Havo wiskunde d

Kansen 1

# de Wageningse Methode

**Auteurs** Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
**Homepage** www.wageningse-methode.nl
**ISBN** xxx
**Illustraties** Wilson Design Uden
**Distributie** Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

# Inhoudsopgave

# Voorwoord

Dit hoofdstuk is het eerste van twee over kansrekening.
Het behoort tot de stof van het vak 4 en 5 havo wiskunde d.
Belangrijk in de kansrekening is het tellen van mogelijkheden. Daarin wordt in dit hoofdstuk uitgebreid aandacht besteed.

In dit hoofdstuk wordt je nogal eens gevraagd een aantal malen met een dobbelsteen of munt te gooien.
Dit kun je ook 'virtueel' met het programma VUSTAT doen.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

Deze versie is van december 2020.

## Overzicht iconen . . .

**Theorie**
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

**Voorbeeld**
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

**Opmerking**
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

**Historie**
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

**Werkblad**
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

**Computer**
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

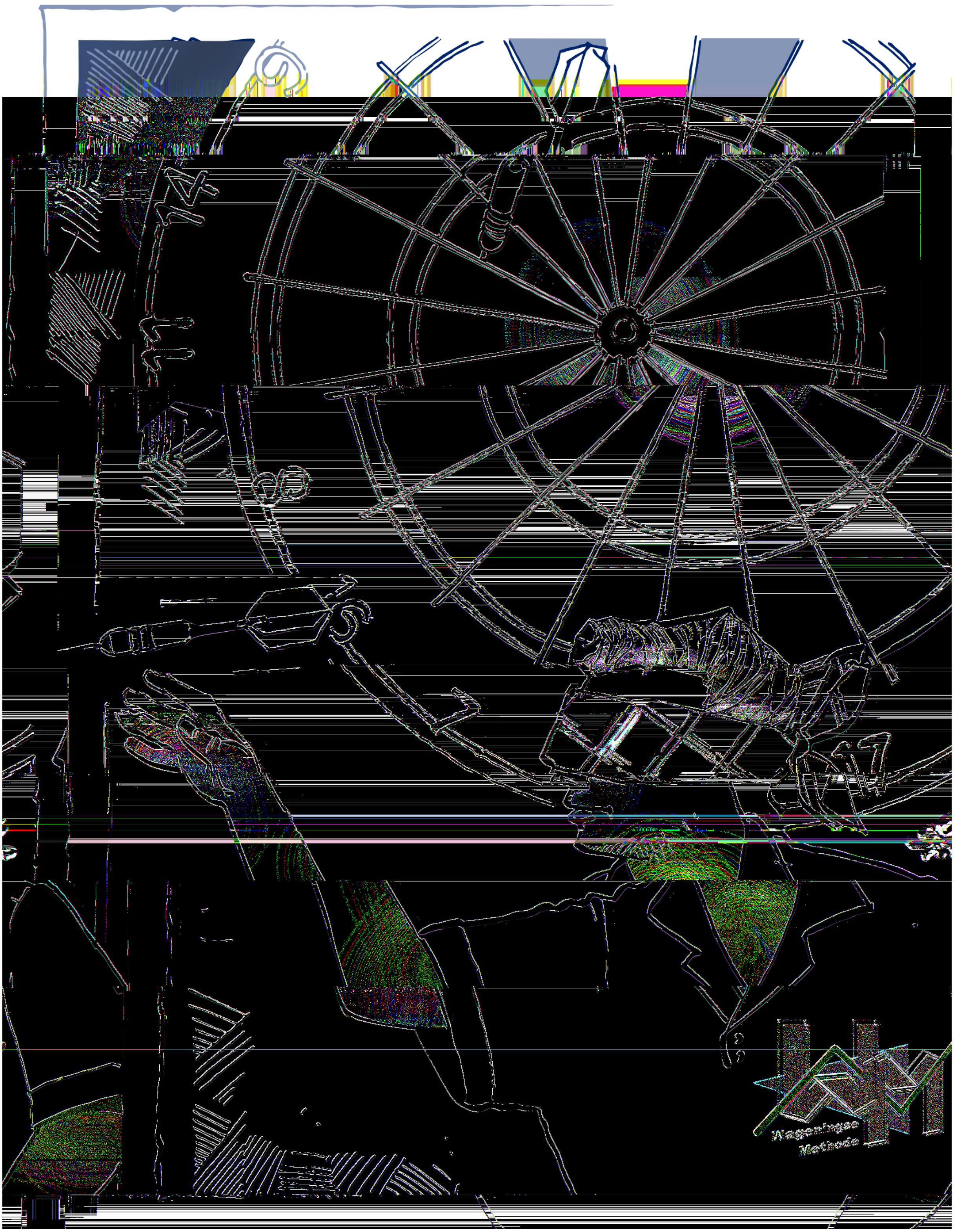
**Echt, moet kunnen**
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.

**Puzzelen**
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

**Pittig**
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

**Hint**
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

**Facultatief**
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.


Wageningse
Methode

# 4.1 Intro

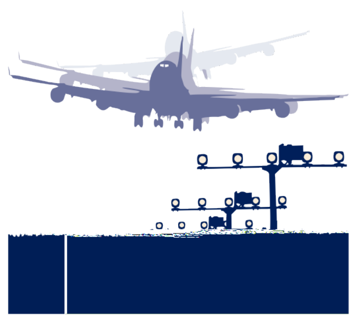
Dagelijks heb je te maken met onzekerheden. Gaat het vandaag regenen? Zijn er leraren ziek? Gaat Ajax winnen vanavond? Van deze dingen weet je niet precies hoe groot de kans is dat ze zullen gebeuren. Wel weet je vaak hoe groot die kans ongeveer is. Ofschoon anderen die kans wel eens heel anders zouden kunnen inschatten.

**1** Hoe groot schat jij de kans op de volgende gebeurtenissen? Geef de kans als percentage tussen $0\%$ en $100\%$.

**a** Het Nederlandse voetbalelftal wordt wereldkampioen bij de eerstvolgende gelegenheid.
**b** Volgende week valt er geen regen op het schoolplein.
**c** Volgende schoolweek vallen er voor jou drie of meer lessen uit wegens ziekte van docenten.
**d** Volgende week gebeurt er een ernstig vliegtuigongeluk in West-Europa.
**e** Volgend jaar wint een Nederlander de Nobelprijs voor literatuur.
**f** Volgend jaar wordt er een elfstedentocht verreden.

Schatten van kansen is een hachelijke zaak. Je gevoel kan je behoorlijk in de steek laten. Een pessimist zal een kans op een ernstig ongeluk groter inschatten dan een optimist. Een gokker zal de kans op de hoofdprijs in een loterij vaak hoger inschatten dan iemand die op zekerheid speelt. Het schatten van zulke kansen is dus *subjectief*.

**2** "De crashkans bij Schiphol is eens in de $14{,}5$ jaar" stond er in Trouw van 10 maart 1993. Dat was vlak na de Bijlmerramp. Neem aan dat Trouw het bij het rechte eind heeft.



**a** Hoe groot is dan de kans dat er volgend jaar een crash bij Schiphol plaatsvindt?

De kans dat bij de lotto de jackpot valt (iemand heeft alles goed voorspeld) is ongeveer $40\%$. Elke week wordt één keer de lotto gespeeld.

**b** Hoeveel keer per jaar mag je verwachten dat de jackpot valt?

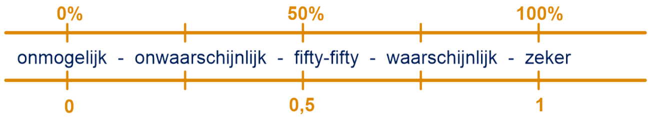
**3** Kans op zon is morgen $40\%$.

**a** Wat betekent dat, denk je?

Kans op regen is morgen $40\%$.

**b** Wat betekent dat, denk je?

We drukken de kans uit in een *percentage tussen 0% en 100%*, of *in een breuk tussen 0 en* 1. Hieronder staan kansen op beide manieren op een getallenlijn.




Meestal maakt het niet uit welke manier je kiest om een kans weer te geven. Bijvoorbeeld: kans 75% of kans $\frac{3}{4}$. Soms is het gemakkelijker een kans met een breuk aan te geven dan door een percentage.

**4** De kans dat een Nederlander in het weekend (zaterdag of zondag) geboren is, is $\frac{2}{7}$.

**a** Schrijf deze kans als percentage.

De kans dat je met een zuivere dobbelsteen 2 ogen gooit, is $\frac{1}{6}$.

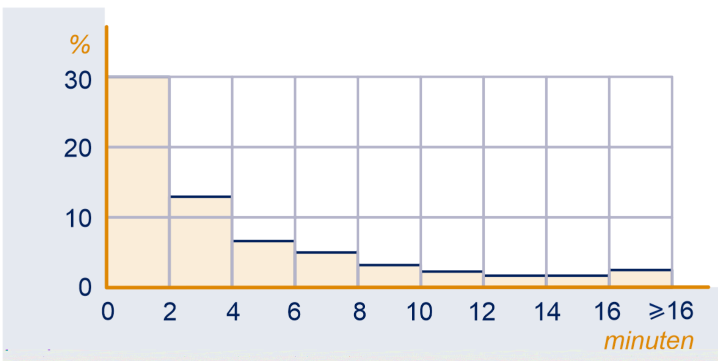
**b** Schrijf deze kans als percentage.

De kans dat een gezin met drie kinderen bestaat uit 2 jongens en 1 meisje is $37\frac{1}{2}$%.

**c** Schrijf dit percentage als breuk.

**d** Wat heeft je voorkeur, een breuk of een percentage?

**5** Vliegtuigen landen nogal eens met vertraging op een luchthaven. Dat heeft meestal te maken met een tekort aan landingsbanen. Zo'n vertraging kan oplopen tot meer dan tien minuten.
Bekijk de kansen in het plaatje hieronder.




Je kunt eruit aflezen dat 13% van de landingen meer dan 2 maar minder dan 4 minuten te laat plaatsvindt. 3% van de vliegtuigen landen zelf meer dan 16 minuten te laat.

**a** Van hoeveel procent van de landingen is de vertraging tussen 4 en 10 minuten?

# 4.1 Intro

De vluchten zonder vertraging zijn niet in het plaatje weergegeven.

**b** Hoeveel procent is dat?

Elke dag landen er zo'n 400 passagiersvliegtuigen.

**c** Hoeveel daarvan hebben een vertraging van 6 minuten of meer, verwacht je?

**6** In de tabel staan alle uitslagen van de eredivisie van het vaderlandse voetbal in 2006/2007 (van de website van de KNVB.

