB recht (hoekensom in driehoek ASB).

c Let op dat je er niet vanuit gaat dat $\angle AVS = 90°$!
De driehoeken AFS en AVS zijn congruent, want $|AV| = |AF|$, $|AS| = |AS|$ en $\angle VAS = \angle FAS$ (ZHZ).
Net zo zijn de driehoeken WBS en FBS congruent.
Dus $\angle VSA + \angle FSA + \angle WSB + \angle FSB = 2 \cdot \angle FSA + 2 \cdot \angle FSB = 2 \cdot \angle ASB = 180°$.

72

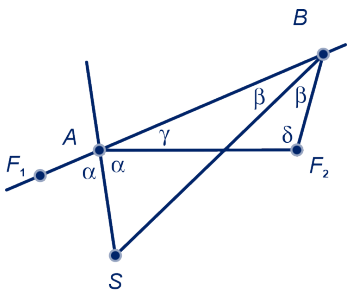
a Zie figuur.
Uit de raaklijneigenschap volgt dat de raaklijn een bissectrice van de lijnen AF_1 en AF_2 is en ook van de lijnen BF_1 en BF_2.



b De hoeken van driehoek AF_2B zijn: $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$ en $\angle AF_2B$.
Dus $\angle AF_2B = 2\alpha + 2\beta - 180°$, dus $\alpha + \beta = 90° + \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B$.
De hoekensom in driehoek ASB levert: $\angle ASB = 180° - (\alpha + \beta) = 90° - \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B$.

73

a Zie figuur.
Uit de raaklijneigenschap volgt dat de raaklijn een bissectrice van de lijnen AF_1 en AF_2 is (en ook van de lijnen BF_1 en BF_2.

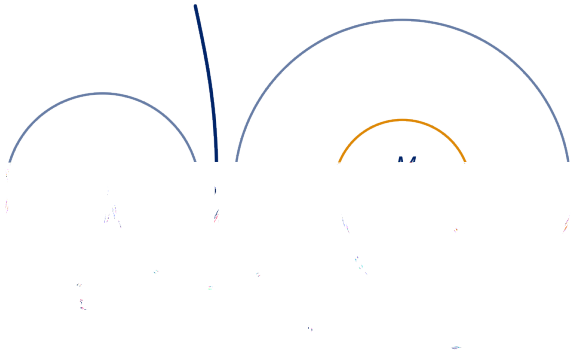


b Zie figuur, $\angle AF_2B$ is daar δ genoemd.
1. $\gamma = 180° - 2\beta - \delta$ (hoekensom driehoek AF_2B),
2. $\gamma = 180° - 2\alpha$ (gestrekte hoek),
3. $\delta = 2\alpha - 2\beta$ (uit 1. en 2.),
4. $\alpha + \gamma = 180° - \alpha$ (hoeken bij A),
5. $\angle ASB = 180° - \alpha - \beta - \gamma$ (hoekensom driehoek ASB),
6. $\angle ASB = \alpha - \beta$ (uit 4. en 5.)
Uit 3. en 6. volgt het gevraagde.

Gemengde opgaven

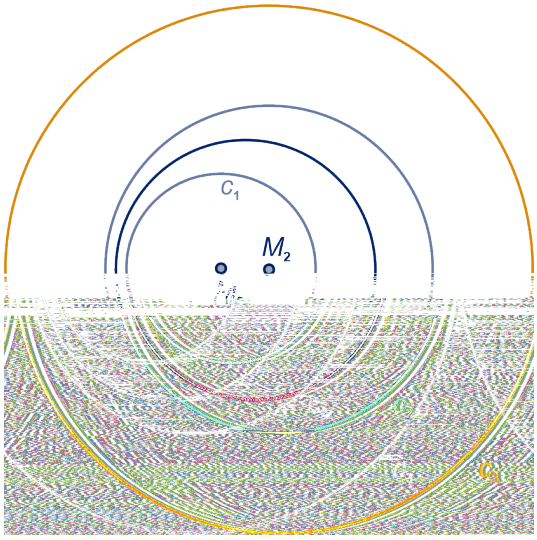
74

Zie figuur.



