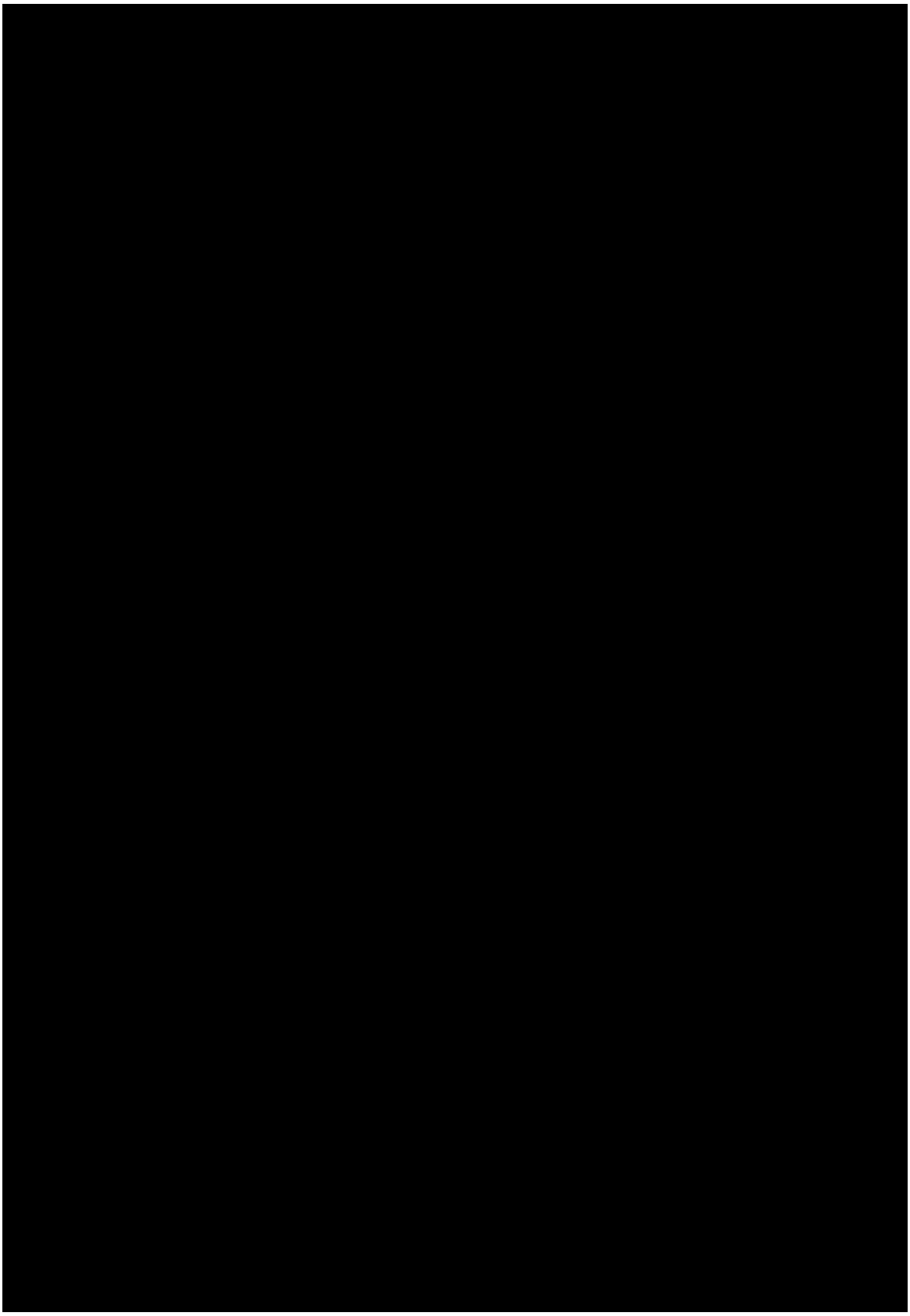


Analytische meetkunde

Inhoudsopgave

Analytische meetkunde

Verbeterde experimentele uitgave voor wiskunde D vwo, 40 slu

Colofon

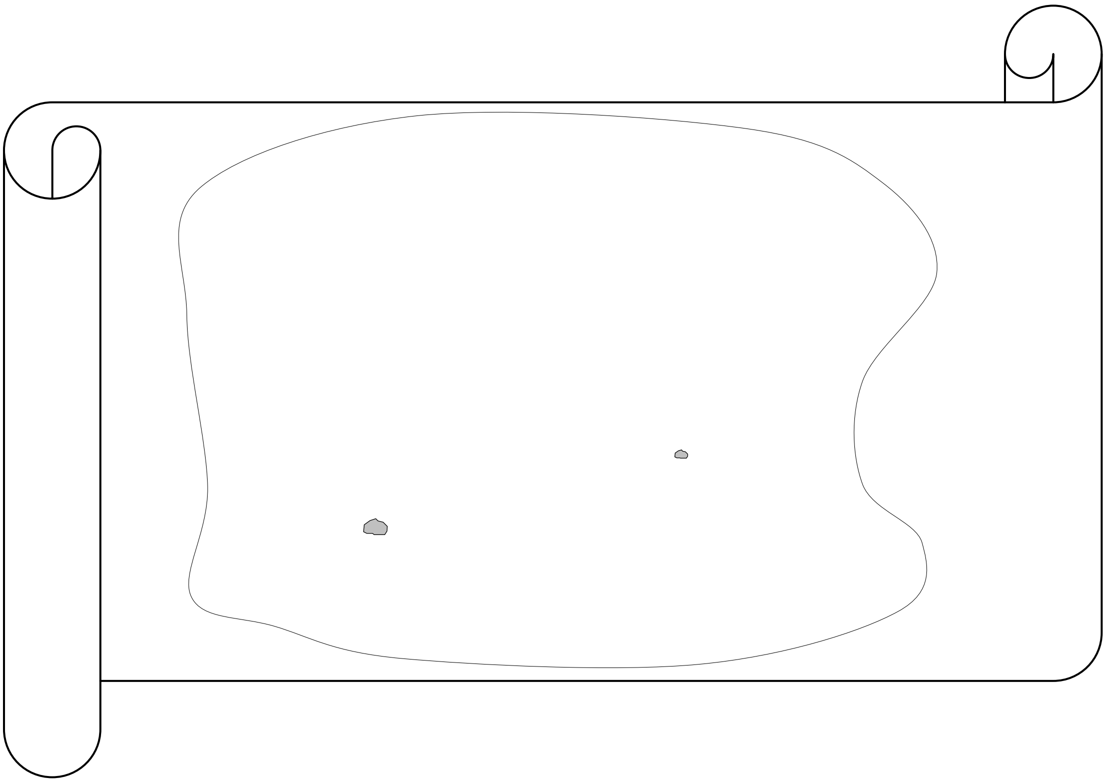
© 2010	Stichting De Wageningse Methode
Auteurs	Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen
Illustraties	Wilson Design, Uden
Distributie	Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede
ISBN	
Homepage	www.wageningse-methode.nl

Hoofdstuk 1 Introductie Analytische Meetkunde

§ 1.1 Waar ligt de schat?

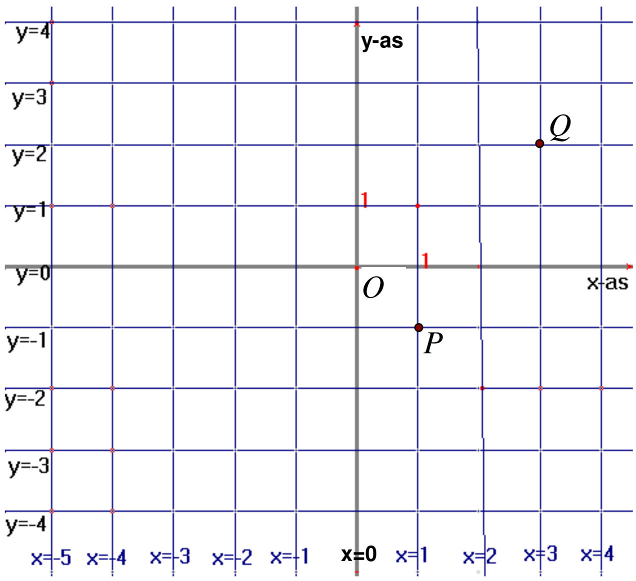
Op een zolder heb je een oude kaart gevonden. Op een onbewoond Caraïbisch eiland is een schat begraven. De beschrijving is heel duidelijk:

- Loop in een rechte lijn van de dikke eik naar de grote zwerfkei.
- Sla bij de grote zwerfkei aangekomen linksaf (maak een rechte hoek) en leg eenzelfde afstand nog eens af.
- Loop vervolgens in een rechte lijn naar de kleine zwerfkei.
- Sla bij de kleine zwerfkei aangekomen linksaf (maak een rechte hoek) en leg de laatste afstand nog eens af.
- De schat ligt precies midden tussen het punt dat je nu bereikt hebt en de dikke eik.



1 Jij gaat op zoek naar de schat. De twee zwerfkeien zijn goed herkenbaar, maar de dikke eik heeft de tijd niet overleefd.
Onderzoek waar de schat ligt.

§ 1.2 Cartesisch assenstelsel



Je ziet hiernaast een plaatje van het *cartesisch assenstelsel Oxy.*
Daarvoor geldt:

- *de coördinaatassen staan loodrecht op elkaar* (daar kijk je niet van op),
- *de lengte-eenheden op de assen zijn even lang* (men spreekt wel van een vierkant assenstelsel; denk aan de optie 'Zsquare' op de GR),
- *de oriëntatie is positief* (dat betekent: de draaiing om O in positieve richting over 90^{o} brengt de positieve x-as over naar de positieve y-as.

In een assenstelsel hebben meetkundige begrippen zoals 'punt', 'rechte lijn', 'afstand', 'loodrecht', 'cirkel', 'rechthoekig gebied', 'hyperbool', ...een zogenaamde *analytische voorstelling*. Een *punt* krijgt coördinaten, een *lijn, cirkel en hyperbool* krijgen een vergelijking, een *gebied* krijgt een ongelijkheid, *afstand* wordt een getal en of lijnen *loodrecht* op elkaar staan kan met algebra worden gecontroleerd.

Het 'vierkante' karakter van een cartesisch assenstelsel komt mooi tot uiting als je de *roosterlijnen* tekent. De *verticale* roosterlijnen worden analytisch voorgesteld door een vergelijking van de vorm $x = k$ (met $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, enzovoort). De *horizontale* roosterlijnen worden analytisch voorgesteld door een vergelijking van de vorm $y = k$ (met $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, enzovoort). Het snijpunt van een horizontale en een verticale roosterlijn is een *roosterpunt*.
In de figuur zie je de roosterpunten P (het snijpunt van $x = 1$ en $y = -1$) en Q (het snijpunt van $x = 3$ en $y = 2$). We schrijven kortweg: $P = (1 , -1)$ en $Q = (3 , 2)$.

1 a. Verklaar dat geldt: $d(Q,P) = \sqrt{13}$. **d(*Q*,*P*)** betekent: de afstand van P en Q; d komt van distance.
b. Er zijn in totaal acht roosterpunten met de afstand $\sqrt{13}$ tot P. Geef de coördinaten van de andere zeven.