| | ADO | AJX | AZ | EXC | FEY | GRO | HEE | HER | NAC | NEC | PSV | RKC | RJC | SPA | TWE | UTR | VIT | WIL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ADO | | 1-2 | 1-3 | 2-2 | 3-3 | 1-3 | 2-3 | 2-0 | 0-2 | 0-2 | 0-2 | 1-1 | 0-2 | 2-4 | 1-2 | 1-1 | 1-3 | 2-1 |
| Ajax | 2-0 | | 2-2 | 2-2 | 4-1 | 3-2 | 0-1 | 3-0 | 2-0 | 2-0 | 0-1 | 5-0 | 2-0 | 5-2 | 1-1 | 5-1 | 3-0 | 6-0 |
| AZ | 2-2 | 1-1 | | 5-0 | 0-0 | 2-0 | 3-1 | 6-0 | 8-1 | 0-0 | 1-3 | 2-0 | 2-2 | 3-0 | 2-2 | 5-1 | 1-0 | 2-0 |
| Excelsior | 2-2 | 3-2 | Excelsior | | 3-1 | [illegible] | 3-2 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 3-1 | 6-1 | [illegible] | 1-1 | 0-0 | [illegible] | [illegible] | 3-1 |
| Feyenoord | 2-1 | 0-0 | Feyenoord | | 3-1 | 0-4 | 3-2 | 1-0 | | 0-4 | 4-3 | 0-0 | 3-2 | 1-1 | 1-1 | 3-1 | 1-1 | 3-2 |
| Groningen | 4-3 | 4-1 | Groningen | | 2-5 | 2-3 | 1-1 | 2-1 | 3-0 | | 1-1 | 2-1 | 3-1 | 4-1 | 0-2 | 1-1 | 2-1 | 0-1 |
| Heerenveen | 0-0 | 5-0 | Heerenveen | | 1-1 | 0-2 | 1-3 | 2-0 | 5-1 | 4-2 | | 5-1 | 4-2 | 3-0 | 0-0 | 1-0 | 1-0 | 2-0 |
| Heracles | 2-2 | 2-2 | Heracles | | 3-1 | 0-3 | 0-0 | 3-2 | 4-1 | 0-1 | 1-0 | | 2-0 | 0-0 | 0-2 | 1-1 | 1-1 | 2-3 |
| NAC | 2-1 | 0-0 | NAC | | 2-2 | 1-2 | 1-4 | 3-1 | 4-1 | 0-0 | 1-1 | 1-1 | | 0-2 | 1-1 | 2-1 | 0-2 | 3-1 |
| NEC | 1-0 | 1-2 | NEC | | 3-2 | 2-2 | 0-2 | 0-1 | 4-1 | 1-1 | 0-2 | 2-0 | 2-1 | | 2-1 | 1-0 | 0-0 | 1-2 |
| PSV | 5-1 | 4-0 | PSV | | 2-1 | 1-5 | 2-3 | 4-0 | 2-1 | 1-0 | 3-1 | 3-0 | 3-0 | 3-1 | | 2-0 | 4-1 | 7-0 |
| RKC | 3-1 | 1-1 | RKC | | 1-0 | 2-2 | 0-2 | 1-1 | 2-2 | 0-2 | 0-2 | 2-0 | 0-1 | 0-1 | 0-3 | | 3-2 | 2-1 |
| Roda JC | 2-4 | 2-1 | Roda JC | | 1-0 | 2-0 | 0-2 | 2-0 | 1-2 | 0-1 | 1-0 | 7-0 | 3-2 | 1-0 | 2-0 | 1-1 | | 2-1 |
| Sparta | 1-2 | 1-0 | Sparta | | 2-1 | 3-0 | 0-2 | 2-1 | 1-4 | 0-1 | 2-2 | 0-0 | 0-3 | 0-4 | 1-1 | 1-0 | 2-2 | |
| Twente | 2-0 | 0-0 | Twente | | 3-1 | 1-4 | 3-0 | 4-1 | 3-0 | 7-1 | 5-1 | 1-1 | 2-1 | 4-0 | 1-0 | 4-3 | 2-2 | 2-0 |
| Utrecht | 2-0 | 3-0 | Utrecht | | 2-0 | 2-3 | 0-4 | 1-0 | 2-1 | 3-0 | 1-0 | 0-0 | 1-0 | 3-0 | 1-1 | 5-0 | 2-0 | 2-2 |
| Vitesse | | 1-0 | Vitesse | | 2-2 | 4-2 | 1-3 | 2-3 | 0-1 | 3-2 | 1-3 | 4-0 | 0-1 | 1-1 | 0-1 | 3-1 | 0-0 | 3-0 |
| Willem II | 0-0 | | Willem II | | 2-1 | 0-2 | 0-4 | 2-1 | 3-5 | 3-0 | 1-3 | 2-0 | 0-2 | 1-0 | 1-3 | 3-1 | 0-1 | 0-0 |

Anneke heeft helemaal geen verstand van voetbal maar wel van kansrekening. 155 wedstrijden werden gewonnen door de thuisclub, 82 werden gewonnen door de uitspelende club en de overige 69 eindigden in een gelijkspel.
Uitgaande van de tabel maakt Anneke een schatting van de kans op een gelijkspel.

**a** Hoe groot schat zij die kans?

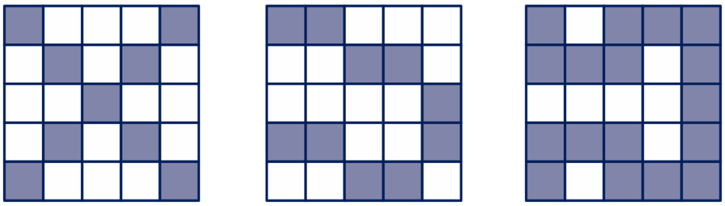
**b** Bepaal met behulp van de uitslagentabel hoe groot Anneke de kans schat op de uitslag 0-0 voor een wedstrijd in de eredivisie.

**Kans in de praktijk**

Als in 15 van de 123 gevallen zich iets voordoet, zeggen we dat de kans op dat iets $\frac{15}{123}$ is.

Vaak is zo'n kans gebaseerd op waarnemingen: men heeft dat iets 15 maal geconstateerd. Als het totaal aantal gevallen niet 123, maar een klein aantal is, kun je niet zinvol een uitspraak doen. Als bijvoorbeeld een vrouw drie kinderen heeft gekregen en het waren alledrie meisjes, en de vrouw is weer in verwachting, dan kun je niet zeggen dat de kans dat het een meisje wordt 100% is.

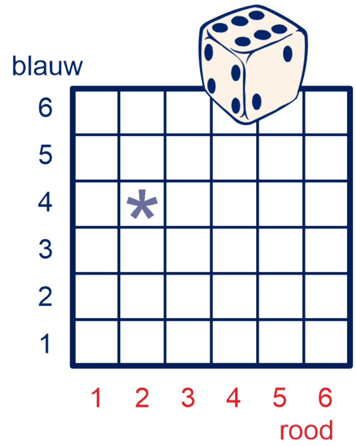
**7** Een kikker springt over de hieronder getekende tegelvloeren alsof zijn leven ervan afhangt. De kikker is chaotisch: soms maakt hij een kleine sprong, dan weer een grote. We nemen aan dat de kikker alle tegels van de vloer even vaak aandoet.



Geef bij elke vloer hoe groot de kans is dat de kikker op een zeker moment op een zwarte tegel zit.

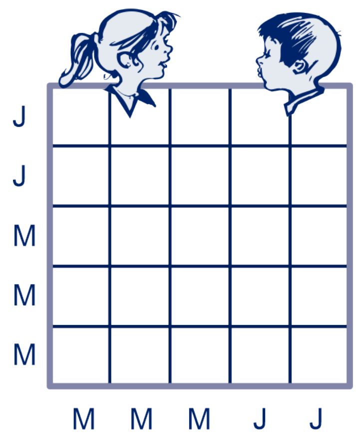
**8** Anneke werpt met twee dobbelstenen, een rode en een blauwe. We kunnen de zesendertig verschillende worpen aangeven in een vierkant. Voorbeeld: bij het hokje waar een * in staat hoort de worp “2 ogen met de rode en 4 ogen met de blauwe dobbelsteen”. De zesendertig worpen hebben allemaal dezelfde kans, namelijk kans $\frac{1}{36}$.
Bepaal de volgende kansen dat Anneke:

- **a** met de rode dobbelsteen hoger werpt dan met de blauwe,
- **b** met de rode en blauwe dobbelsteen evenveel ogen werpt,
- **c** met de rode dobbelsteen $2$ ogen meer werpt dan de blauwe,
- **d** met beide dobbelstenen een even aantal ogen werpt,
- **e** met minstens één dobbelsteen $6$ ogen werpt,
- **f** met de rode en de blauwe dobbelsteen samen $6$ ogen werpt




**9** In een klas moeten twee leerlingen worden afgevaardigd naar de leerlingenraad. Er hebben zich vijf leerlingen beschikbaar gesteld; twee jongens: Achim en Bourba en drie meisjes: Charlot, Dede en Eefje. In de mentorles zullen door loting twee van de vijf kandidaten worden aangewezen.

- **a** Leg uit hoe je in het vierkant hiernaast kunt zien dat er $10$ mogelijke paren leerlingen zijn (J = jongen, M = meisje).
- **b** Hoe groot is de kans dat twee meisjes worden aangewezen?
- **c** Hoe groot is de kans dat Achim en Bourba worden aangewezen?
- **d** Hoe groot is de kans dat de afvaardiging uit een jongen en een meisje zal bestaan?




**10** Anneke en Vinja hebben allebei een kamer in een hotel gereserveerd. Hun kamers liggen op de tweede verdieping. Het hotel heeft zeven kamers op de tweede verdieping, met nummers $21, 21, 22, 23, 24, 26, 25$ en $27$. De kamers $21$ en $27$ liggen op een hoek, met daartussen op volgorde de andere kamers. We nemen aan dat Anneke en Vinja hun kamer aselect (dat is willekeurig) hebben toegewezen gekregen.

- **a** Teken een vierkant van 7 bij 7. Zeg wat je elk hokje laat voorstellen.
- **b** Wat is de kans dat de kamers van Anneke en Vinja naast elkaar liggen?

**11** Een loterij op school telt $200$ loten. Er is één hoofdprijs; er zijn vier tweede prijzen en tien troostprijzen. Op één lot kan maar één prijs vallen. Anneke koopt een lot. We nemen aan dat alle loten verkocht worden.

- **a** Wat is de kans dat Anneke de hoofdprijs wint?
- **b** Wat is de kans dat Anneke een tweede prijs wint?

**c** Wat is de kans dat Anneke een troostprijs wint?
**d** Wat is de kans dat Anneke geen prijs wint?

**12** Van het wagenpark in Nederland is 24% gemaakt in Japan, 27% is Duits, 18% Frans, 9% Italiaans, 5% Zweeds, 13% Amerikaans, 2% Koreaans, 1% Brits en 1% Spaans.
Mijnheer de Vrij staat voor het rode verkeerslicht te wachten. Achter hem staat een personenwagen.
**a** Wat is de kans dat het een auto van Aziatische makelij is?
**b** Wat is de kans dat de auto die achter hem staat niet van Europese makelij is?

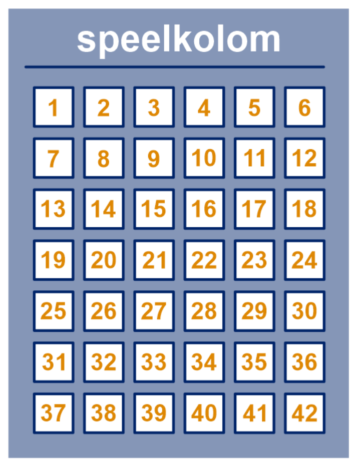
**13** Joke, Hans en Piet gaan surprises maken voor elkaar. Wie voor wie een surprise gaat maken, wordt door loting bepaald. Ze doen briefjes met hun naam erop in een hoed en trekken daarna ieder op goed geluk een briefje, eerst Joke, dan Hans en als laatste Piet.
Een mogelijk resultaat is: Joke trekt Hans, Hans trekt Joke en Piet dus zichzelf.


**a** Schrijf in een tabel zoals hiernaast alle mogelijke resultaten op. Werk systematisch.

Elk van de resultaten heeft evenveel kans.
**b** Wat is de kans dat ze alle drie zichzelf trekken?
Wat is de kans dat niemand zichzelf trekt?

Als iemand zichzelf trekt moet de loting opnieuw gedaan worden.
**c** Wat is de kans dat Joke een surprise voor Piet zal maken?

**14** **De lotto**
Niet zo lang geleden kon je twee keer per week met de lotto spelen. Dat ging zo.
Als speler kruis je zes van de getallen 1 tot en met 42 aan. De officiële trekking wordt op tv uitgezonden. Dit gaat als volgt. In een bol zitten 42 balletjes met de getallen 1 tot en met 42. Zeven keer wordt er een balletje uit de bol gehaald: dat worden de zeven winnende getallen. Als jij zes van deze zeven winnende getallen hebt aangekruist, heb je de hoofdprijs gewonnen.




**a** Wat is de kans dat het getal 23 bij de eerstvolgende trekking een winnend getal is?

De tabel (van 14 mei 2007) op de laatste bladzijde van deze paragraaf geeft weer hoe vaak ieder nummer getrokken is sinds de eerste Lottotrekking op 4 februari 1978; deze gegevens worden op internet automatisch aangepast na elke trekking.