75

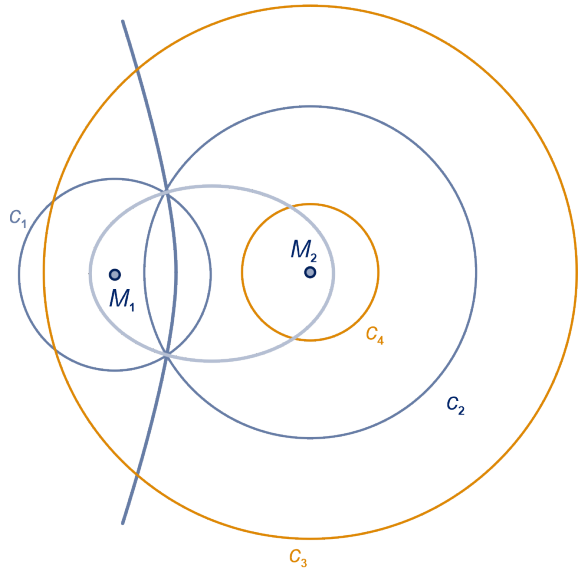
Zie figuur.



De cirkel met middelpunt M_2 en straal 8 noemen we c_3.
P ligt op de conflictlijn van c_1 en $c_2 \Leftrightarrow d(P,c_1) = d(P,c_2) \Leftrightarrow d(P,M_1) - 3 = d(P,c_3) - 3 \Leftrightarrow d(P,M_1) = d(P,c_3)$
P ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3. De conflictlijn is dus de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.

76

Zie figuur.



De cirkel met middelpunt M_2 en straal 8 noemen we c_3. De cirkel met middelpunt M_2 en straal 2 noemen we c_4.

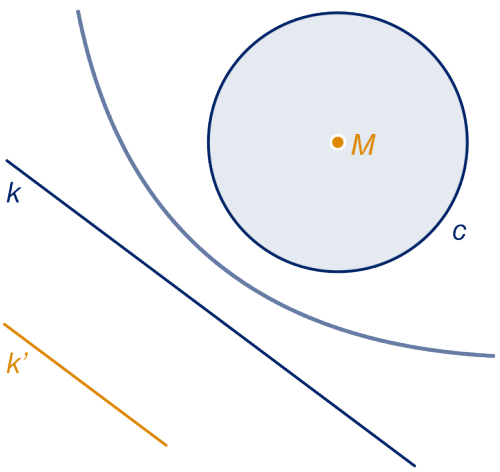
- P ligt op de conflictlijn binnen c_1 en buiten c_2
  $\Leftrightarrow d(P,c_1) = d(P,c_2) \Leftrightarrow 3 - d(P,M_1) = 3 - d(P,c_3) \Leftrightarrow d(P,M_1) = d(P,c_3)$
  $\Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3 en dit is de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.
- P ligt op de conflictlijn buiten c_1 en buiten c_2
  $\Leftrightarrow d(P,c_1) = d(P,c_2) \Leftrightarrow d(P,M_1) - 3 = d(P,c_3) - 3 \Leftrightarrow d(P,M_1) = d(P,c_3)$
  $\Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3 en dit is de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.
- P ligt op de conflictlijn binnen c_1 en binnen c_2
  $\Leftrightarrow d(P,c_1) = d(P,c_2) \Leftrightarrow 3 - d(P,M_1) = 3 - d(P,c_4) \Leftrightarrow d(P,M_1) = d(P,c_4)$
  $\Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_4 en dit is de hyperbooltak met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.
- P ligt op de conflictlijn buiten c_1 en buiten c_2
  $\Leftrightarrow d(P,c_1) = d(P,c_2) \Leftrightarrow d(P,M_1) - 3 = d(P,c_4) - 3 \Leftrightarrow d(P,M_1) = d(P,c_4)$.
  $\Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_4 en dit is de hyperbooltak met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.