2 Het midden M van het lijnstuk PQ is geen roosterpunt.
a. Wat zijn de coördinaten van M?
b. Wat zijn de coördinaten van het punt dat precies midden tussen de punten (10 , 8) en (6 , 20) ligt? En van het punt midden tussen (100 , -10) en (1000 , 66)?
c. Bedenk een algemene regel voor de coördinaten van het midden van twee punten.

3 Gegeven zijn de punten $A = (2 , 17)$ en $M = (3 , 13)$. M is het midden van lijnstuk AB.
Bereken de coördinaten van het punt B.

4 P is het punt (3 , 5).
a. Hoe groot is de afstand van P tot de lijn $x = 10$? En tot de lijn $x = -10$?
b. Dezelfde vraag voor $Q = (-8, -3)$ en de lijnen $y = 25$ en $y = -8$.

5 Laat P het punt $(x_P\ ,\ y_P)$ zijn. We willen de afstand van P tot de lijn l: $x = 4$ uitdrukken in de coördinaten van P. De afstand van punt P tot lijn l geven we aan met **d(*P, l*)**.

a. Hoe groot is d(P, l) in de volgende drie gevallen?

als $P = (3, 7)$, dan d(P, l) = ...
als $P = (7, 3)$, dan d(P, l) = ...
als $P = (-3, 17)$, dan d(P, l) = ...

b. Waarom speelt y_P daarbij geen rol?

c. Hoe groot is d(P, l) in de volgende drie gevallen?

als $x_P > 4$, dan d(P, l) = ...
als $x_P = 4$, dan d(P, l) = ...
als $x_P < 4$, dan d(P, l) = ...

Je kunt de drie gevallen van 5c onder één hoedje vangen met behulp van absolute waarde:

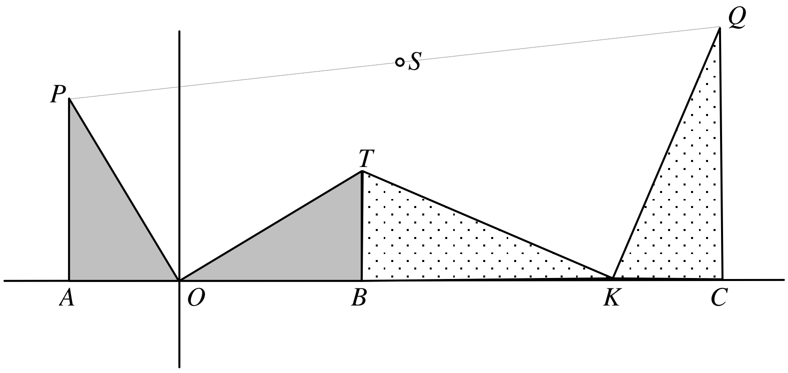
$$\mathrm{d}(P,l) = |x_P - 4| .$$

6 Geef één formule voor de afstand van P tot de lijn k: $y = 3$.

7 Noem S het snijpunt van de lijnen l en k uit 5 en 6. Voor de afstand d(P,S) geldt:

§1.3 Terug naar de schat

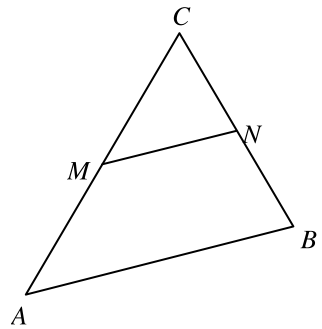
Het invoeren van een geschikt assenstelsel brengt ons de oplossing.
Namelijk: kies de grote kei als oorsprong O en neem de kleine kei op de positieve x-as. Zeg dat de kleine kei op het punt $K = (2,0)$ ligt.
We nemen een willekeurig startpunt $P = (-a,b)$; hierbij is a een positief getal.
De aanwijzingen zeggen dat je de route $POTKQ$ moet lopen, met $PO = OT$, $\angle POT = 90º$, $TK = KQ$ en $\angle TKQ = 90º$.



1 a. Wat zijn de coördinaten van T en Q, uitgedrukt in a en b?
b. Wat zijn de coördinaten van het midden S van PQ?
c. Hoe zie je aan de coördinaten van S dat je de plaats van de oude eik niet hoeft te weten om de schat te vinden?
d. Je hebt nu gevonden waar de schat ligt, uitgaande van de keien in de punten (0,0) en (2,0). Hoe ligt de plek van de schat ten opzichte van de keien?
e. Waar zou de schat liggen als je in de beschrijving van 1.1 twee keer rechsaf zou gaan in plaats van linksaf.

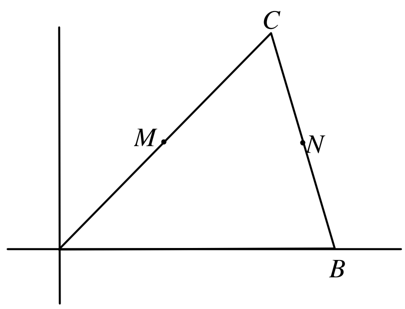
Het invoeren van een assenstelsel heeft ons geholpen met het vinden van de oplossing. Zo'n combinatie van meetkunde en een assenstelsel noemen we **analytische meetkunde**.

Nog een voorbeeld. In een driehoek ABC zijn M en N de middens van de zijden AC en BC.
Dan is MN evenwijdig aan AB en is MN half zo lang als AB.
(Men noemt MN wel een **middenparallel** van driehoek ABC).



Dit is een bekende stelling uit de meetkunde. Als we de driehoek in een assenstelsel plaatsen - we mogen de assen zelf kiezen - is de stelling gemakkelijk te bewijzen. We maken dus weer gebruik van coördinaten; zo werkt analytische meetkunde.

We kiezen de oorsprong in A en B op de x^+-as. Zeg dat $B = (b,0)$ en $C = (c,d)$.



2 a. Wat zijn de coördinaten van de middens M en N?
b. Hoe zie je aan deze coördinaten dat MN evenwijdig is aan AB?
c. Hoe lang is MN? Klopt dat met de bewering dat MN half zo lang is als AB?

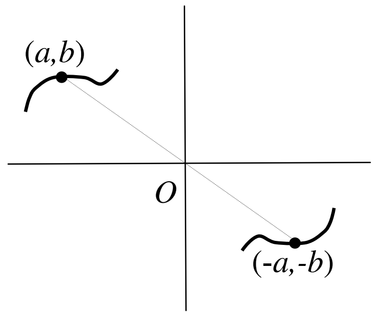
§ 1.4 Het begrip vergelijking

We bestuderen een vergelijking met twee onbekenden erin, b[illegible] $+ y^2 = 25$.
Willekeurig gekozen waarden van x en y voldoen natuurlijk [illegible] niet aan deze vergelijking. Toch heeft deze vergelijking oneindig veel oplos[illegible]s, we kunnen een waarde van x kiezen en daarna uitrekenen hoe groot y moet zij[illegible] $= 25$ geldt.

1 a. Neem $x = 3$ en bereken y (twee oplossingen).

-1.94808( )-0.77773876(o9001 894(e)2.63632(e)2.63632(m)-4.41[illegible]36 11.97 Tf 54.032 0 T6R36

De punten (a,b) en (-a,-b) liggen gespiegeld ten opzichte van de oorsprong. Een kromme is **puntsymmetrisch** ten opzichte van (0,0) als geldt: bij elk punt (a,b) op de kromme, ligt ook (-a,-b) op de kromme.



4 We bekijken de kromme K met vergelijking $2x^2 + 5y^2 = 13$. Het punt (2, 1) ligt op de kromme K, zoals je eenvoudig kunt nagaan.
a. Kun je, dit wetende, nog drie punten noemen die op K liggen?
Als je een punt (a,b) op de kromme kent, ken je er meer (meestal drie andere, soms één ander punt).
b. Leg dat uit.
c. Is K puntsymmetrisch?

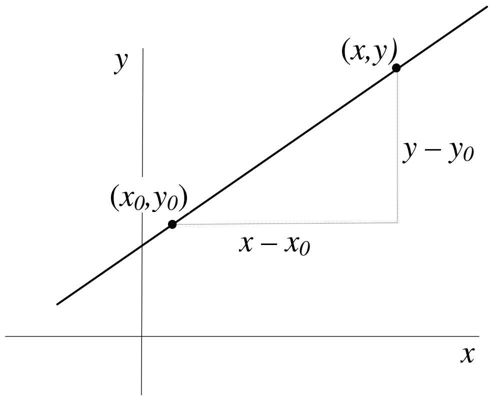
5 We bekijken de kromme L met vergelijking $2x^2 + 3xy + 5y^2 = 7$. Het punt ($\frac{1}{2}$, 1) ligt op de kromme L, zoals je eenvoudig kunt nagaan.
a. Kun je, dit wetende, nog een ander punt noemen dat op de kromme L ligt.
b. Toon aan dat de kromme L puntsymmetrisch is ten opzichte van O. Begin zo: Stel dat het punt (a, b) op L ligt. Laat zien dat het punt (-a, -b) dan ook op L ligt.

6 Het punt (a,b) ligt op de kromme $x^2 - xy + 1 = 0$.
Bewijs dat het punt ($\frac{1}{a}$,b) ook op die kromme ligt.

Hoofdstuk 2   Meer over lijnen

§ 2.1 Vergelijkingen van een rechte lijn

Je weet dat $y = mx + q$ een vergelijking is van een rechte lijn. Hierin is m de richtingscoëfficiënt en $(0,q)$ is het snijpunt met de y-as.
Als je van een rechte lijn de richtingscoëfficiënt en een punt kent, kun je onmiddellijk een vergelijking van die lijn opschrijven: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$. Hierin is m de richtingscoëfficiënt en (x_0,y_0) is het bekende punt.
Dat is als volgt in te zien:
In figuur 1 is (x_0, y_0) het *bekende* punt en is (x, y) een *lopend punt* op de lijn, ongelijk aan (x_0, y_0).
y-y_0 is de verticale verplaatsing x-x_0 is de horizontale verplaatsing van (x_0, y_0) naar (x, y).
Dus $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$ en hieruit volgt $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.



Als er twee punten (x_0,y_0) en (x_1,y_1) van een lijn gegeven zijn, bereken je eerst de richtingscoëfficiënt $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ en je kunt vervolgens een vergelijking van de lijn opschrijven:
$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$.

1 Geef een vergelijking van de volgende lijnen. Schrijf de vergelijkingen eerst in de vorm y-$y_0 = m \cdot (x$-$x_0)$. Vereenvoudig je antwoorden tot de gedaante: $y = mx + q$.
a. De lijn met richtingscoëfficiënt -0,1 die gaat door (10, -7)
b. De lijn met richtingscoëfficiënt $\sqrt{2}$ die gaat door $(\sqrt{3},\sqrt{6})$
c. De lijn die gaat door de punten (44, 53) en (47, 50)
d. De lijn die gaat door de punten (18, 53) en (51, -2)
e. De lijn die gaat door de punten (-17, 53) en (1000, 53)

2 Welke formule vind je - na vereenvoudiging - als je het bovenstaande gebruikt voor een lijn met richtingscoëfficiënt m, die door het punt $(0, q)$ gaat?