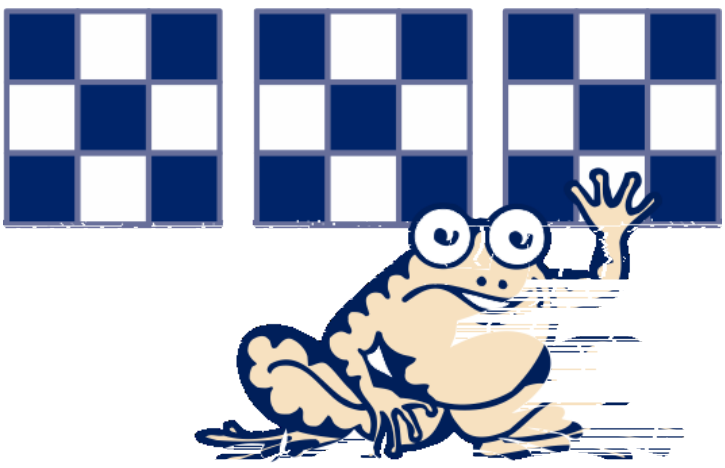
Voorbeeld: het nummer 1 is 362 keer getrokken, dat is in 16% van de trekkingen. De laatste keer dat 1 winnend was, was bij de trekking van 4 april 2007. De laatste 11 keer is 1 niet meer getrokken.

**b** In hoeveel procent van de trekkingen was 23 een winnend getal? Klopt dat redelijk met je antwoord op vraag a?

**c** Hoe groot schat jij op grond van de tabel de kans dat 23 tien of meer keer op rij niet-winnend is?

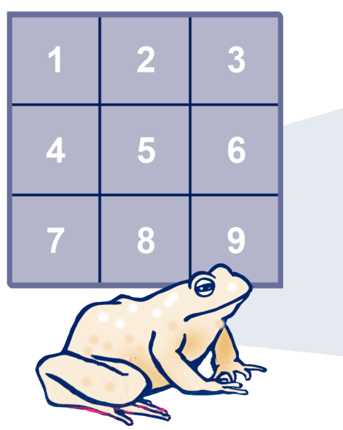
**d** En de kans dat 23 hoogstens drie keer op rij nietwinnend is?

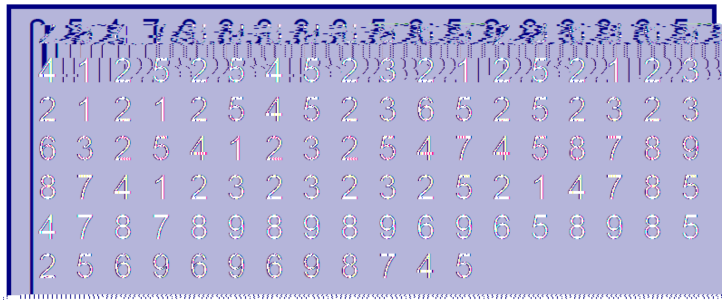
**15** We keren terug naar de kikker van opgave 1. Hij is moe geworden van het springen en heeft zijn werkterrein verplaatst naar een tegelvloer van 3 bij 3. Daar maakt hij alleen nog maar kleine sprongen: hij maakt alleen nog maar sprongen naar een naburige tegel, en dat ook alleen nog maar horizontaal of verticaal (niet diagonaal).
Nu hebben de negen tegels niet meer dezelfde kans om aangedaan te worden.



**a** Welke tegel heeft de meeste kans en welke tegels hebben de minste kans? Kun je ook zeggen waarom?

We hebben de velden genummerd: 1 tot en met 9. Met een computer is het springen van de kikker gesimuleerd voor 119 sprongen; er zijn 120 opvolgende posities vermeld. Kijk daarvoor op de volgende bladzijde.






**b** Schat op grond van deze rij velden wat de kans is dat de kikker op veld 1 zit. Ook voor veld 3, veld 7 en veld 9.

De kansen op de vier hoekvelden zijn natuurlijk gelijk.

**c** Hoe groot schat jij die kans op grond van de rij?

Door de simulatie veel groter te maken - volg de kikker bijvoorbeeld 12000

**Tabel bij opgave 14**

| Getal | # trekkingen | Percentage | Jongste trekking | Verschil |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 362 | 16% | 04/04/2007 | 11 |
| 2 | 383 | 17% | 28/04/2007 | 4 |
| 3 | 382 | 17% | 25/04/2007 | 5 |
| 4 | 389 | 17% | 12/05/2007 | 0 |
| 5 | 406 | 18% | 02/05/2007 | 3 |
| 6 | 356 | 16% | 05/05/2007 | 2 |
| 7 | 419 | 19% | 12/05/2007 | 0 |
| 8 | 328 | 15% | 17/03/2007 | 16 |
| 9 | 396 | 18% | 21/03/2007 | 15 |
| 10 | 394 | 18% | 09/05/2007 | 1 |
| 11 | 350 | 16% | 21/04/2007 | 6 |
| 12 | 401 | 18% | 25/04/2007 | 5 |
| 13 | 390 | 17% | 12/05/2007 | 0 |
| 14 | 388 | 17% | 07/02/2007 | 27 |
| 15 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 3 |
| 16 | 412 | 18% | 28/04/2007 | 4 |
| 17 | 385 | 17% | 18/04/2007 | 7 |
| 18 | 357 | 16% | 28/02/2007 | 21 |
| 19 | 370 | 17% | 09/05/2007 | 1 |
| 20 | 352 | 16% | 05/05/2007 | 2 |
| 21 | 354 | 16% | 11/04/2007 | 9 |
| 22 | 403 | 18% | 12/05/2007 | 0 |
| 23 | 375 | 17% | 28/04/2007 | 4 |
| 24 | 412 | 18% | 07/03/2007 | 19 |
| 25 | 401 | 18% | 09/05/2007 | 1 |
| 26 | 365 | 16% | 05/05/2007 | 2 |
| 27 | 361 | 16% | 12/05/2007 | 0 |
| 28 | 377 | 17% | 05/05/2007 | 2 |
| 29 | 375 | 17% | 28/04/2007 | 4 |
| 30 | 352 | 16% | 24/02/2007 | 22 |
| 31 | 372 | 17% | 02/05/2007 | 3 |
| 32 | 367 | 16% | 28/03/2007 | 13 |
| 33 | 364 | 16% | 09/05/2007 | 1 |
| 34 | 374 | 17% | 14/04/2007 | 8 |
| 35 | 361 | 16% | 12/05/2007 | 0 |
| 36 | 371 | 17% | [illegible] | [illegible] |
| 37 | [illegible] | 17% | 09/05/2007 | 1 |
| 38 | [illegible] | 17% | 09/05/2007 | 1 |
| 39 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 40 | 365 | 16% | [illegible] | 7 |
| 41 | [illegible] | 15% | 12/05/2007 | 0 |

# De twijfel als levenselixer

Een interview met de vermaarde schrijver Graham Greene

Een probaat middel tegen dodelijke verveling: een dodelijk spelletje. Graham Greene heeft daar altijd van gehouden, als puber al, midden jaren twintig. In de studieuze rust van Oxfords Bailiol College, de kostschool van zijn vader, kwam hij in het rijke bezit van een vuurwapen, on-dekte het Russisch roulette en speelde het in afzondering. Tegen zichzelf. Althans zo wil zijn autobiografie A Sort of Life

Waarop ik zei: "Vijf keer, telkens met een maand tussenruimte. Uiteindelijk verveelde me dat ook en wilde ik het een allerlaatste keer proberen – om de zes vol te maken. Toen heb ik het maar opgegeven." En terwijl ik uitlegde dat de kans op overleven iedere keer vijf op zes was, begon Fidel brommend voor zich uit te rekenen. Hij was het er niet mee eens. Na uitvoerige bere-keningen kwam hij tot de

*HP* 22 oktober 1988

**16** Een pistool heeft een draaibaar magazijn waarin plaats is voor zes kogels. Bij Russisch roulette wordt één van de zes plaatsen met een kogel geladen. De persoon die dit "spel" speelt geeft het magazijn een flinke draai, zet de loop tegen zijn slaap en haalt de trekker over. In het verhaal van Graham Green denkt Fidel Castro dat hij na zes keer spelen zeker dood zal zijn. Immers $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

**a** Leg uit dat deze redenering niet goed kan zijn.

Iemand neemt zich voor dit spel zes keer te spelen.

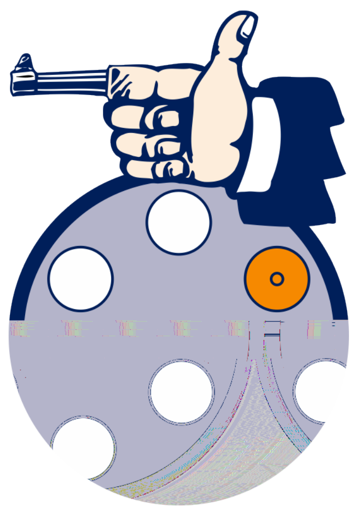
**b** Heb je enig idee hoe groot de kans is dat hij het er levend vanaf zal brengen?

Dit "spel" kun je nabootsen met een dobbelsteen.

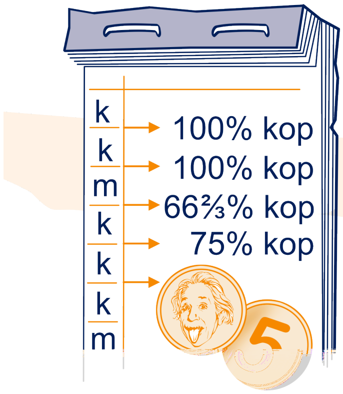
**c** Leg uit hoe.

We willen de kans te weten komen om een serie van zes keer Russisch roulette te overleven.

**d** Speel daarvoor twintig series van zes keer met een dobbel-steen. Noteer bij elke serie of je dood bent of niet. Vergelijk jouw resultaat met dat van klasgenoten. Hoe groot schat jij nu de kans om een serie van zes keer Russisch roulette te overleven?

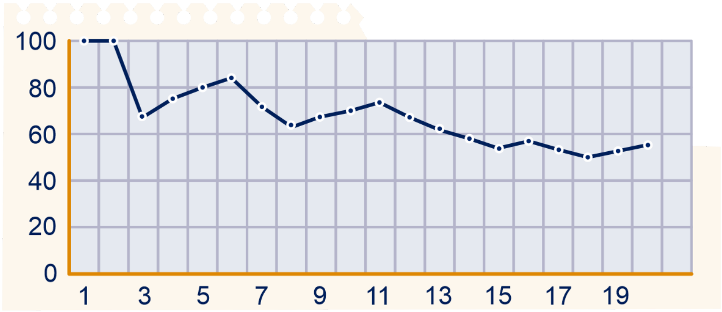


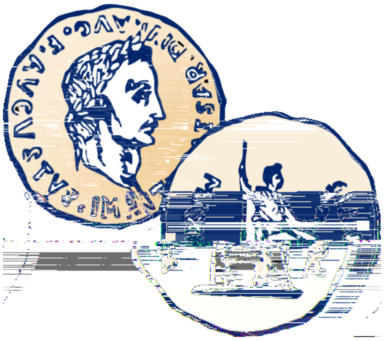
**17** We hebben een serie van 20 worpen met een munt gedaan. Na elke worp noteerden we het percentage kop dat we tot dan toe hadden gegooid.
We gooiden: k k m k k k m m k k k m m m m k m m k k.
Het percentage kop na de eerste worp en na de tweede worp was dus 100%.
Na drie worpen hadden we: k k m, dus 2 kop en 1 munt; na de derde worp was het percentage kop tot dan toe dus $66\frac{2}{3}$%. Na vier worpen hadden we k k m k, dus 3 kop en 1 munt; het percentage kop tot dan toe was dus 75%.




**a** Wat was het percentage kop na de zesde worp? En na de twintigste worp?

Hieronder staat een grafiek van het verloop van het percentage.



**b** Controleer bovenstaande percentages in de grafiek.

Stel dat er nog een eenentwintigste worp zou volgen.

**c** Wat wordt het percentage kop als deze eenentwintigste worp kop zou zijn? En wat als hij munt zou zijn?

**18** We laten de computer het spel nog twee keer spelen, beide met series van twintig worpen.



**a** Schrijf bij elk plaatje de serie worpen op.

De twee plaatjes lijken op elkaar, maar zijn niet precies hetzelfde. We letten op het begin en op de staart van de grafieken.

**b** Welke verschillen en welke overeenkomsten zie je in de plaatjes?

Bij een zuivere munt is de kans op kop $\frac{1}{2}$. Op de computer is de kans op kop gemakkelijk te veranderen. Stel dat de kans op kop niet $1$ is maar $0{,}9$. Weer doen we een serie van $20$ worpen en tekenen daar een plaatje bij.