77

a Zie figuur.

b De lijn evenwijdig aan k, op afstand 3 van k, aan de andere kant van k dan M noemen we k'.
P ligt op de conflictlijn van k en $c \Leftrightarrow d(P,k) = d(P,c) \Leftrightarrow d(P,k') - 5 = d(P,M) - 5 \Leftrightarrow d(P,k') = d(P,M)$
P ligt op de conflictlijn van k' en M.
De conflictlijn is dus de parabool met M als brandpunt en k' als richtlijn.

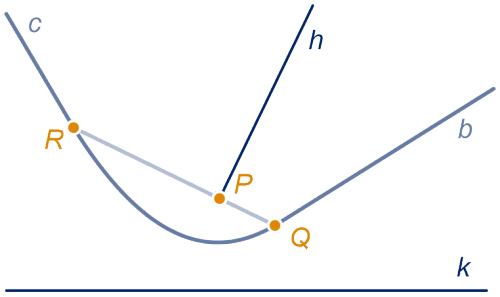
c Zie figuur.



figuur bij opgave 77

78

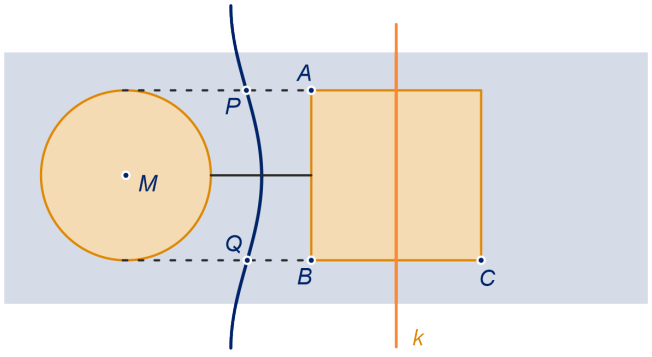
a Zie figuur.



b De conflictlijn bestaat uit delen b en c van de bissectrices van k en h en een stuk parabool met brandpunt P en richtlijn k.
De 'overgangspunten' zijn Q en R, de snijpunten van de loodlijn in P op h met b en c.

79

Zie figuur.

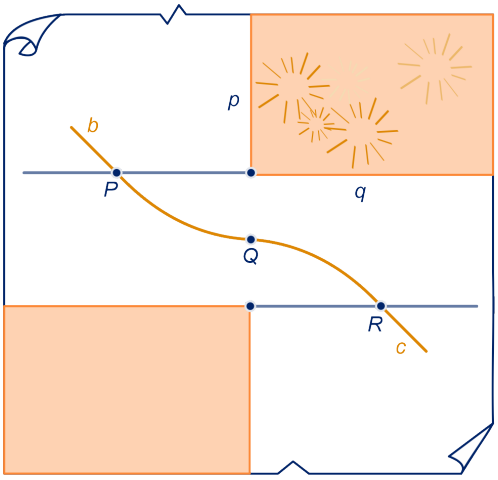


De cirkel noemen we c, het middelpunt van de cirkel noemen we M, A, B en C zijn hoekpunten van het vierkant. De middelloodlijn van BC noemen we k.
De conflictlijn bestaat achtereenvolgens uit:
een stuk van de hyperbooltak met brandpunt B en richtcirkel c;
een stuk van de parabool met brandpunt M en richtlijn k;

- een stuk van de hyperbooltak met brandpunt A en richtcirkel c.
De aansluitpunten P en Q liggen op de verlengden van zijden van het vierkante eiland.

80

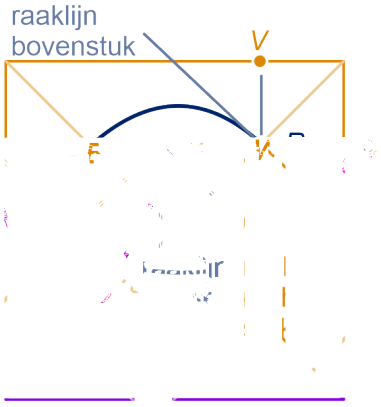
Zie figuur.
De lijnen waarop de kusten liggen noemen we p, q, r en s. De hoekpunten van de kusten noemen we A en B.
De conflictlijn bestaat uit twee paraboolstukken, het ene stuk met brandpunt A en richtlijn r, het andere met brandpunt B en richtlijn q; verder: een deel b van een bissectrice van de lijnen p en r en een deel b van een bissectrice van de lijnen p en r en een deel c van een bissectrice van de lijnen q en s.
De overgangspunten zijn P, Q en R, waarbij P het snijpunt van b en q,
R het snijpunt van r en c en
Q het midden van lijnstuk AB is.