3 a. Welke formule vind je - na vereenvoudiging - als je het bovenstaande gebruikt voor een lijn die door de punten $(p, 0)$ en $(0, q)$ gaat?
b. Laat zien dat je die formule ook kunt schrijven als $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ (aangenomen dat p en q niet 0 zijn).

4 a. Waarom lukt het niet met bovenstaande manieren een vergelijking op te stellen voor de lijn die gaat door (3,5) en (3,-2)?
b. Geef een vergelijking van die lijn.

Dat verticale lijnen een uitzonderingspositie innemen is niet fraai. Er is een type vergelijking dat voor *alle* rechte lijnen werkt, ook voor de verticale: $ax + by = c$.

5 a. Schrijf de vergelijking $3x + 2y = 5$ in de gedaante $y = mx + b$.

b. Schrijf de vergelijking $ax + by = c$ in de gedaante $y = mx + b$ (mits $b \neq 0$).

6 a. Voor welke waarden van a, b en c gaat de lijn $ax + by = c$ door de oorsprong?
b. Voor welke waarden van a, b en c is de lijn $ax + by = c$ verticaal?
c. Voor welke waarden van a, b en c is de lijn $ax + by = c$ horizontaal?
d. Welke figuur stelt $ax + by = c$ voor als $a = b = c = 0$.
e. Welke figuur stelt $ax + by = c$ voor als $a = b = 0$ en $c \neq 0$.

7 Bekijk de vergelijking $y = 3x + p$. Door in deze vergelijking voor p verschillende waarden in te vullen ontstaat steeds een vergelijking van een lijn. Tezamen vormen die lijnen een bundel. p is een zogenaamde **parameter**.
In elk van de volgende bundels hebben de lijnen iets gemeenschappelijks. Wat?
a. $y = 3x + p$
b. $y = px + 3$
c. $y - 5 = p(x - 2)$
d. $3x = p$

8 Bepaal een vergelijking van de lijn door het punt (2,3) die evenwijdig is met de lijn $4x + 5y - 11 = 0$.

9 Liggen de punten (2, 3), (3, -1) en (1, 6) op één lijn?

10 Bepaal een vergelijking van het spiegelbeeld van $y = 3x - 5$ ten opzichte van
a de x-as
b. de y-as
c. de oorsprong.
Bepaal een vergelijking van het spiegelbeeld van $y = mx + n$ ten opzichte van
d. de x-as
e. de y-as
f. de oorsprong.

§ 2.2 Onderlinge ligging van twee lijnen

$\begin{cases} x+4y=22 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$ is een **stelsel** van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Beide vergelijkingen stellen een lijn voor in een coördinatenstelsel. De lijnen snijden elkaar in een punt. De coördinaten van het **snijpunt** geven de oplossing van het stelsel: dat zijn de getallen x en y die aan beide vergelijkingen tegelijkertijd voldoen. We zeggen dat dat getallenpaar (x,y) de **oplossing** is van het stelsel vergelijkingen.

1 a. Bereken de oplossing van het stelsel.

b. Bereken ook de oplossing van $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-5y=-4 \end{cases}$.

2 a. Voor welke waarde van p heeft het stelsel $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x+py=3 \end{cases}$ geen oplossing?

b. Voor welke waarden van p en q heeft het stelsel $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x+py=q \end{cases}$ oneindig veel oplossingen?

Merk de parallel op tussen de meetkunde en de algebra.

- Meetkunde: twee lijnen hebben 0 of 1 gemeenschappelijk punt; of ze hebben alle punten gemeenschappelijk (dat is het geval als de lijnen “samenvallen”; (dan is er dus eigenlijk maar één lijn).
- Algebra: een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden heeft 0 of 1 getallenpaar (x,y) als oplossing; of ze hebben oneindig veel oplossingen (dat is het geval als de twee vergelijkingen op hetzelfde neerkomen: als een paar (x,y) aan de ene vergelijking voldoet, voldoet het ook aan de andere vergelijking.

Dus: Als k en l lijnen zijn,
dan zijn k en l snijdend: er is 1 snijpunt
of zijn k en l evenwijdig: er is geen gemeenschappelijk punt; $k \,//\, l$
of zijn k en l dezelfde lijn: alle punten zijn gemeenschappelijk; $k = l$

Een stelsel vergelijkingen heet **onafhankelijk** als het precies één oplossing heeft.
Een stelsel vergelijkingen heet **strijdig** als het geen oplossing heeft.
Een stelsel vergelijkingen heet **afhankelijk** als elk paar dat aan de ene vergelijking voldoet, ook voldoet aan de andere vergelijking.

3 We bekijken het stelsel $\begin{cases} x-y=q \\ 2x+py=6 \end{cases}$.

a. Voor welke waarden van p en q is het stelsel strijdig, afhankelijk en onafhankelijk?
b. Kies $p = 2$ en druk de oplossing uit in q.
c. Kies $q = 0$ en $p \neq -2$ en druk de oplossing uit in p.

4 We bekijken het stelsel $\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=r \end{cases}$ met a en b niet beide 0 en p en q niet beide 0.

Veronderstel dat $b \neq 0$ en $q \neq 0$.

a. Wat is de richtingscoëfficiënt van elk van de bijbehorende lijnen?

b. Toon aan dat geldt: het stelsel is onafhankelijk precies dan als $bp \neq aq$.

Veronderstel dat $b = 0$ of $q = 0$.

c. Toon aan dat ook dan geldt: het stelsel is onafhankelijk precies dan als $bp \neq aq$.

5 We bekijken weer het stelsel $\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=r \end{cases}$ met a en b niet beide 0 en p en q niet beide 0.

In opgave 4 heb je gezien dat het stelsel onafhankelijk is als $bp \neq aq$. Als $bp = aq$, dan is het stelsel afhankelijk of strijdig.

a. Toon aan dat geldt: het stelsel is afhankelijk precies dan als $cp = ar$.

b. Toon aan dat geldt: het stelsel is strijdig precies dan als $cp \neq ar$.

6 a. Toon aan dat de lijnen $px + (p+1)y = 0$ en $(p+2)x + (p+3)y = 10$ voor elke waarde van p snijdend zijn.

b. Voor welke waarde van p zijn de lijnen $px + (p+2)y = 0$ en $(p+2)x + (p+3)y = 10$ evenwijdig?

7 Voor welke waarde van a en b is $ax + (b\text{-}1)y = 3$ dezelfde lijn als $bx + (2a+3)\text{y} = 6$?

8 Gegeven zijn de punten $P(1,1)$ en $Q(3,3)$. Men trekt door P en Q twee evenwijdige lijnen die de x-as snijden in twee punten die op afstand 4 van elkaar liggen.

a. Maak een tekening van de situatie.

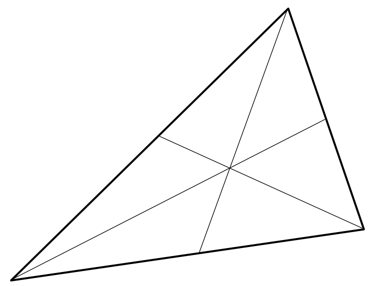
b. Bepaal vergelijkingen van deze lijnen. (twee oplossingen)

9 Gegeven zijn de punten $O(0,0)$, $A(2,6)$ en $P(4,3)$. Dit zijn drie van de vier hoekpunten van een parallellogram.

a. Maak een tekening van de situatie. (er zijn drie mogelijkheden)

b. Bereken de coördinaten van het vierde hoekpunt.

Een **zwaartelijn** van een driehoek gaat door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde. Een driehoek heeft drie zwaartelijnen; die gaan door één punt, het zogenaamde **zwaartepunt.**



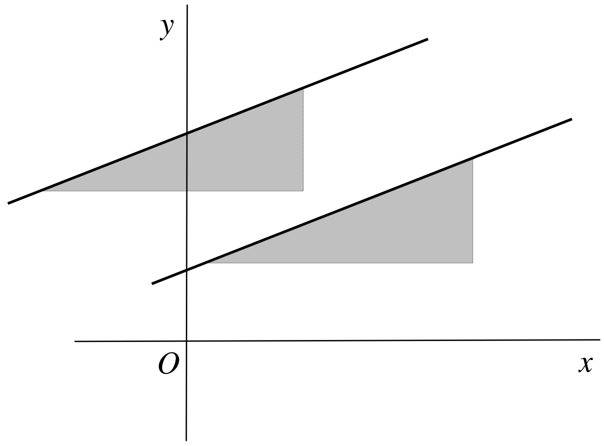
10 Gegeven zijn de punten $O(0,0)$, $A(2,6)$ en $P(4,3)$.

a. Stel een vergelijking op van elk van de zwaartelijnen van de driehoek.

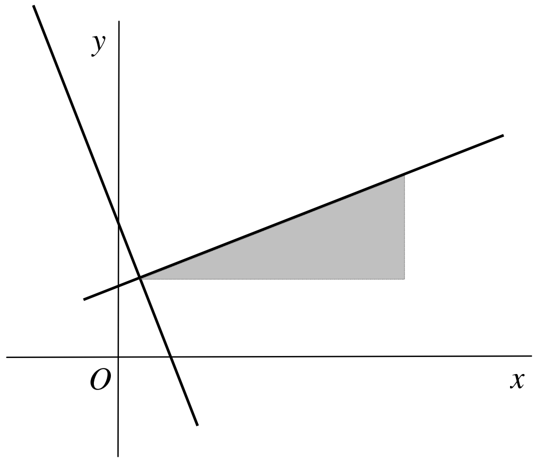
b. Bereken het snijpunt van twee van deze zwaartelijnen. Dat is dus het **zwaartepunt** van de driehoek.

c. Ga met een berekening na dat het zwaartepunt ook op de derde zwaartelijn ligt.

§ 2.3 Loodrecht



Twee lijnen in een assenstelsel zijn evenwijdig als ze eenzelfde "hellingsdriehoek" (en dus dezelfde richtingscoëfficiënt) hebben. Je hoeft de hellingsdriehoek van de ene lijn maar te verschuiven om een hellingsdriehoek van de andere lijn te vinden.
Hoe zit dat bij lijnen die loodrecht op elkaar staan? Dat gaan we in deze paragraaf behandelen.



1 a. Onderzoek met behulp van de nevenstaande figuur hoe je bij de hellingsdriehoek van de ene lijn een hellingsdriehoek van de andere lijn maakt.

b. Stel dat de richtingscoëfficiënt van de ene lijn $\frac{2}{7}$ is. Wat is dan de richtingscoëfficiënt van de andere lijn?

c. Hoe maak je in het algemeen van de richtingscoëfficiënt van de ene lijn die van een lijn die er loodrecht op staat?

Stelling
Twee lijnen (niet verticaal en niet horizontaal) staan loodrecht op elkaar als het product van hun richtingscoëfficiënten -1 is.

d. Waarom staat in de stelling de toevoeging "niet verticaal en niet horizontaal"?

2 Van de rechthoek *ABCD* zijn gegeven de punten $A(2,6)$ en $B(3,5)$, terwijl het hoekpunt C op de lijn $3x - 4y = 2$ ligt.
Bepaal de coördinaten van D.