**c** Wat zal het grote verschil zijn tussen dit plaatje en de vorige plaatjes?

De kans op kop is weer veranderd. Je krijgt nu het volgende plaatje.


**d** Hoe groot is de kans op kop in dit geval ongeveer, denk je?

Simulatieprogamma's voor het gooien met een munt of een dobbelsteen (of met meerdere tegelijk) vind je op internet. ??Ga naar http://www.vusoft.be/vustat.html en download het programma VUSTAT.

**19** Stel dat de kans op kop 0,4 is. Je doet 800 worpen. Hoeveel keer kop je daarbij krijgt is natuurlijk niet zeker. Maar resultaten met minder dan 200 keer kop (en dus meer dan 600 keer munt) zijn wel erg onwaarschijnlijk.

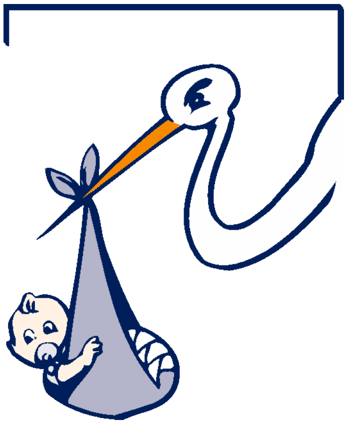
**a** In de buurt van welk getal zal het aantal kop komen te liggen?

**b** Wat betekent dat voor het eind van het bijbehorende plaatje?

Je gooit met een munt en telt het aantal keer kop. De kans op kop is 0,4 betekent dat gemiddeld in een serie van 10 worpen de munt 4 keer op kop (en dus 6 keer op munt) zal vallen.
In een serie van 1000 worpen zal het aantal keer kop in de buurt van de 400 liggen.

**20** **Wordt het een jongen of een meisje?**

Bij een geboorte is de kans op een jongen ongeveer $\frac{1}{2}$. Maar niet precies. De statistieken wijzen uit dat de kans op een jongen 51,3 % is.
In Nederland worden jaarlijks zo'n 196000 kinderen geboren.



**a** Hoeveel jongens en hoeveel meisjes?

**b** Hoeveel jongens worden er per 1000 meisjes geboren?

Je zou dus verwachten dat er meer mannen dan vrouwen zijn. Maar dat is juist niet zo: op 1 januari 2005 waren er 8.064.979 mannen en 8.239.547 vrouwen in Nederland.

**c** Heb je hier een verklaring voor?

**21** **Zwartrijden**

Anneke rijdt elke werkdag met de metro (dat is vijf dagen per week, buiten de vakanties) heen en terug tussen haar huis en haar werk. Dat zijn 480 enkele reizen per jaar. Afgelopen jaar is ze precies 37 keer gecontroleerd op een kaartje.

**a** Controleer of die 480 kan kloppen.

**b** Schat op grond van deze gegevens hoe groot de “pakkans” is voor zwartrijders op het traject tussen Annekes huis en werk.

Als je gepakt wordt, krijg je een boete van € 300.
Anneke moet voor een enkele reis € 1,50 betalen.

**c** Is het voor Anneke 'voordeliger' om te gaan zwartrijden?

**22** Een enquêtebureau heeft een groot onderzoek opgezet onder de bevolking over het drugsbeleid van de Nederlandse regering. 5362 Nederlanders werd een vragenlijst voorgelegd. Het is bij zo'n onderzoek van het grootste belang dat de ondervraagden representatief zijn voor de Nederlandse bevolking, dat wil zeggen dat ze een goede afspiegeling ervan zijn. Nu is 30% van de Nederlandse bevolking Rooms-katholiek, 13% Nederlands hervormd en 8% Gereformeerd.
Stel dat de ondervraagden aselect gekozen zijn uit de Nederlandse bevolking.
Hoeveel Rooms-katholieken, hoeveel Nederlands hervormden en hoeveel Gereformeerden zullen er dan ongeveer in de steekproef zitten, naar je mag verwachten?

**23** In plaats van een computer kun je voor een simulatie ook toevalsgetallen gebruiken. Hieronder staat een rijtje van 90 toevalsgetallen:
26617 18804 96045 27741 78072 18627 73118 33072 64129
84730 61196 03825 64582 58902 34561 99032 21654 88209
Elke worp met een muntstuk wordt weergegeven door een cijfer uit deze rij.
We kunnen bijvoorbeeld afspreken dat de cijfers 4 en lager kop betekenen en de cijfers 5 en hoger munt.

**a** Hoeveel keer is er dan kop gegooid in de serie van 90?

**b** Noem een andere afspraak die je zou kunnen maken om het werpen met een zuivere munt na te bootsen.
Hoe vaak is er volgens jouw afspraak kop gegooid in de serie van 90?

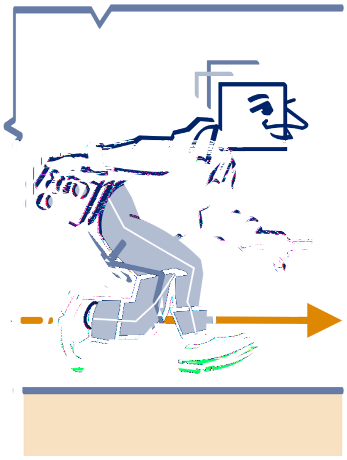

Een zekere valse munt heeft kans 0,3 op kop.

**c** Hoe kun je toevalsgetallen gebruiken om het werpen met deze munt te simuleren?

**24** **Wachten op de eerste zes**
Bij *Mens-erger-je-niet* mag je pas beginnen als je een zes gegooid hebt met de dobbelsteen. De vraag is hoeveel keer je gemiddeld moet gooien voordat je mag beginnen.

**a** Hoe kun je dit "gooien tot je een zes hebt" met toevalsgetallen simuleren? Zeg hoe je het gooien van een zes nabootst.

**b** Voer de simulatie uit: "Gooi net zolang totdat je een zes hebt". Noteer hoeveel "worpen" je daarvoor nodig hebt. Doe dit twintig keer.



**c** Hoe groot schat jij op grond van je resultaat bij **b** de kans dat je in vier of meer worpen nodig hebt om te mogen beginnen bij *Mens-erger-je-niet*?

**25** Op de Grafische Rekenmachine kun je ook toevalsgetallen genereren. Ga na hoe je het volgende op jouw machine werkt.

**a** Maak een rij gehele toevalsgetallen op de GR.
**b** Simuleer het werpen met een dobbelsteen met de GR.
**c** Hoe zou je het werpen met een munt simuleren op de GR?

**26** Drie vrienden hebben zich voor verschillende opleidingen aangemeld. Alle drie moeten ze loten om toegelaten te worden. De inlootkans bij de ene opleiding is $0{,}5$, bij de tweede opleiding $0{,}6$ en bij de derde $0{,}7$. We zijn geïnteresseerd in het geval dat de vrienden alle drie worden toegelaten.

**a** Hoe kun je dit met toevalsgetallen simuleren? Zeg hoe je voor elk van de vrienden nabootst wanneer hij wordt toegelaten.
**b** Voer de simulatie uit (met toevalsgetallen achterin dit hoofdstuk of met de GR). Noteer of de vrienden alle drie worden toegelaten of niet. Doe dit twintig keer.
**c** Hoe groot schat jij op grond van je resultaat bij **b** de kans dat de vrienden alle drie worden toegelaten?

27

**De pot verdelen**

Twee soldaten van het beroemde Romeinse leger spelen om een forse pot: een zak met 100 zilverstukken. Het spel is simpel. Er wordt een muntstuk opgegooid. Als kop bovenkomt, krijgt Appius een punt, in het andere geval Brutus. Degene die zo als eerste zes punten haalt, wint de zak met zilverstukken. Aangenomen dat de munt zuiver is, hebben beiden aan het begin van het spel evenveel kans op de pot.

Helaas komt de commandant binnen. Die heeft gokspelen verboden. Het spel moet dus onmiddellijk worden afgebroken. Op dat moment was de situatie erg spannend: Appius had 5 punten en Brutus nog maar 3. Hoewel het niet hun bedoeling was, moeten ze de 100 zilverstukken nu op de een of andere manier verdelen. De vraag is: wat is in deze situatie een eerlijke verdeling?

Een mogelijke verdeling is: “ieder de helft”.

**a** Met welk argument zal Appius deze mogelijkheid verwerpen?

Brutus stelt de volgende verdeling voor: Appius krijgt 62 zilverstukken en de andere 38 zijn voor hemzelf.

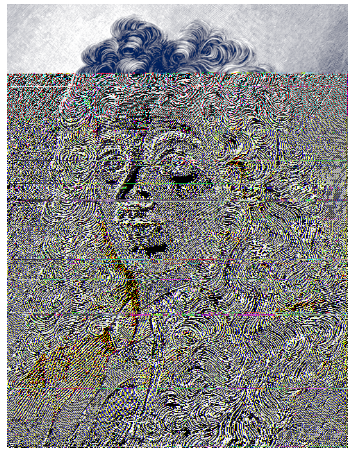
**b** Hoe komt Brutus aan deze verdeling?

Stel dat Appius en Brutus jou gevraagd hebben als scheidsrechter op te treden.

**c** Hoe zou jij de 100 zilverstukken verdelen? (We komen hier later nog op terug.)

# 4.3 Het stroomdiagram

Met een verdeelvraag als in opgave 27 bij Appius en Brutus is de kansrekening begonnen. Een edelman, Chevalier de Méré, legde de volgende vraag voor aan de grote Franse geleerde Blaise Pascal. Hoe moet een pot worden verdeeld als het spel vroegtijdig wordt afgebroken?
Pascal begon in 1645 een correspondentie over deze kwestie en aanverwante zaken met Pierre de Fermat. Je zou deze correspondentie als het begin van de kansrekening kunnen beschouwen. Kort daarna raakte onze landgenoot Christiaan Huygens ook geïnteresseerd in dit soort vraagstukken. Hij schreef in 1657 het eerste boek over kansrekening: *Rekeningh in Spelen van Geluck*. [Dit boekje is in 1998 opnieuw bij Epsilon Uitgaven verschenen, vertaald en toegelicht door Wim Kleine.]
De kansrekening is dus eigenlijk voortgekomen uit de wereld van de gokspelen.



Christiaan Huygens
1629 - 1695

**28** Weliswaar heeft de commandant Appius en Brutus verboden het spel uit te spelen, maar wij kunnen dat wel doen.
We gaan dus uit van de stand 5 - 3.

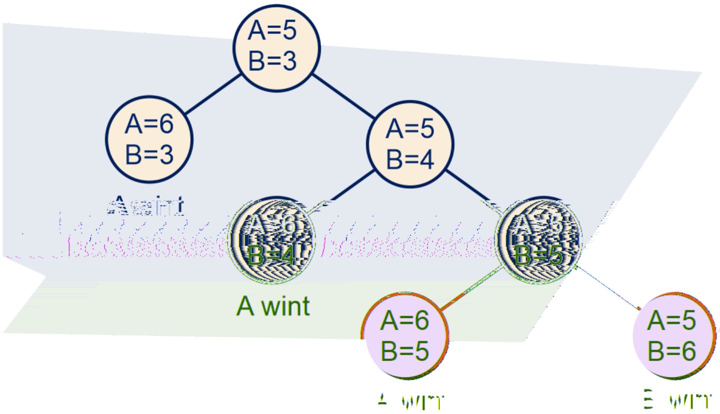
**a** Gooi met een munt net zo lang totdat een van de twee 6 punten heeft bereikt. Noteer wie dat was.
Speel op deze manier 20 keer het spel uit. Hoeveel keer won Appius en hoeveel keer Brutus?

Anneke heeft het spel 100 keer met de computer uitgespeeld. En dat zo vijf keer. Hieronder staan de resultaten.