81

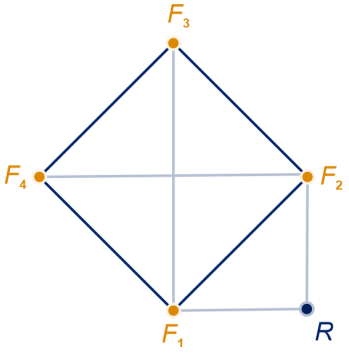
a Zie figuur.
De conflictlijn bestaat uit vier stukken parabool, elk met brandpunt E en met de vier zijden van het vierkant als richtlijnen. De aansluitpunten P, Q, R en S liggen op de diagonalen van het vierkant.

b De projectie van R op de bovenzijde van het vierkant noemen we V. Dan is EV evenwijdig met een diagonaal van het vierkant. De raaklijn in R staat daar loodrecht op.
De raaklijn in R aan het stuk parabool "rechts" is verticaal, want R is de top van dat stuk parabool.
De hoek tussen de stukken parabool in R is dus $135°$.



82

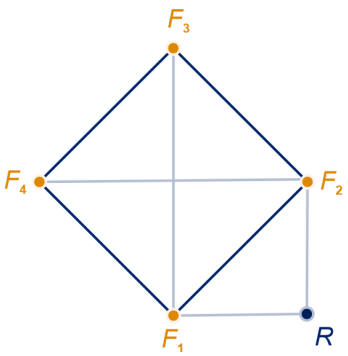
a Zie figuur.
R is het snijpunt van de lijn door F_1 evenwijdig met lijn F_2F_4 en de de lijn door F_2 evenwijdig met lijn F_1F_3.
Omdat $d(R, \text{lijn}\, F_2F_4) = d(R, \text{lijn}\, F_1F_3) = 2$, ligt R zowel op p_1 als op p_2.
De raaklijn in R aan p_1 en ook aan p_2 is de bissectrice van hoek F_1RF_2. Dus raken p_1 en p_2 elkaar in R.



b Zie figuur.

We bewijzen dat SF_4 raaklijn aan de parabool in het punt S is.

Het voetpunt van S op lijn F_2F_4 noemen we T. Dan zijn de driehoeken F_4F_1S en F_4TS, congruent, want $|SF_1| = |TS|$, $|SF_4| = |SF_4|$ en de hoeken STF_4 en F_1SF_4 zijn recht (ZZR). Dus is de lijn SF_4 bissectrice van hoek F_1ST, dus dus raaklijn aan p_1 in S.



c Breng een assenstelsel aan met F_2 en F_4 op de x-as en F_1 en F_3 op de y-as zodat $F_2 = (2,0)$.

De top van p_1 is dan $(0,1)$, dus een vergelijking van p_3 is dan: $y = a \cdot x^2 + 1$ voor zeker getal a. Omdat $(2,2)$ op p_3 ligt, geldt: $a = \frac{1}{4}$.

De oppervlakte tussen p_3 en de x-as is dus: $\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4} \cdot x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \left[x + \frac{1}{12}x^3\right]_{-2}^{2} = 5\frac{1}{3}$.

De oppervlakte van V

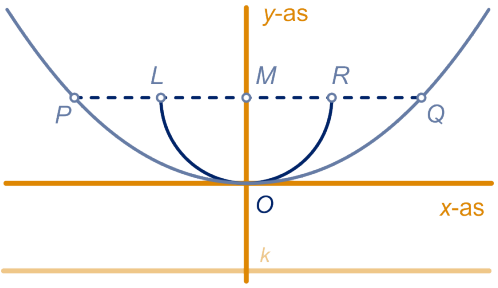
Eindpunt

Extra opgaven

1

a Zie figuur.

b Het stuk 'links' van P heeft als richtlijn de x-as en brandpunt L,
het stuk tussen P en Q heeft als richtlijn k met vergelijking $y = -2$ en brandpunt M,
het stuk 'rechts' van Q heeft als richtlijn de x-as en brandpunt R.