3 Van driehoek *ABC* zijn gegeven de hoekpunten $A(2,6)$ en $B(14,15)$ en $C(0,17)$.
Bereken de oppervlakte van driehoek *ABC*.

4 Van een rechthoekige driehoek *ABC* zijn gegeven de punten $A(1,4)$ en $B(3,10)$. Hoekpunt C ligt op de y-as.

a. Bereken de coördinaten van C in het geval de rechte hoek in A zit.

b. Stel dat de rechte hoek in $C(0,c)$ zit. Druk de richtingscoëfficiënt van *CA* en van *CB* uit in c en bereken c.

5 Van de driehoek ABC zijn gegeven de hoekpunten $A(3,2)$, $B(5,0)$ en $C(11,6)$.

a. Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB en van de middelloodlijn van AC.

b. Bereken het snijpunt van deze middelloodlijnen.

c. Ga met een berekening na dat dat snijpunt ook op de middelloodlijn van BC ligt.

6 Er zijn oneindig veel lijnen die loodrecht op de lijn $2x+3y-5 = 0$ staan. Die lijnen hebben allemaal een vergelijking van een bepaald type.

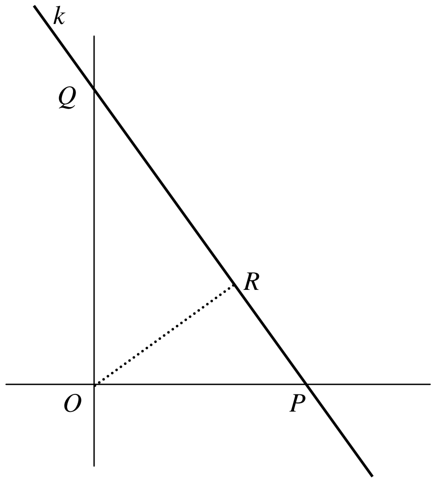
Geef de algemene vergelijking van zo'n lijn (gebruik een parameter).

§ 2.4 Afstand tussen punt en lijn

Laat k een rechte lijn zijn die niet door O gaat en die de x-as snijdt in $P(p, 0)$ en de y-as in $Q(0, q)$.
OR is hoogtelijn in driehoek OPQ
De oppervlakte van driehoek OPQ kun je op twee manieren berekenen:

Opp $OPQ = \frac{1}{2} OP \times OQ$ en

Opp $OPQ = \frac{1}{2} PQ \times OR$



Hieruit volgt $|p| \cdot |q| = OR \cdot \sqrt{p^2 + q^2}$.
De afstand van de oorsprong O tot de lijn k is gelijk aan: $\dfrac{|p| \cdot |q|}{\sqrt{p^2 + q^2}}$.

1 a. Bereken de afstand van O tot de lijn $3x + 4y = 24$.
b. Hoe volgt uit het antwoord op vraag a. de afstand van O tot de lijn $3x + 4y = 240$.
c. Wat is de afstand van O tot de lijn $3x + 4y = 8$?
d. Wat is de afstand van O tot de lijn $3x + 4y = -8$?
e. Wat is de afstand tussen de lijnen $3x + 4y = 8$ en $3x + 4y = 24$?

2 Gegeven is de lijn k: $ax + by = 10$, met a en b beide niet 0.
a. Druk de afstand van O tot k uit in a en b.
b. Laat zien dat deze afstand kan worden geschreven als $\dfrac{10}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
c. Ga na dat deze laatste formule ook juist is als $a = 0$ of $b = 0$, (maar niet beide 0).

> Als k: $ax + by = c$, met a en b niet beide 0, dan $d(O,k) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3 a. Bereken de afstand van O tot elk van de lijnen $2x + y = 20$, $2x + y = 5$ en $2x + y = -5$.
b. Bereken de afstand tussen de lijnen $2x + y = 20$ en $2x + y = 5$.
Bereken ook de afstand tussen de lijnen $2x + y = 20$ en $2x + y = -5$.

4 $ax + by = 10$ en $ax + by = 33$ zijn twee evenwijdige lijnen (a en b zijn niet beide 0).
a. Leg uit dat de afstand tussen deze lijnen is: $\dfrac{23}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
b. Wat is de afstand tussen de lijnen $ax + by = 10$ en $ax + by = -33$?
c. Geef een formule voor de afstand tussen de lijnen $ax + by = c$ en $ax + by = d$.

5 Stel een vergelijking op van de middenparallel van de evenwijdige lijnen $3x + 4y = -8$ en $3x + 4y = 12$. Dat is de lijn die op gelijke afstanden, midden tussen deze twee lijnen loopt.

6 Stel vergelijkingen op van lijnen die een afstand 2 hebben tot de lijn $3x + 4y = -8$.

7 Stel vergelijkingen op van de beide lijnen door (6,0) die een afstand 3 hebben tot de oorsprong *O.*

8 Gegeven zijn de punten $P(1,0)$ en $Q(3,2)$. De punten P en Q hebben gelijke afstanden tot een lijn l met vergelijking $x + y = a$.
Bereken a.

In opgave 4 heb je een formule opgesteld voor de afstand tussen twee evenwijdige lijnen. Hiermee kunnen we een formule opstellen voor de afstand tussen een punt en een lijn.

Eerst een concreet voorbeeld.

9 Lijn l heeft vergelijking $2x + 3y = 14$ en punt P heeft coördinaten (5, 4).
a. Stel een vergelijking op van de lijn m door P, die evenwijdig is aan l (schrijf de vergelijking in de vorm $ax + by = c$).
b. Ga na dat $\mathrm{d}(P\,,\, l) = \mathrm{d}(l\,,\, m)$ en bereken deze afstand.

Nu het algemene geval.

10 Lijn k heeft vergelijking $ax + by = c$ en punt P heeft coördinaten (p, q).
a. Stel een vergelijking op van de lijn n door P, die evenwijdig is aan k. (schrijf de vergelijking in de vorm $ax + by = c$).
b. Laat zien dat $\mathrm{d}(P, k) = \mathrm{d}(k, n) = \dfrac{|ap + bq - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Als $P(p, q)$ een punt is en k: $ax + by = c$ met a en b niet beide 0, een lijn, dan is
$$d(P,k) = \frac{|ap + bq - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

11 Bereken in de volgende gevallen de afstand tussen punt en lijn.
a. $P(3, -1)$ en k: $x - 2y = 7$
b. $Q(-5, 10)$ en l: $3x + 4y = 5$
c. $R(7, -3)$ en m: $y = 2{,}5x - 6$
d. $S(-2, 4)$ en n: $y = 3x$

12 Van een driehoek ABC zijn gegeven de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$. Hoekpunt C ligt op de lijn met vergelijking $y = 2x - 3$. De oppervlakte van driehoek ABC is 5.
Bereken de coördinaten van C. (er zijn twee mogelijkheden)

13 Punt P ligt op de lijn $x = 4$ en heeft gelijke afstanden tot de lijnen met vergelijkingen $2x + y = 5$ en $x - 2y = 1$.
Bereken de y-coördinaat van P. (er zijn twee mogelijkheden)

§ 2.5 Lijnenparen

1 a. $x^2 - 4y^2 = 0$ bestaat uit twee lijnen. Welke?
b. Beschrijf de figuur met vergelijking $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$
c. Beschrijf de figuur met vergelijking $y^2 = y + 6$

2 Bekijk de vergelijking $x^2 - 6xy + py^2 = 0$ voor elke waarde van p.
a. Beschrijf de figuur voor $p = 8$, voor $p = 9$ en voor $p = 10$.
b. Voor welke waarden van p bestaat de figuur met vergelijking $x^2 - 6xy + py^2 = 0$ uit twee lijnen?

3 Stel een vergelijking op van het lijnenpaar dat bestaat uit de lijnen $3x+5y = 6$ en $x = 4$.

4 Stel de algemene vergelijking op van een lijnenpaar waarvan de lijnen richtings-coëfficiënt 1 en -1 hebben. Gebruik twee parameters.

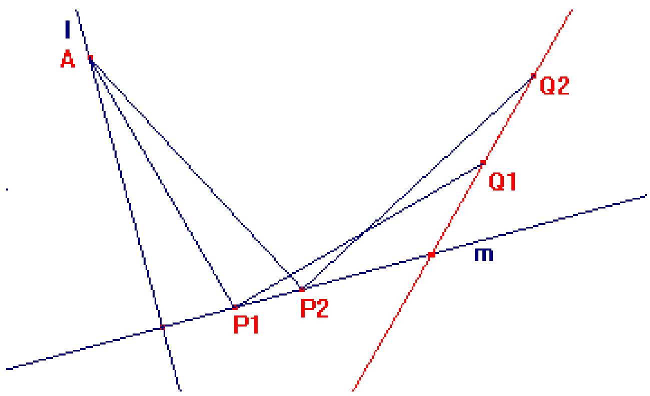
5 Bekijk de vergelijking $x^2 + 2qxy + y^2 = 0$ voor elke waarde van q.
a. Laat zien dat de vergelijking kan worden herschreven tot $(x + qy)^2 + (1 - q^2) \cdot y^2 = 0$
b. Voor welke waarden van q bestaat de figuur met vergelijking $x^2 + 2qxy + y^2 = 0$ uit respectievelijk twee lijnen, één lijn of één punt?

§ 2.6 Parametervoorstelling van een lijn

Een punt beweegt in een assenstelsel. De plaats van het punt op tijdstip t wordt gegeven door: $x = t$-1 en $y = 2t$+3. Hierbij kan t alle reële getallen aannemen. We willen de baan van het bewegende punt weten.
Als je voor enkele tijdstippen t de bijbehorende punten tekent, zie je al gauw dat de punten op één lijn liggen. We vinden een vergelijking van deze lijn (dat is een directe formule voor x en y, zonder "tussenkomst" van t) door t te elimineren. We vinden: $t = x+1$ en dus y = 2(x+1) +3, vereenvoudigd: $y = 2x+5$. Hiermee is aangetoond dat de baan van het bewegende punt een rechte lijn is.

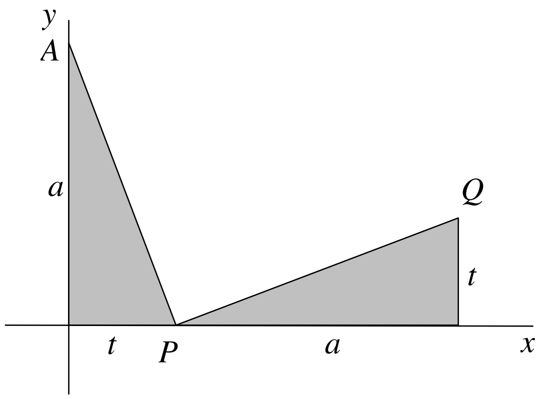
1 De plaats van een bewegend punt op tijdstip t wordt gegeven door: $x = 3t+2$ en $y = 4t+3$. Hierbij neemt t alle reële getallen aan van -2 tot 1.
a. Stel een vergelijking op van de baan van het bewegende punt en teken de baan.
b. Wat verandert er aan de baan als $x = -6t+2$ en $y = -8t+3$? Nog steeds is $-2 \leq t \leq 1$.