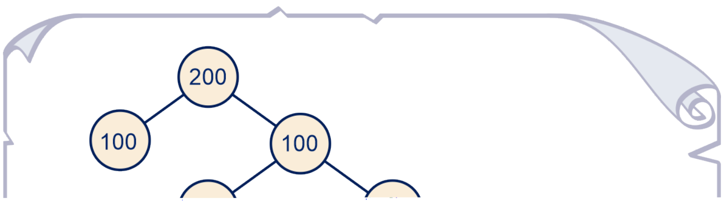
| | | |
|---|---|---|
| eerste serie van 100 | Appius 91 | Brutus 9 |
| tweede serie van 100 | Appius 89 | Brutus 11 |
| derde serie van 100 | Appius 86 | Brutus 14 |
| vierde serie van 100 | Appius 83 | Brutus 17 |
| vijfde serie van 100 | Appius 86 | Brutus 14 |

**b** Schat op grond van deze uitslag de kans dat Appius de pot zou hebben gewonnen als de commandant niet had opgetreden.
Hoe moet de pot dus (ongeveer) verdeeld worden tussen Appius en Brutus?

Alle mogelijke spelverlopen, uitgaande van de stand 5 - 3, zijn op de volgende bladzijde schematisch weergegeven.




Stel eens dat er 100 keer uitgespeeld wordt. De helft van de keren zal de uitslag 6 - 3 worden en de andere helft wordt het 5 - 4 en moet er nog verder gespeeld worden. De aantallen “100”, “50” en “50” zijn al ingevuld in het **stroomdiagram** hieronder.

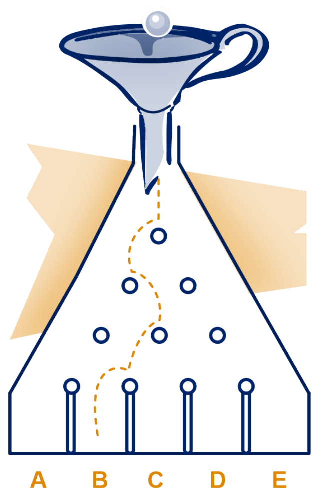



**c** Welke aantallen komen er op de vier open plaatsen?
Wat is dus de kans voor Brutus om de pot de winnen? En voor Appius?
Hoe moet de pot dus (ongeveer) verdeeld worden tussen Appius en Brutus?

29

### Het bord van Galton

Het bord van Galton bestaat uit een driehoek pinnen zoals hiernaast is aangegeven. Uit een trechter valt een kogeltje precies op de bovenste pin. Het kogeltje valt met kans $\frac{1}{2}$ naar rechts en met kans $\frac{1}{2}$1 naar links. Het valt dan op een van de pinnen van de tweede laag. Weer valt het met kans $\frac{1}{2}$ naar rechts of naar links en komt het op een pin van de derde laag. Zo komt het kogeltje via de vierde laag ten slotte in een van de vakken A, B, C, D of E terecht.
Zo laten we 100 kogeltjes de weg van de trechter naar een van de vakken maken.

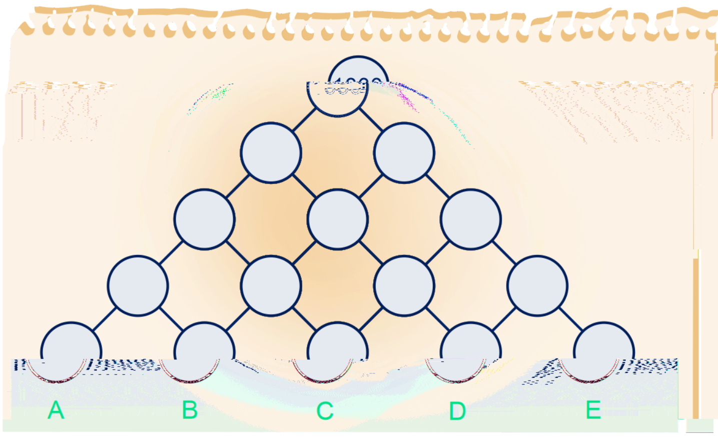



**a** In welk bakje denk je dat de meeste kogeltjes terecht komen?

In het programma 'Galtonbord' kun je het experiment uit onderdeel **a** in veel variaties simuleren.
Een simulatie op een computer met 1000 kogeltjes leverde het volgende resultaat op:
61 in A, 253 in B, 370 in C, 266 in D en 50 in E.

**b** Hoe groot schat je op grond van dit resultaat de kans dat een kogeltje in vak C terecht komt?

We maken een stroomdiagram voor de 1000 kogeltjes.

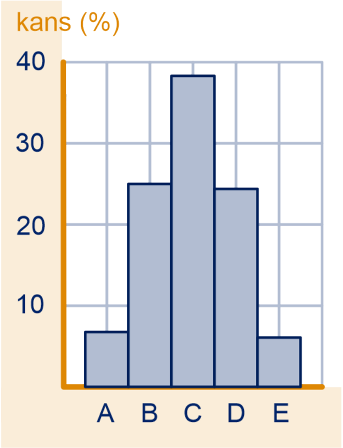



**c** Neem bovenstaand schema over en vul op de open plaatsen de passende aantallen in.

**d** Hoe groot is dus de kans dat een kogeltje in vak C terecht komt?

**e** En hoe groot is de kans op elk van de andere vakken?

De verdeling van de 1000 kogeltjes over de vijf vakken kunnen we weergeven in een **histogram**. Verticaal zijn de **relatieve frequenties** uitgezet. Dat zijn dus de kansen (in procenten). We spreken daarom ook wel van een **kanshistogram**.

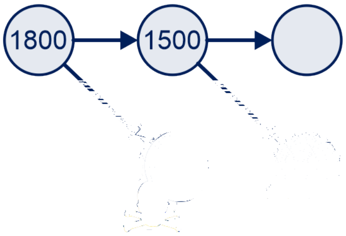



In het stroomdiagram en in het kanshistogram is aangegeven hoe de 1000 kogeltjes zich *idealiter* zouden verdelen volgens de kansen. Dat is dus hoe het in theorie zou moeten gaan. In de praktijk zal zo'n verdeling vrijwel nooit precies uitkomen: er zijn bijna altijd wel kleine toevallige afwijkingen.

Het Galtonbord is genoemd naar de Engelse geleerde Francis Galton (1822 - 1911). Galton heeft veel gereisd, was breed ontwikkelend en moet zeer intelligent geweest zijn. Hij was geobsedeerd door getalsmatige informatie.
Galton publiceerde onder andere op het gebied van de statistiek, biologie en meteorologie, maar had ook oog voor sociale en antropologische vraagstukken.

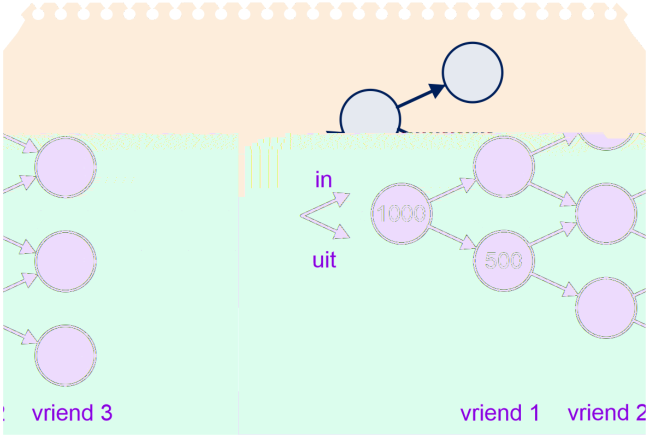

Galton

**30** **Russisch roulette**
We bekijken opnieuw de opgave over Russisch roulette: de speler schiet (hoogstens) zes keer; elke keer overleeft hij met kans $\frac{5}{6}$. Stel dat dit spel gespeeld wordt door $1800$ mensen. Hiernaast staat een begin van een stroomdiagram hierbij.




**a** Hoeveel van deze $1800$ mensen overleven het eerste schot, naar verwachting?
Hoeveel overleven ook nog het tweede schot?
Vul deze aantallen in op de passende plaats in het stroomdiagram.
Maak een bijbehorend stroomdiagram af.
**b** Wat is de kans dat een speler het spel overleeft?

**31** **Inloten 1**
We bekijken opnieuw de opgave over de drie vrienden die voor de door hen gekozen opleidingen werden ingeloot met kansen $0{,}5$ , $0{,}6$ en $0{,}7$. We gaan dit “spel” $1000$ keer spelen.
**a** Vul de aantallen in het onderstaande stroomdiagram in.



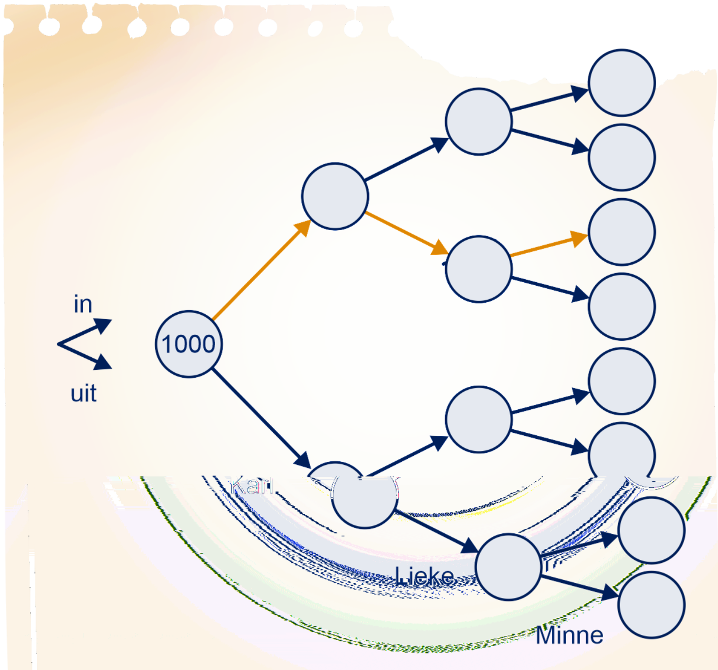

**b** Wat is dus de kans dat de vrienden alle drie worden ingeloot?

**c** Maak een kanshistogram. Zet horizontaal uit het aantal vrienden dat wordt ingeloot (dus 0, 1, 2 en 3).

32

### Inloten 2

In de vorige opgave hebben we gekeken hoeveel vrienden werden ingeloot, maar niet welke vrienden.
Dat gaan we in deze opgave doen. De vrienden heten Karl, Lieke en Minne; Karl heeft kans 0,5 om ingeloot te worden, Lieke kans 0,6 en Minne kans 0,7.
We spelen het "spel" weer 1000 keer. De rood gekleurde weg in het stroomdiagram hieronder hoort bij "Karl in-, Lieke uit- en Minne ingeloot".




**a** Zet de juiste aantallen in het stroomdiagram op het werkblad.
**b** Wat is de kans dat alleen Minne wordt ingeloot?
**c** Hoe kun je uit dit stroomdiagram het kanshistogram van de vorige opgave maken?

33

### Een afwijking naar rechts

Een Galtonbord bestaat uit 4 lagen pinnen. Bij elke pin heeft een kogeltje kans $\frac{1}{3}$ om naar links te vallen en kans $\frac{2}{3}$ om naar rechts te vallen.
**a** Maak het bijbehorend stroomdiagram op het werkblad af. Laat 8100 kogeltjes vallen.
**b** Wat is dus de kans dat een kogeltje in het meest rechtse bakje terecht komt?

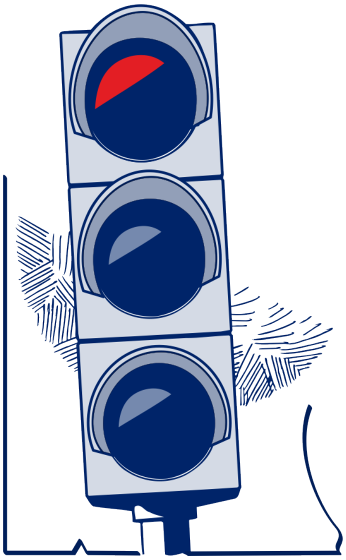
**c** Maak een kanstabel.

| Bakje | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Percentage %) | | | | | |

In de volgende opgaven kun je steeds een stroomdiagram maken om de gevraagde kans uit te rekenen. Kies een geschikt aantal herhalingen om bovenaan in het stroomdiagram te beginnen. Maar als je het zonder stroomdiagram kunt, is dat ook prima.