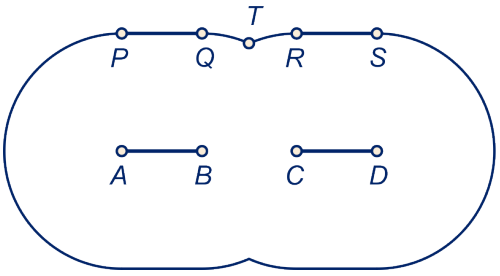


c De overgangspunten P en Q liggen op de lijn door L en R en liggen even ver van M als van k.
Dus $P = (-4,2)$ en $Q = (4,2)$.
(Dan ligt P ook even ver van de x-as en L en Q even ver van de x-as en R.)

2

a Zie figuur.

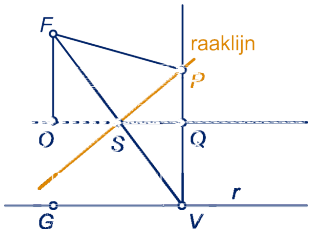
b Alle zijden van driehoek BCT hebben lengte 2, dus boog QT heeft lengte $\frac{30}{360} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{1}{3}\pi$.
De lengte van de isolijn is dus:
$2\pi \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{3}\pi + 4 \cdot 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{3}\pi + 6$.



3

a $\frac{dy}{dx} = 2x$, dus de raaklijn heeft vergelijking $y = 2px + q$ voor zekere waarde van q.
(p, p^2) ligt op de raaklijn, dus $q = -p^2$ en de vergelijking is: $y = 2px - p^2$. Voor het snijpunt met de x-as geldt: $y = 0 \Leftrightarrow 2px = p^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}p$.

b Zie figuur.
V is het voetpunt van P op de richtlijn r en G het voetpunt van O.
Het snijpunt van de raaklijn in P en lijn FV noemen we S.
De lijn door S evenwijdig met de richtlijn gaat door O omdat O het midden van lijnstuk FW is en S het midden van lijnstuk FV.
Dus $S = M$!



De driehoeken FOS en VQS zijn congruent (HZH), dus S is het midden van lijnstuk OQ.

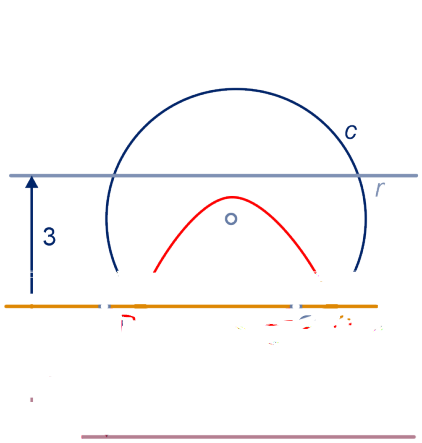
4

a Zie figuur 1 aan het einde van de opgave.

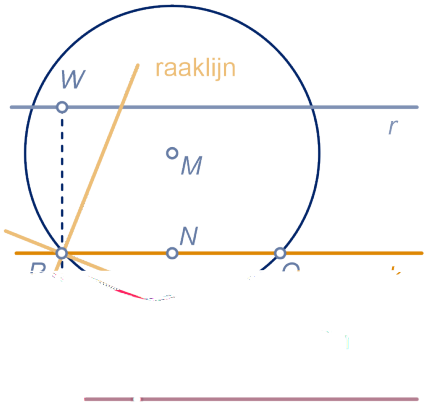
b De conflictlijn bestaat uit twee stukken parabool. Beide hebben brandpunt M. Het 'bovenste' stuk heeft richtlijn r , het 'onderste' stuk heeft richtlijn s, beide op afstand op afstand 3 van k.

c Zie figuur 2 hieronder.
De gevraagde hoek is hetzelfde als hoek WMV.

De projectie van M op k noemen we N.
Uit de stelling van Pythagoras in driehoek PNM volgt: $PN = \sqrt{5}$, dus
$\angle WMV = \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{5}\right) \approx 89{,}1°$.