Toepassing
Gegeven zijn de lijnen l en m die loodrecht op elkaar staan. A is een vast punt op l. Voor elke punt P op lijn m bepalen we het punt Q zo dat $AP = PQ$, $AP \perp PQ$ en de draaiing om P van A naar Q is in negatieve richting (met de wijzers van de klok).



Gevraagd wordt de baan van Q, als P de lijn l doorloopt. Een tekening doet vermoeden dat Q een rechte lijn beschrijft.

Oplossing met analytische meetkunde
Kies als x-as de lijn m en als y-as de lijn l. Zeg dat het vaste punt $A = (0,a)$ en het variabele punt $P = (t,0)$.

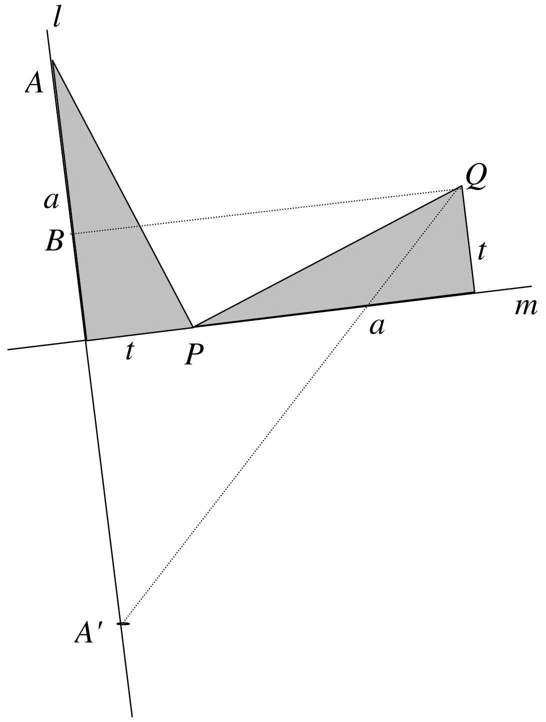


2 a. Wat zijn de coördinaten van Q, uitgedrukt in t en a.

Voor het punt Q geldt dus: $x = t+a$ en $y = t$.
b. Elimineer t hieruit. Welke directe formule voor y en x vind je , uitgedrukt in a?
c. Is het vermoeden juist dat Q een rechte lijn beschrijft? Welke hoek maakt die lijn met de lijn m?

Oplossing met meetkunde

We gebruiken dezelfde figuur.
Het spiegelbeeld van A in de lijn m noemen we A' en de loodrechte projectie van Q op l noemen we B.
Dan geldt: $BQ = t+a$ en ook $BA' = t+a$.
Dus is BQA' een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Hieruit volgt dat $\angle BA'Q = 45°$ voor elke waarde van t. Het punt Q ligt altijd op de lijn door A, die een hoek van 45° maakt met de lijn l.



3 Bepaal een vergelijking van de baan als de draairichting om P van A naar Q positief is.

4 Gegeven zijn de vaste punten $A(4,0)$ en $B(0,2)$. Langs de x-as beweegt zich een punt P naar rechts en langs de y-as een punt Q naar boven, zo dat steeds $AP = 3BQ$. De lijn door P met richtingscoëfficiënt -1 snijdt de lijn door Q met richtingscoëfficiënt 1 in S.
a. Onderzoek wat voor soort figuur de baan van S is als Q de y-as doorloopt.
b. Stel een vergelijking op van die baan. Begin zo: stel $Q = (0,2+t)$, dan is $P = \ldots$

5 Gegeven zijn de bewegende punten $P = (2t,1)$ en $Q = (3,-4t)$, waarbij $-1 \leq t \leq 3$.
a. Teken de banen van P en Q.

M is het midden van PQ.
b. Stel een vergelijking op van de baan van M.

6 Een punt P beweegt zich vanuit de oorsprong over de x-as naar rechts. Recht boven P ligt een punt Q dat even ver van de x-as ligt als van de lijn m met vergelijking $y = x$.
a. Onderzoek wat voor soort figuur de baan van Q is.
b. Hoe wordt deze baan gewoonlijk aangeduid (in relatie met de beide lijnen)?
c. Stel een vergelijking op van de baan van punt Q. Begin zo: stel $P = (a, 0)$ en $Q = (a, b)$.

Hoofdstuk 3 Kwadratische vergelijkingen

§ 3.1 Cirkels en lijnen

Een cirkel is de figuur bestaande uit alle punten in het vlak die op een bepaalde afstand r van een zeker punt M liggen. M heet het middelpunt en r de straal van de cirkel. Een cirkel wordt volledig bepaald door zijn middelpunt en straal.

In coördinaten ziet het er als volgt uit bij een cirkel met middelpunt $M = (a, b)$ en straal $r > 0$. $P(x, y)$ ligt op de cirkel, precies dan als $d(P, M) = r$. Dit betekent dat $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ ofwel $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Deze schrijfwijze noemen we de standaardvorm van een cirkel. Aan de standaardvorm zie je vrijwel meteen dat je te maken hebt met een cirkelvergelijking en wat het middelpunt en de straal van de desbetreffende cirkel zijn.

1 Stel een vergelijking op van de cirkel
   a. met middelpunt (-2, 1) en straal 3.
   b. met middelpunt (1, 3), die door het punt (2,5) gaat.
   c. die gaat door de punten (-2, 0), (4, 0) en (6, 2).
   d. die gaat door de punten (-3, -1), (3, -1) en (0, 4).

Neem de cirkel met middelpunt (3, -1) en straal 4. De standaardvorm van deze cirkel is $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$. Uitwerken van de haakjes geeft: $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 16$ en dus $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 6$. Als de haakjes in de standaardvorm uitgewerkt zijn, dan is niet meer direct duidelijk wat het middelpunt en de straal van de cirkel zijn. Het is zelfs niet direct duidelijk of de vergelijking bij een cirkel hoort.

2 Hoe kun je aan een vergelijking zonder haakjes zien of deze een cirkel kan voorstellen?

Met behulp van kwadraatafsplitsen kunnen we de standaardvorm van een cirkelvergelijking weer terugvinden.
Neem bijvoorbeeld de vergelijking $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 4$. We maken zowel van de termen met x als van de termen met y kwadraten: $(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 4 - 9 = 4$.
Herschrijven geeft de gezochte standaardvorm $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 17$.

3 Geef middelpunt en straal van de cirkels behorende bij de volgende vergelijkingen.
   a. $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 5$
   b. $x^2 - x + y^2 + 6y = 11$
   c. $(x+2)^2 + y^2 = 2x + 2y + 6$
   d. $(x+y)^2 = (2x+2)\cdot(y+1)$

Een cirkel en een lijn kunnen twee, één of geen punten gemeenschappelijk hebben. Het berekenen van de coördinaten van de eventuele snijpunten gaat door middel van substitutie. In de volgende opgave wordt dit aan de hand van een voorbeeld uitgelegd.

4 Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ en de lijn $y = x - 2$.

a. Substitueer $y = x - 2$ in de cirkelvergelijking en los die vervolgens op naar x.

b. Bereken vervolgens de coördinaten van de snijpunten van cirkel en lijn.

5 Bereken in elk van de volgende gevallen de (eventuele) snijpunten van cirkel en lijn.

a. Cirkel: $x^2+y^2=17$ en lijn: $3x + 5y = 17$.

b. Cirkel: $(x+3)^2+(y+1)^2=10$ en lijn: $y = 3x - 2$.

c. Cirkel: $(x+2)^2+(y-3)^2=5$ en lijn: $y = x + 1$.

Hoeveel snijpunten een cirkel en een lijn gemeen hebben, kun je ook vinden door de afstand tussen middelpunt en lijn te berekenen en deze te vergelijken met de straal van de cirkel.

6 Controleer op deze manier het aantal snijpunten voor de drie gevallen in opgave 5.

We kijken eens preciezer naar het bijzondere geval, waarin cirkel en lijn precies één punt gemeenschappelijk hebben. De lijn raakt dan aan de cirkel. Het snijpunt heet dan ook wel het raakpunt aan de cirkel. In zo'n geval staat de straal vanuit het middelpunt naar het raakpunt loodrecht op de lijn. Dit feit kunnen we gebruiken om raaklijnen aan een cirkel te vinden die gaan door een gegeven punt (buiten de cirkel). In de volgende opgave wordt dit uitgewerkt.

7 Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=20$ en het punt $P(6, 2)$, dat buiten de cirkel ligt. We nemen een punt $Q(x, y)$ op de cirkel en gaan proberen uit te vinden onder welke voorwaarden de lijn PQ de cirkel raakt.

a. Druk de richtingscoëfficiënt van straal MQ uit in x en y.

b. Druk de richtingscoëfficiënt van lijnstuk PQ uit in x en y.

c. Ga na dat MQ ⊥ PQ precies dan als $x^2+y^2=6x+2y$.

Combinatie van $x^2+y^2=6x+2y$ en de cirkelvergelijking $x^2+y^2=20$ geeft $6x+2y=20$. Blijkbaar liggen de raakpunten vanuit P aan de cirkel op de lijn met vergelijking $6x+2y=20$ of vereenvoudigd $3x+y=10$.

d. Bereken nu de twee raakpunten van de raaklijnen door P aan de cirkel.

e. Stel vergelijkingen op van de beide raaklijnen.

8 Gegeven zijn de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=200$ en het punt $P(15, 5)$.

a. Bereken de raakpunten van de raaklijnen door P aan de cirkel.

b. Stel vergelijkingen op van deze raaklijnen.

§ 3.2 Parabolen, ellipsen en hyperbolen

1 Gegeven is de lijn k: $y = -1$ en het punt $E(0, 1)$.
Stel een vergelijking op van de figuur bestaande uit alle punten $P(x, y)$ die even ver van lijn k als van punt E afliggen.

Als het goed is gegaan, dan heb je bij opgave 1 de vergelijking $y = \frac{1}{4}x^2$ gevonden, de vergelijking van een parabool. Zoals bekend (boekje 29, parabolen en hyperbolen) liggen de punten die even ver van een gegeven lijn k als van een punt E af liggen op een parabool. De lijn k noemen we de richtlijn en het punt P het brandpunt van de parabool.

2 We gaan de afstand tussen de richtlijn en het brandpunt variëren. Voor elk positief getal a is gegeven de lijn l: $y = -a$ en het punt $F(0, a)$. We zijn op zoek naar een vergelijking van de parabool van alle punten $P(x, y)$ die even ver van lijn l als van punt F afliggen.

a. Laat zien dat de coördinaten van zulke punten P voldoen aan de vergelijking $y = \frac{1}{4a}x^2$.

b. Voor welk getal a vinden we de standaardparabool $y = x^2$?

Verandering van de afstand tussen brandpunt en richtlijn verandert de grootte, maar niet de vorm van de figuur. Dit stemt overeen met een bekend feit: alle parabolen zijn immers onderling gelijkvormig.

Bij een verticale raaklijn worden de rollen van x en y verwisseld. Interessanter wordt het wanneer we niet een horizontale of verticale richtlijn nemen, maar bijvoorbeeld een met richtingscoëfficiënt 1. De figuur die we krijgen is natuurlijk weer een parabool, maar nu een die schuin ligt.

3 Gegeven is de lijn m: $x + y = -2$ en het punt $F(1, 1)$.
Stel een vergelijking op van de parabool met F als brandpunt en m als richtlijn.