34

**Verkeerslichten**



Anneke fietst elke dag van huis naar school, altijd volgens dezelfde route. Ze komt langs drie verkeerslichten. Het eerste verkeerslicht staat 25% van de tijd op groen, het tweede 60% en het derde 40%. De verkeerslichten zijn niet op elkaar afgesteld: we nemen dus aan dat ze onafhankelijk van elkaar werken.
In een schooljaar fietst Anneke 200 keer naar school. Op sommige dagen moet ze voor het eerste verkeerslicht stoppen, maar kan ze bij de andere twee doorrijden. En er zijn ook allerlei andere combinaties.

**a** Wat is de kans dat Anneke bij alle drie de verkeerslichten kan doorrijden?

**b** Wat is de kans dat Anneke alleen bij het tweede verkeerslicht kan doorrijden?

Bekijk nog eens de vorige opgave. Als je Anneke 200 keer laat fietsen, vind je het aantal keren dat bij driemaal groen hoort als volgt: $200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 12$, dus de kans bij driemaal groen is: $\dfrac{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}{200} = 0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4$.
Als je Anneke 1000 keer laat fietsen, vind je het aantal keren dat bij driemaal groen hoort als volgt: $1000 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 60$, dus de kans bij driemaal groen is: $\dfrac{1000 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}{1000} = 0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4$.
En zo is de kans dat Anneke alleen bij het tweede licht kan doorrijden $0{,}75 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}27$.

35

**Caramboles**

Anneke en Vinja zijn aan het biljarten. Geen poolen of snookeren, maar ouderwets met twee witte en één rode bal. De bedoeling is dat je zoveel mogelijk caramboles maakt. Je maakt een carambole als je met je eigen bal (dat is een van de twee witte) de andere twee ballen raakt. Je mag in een beurt net zo lang stoten tot je geen carambole maakt. Een carambole levert één punt op. Anneke is vrij goed in biljarten. De kans dat zij een carambole maakt is bij elke stoot $\frac{3}{4}$.

**a** Wat is de kans dat Anneke twee caramboles achter elkaar maakt?

**b** Wat is de kans dat Anneke in een beurt precies drie punten haalt?

36

**Rijexamen**

Het CBR (Centraal Bureau Rijvaardigheidsbewijzen) publiceert jaarlijks de gegevens van het percentage mensen dat hun rijbewijs haalt. Omdat de kans dat je de eerste keer slaagt kleiner is dan de kans dat je de tweede keer slaagt, zijn de gegevens uitgesplitst naar het aantal pogingen.

| aantal pogingen | 1 | 2 | 3 | 4 of meer |
|---|---|---|---|---|
| slagingspercentage | 48% | 65% | 72% | 80% |

**a** Wat is de kans dat een willekeurige Nederlander de eerste keer zakt voor zijn rijexamen?

**b** Wat is de kans dat een willekeurige Nederlander zijn rijbewijs in twee keer haalt?

**c** Wat is de kans dat iemand zijn rijbewijs na drie keer afrijden nog steeds niet heeft?

37

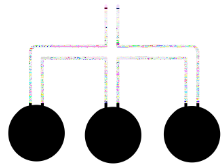
**Kozijnen schilderen**

Joost wil de kozijnen van de ramen en de deuren aan de buitenkant van zijn huis schilderen. Dat kan alleen als het drie dagen achter elkaar droog is. Volgens buienradar is de kans op regen voor elk van de komende drie dagen 30%.

**a** Wat is de kans dat Joost in de komende drie dagen zijn schilderwerk af kan maken?

**b** Wat is de kans dat het op precies twee van de drie dagen zal regenen?

**38** In een vaas zitten 10 balletjes: 5 rode, 3 groene en 2 blauwe. Debby pakt willekeurig een balletje. Zij noteert de kleur en legt het balletje weer terug. Daarna pakt zij nog een balletje en noteert weer de kleur. Hieronder zie je het bijbehorende stroomdiagram, waarbij we het experiment 100 keer naspelen.

Als het balletje dat Debby pakt rood is, ga je in het stroomdiagram naar links, is het balletje groen ga je recht door en is het balletje blauw, dan ga je naar rechts.
Bij de linkerweg is het eerste balletje dat Debby pakt rood (dat gebeurt 50 keer) en is het tweede balletje ook rood (dat gebeurt 25 keer).

**a** Controleer ook de andere aantallen die in het stroomdiagram zijn ingevuld en schrijf de juiste aantallen in de open hokjes op het werkblad.

**b** Wat is dus de kans dat Debby eerst een groene en daarna een blauwe bal pakt?

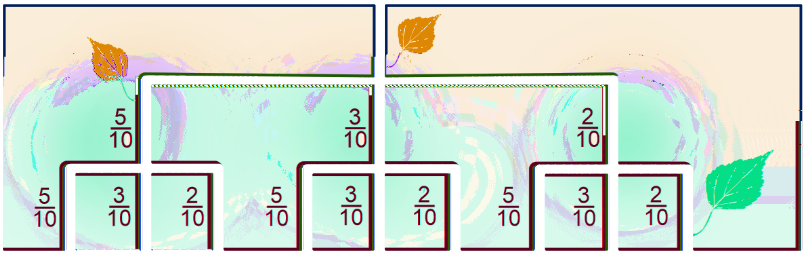
**c** Wat is de kans dat zij geen rode bal pakt?

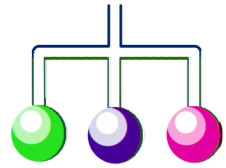
**d** Bereken de kans dat zij twee ballen van dezelfde kleur pakt.

**39** We zijn in het stroomdiagram van opgave 38 begonnen met 100 keer.

**a** Hoe vaak verwacht je “eerste bal groen en tweede bal blauw” als je met 200 keer was begonnen? En als je met 250 keer was begonnen?

De kans op “eerste bal groen en tweede bal blauw” hangt niet af van het aantal keer waarmee je in het stroomdiagram begint. Dat aantal doet er dus helemaal niet toe.
Op de volgende bladzijde staat net zo’n boom, maar dan niet met aantallen in hokjes, maar met kansen bij de takken. We noemen dit een **kansboom** of **kansdiagram**.



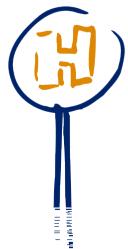
In opgave 38 heb je berekend dat de kans op “eerste bal groen en tweede bal blauw” $\frac{6}{100}$ is.

**b** Hoe vind je deze kans met de kansboom?

**c** Bereken ook met de kansboom de kans op “eerste bal blauw en tweede bal rood”.

In een kansboom kun je de kansen aan de uiteinden berekenen door de kansen die langs de takken staan met elkaar te *vermenigvuldigen*.

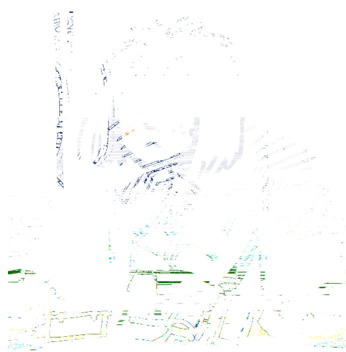
**40** **Komt de bus op tijd?**



Willemijn gaat elke dag met de bus naar school. Helaas komt de bus nogal eens te laat bij de bushalte. Gemiddeld komt de bus ’s ochtends 1 op de 4 keer te laat. Dus: de kans dat de bus te laat komt is voor iedere dag $\frac{1}{4}$.

Bereken de kans dat de bus komende maandag, dinsdag en woensdag elke ochtend op tijd komt.

**41** **Telesales**



Sharon en Mark hebben voor in de avonduren een bijbaantje als telemarketeer. Zij bellen mensen op om krantenabonnementen, verzekeringen en dergelijke te verkopen. Deze avond moeten zij mensen telefonisch overhalen een proefrit te maken in een nieuw type auto.

Volgens hun baas is 40% van de mensen geïnteresseerd in zo’n proefrit. Op grond van dit percentage is het minimum aantal proefritten, dat elke telemarketeer moet regelen, gesteld op 20. Op een gegeven moment hebben Sharon en Mark nog maar tijd voor drie telefoontjes. Sharon heeft op dat moment nog maar 17 afspraken gemaakt. Mark heeft dan al 19 afspraken gemaakt.

**a** Bereken de kans dat Sharon alsnog het minimum aantal afspraken regelt.

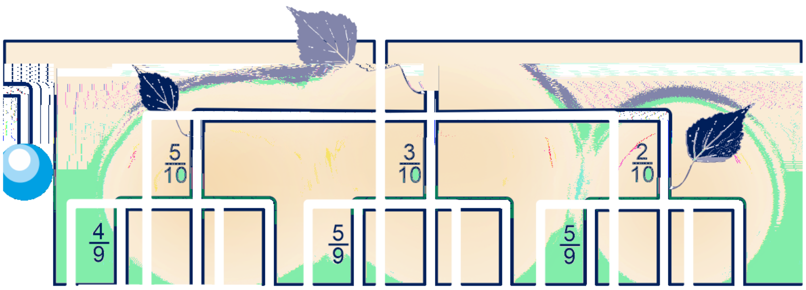
Hint 1.

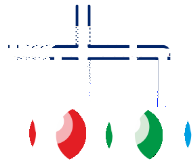
**b** Bereken de kans dat Mark het minimum aantal afspraken niet haalt.

42 We werken nog steeds met de vaas van opgave 38 met 10 balletjes: 5 rode, 3 groene en 2 blauwe.
Debby pakt weer een bal uit de vaas, noteert de kleur, maar legt nu de getrokken bal niet terug. De kans dat de tweede bal rood is, hangt ervan af of de eerste bal rood was.

**a** Hoe groot is die kans als de eerste bal inderdaad rood was? En als de eerste bal niet rood was?

Deze twee kansen zijn in de kansboom aangegeven. De boom staat ook op het werkblad.



**b** Schrijf bij de andere takken van de kansboom de kansen.

**c** Wat is dus de kans dat Debby eerst een groene en daarna een blauwe bal pakt?

**d** Wat is de kans dat zij geen rode bal pakt?

**e** Bereken de kans dat zij twee ballen van dezelfde kleur pakt.

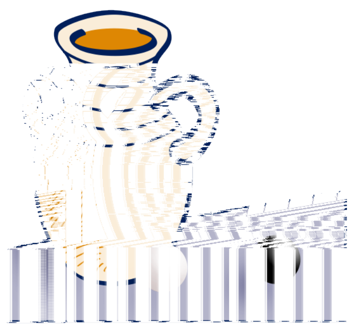
43 In een vaas zitten 2 witte en 3 zwarte balletjes. We pakken hier drie keer een balletje uit, noteren de kleur en leggen het terug.

**a** Teken een kansboom die hier bij hoort.

**b** Bereken de kans dat de eerste twee balletjes zwart zijn en het derde wit.

**c** Bereken de kans dat precies twee van de drie balletjes wit zijn.

44 We werken met dezelfde vaas als in opgave 43 met 2 witte en 3 zwarte balletjes. Weer nemen we er drie keer een balletje uit, maar nu leggen we een getrokken balletje *niet* terug.

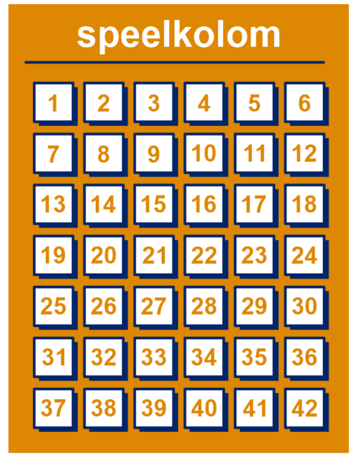


**a** Teken een kansboom hierbij.

**b** Bereken de kans dat de eerste twee balletjes zwart zijn en het derde wit.

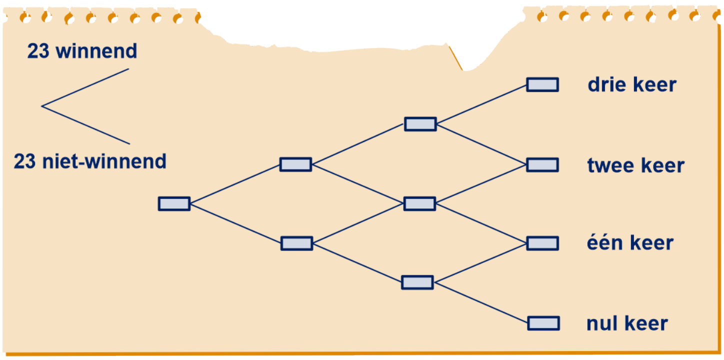
**c** Bereken de kans dat precies twee van de drie balletjes wit zijn.