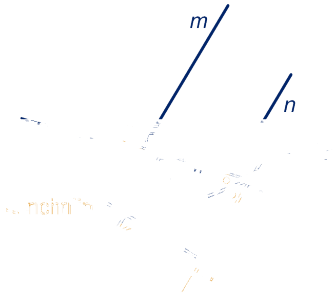


1

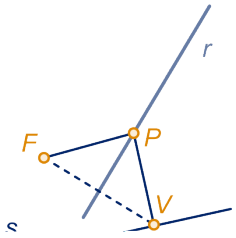


2

5 Zie figuur.
Teken de lijn n door A evenwijdig aan de as m. Hierop moet het voetpunt V van A liggen.
Spiegel de lijn n in de raaklijn r, het beeld is s. Op s ligt het brandpunt.
Het brandpunt F is dus het snijpunt van de as m met s.
V vind je met de eigenschap $|AV| = |AF|$.
De richtlijn gaat door V en staat loodrecht op de as m.



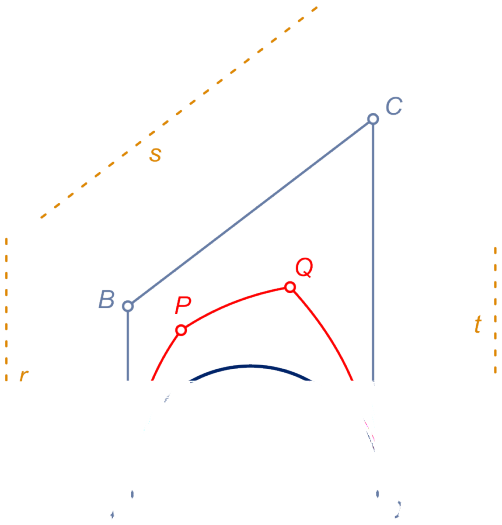
6 Zie figuur.



Spiegel F in r. Het beeld is het voetpunt V van P. De loodlijn s in V op lijn PV is de richtlijn.

7

a Zie figuur.



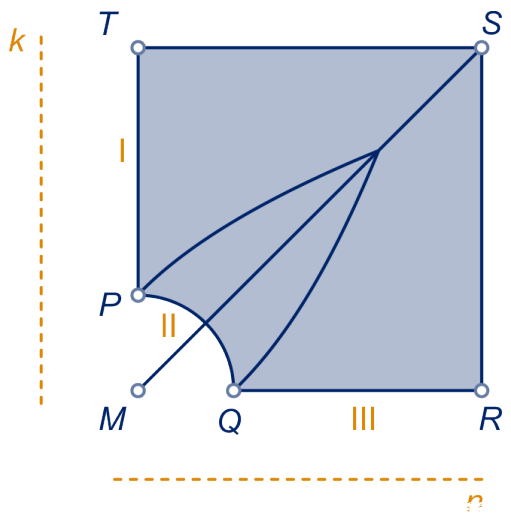
b De richtlijnen zijn r, s en t op afstand 2 van AB, BC en CD.
Het brandpunt is steeds M

c Stel $\angle ABC = \alpha$, dan $\angle BCD = 180° - \alpha$.
Lijn BP is bissectrice van hoek ABC en lijn CQ van hoek BCD, dus $\angle PBC = \frac{1}{2}\alpha$ en $\angle QCB = 90° - \frac{1}{2}\alpha$.

8

a De afstand tot land I noemen we x, dan is de afstand tot land III ook x en tot land II: $x\sqrt{2} - 2$, dus $x = x\sqrt{2} - 2$. dus $x = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4{,}83$.

b Zie figuur.
Eén stuk is een gedeelte van de parabool met brandpunt M en richtlijn k, een lijn die 2 eenheden links van lijn PS.
- de parabool gaat door punt P; - het tweede stuk is een gedeelte van de bissectrice van hoek TSR;
- het derde stuk is het spiegelbeeld van het eerste stuk (of een gedeelte van de parabool met brandpunt M en richtlijn n, een lijn die 2 eenheden onder lijn QR ligt.



c Het voetpunt van P op k noemen we V en het snijpunt van lijn VP met zijde SP: W.
De raaklijn aan het bovenstuk is deelt hoek VPM doormidden. Dus vanwege symmetrie is de gevraagde hoek even groot als hoek VPM.
In driehoek WPM geldt: $|WP| = 2 + 2\sqrt{2}$ en $|MP| = 4 + 2\sqrt{2}$. Noem de gevraagde hoek α, dan $\cos(\alpha) = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, de gevraagde hoek is dus 45° exact!