We hebben tot nu toe figuren bekeken, die bestaan uit alle punten P met $d(P, E) = d(P, k)$, waarbij k een lijn is en E een punt dat niet op k ligt. Deze figuren waren allemaal parabolen. We gaan nu bij een gegeven lijn k en een punt E (niet op k) de figuren bekijken die bestaan uit alle punten P met $d(P, E) = e\cdot d(P, k)$, waarbij e een positief getal is. Behalve parabolen (bij e = 1) blijken er dan ellipsen en hyperbolen te ontstaan, zoals we in het vervolg zullen zien.

4 Gegeven is de lijn l: $x = -5$ en het punt $F(3, 0)$. We bekijken de figuur L bestaande uit de punten P waarvoor $d(P, F) = \frac{3}{5}\cdot d(P, l)$.

a. Laat zien dat voor zulke punten $P = (a, b)$ geldt: $16a^2 - 240a + 25b^2 = 0$.

We gaan nu laten zien dat de gevonden vergelijking $16x^2 - 240x + 25y^2 = 0$ hoort bij een ellips. Dit doen we door de figuur L ten opzichte van de y-as met een bepaalde factor te vermenigvuldigen. In dit geval nemen we (om redenen die later duidelijk worden) de factor $\frac{4}{5}$. De nieuwe figuur, die zo ontstaat noemen we K.

b. Leg uit dat een punt (p, q) op K ligt, precies dan als $(\frac{5}{4}p, q)$ op L ligt.

c. Toon aan dat de punten (p, q) op K voldoen aan de vergelijking: $p^2 - 12p + q^2 = 0$.
d. Laat zien dat K een cirkel voorstelt door de vergelijking in standaardvorm te schrijven.
e. Kun je nu uitleggen waarom we de vermenigvuldigingsfactor $\frac{4}{5}$ hebben gekozen.

Dat de figuur in opgave 3 via een geschikte lijnvermenigvuldiging kon overgaan in een cirkel, was te danken aan het feit dat de coëfficiënten van x^2 en y^2 in de vergelijking van L hetzelfde teken hadden, namelijk +16 en +25. De zogenaamde **excentriciteit** e blijkt hierbij een cruciale rol te spelen. Dit wordt geïllustreerd door de volgende opgave.

5 Gegeven is de lijn k: $x = -1$ en het punt $E(1, 0)$. De kromme K bestaat uit alle punten, waarvoor $d(P, E) = e \cdot d(P, k)$ voor zeker getal $e > 0$.
a. Laat zien dat voor punten $P(x, y)$ op K geldt: $(1-e^2) \cdot x^2 - (2+2e^2) \cdot x + 1 - e^2 + y^2 = 0$.
b. Laat zien dat de coëfficiënten van x^2 en y^2 in de vergelijking van K hetzelfde teken hebben, precies dan als $0 < e < 1$.

Dat de richtlijn in opgave 5 verticaal ligt, doet voor de vorm van de figuur niet terzake. We kunnen dus concluderen:

Voor $0 < e < 1$ is de kromme bestaande uit alle punten P met $d(P, E) = e \cdot d(P, k)$ een ellips.

6 Gegeven is de lijn l: $x + y = 0$ en het punt $E(1, 1)$.
Stel een vergelijking op van de ellips met richtlijn l, brandpunt E en excentriciteit $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

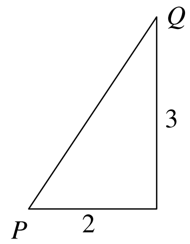
Blijft over het geval waarbij de excentriciteit $e > 1$. De krommen die hierbij horen worden hyperbolen genoemd. De bekende hyperbolen met vergelijking $x \cdot y = c$ (met c een constante) vallen hier ook onder, zoals blijkt uit de volgende opgave.

7 Gegeven is de lijn m: $x + y = \sqrt{2}$ en het punt $M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Laat zien dat de kromme bestaande uit alle punten P waarvoor $d(P, M) = \sqrt{2} \cdot d(P, m)$ voldoet aan de hyperboolvergelijking $x \cdot y = 1$.

8 Als we de richtlijn en het brandpunt van opgave 7 over +45° om de oorsprong draaien, krijgen we bij gelijke excentriciteit natuurlijk een gedraaide hyperbool. De nieuwe richtlijn noemen we n en het nieuwe brandpunt noemen we N.
a. Bepaal een vergelijking van lijn n en de coördinaten van punt N.
b. Laat zien dat de nieuwe kromme voldoet aan de vergelijking $y^2 = x^2 + 2$.

Antwoorden

1.2 Cartesisch assenstelsel



1 a. Stelling van Pythagoras:
$PQ^2 = 2^2+3^2 = 13$, dus $PQ = \sqrt{13}$.
b. (4,1), (4,-3), (3,-4), (-1,-4), (-2,-3), (-2,1), (-1,2)

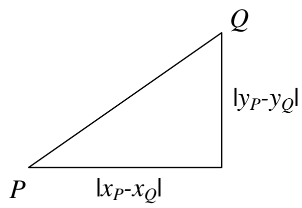
2 a. $M = (2, \frac{1}{2})$
b. (8, 14) ; (550, 28)
c. De x-coördinaat van het midden is het gemiddelde van de x-coördinaten.
De y-coördinaat van het midden is het gemiddelde van de y-coördinaten.

3 $B = (4,9)$

4 a. 7 ; 13
b. 28 ; 5

5 a. 1 ; 3 ; 7
b. Omdat de lijn l verticaal loopt, wordt de afstand tussen P en l horizontaal gemeten en heb je dus niets met de y-coördinaat te maken.
b. $x_P - 4$; 0 ; $4 - x_P$

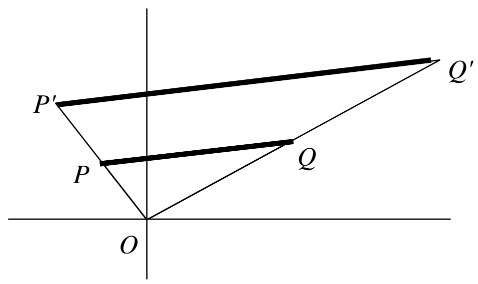
6 $d(P,k) = | y_P - 3 |$



7 Stelling van Pythagoras: $PQ^2 = |x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2$.
De absolute-waardestrepen staan er omdat je niet bij voorbaat weet of x_P of x_Q het grootst is en of y_P of y_Q het grootst is.

8 $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$; $\sqrt{99^2 + 20^2} = 101$; 5

9 Dan wordt de afstand PQ ook twee keer zo groot.
$OP' = 2 \cdot OP$ en $OQ' = 2 \cdot OQ$,
PQ past twee keer op $P'Q'$.



10 AB: $x = 2$; $d(C,AB) = 1$; $d(A,B) = 1$.
Dus oppervlakte driehoek $ABC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

11 Dat is een oneindig lange horizontale strook van breedte 2.

12 a. Dat is een rechthoek van 6 bij 4.
b. $|x-1| \leq 3$ en $|y-1| \leq 2$

1.3 Terug naar de schat

1 a. $T = (b,a)$; $Q = (2+a , 2-b)$
b. $S = (\frac{1}{2}(-a + 2+a) , \frac{1}{2}(b + 2-b)) = (1,1)$

c. S hangt niet af van a en b. Voor elk startpunt P kom je dus altijd op dezelfde plek uit.
d. Maak een vierkant met OK als diagonaal. De schat ligt dan op het hoekpunt van dat vierkant, "boven" de lijn OK.
e. Om op het andere hoekpunt uit te komen moet je bij de route (zie 1.1) twee keer rechtsaf slaan in plaats van linksaf.

2 a. $M = (\frac{1}{2}c\,,\ \frac{1}{2}d)$; $N = (\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b\,,\ \frac{1}{2}d)$
b. M en N hebben dezelfde tweede coördinaat.
c. De afstand $MN = \frac{1}{2}|b|$ en de afstand OB is $|b|$. Dus $MN = \frac{1}{2}OB$.

1.4 Het begrip vergelijking

1 a. $y = 4$ of $y = -4$; $x = 3$ of $x = -3$; $y = \sqrt{21}$ of $y = -\sqrt{21}$
c. $-5 \le x \le 5$
d. Een cirkel met straal 5 en middelpunt O
(x,y) ligt op die cirkel precies dan als de afstand van (0,0) en (x,y) gelijk aan 5 is, dus als $x^2 + y^2 = 25$ (volgens de stelling van Pythagoras of via de afstandsformule).

2 a. rechte lijn, richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$, snijpunt met y-as: (0,4)
b. verticale rechte lijn: $x = -3\frac{1}{2}$
c. twee horizontale lijnen: $y = 2$ en $y = -2$
d. twee lijnen: $y = x$ en $y = -x$
e. twee lijnen: $x = -3$ en $y = 2$
f. één punt: (0,2)
g. halve lijn: $y = x$ met $x \ge 0$
h. twee lijnen: $y = x+1$ en $y = x-1$
i. een lijn met een gaatje: $y = 4x$ met $x \ne 0$

3 Je kunt de formules schrijven als: $y = -x^2$ en $y = \dfrac{5}{x^2+1}$.

4 a. (-2, 1), (2, -1) en (-2, -1).
b. Als (a,b) op de kromme ligt, is $2a^2 + 5b^2$ gelijk aan 7. Dan zijn ook $2\cdot(-a)^2 + 5\cdot(-b)^2$, $2\cdot a^2 + 5\cdot(-b)^2$ en $2\cdot(-a)^2 + 5\cdot b^2$ gelijk aan 7. Dus liggen ook $(-a,-b)$, $(a,-b)$ en $(-a-b)$ op de kromme.
c. Ja, want als (a,b) op de kromme ligt, dan ligt ook $(-a,-b)$ op de kromme (zie b).

5 a. $(-\frac{1}{2}, -1)$
b. Als een punt (a,b) op de kromme L ligt, is $2a^2 + 3ab + 5b^2$ gelijk aan 7. Dan is ook $2\cdot(-a)^2 + 3\cdot{-a}\cdot{-b} + 5\cdot(-b)^2$ gelijk aan 7, dus dan ligt ook $(-a,-b)$ op de kromme L.

6. Gegeven is dat $a^2 - ab + 1 = 0$. Maar a is zeker niet 0, want dan zou $a^2 - ab + 1 = 1$.
Dus mag je delen door a^2. Dan krijg je dat $1 - \dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{a^2} = 0$. Ofwel $\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a}\cdot b + 1 = 0$.
En dat betekent dat $(\frac{1}{a}$, b) op de kromme ligt.

2.1 Vergelijkingen van een rechte lijn

1 a. $y = -0{,}1x - 6$
b. $y = \sqrt{2}\, x$
c. $y = -x + 97$
d. $y = -1\frac{2}{3}x + 83$
e. $y = 53$

2 $y - q = m \cdot (x - 0)$, en dat kun je schrijven als $y = mx + q$.

3 a. $y - q = \frac{q-0}{0-p}(x - 0)$, en dat kun je schrijven als $y = -\frac{q}{p}x + q$.
b. Deel beide kanten van de laatste vergelijking door q; dat geeft: $\frac{y}{q} = -\frac{x}{p} + 1$. Tel dan aan beide kanten $\frac{x}{p}$ op en je krijgt de gewenste vergelijking.