Bij problemen als in opgave 42 en opgave 44 spreken we over **zonder terugleggen**. Bij alle problemen daarvoor was er sprake van **met terugleggen**.




**45** Bij een trekking van de lotto heeft het getal 23 kans $\frac{7}{42}$ om een winnend getal te worden. We bekijken drie trekkingen van de lotto. Steeds letten we erop of 23 een winnend getal is.

**a** Maak een bijbehorende kansboom.




**b** Wat is de kans dat het getal 23 precies een van de drie keer een winnend getal was?

**c** Maak een kanshistogram. Zet horizontaal uit het aantal keer dat 23 een winnend getal was, dus $0$, $1$, $2$ en $3$.

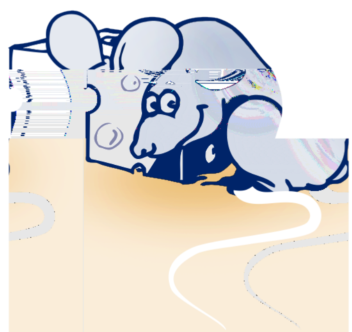
**Opmerking**

Bij een kanssom als opgave 45 is een kansboom handiger dan een stroomdiagram. Immers, bij een stroomdiagram zou je steeds het $\frac{7}{42}$ -ste of het $\frac{35}{42}$-ste deel moeten nemen.
Dan kun je beter met breuken rekenen.

Soms staat in een opgave vermeld of het met of zonder terugleggen betreft. Meestal zal je dat zelf uit het verhaal moeten afleiden.

**46** **Draadloze muis**

Sietse heeft twee batterijen nodig voor zijn draadloze muis. In een laatje liggen zes oplaadbare batterijen. Twee van die zes batterijen zijn nog leeg. Welke twee dat zijn, kan Sietse niet zien. Hij pakt twee van de batterijen en doet die in zijn muis.

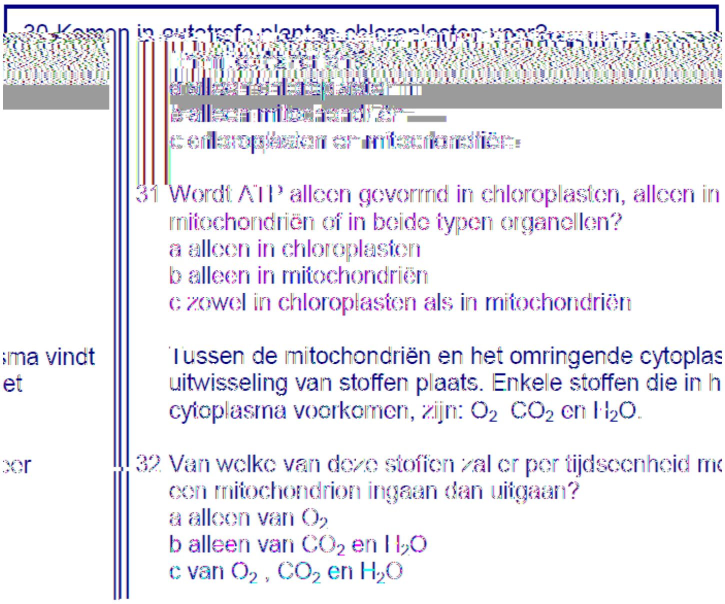


**a** Teken een bijbehorende kansboom.

**b** Bereken de kans dat Sietse twee volle batterijen pakt.

**c** Bereken de kans dat de muis niet werkt.

**47** Wouter heeft vandaag een biologieproefwerk, maar hij heeft helemaal niet kunnen leren. De drie meerkeuzevragen hieronder moet hij dan ook op de gok maken.


30 Komen in autotrofe planten chloroplasten voor?

31 Wordt ATP alleen gevormd in chloroplasten, alleen in mitochondriën of in beide typen organellen?
a alleen in chloroplasten
b alleen in mitochondriën
c zowel in chloroplasten als in mitochondriën

Tussen de mitochondriën en het omringende cytoplas uitwisseling van stoffen plaats. Enkele stoffen die in h cytoplasma voorkomen, zijn: $O_2$ $CO_2$ en $H_2O$.

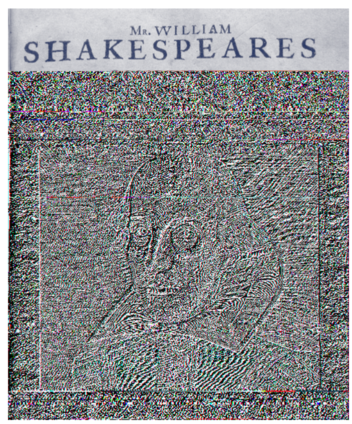
32 Van welke van deze stoffen zal er per tijdseenheid m een mitochondrion ingaan dan uitgaan?
a alleen van $O_2$
b alleen van $CO_2$ en $H_2O$
c van $O_2$ , $CO_2$ en $H_2O$

**a** Bereken de kans dat hij alledrie de vragen goed beantwoordt.

Hint 2.

**b** Bereken de kans dat hij precies één van de drie vragen goed gokt.

**48** Renske heeft een mondeling Engelse literatuur. Daarvoor moest ze zeven boeken lezen. Zij heeft er echter maar vijf gelezen. Van de twee andere boeken heeft zij alleen de verfilming gezien. Tijdens het mondeling kiest de docent drie boeken uit waarover hij vragen stelt. We letten bij elk van de drie boeken die de docent kiest erop of Renske het gelezen heeft of niet.




**a** Teken de bijbehorende kansboom.
Is hier sprake van met of zonder terugleggen?

**b** Bereken de kans dat Renske alle drie de boeken heeft gelezen.

**c** Wat is de kans dat zij minstens één van de drie boeken niet heeft gelezen?

# 4.5 Rekenen met kansen (2)

**49** Het konijn van Jasper is moeder geworden van drie kleine konijntjes. Jasper wil van elk van de konijntjes weten of het een mannetje of een vrouwtje is. Zij zijn echter zo klein dat Jasper dat niet kan zien.

**a** Teken de bijbehorende kansboom. Je mag er vanuit gaan dat de kans op een mannetje even groot is als op een vrouwtje. Is hier sprake van met of zonder terugleggen?

**b** Bereken de kans dat het alledrie vrouwtjes zijn.

**c** Bereken de kans dat het twee mannetjes en één vrouwtje zijn.

**d** Bereken de kans dat er meer vrouwtjes zijn dan mannetjes. Had je deze kans ook meteen kunnen weten? (Zonder te rekenen en zonder kansboom)

**50** Frank houdt erg veel van strips. Vooral Guust Flater vindt hij geweldig. Er zijn zestien Guust-albums; daarvan heeft Frank er al negen. Op zijn verjaardag komen twee tantes op bezoek. Elk van de tantes heeft een album van Guust voor hem meegenomen. Alleen hebben zij niet van te voren gevraagd welke albums hij nog niet had. De tantes hebben ook niet van te voren met elkaar overlegd. Het is dus mogelijk dat Frank een van de albums of zelfs beide albums al heeft.

**a** Teken een bijbehorende kansboom.

**b** Bereken de kans dat hij er twee nieuwe albums bij krijgt.

**c** Bereken de kans dat hij allebei de albums al heeft.

**51** Mijnheer Schönbergen is leraar Duits. Elke les moeten de leerlingen in zijn havo 4-klas $20$ woordjes leren. Aan het begin van elke les overhoort Schönbergen $5$ van de $25$ leerlingen, die hij altijd willekeurig kiest. Ook de leerlingen die hij de vorige les heeft overhoord hebben evenveel kans om weer aan de beurt te komen als de andere.
Saskia en Merel zijn leerlingen van mijnheer Schönbergen.

**a** Wat is de kans dat Schönbergen in drie lessen Saskia precies één keer overhoort? Teken eventueel een kansboom.

**b** Wat is de kans dat Schönbergen in vier opvolgende lessen Saskia niet overhoort?

**c** Wat is de kans dat Schönbergen in een les zowel Saskia als Merel overhoort?

In de volgende opgaven wordt je niet steeds gevraagd een kansboom te tekenen. Dit neemt niet weg dat dat in veel opgaven zinvol kan zijn. Vaak kom je al een heel eind als je bedenkt hoe zo'n kansboom er uit zou komen te zien. Dit kan vaak door het probleem te vergelijken met een vaasprobleem.

**52** In de havo 4-klas van mijnheer Schönbergen hebben vandaag 10 leerlingen de woordjes niet geleerd (en 15 dus wel).

**a** Bereken de kans dat de eerste drie leerlingen die Schönbergen overhoort allemaal de woordjes hebben geleerd.

**b** Bereken de kans dat één van de eerste drie leerlingen die hij overhoort de woordjes niet geleerd heeft.

**c** Hoeveel van de vijf leerlingen die hij overhoort, zullen naar verwachting de woordjes niet hebben geleerd?

**53** Er zijn vier verschillende bloedgroepen bij mensen, namelijk: A, B, AB en 0. Niet elke bloedgroep komt even vaak voor. Van alle mensen in Nederland heeft 40% bloedgroep A, 10% bloedgroep B, 5% bloedgroep AB en 45% bloedgroep 0.
Op een zekere dag komen vijf mensen (geen familie van elkaar) zich aanmelden als bloeddonor bij de bloedbank.

**a** Bereken de kans dat geen van deze mensen bloedgroep AB heeft.

**b** Bereken de kans dat geen van deze mensen bloedgroep B heeft.

**c** Bereken de kans dat geen van deze mensen bloedgroep AB of B heeft.

**54** Anneke heeft op maandag altijd zeven uur les van zeven verschillende leraren. Volgende week is er een excursie waarbij twee van die zeven leraren meegaan als begeleiders. Welke twee leraren dat zijn is nog niet bekend

**a** Bereken de kans dat Anneke daardoor één uur eerder naar huis kan.

**b** Bereken de kans dat Anneke daardoor 's ochtends twee uur langer in bed kan blijven liggen.

**c** Bereken de kans dat Anneke daardoor twee tussenuren krijgt.

**55** Het ministerie van Verkeer en Waterstaat heeft onderzoek gedaan naar het aantal personen dat in een auto zit. Uit het onderzoek blijkt dat in 58% van de auto's alleen de bestuurder zit. In 22% van de auto's zitten twee mensen en in slechts 13% van de auto's zitten drie mensen.

**a** In hoeveel procent van de auto's zitten meer dan drie mensen?

Voor een verkeerslicht staan twee auto's te wachten.

**b** Bereken de kans dat hier in totaal vier mensen in zitten.

# 4.5 Rekenen met kansen (2)

**56** Een tafeltennistoernooi telt 16 deelnemers. Van die 16 deelnemers zijn er 5 linkshandig en 11 rechtshandig. We gaan er vanuit dat alle spelers even sterk zijn. Ze hebben dus allemaal evenveel kans om in de finale te komen.

**a** Bereken de kans dat in de finale een linkshandige en een rechtshandige speler tegenover elkaar staan.

**b** Teken de kansboom die bij dit probleem hoort. Is er hier sprake van met of zonder terugleggen?

**c** Neem onderstaande tabel over en vul hem met behulp van je kansboom in. Controleer of het totaal van de kansen gelijk is aan 1.

| finale tussen | R en R | L en R | L en L |
|---|---|---|---|
| kans daarop | | | |

**d** Wat is de kans op minstens een linkshandige in de finale?

**57** In een vaas zitten 10 balletjes, 4 witte en 6 zwarte. Anneke pakt hier met terugleggen drie keer een balletje uit.

**a** Bereken de kans dat Anneke twee keer een zwarte en één keer een witte bal pakt.

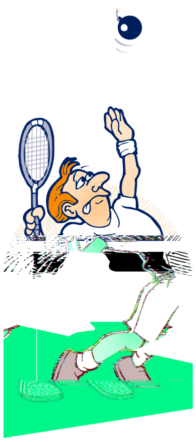
**b** Bereken de kans op minstens een witte bal.