Computerpracticum

1

a -
b De middelloodlijn van lijnstuk FV is raaklijn aan de parabool.

2

a Dan draait de parabool mee.
b Dan wordt de parabool smaller.

3

a -
b De middelloodlijn van FV is raaklijn aan de ellips.

4

a Dan draait de ellips mee.
b Dan wordt de ellips 'platter'.
Dan wordt de ellips 'ronder'.

5

a -
b De middelloodlijn van lijnstuk FV is raaklijn aan hyperbooltak.
c Trek de raaklijnen vanuit F aan r. De punten van r tussen de raakpunten in kunnen als voetpunt optreden.

6

a Dan draait de hyperbool mee.
b Dan wordt de hyperbool 'smaller'.

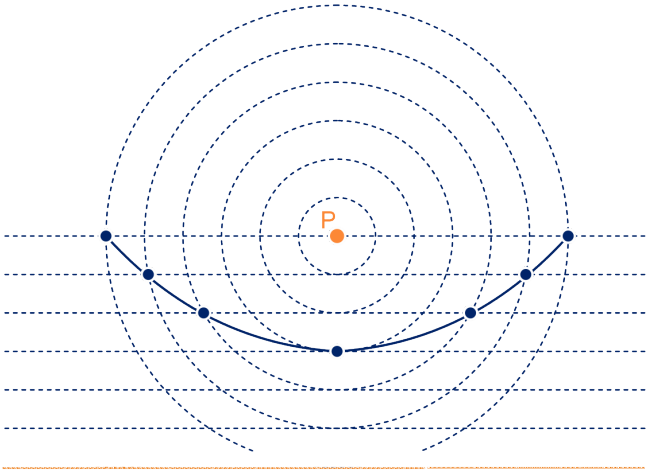
7

a De middelloodlijn van AB.
b Als $a \parallel b$: de middenparallel van a en b.
Anders: het bissectricepaar van de hoeken die a en $b$maken.
c De cirkel met straal r en middelpunt A.
d Als $s < r$: twee cirkels met middelpunt M stralen $r + s$ en $r - s$.
Als $s = r$: een cirkel middelpunt M en straal $r + s$ en het punt M.
Als $s > r$: een cirkel met middelpunt M en straal $r + s$.
e De parabool met brandpunt A en richtlijn a.
f De loodlijn in A op a.
g De ellips met brandpunt A en richtcirkel r.
h De ellips met brandpunt A en richtcirkel r.
i De halve lijn met het middelpunt van r als beginpunt die door A gaat

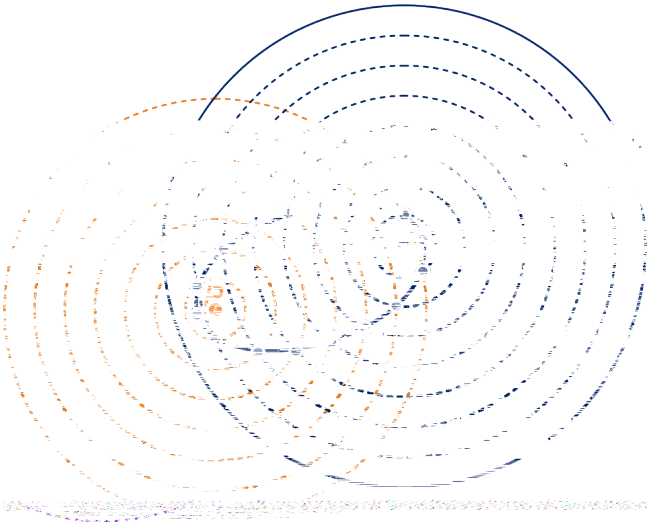
8

De conflictlijn is achtereenvolgens: een hyperbooltak,een halve lijn, een ellips, een halve lijn, een hyperbooltak.