4 a. Omdat de x-coördinaten van de twee punten gelijk zijn, zou je in de formules moeten delen door 0, hetgeen onmogelijk is.
b. $x = 3$

5 a. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$
b. $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$

6 a. als $c = 0$ en $a \neq 0$ of $b \neq 0$
b. als $b = 0$ en $a \neq 0$
c. als $a = 0$ en $b \neq 0$
d. het hele vlak
e. niets: de lege verzameling

7 a. De lijnen hebben dezelfde richting.
b. De lijnen gaan allemaal door het punt (0,3).
c. De lijnen gaan allemaal door het punt (2,5).
d. De lijnen zijn allemaal verticaal.

8 $y = -\frac{4}{5}x + 4\frac{3}{5}$ of $4x + 5y = 23$

9 De lijn door de eerste twee punten heeft vergelijking $y = -4x + 11$.
Het derde punt ligt niet op de lijn, want $6 \neq -4 \cdot 1 + 11$.

10 a. $y = -3x + 5$
b. $y = -3x - 5$
c. $y = 3x + 5$
d. $y = -mx - n$
e. $y = -mx + n$
f. $y = mx - n$

2.2 Ligging van twee lijnen ten opzichte van elkaar

1 a. (2,5)
   b. (1,2)

2 a. $p = -2$
   b. $p = -2$ en $q = 2$

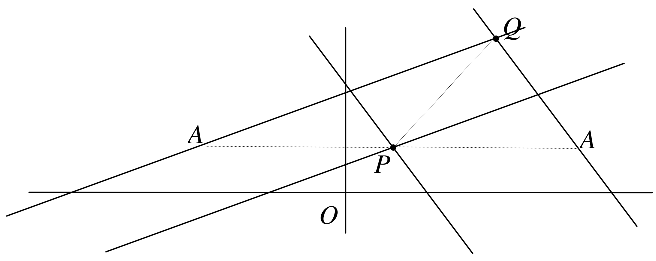
3 a. strijdig als $p = -2$ en $q \neq 3$
   afhankelijk als $p = -2$ en $q = 3$
   onafhankelijk als $p \neq -2$
   b. $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$, $y = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}q$
   c. $x = \frac{6}{2+p}$, $y = \frac{6}{2+p}$

4 a. $-\frac{a}{b}$ en $-\frac{p}{q}$
   b. Een stelsel in onafhankelijk precies dan als de richtingscoëfficiënten verschillend zijn.
   Dus als $-\frac{a}{b} \neq -\frac{p}{q}$, dus als (vermenigvuldig met bq) $aq \neq bp$.
   c. Bijvoorbeeld als $b = 0$. Dan is de eerste lijn verticaal. Het stelsel is dan onafhankelijk als de tweede lijn niet verticaal is, dus als $q \neq 0$. Ook $a \neq 0$, want gegeven is dat a en b niet beide 0 zijn. Dus $bp = 0$ en $aq \neq 0$, dus $bp \neq aq$. Het omgekeerd geldt ook: als $bp \neq aq$ en $b = 0$, dan is $bp = 0$ en dus $aq \neq 0$. Dus $q \neq 0$. Dus is de tweede lijn niet verticaal, terwijl de eerste dat wel is. Dus zijn de twee lijnen niet onafhankelijk.

5 a. Bijv. als $a \neq 0$. $ax + by = c \Leftrightarrow \frac{p}{a} \cdot (ax + by) = \frac{p}{a} \cdot c \Leftrightarrow px + \frac{bp}{a} y = \frac{cp}{a} \Leftrightarrow px + qy = \frac{cp}{a}$.
   En $\frac{cp}{a} = r$ precies dan als $cp = ar$. Dus de lijnen vallen samen als $cp = ar$.
   b. Een zelfde redenering als bij a. geeft: de lijnen zijn evenwijdig als $cp \neq ar$.

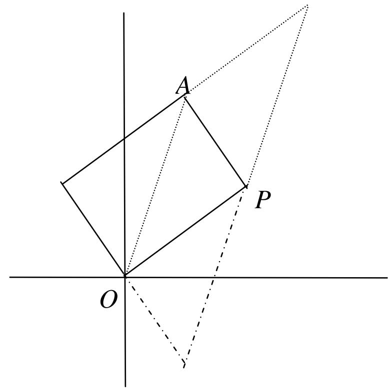
6 a. $p(p+3) = p^2+3p$ en $(p+1)(p+2) = p^2+3p+2$. Deze twee zijn verschillend voor elke p (ze verschillen namelijk constant 2.
   b. Het zijn in elk geval verschillende lijnen, want (0,0) ligt op de eerste lijn en niet op de tweede. De lijnen zijn evenwijdig als $p(p+3) = (p+2)^2$, dus als $p^2+3p = p^2+4p+4$, dus als $p=-4$.

7 Als $b = 2a$ en $2a+3 = 2(b-1)$. Dit is het geval als $2a+3 = 2(2a-1)$, dus als $a = 2\frac{1}{2}$. Dan is $b = 5$.



8 a. Trek PA // x-as en $PA = 4$.
   Dus $A = (5,1)$ of $A = (-3,1)$
   b. Als $A = (5,1)$, dan zijn de lijnen:
   $y = -x + 6$ en $y = -x + 2$.
   Als $A = (-3,1)$, dan zijn de lijnen:
   $y = \frac{1}{3}x + 2$ en $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

9 a.



b. (6,9) , (-2,3) , (2,-3)

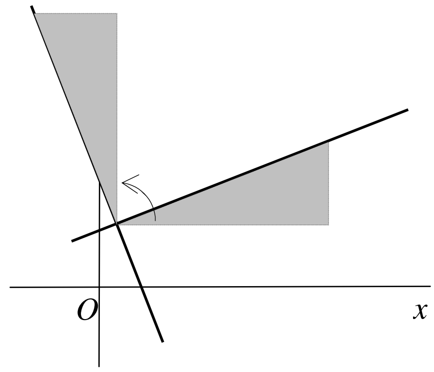
10 a. $y = 1\frac{1}{2}x$, $y = 3$, $x = 2$

b. (2,3)

c. Dat klopt.

2.3 Loodrecht

1. a. Draai de hellingsdriehoek van de ene lijn een kwartslag.



b. $-\frac{7}{2}$

c. Omkeren en het tegengestelde nemen. Dus als de ene richtingscoëfficiënt $\frac{a}{b}$ is, is de andere $-\frac{b}{a}$

d. Anders bestaat de richtingscoëfficiënt van een van de twee lijnen niet.

2 *AB* heeft rc. -1. *BC* heeft dus rc 1. *BC*: $y = x + 2$.
Snijden met $3x - 4y = 2$ geeft $C = (-10, -8)$.
Hieruit volgt $D = (-11,-7)$.

3 *AB*: $y = \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}$; hoogtelijn uit *C* op *AB*: $y = -\frac{4}{3}x + 17$. Snijpunt is (6,9).
Basis *AB* is 15, hoogte is 10; dus oppervlakte driehoek *ABC* = 75.

4 a. rc *AB* = 3. Dus rc *AC* = $-\frac{1}{3}$. Dus *AC*: $y - 4 = -\frac{1}{3}(x-1)$. Snijden met x=0 geeft $C = (0, 4\frac{1}{3})$.

b. rc *CA* = 4-c en rc *CB* = $\frac{c-10}{-3}$. $CA \perp CB$ als $(4-c)\cdot\frac{c-10}{-3} = -1$. Dus $c = 7+\sqrt{6}$ of $7-\sqrt{6}$.

5 a. Middelloodlijn van *AB*: $y = x - 3$, middelloodlijn *AC*: $y = -2x + 18$

b. (7,4)

c Middelloodlijn *BC*: $y = -x + 11$; (7,4) ligt inderdaad op deze lijn.

6 $y = 1\frac{1}{2}x + p$ of $3x - 2y = c$

2.4 De afstand tussen een punt en een lijn

1 a. Snijpunt met de *x*-as is (8,0) en snijpunt met de *y*-as is (0,6). Dus a=8 en b=6 en $\sqrt{a^2+b^2} = 10$. Dus de afstand is $\frac{8\cdot 6}{10} = 4{,}8$

b. Die afstand is 10 keer zo groot (dat kun je meetkundig inzien).
Je kunt het ook begrijpen met de formule. Daarin worden p en q beide 10 keer zo groot, dus de teller wordt 100 keer zo groot. En de noemer wordt 10 keer zo groot. Dus de afstand wordt netto 10 keer zo groot.

c. Die is eenderde van de afstand uit a., dus 1,6.

d. Die is ook 1,6 (de lijnen $3x + 4y = 8$ en $3x + 4y = -8$ zijn elkaars spiegelbeeld in de oorsprong).

e. Die is 4,8 - 1,6 = 3,2 (teken een plaatje!)

2 a. In de formule is $p = \frac{10}{a}$ en $q = \frac{10}{b}$. Dus de afstand is $\dfrac{|\frac{10}{a}| \cdot |\frac{10}{b}|}{\sqrt{(\frac{10}{a})^2 + (\frac{10}{b})^2}}$.

b. De teller is gelijk aan $\frac{100}{|ab|}$. De noemer is gelijk aan $\sqrt{100(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})} = 10\sqrt{(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}$

Vermenigvuldig teller en noemer met $|ab|$. De teller wordt dan 100 en de noemer $10\sqrt{b^2 + a^2}$. Deel ten slotte teller en noemer nog door 10.

c. Stel $a = 0$ en $b \neq 0$. Dan is $d(O,k) = |\frac{c}{b}|$ en de formule geeft $\dfrac{|c|}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{|c|}{|b|} = \left|\dfrac{c}{b}\right|$.

3 a. $\frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$; $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$; $\sqrt{5}$

b. $4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$; $4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

4 a. $\dfrac{33}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \dfrac{10}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{23}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (teken een plaatje!)

b. $\dfrac{43}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

c. $\dfrac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

5 De middenparallel heeft een vergelijking van de vorm $3x + 4y = c$. Er moet gelden: $\dfrac{|-8 - c|}{5} = \dfrac{|12 - c|}{5}$. Hieruit volgt: $c = 2$. Dus de vergelijking van de lijn is $3x + 4y = 2$.

6 Die lijnen hebben een vergelijking van de vorm $3x + 4y = c$.
Er moet gelden: $\dfrac{|-8 - c|}{5} = 2$. Hieruit volgt: $c = 2$ of $c = -18$.

7 Noem het snijpunt van zo'n lijn met de y-as: $(0,q)$. Er moet gelden: $\dfrac{6 \cdot |q|}{\sqrt{36 + q^2}} = 3$.

Hieruit volgt dat $q = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ of $q = -2\sqrt{3}$.

De richtingscoëfficiënten van de lijnen zijn $\dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$. De vergelijkingen van de twee lijnen zijn $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ en $y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

of: De lijn gaat door (6,0), dus de vergelijking is van de vorm $x + by = 6$. De afstand van deze lijn tot O is dus $\dfrac{6}{\sqrt{1^2 + b^2}} = 3$, dus $\sqrt{1 + b^2} = 2$, dus $b = \pm\sqrt{3}$. De vergelijkingen van de twee lijnen zijn dus $x + \sqrt{3}\,y = 6$ of $x - \sqrt{3}\,y = 6$.