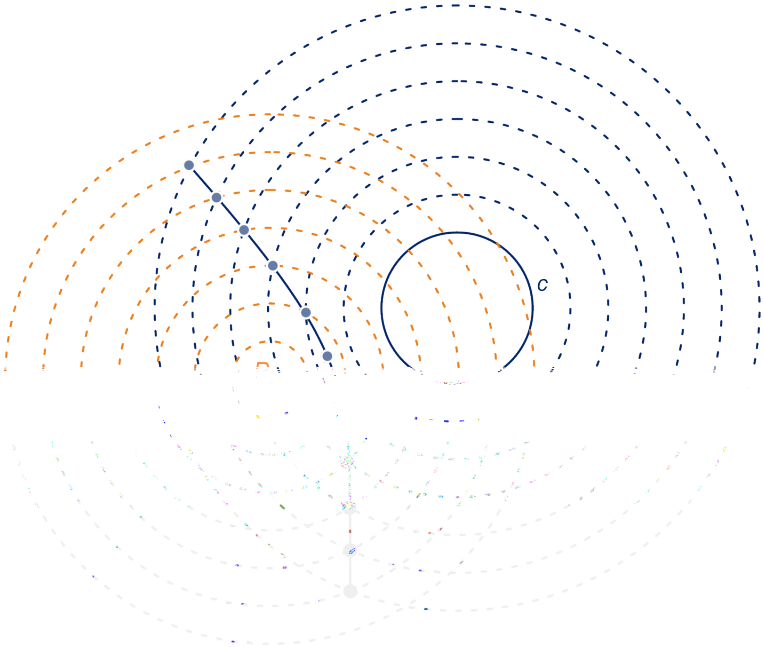
De antwoorden bij opgave 30, opgave 31 en opgave 32



figuur bij opgave 30



figuur bij opgave 31



figuur bij opgave 32

10 Conflictlijnen

1 Spiegel A in k.
2 Gebruik congruentie.
3 Gebruik het laatste onderdeel van de voorgaande opgave.
4 Stel de richtlijn heeft vergelijking $y = -a$, met $a > 0$, dan is het brandpunt...
Elk punt dus bijvoorbeeld ... heeft gelijke afstand tot....
5 Gebruik de driehoeksongelijkheid in driehoek MQR_1.
6 Bewijs dat de driehoeken AFS en AVS congruent zijn.
7 Uit de raaklijneigenschap volgt dat de raaklijn in A een bissectrice van de lijnen AF_1 en AF_2 is.
8 De gevraagde hoek is hetzelfde als hoek WMV.

Index

a
afstand *6*
as van de hyperbool *28, 51*

b
brandpunt van een ellips *25, 49*
brandpunt van een hyperbooltak *50*
brandpunt van een parabool *21, 49*
brandpunten van een hyperbool *27*

c
conflictlijn *12, 17, 49*

e
ellips *25, 49*
ellipsconstante *26, 49*

h
hoek van twee cirkelbogen *8, 49*
hyperbool *27*
hyperboolconstante *28, 50*
hyperbooltak *50*

i
iso-*x*-afstandslijn *7, 49*

k
kegel *31*
kegelsnede *31*
korte as van een ellips *26, 51*

l
lange as van een ellips *26, 51*

n
naastebuurprincipe *17*
normaal van ellips of hyperbool *38*

p
parabool *21, 49*

r
raaklijn aan ellips of hyperbool *38*
richtcirkel van een ellips *25, 49*
richtcirkel van een hyperbool *27*
richtcirkel van een hyperbooltak *50*
richtlijn van een parabool *21, 49*

s
steunlijn *38*
symmetrieas van een parabool *22, 51*
symmetrieassen hyperbool *51*
symmetrieassen van een ellips *26, 51*

t
top van een parabool *22, 51*
toppen van een ellips *26, 51*
toppen van een hyperbool *28, 51*

v
voetpunt *18, 50*