8 De lijn moet door het midden van PQ gaan, dat is het punt (2,1). Dus $a = 2+1 = 3$.

9 a. $2x + 3y = 22$

b. $\frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8}{13}\sqrt{13}$

10 a. $ax + by = ap + bq$

11 a. $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ b. 4 c. $\sqrt{29}$ d. $\sqrt{10}$

12 Omdat d(A,B) = 5, moet d(C, AB) = 2. Lijn AB heeft vergelijking $3x - 4y = 2$.

Punt C is van de vorm (x, $2x - 3$). Er moet gelden: $\frac{|3x-4\cdot(2x-3)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$, dus

$\frac{|-5x+10|}{5} = 2$ ofwel $|-5x+10| = 10$. Dus $-5x+10=10$ of $-5x+10=-10$.

Hieruit volgt $x = 0$ of $x = 4$. De bijbehorende punten zijn (0, -3) en (4, 5).

13 Zeg $P = (4, y)$. Dan moet gelden: $\frac{|2\cdot 4+y-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|4-2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$, dus $|3+y| = |3-2y|$.

Dus $3+y=3-2y$ of $3+y=-(3-2y)$. Dit geeft $y = 0$ of $y = 6$.

2.5 Lijnenparen

1 a. $y = \frac{1}{2}x$ en $y = -\frac{1}{2}x$

b. De vergelijking kun je ook schrijven als $(x-2y)(x-y) = 0$, dus $y = \frac{1}{2}x$ of $y = x$. De figuur bestaat dus uit twee lijnen (door de oorsprong).

c. De vergelijking kun je ook schrijven als $(y-3)(y+2) = 0$, dus $y = 3$ of $y = -2$. De figuur bestaat dus uit twee (horizontale) lijnen.

2 a. $p = 8$: $x^2 - 6xy + 8y^2 = 0$, *ofwel* $(x-4y)(x-2y) = 0$, ofwel $x = 4y$ of $x = 2y$. De figuur bestaat uit twee lijnen door de oorsprong.

$p = 9$: $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$, *ofwel* $(x-3y)^2 = 0$, ofwel $x = 3y$. De figuur bestaat uit één lijn door de oorsprong.

$p = 10$: $x^2 - 6xy + 10y^2 = 0$, *ofwel* $(x-3y)^2 + y^2 = 0$, ofwel $x = 3y$ en $y = 0$. De figuur bestaat uit alleen de oorsprong.

b. $p < 9$

3 $(3x + 5y - 6)(x - 4) = 0$

4 $(x + y - p)(x - y - q) = 0$

5 a. $x^2 + 2qxy + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2qxy + q^2y^2 - q^2y^2 + y^2 = 0 \Rightarrow$

$(x^2 + 2qxy + q^2y^2) - q^2y^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x+qy)^2 + (1-q^2)\cdot y^2 = 0$

b. Als $1 - q^2 < 0$, dan is $(x+qy)^2 = (q^2-1)\cdot y^2$. Dus $x + qy = \pm\sqrt{q^2-1}\cdot y$. De figuur bestaat dus uit twee lijnen. Dit is het geval als $q < -1$ of $q > 1$.

Als $1-q^2=0$, dan $(x+qy)^2=0$. Dus $x+qy=0$. De figuur bestaat dus uit één lijn. Dit is het geval als q = -1 of q = 1.

Als $1-q^2>0$, dan moet $x+qy=0$ en y = 0. Dus $x = y = 0$ is de enige oplossing. De figuur bestaat dus uit één punt. Dit is het geval als $-1 < q < 1$.

2.6 Parametervoorstelling van een rechte lijn

1 a. $t = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, dus $y = 4(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}) + 3$, ofwel $y = 1\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

b. Dan blijft de baan een deel van de lijn $y = 4(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})$, alleen loopt het punt nu twee keer zo snel en de andere kant op.

2 a. $Q = (t+a\ ,\ t)$

b. $y = x - a$

c. Ja, een lijn met richtingscoëfficiënt 1 die de y-as snijdt in (0,-a) ; die hoek is 45º.

3 $Q = (t - a\ ,\ -t)$, dus $x = t - a$ en $y = -t$, dus $y = -x - a$.
De baan is een lijn met richtingscoëfficiënt -1 die de y-as snijdt in (0,-a) onder een hoek van 45º.

4 a. Punt S lijkt op een rechte lijn te liggen.

b. Zie de figuur rechtsboven.
$Q = (0,2+t)$ en $P = (4+3t,0)$
De lijn door P met rc -1 is $y = -x + 4+3t$.
De lijn door Q met rc 1 is $y = x + 2+t$.
Het snijpunt $S = (1+t,3+2t)$, dus $x_S = 1+t$ en $y_S = 3+2t$.
$y_S = 3 + 2(x_S-1) = 2x_S + 1$

5 a. Zie de figuur rechts.

b. $M = (t +$

3.1 Cirkels en lijnen

1 a. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$
  b. $(x-1)^2+(y-3)^2=5$
  c. $(x-1)^2+(y-5)^2=34$
  d. $x^2+(y-0{,}6)^2=11{,}56$

2 De coëfficiënten van x^2 en y^2 in de vergelijking moeten gelijk zijn. Het kan echter zo zijn dat slechts één of geen enkel punt aan de vergelijking voldoet.

3 a. Middelpunt = (-1, -1) en straal = $\sqrt{7}$.
  b. Middelpunt = ($\frac{1}{2}$, -3) en straal = $4\frac{1}{2}$.
  c. Middelpunt = (-1, 1) en straal = 2.
  d. Middelpunt = (1, 1) en straal = 2.

4 $y=x-2 \Rightarrow (x-2)^2+(x-1)^2=25 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2-2x+1=25 \Rightarrow$
$2x^2-6x-20=0 \Rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x+2)\cdot(x-5)=0 \Rightarrow x=-2 \textit{ of } x=5$.
De snijpunten zijn (-2, -4) en (5, 3).

5 a. (-1, 4) en (4, 1)
  b. (0, -2)
  c. geen snijpunten.

6 a. d(M, l) = $\frac{17}{\sqrt{34}}=\sqrt{8\frac{1}{2}}$ en dat is kleiner dan r = $\sqrt{17}$, dus er zijn twee snijpunten.
  b. d(M, l) = $\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ en dat is gelijk aan de straal, dus er is één snijpunt.
  c. d(M, l) = $\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ en dat is groter dan r = $\sqrt{5}$, dus er is geen snijpunt.

7 a. $\frac{y}{x}$
  b. $\frac{y-2}{x-6}$
  c. $\frac{y}{x}\cdot\frac{y-2}{x-6}=-1 \Leftrightarrow y\cdot(y-2)=-x\cdot(x-6) \Leftrightarrow y^2-2y=-x^2+6x \Leftrightarrow x^2+y^2=6x+2y$.
  d. (4, -2) en (2, 4)
  e. $y=2x-10$ en $y=-\frac{1}{2}x+5$

8 a. (10, 10) en (14, -2)
  b. $y=-x+20$ en $y=7x-100$

3.2 Parabolen, ellipsen en hyperbolen

1 d(P, E) = d(P, k) $\Rightarrow x^2+(y-1)^2=(y+1)^2 \Rightarrow x^2+y^2-2y+1=y^2+2y+1 \Rightarrow$
$x^2=4y \Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$.

2 a. d(P, F) = d(P, l) $\Rightarrow x^2+(y-a)^2=(y+a)^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ay+a^2=y^2+2ay+a^2$
$\Rightarrow x^2=4ay \Rightarrow y=\frac{1}{4a}x^2$.

b. $a=\frac{1}{4}$

3 d(P, F) = d(P, m) $\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=\frac{(x+y+2)^2}{2}$$
$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=\frac{x^2+2xy+y^2+4x+4y+4}{2}$$
$$\Rightarrow 2\cdot\left(x^2+y^2-2x-2y+2\right)=x^2+2xy+y^2+4x+4y+4$$
$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4x-4y+4=x^2+2xy+y^2+4x+4y+4$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2xy-8x-8y=0$$

4 a. d(P, F) = $\frac{3}{5}$ · d(P, l) $\Rightarrow \sqrt{(a-3)^2+b^2}=\frac{3}{5}\cdot|a+5| \Rightarrow (a-3)^2+b^2=\left(\frac{3}{5}\cdot|a+5|\right)^2 \Rightarrow$
$a^2-6a+9+b^2=\frac{9}{25}\cdot\left(a^2+10a+25\right) \Rightarrow 25\cdot\left(a^2-6a+9+b^2\right)=9\cdot\left(a^2+10a+25\right)$
$\Rightarrow 25a^2-150a+225+25b^2=9a^2+90a+225 \Rightarrow 16a^2-240a+25b^2=0$.

b. (p, q) op K is het beeldpunt van ($\frac{5}{4}p$, q) op L bij lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{4}{5}$. Dus (p, q) ligt op K, precies dan als ($\frac{5}{4}p$, q) op L ligt.

c. $16\left(\frac{5}{4}p\right)^2-240\cdot\frac{5}{4}p+25q^2=0 \Rightarrow 25p^2-300p+25q^2=0 \Rightarrow p^2-12p+q^2=0$.

d. K: $(p-6)^2+q^2=36$

e. Door de lijnvermenigvuldiging moeten de getallen voor de kwadraten gelijk worden. Voor de benodigde factor f moet dus gelden: $25\cdot f^2=16$. Dus $f=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

5 a. d(P, E) = e· d(P, k) $\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=e\cdot|x+1| \Rightarrow (x-1)^2+y^2=e^2\cdot(x+1)^2 \Rightarrow$
$x^2-2x+1+y^2=e^2x^2+2e^2x+e^2 \Rightarrow x^2-e^2x^2-2x-2e^2x+1-e^2+y^2=0 \Rightarrow$
$\left(1-e^2\right)\cdot x^2-\left(2+2e^2\right)\cdot x+1-e^2+y^2=0$.

b. De coëfficiënten van x^2 en y^2 zijn respectievelijk $1-e^2$ en 1. Dus ze hebben hetzelfde teken precies dan als $1-e^2>0$. Omdat $e>0$, moet $0<e<1$.

6 $\quad \mathrm{d}(P, E) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{d}(P, l) \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y|}{2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \Rightarrow$

$4 \cdot \left(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1\right) = x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow$

$4x^2 - 8x + 4y^2 - 8y + 8 = x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x - 8y + 8 = 0\,.$

7 $\quad \mathrm{d}(P, M) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{d}(P, m) \Rightarrow \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{\left|x+y-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = \left(x+y-\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$

$x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + 2 + y^2 - 2\sqrt{2} \cdot y + 2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - 2\sqrt{2} \cdot y + 2 \Rightarrow$

$2 = 2xy \Rightarrow xy = 1\,.$

8 a. n: $y = 1$ en $N(0, 2)$

b. $\mathrm{d}(P, N) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{d}(P, n) \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{2} \cdot |y-1| \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 2 \cdot (y-1)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 2y^2 - 4y + 2 \Rightarrow x^2 + 2 = y^2\,.$