**58** Uit dezelfde vaas als bij opgave 57 pakt Anneke weer drie balletjes. Maar nu legt zij de balletjes niet terug in de vaas.

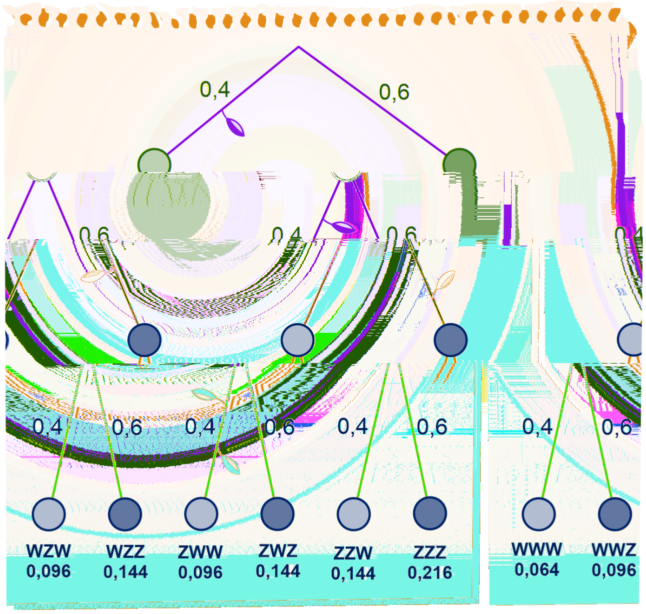
**a** Bereken de kans dat Anneke twee keer een zwarte en één keer een witte bal pakt.

**b** Bereken de kans op minstens een witte bal.

**59** Nederland moet in de Daviscup tennissen tegen Australië. Zoals je misschien weet, worden er vijf partijen gespeeld. Vier keer een enkelspel en één keer een dubbel. Het land dat de meeste partijen wint, gaat door naar de volgende ronde. We gaan er (uiteraard) vanuit dat Nederland iets sterker is dan Australië en bij elke partij een kans heeft van 60% om die te winnen.
Bereken de kans dat Nederland drie van de vijf partijen wint.



Laten we nog eens kijken naar de situatie in opgave 59. Hieronder zie je de kansboom die bij dit vraagstuk hoort.



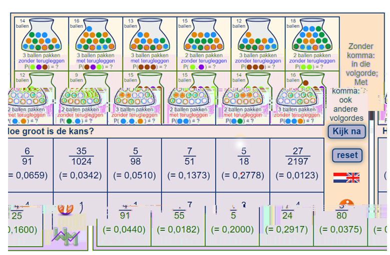

- De kansen aan de uiteinden bereken je door de kansen langs de takken te vermenigvuldigen.
  Voorbeeld
  De kans op WWZ = kans op W·kans op W·kans op Z.
- De kansen aan de uiteinden zijn opgeteld gelijk aan 1.
- De kansen op een bepaald eindresultaat zijn gelijk, ongeacht de volgorde.
  Voorbeeld
  De kans op WWZ =kans op WZW=kans op ZWW.

Als je dus eenmaal een goede kansboom gemaakt hebt, kun je alle problemen te lijf. Blijft nog de moeilijkheid om een goede kansboom te maken. In het geval van balletjes die je uit een vaas pakt, is het maken van een kansboom geen probleem. Je moet dus proberen een vraagstuk te “vertalen” naar een vaas met ballen.

**Opmerking**

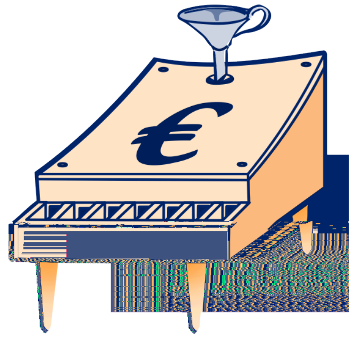
Als je nog extra wilt oefenen met het rekenen met kansen bij het trekken van ballen uit een vaas, dan kan dat op een speelse manier met de volgende mini-loco.

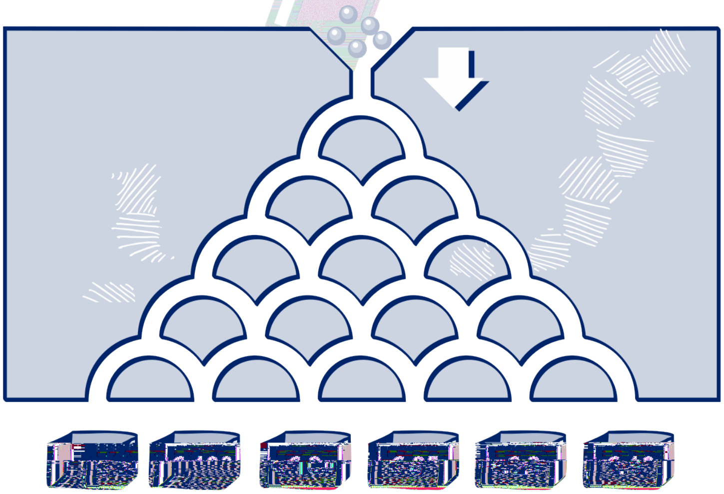
‘Kansen: ballen in een vaas’.



# 4.6 Verwachting

**60** Hieronder staat schematisch het inwendige van een spelautomaat. Bovenaan wordt in de trechter een balletje losgelaten, dat vervolgens naar beneden rolt en in een van de bakjes terecht komt. De speler ontvangt het bedrag dat bij het bakje geschreven staat. We gaan ervan uit dat een balletje bij elke splitsing met gelijke kans naar links of naar rechts gaat.





Stel dit spel wordt per jaar 40.000 keer gespeeld.

**a** Hoe vaak zou je het balletje in het bakje met honderd euro verwachten?
En hoe vaak in elk van de andere bakjes?

**b** Hoeveel zou de eigenaar van de automaat naar verwachting per jaar moeten uitbetalen?

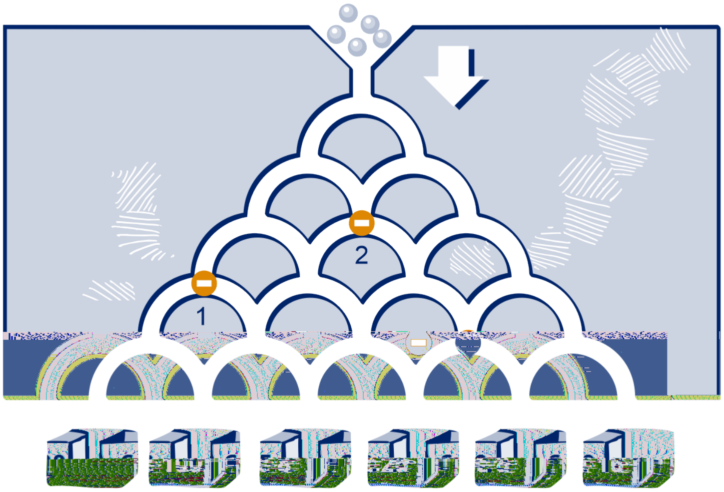
Natuurlijk zal hij niet precies het bedrag uit onderdeel **b** moeten uitbetalen.

**c** Wat is in theorie het maximale bedrag dat de eigenaar per jaar zou kunnen moeten uitbetalen?
En het theoretisch minimale bedrag?

Om dit spelletje te mogen spelen moet je € 15 betalen.

**d** Is dit een aantrekkelijke prijs voor een speler om te spelen? Leg uit.

Na enige tijd verandert de eigenaar het spel. Op enkele plaatsen zet hij een “stop”. Rolt het balletje daarin dan stopt het spel en wordt er niets uitbetaald. Het nieuwe inwendige van de spelautomaat staat op de volgende bladzijde.




**e** Hoeveel moet de eigenaar nu naar verwachting per jaar uitbetalen?

**f** Bij welke inzet is het net niet meer aantrekkelijk om het spel te spelen?

De stoppen 1,2 en 3 zijn zo neergezet dat het onmogelijk is € 100 te winnen. Dat maakt het niet aantrekkelijk voor mensen om het te spelen.

**g** Ontwerp zelf een spel met stoppen waarmee het wel mogelijk is € 100 te winnen. De andere bedragen mag je zelf kiezen.

Bepaal ook hoeveel een speler moet betalen om te spelen: niet te hoog en ook niet te laag. Bereken de winst die je mag verwachten als het spel 1000 keer gespeeld wordt.

**61** Chuck-a-luck is een spelletje op Amerikaanse kermissen.
Tegen een inzet van 1 dollar mag je met drie dobbelstenen gooien. Valt geen van de dobbelstenen op 'zes' dan ben je je inzet kwijt. In de andere gevallen krijg je de inzet terug plus een dollar voor elke zes die je gooide.
De exploitant van dit spelletje op de kermis is natuurlijk geïnteresseerd hoeveel hij kan verdienen met dit spel. De inkomsten zijn duidelijk: $1 per spel. De uitgaven liggen minder vast. Die variëren: $0, $2, $3 of $4. Hij maakt een tabel met de kansen op de verschillende uitgaven per spel.

| uitbetaling | $ 0 | $ 2 | $ 3 | $ 4 |
|---|---|---|---|---|
| kans | | | | |

**a** Bereken de kansen voor deze tabel.

**b** Stel dat dit spelletje 10.000 keer gespeeld wordt; hoe vaak hoeft de exploitant naar verwachting niets uit te betalen? En hoe vaak \$2? En \$3? En \$4?

**c** Bereken hoeveel de exploitant naar verwachting gemiddeld per spelletje verdient.

**d** 10000 keer spelen komt niet zo mooi uit. Welk aantal zou jij liever kiezen in plaats van 10000?

Niet alleen bij spelletjes wordt de gemiddelde winst die je naar verwachting boekt, berekend. We gaan hiervan enkele voorbeelden bekijken.

62 Een druiventeler kan kiezen tussen twee manieren van oogsten.
**Manier 1** Direct oogsten als de druiven rijp zijn. De winst per kilo is nu € 1,50. Aan deze manier van oogsten is geen risico verbonden.
**Manier 2** Als de druiven rijp zijn laat hij ze nog twee weken hangen. Hierdoor worden de druiven voller van smaak. De druiven zijn nu meer waard. De winst is nu € 2,00 per kilo. Aan deze manier is wel risico verbonden. Als het gaat regenen in deze laatste twee weken, worden de druiven aangetast en daardoor minder waard: nog slechts € 0,75 per kilo winst.
De kans dat het in de betreffende periode van twee weken regent is 0,30 (30%).

**a** Laat zien dat de te verwachten winst per kilo bij manier 2 groter is dan € 1,50.

Als de winst van de aangetaste druiven veel lager wordt dan € 0,75, is het voordeliger voor de teler om voor manier 1 te kiezen.

**b** Bereken vanaf welke winst voor de aangetaste druiven hij beter voor manier 1 kan kiezen.

63 Verzekeringsmaatschappijen werken veel met kansen.
Wintersportvakanties zijn niet zonder risico. Ongeveer 6% van alle wintersporters raakt in mindere of meerdere mate gewond. De behandelingskosten kunnen variëren van enkele tientjes tot duizenden euro's. Gemiddeld liggen de kosten rond de 400 euro per gewonde.
Per jaar gaan 10.000 Nederlanders naar de wintersport. Laten we aannemen dat ze zich allemaal bij een verzekeringsmaatschappij verzekeren en dat deze maatschappij geen winst hoeft te maken.

**a** Hoe hoog zal de verzekeringspremie per persoon moeten bedragen, opdat de verzekeringsmaatschappij de verwachte kosten kan betalen?

Stel dat slechts de helft van de wintersporters zich verzekert.

**b** Bereken ook nu de hoogte van de premie.

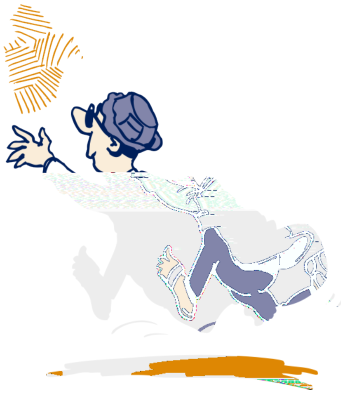
**c** Hoe hoog zou in theorie de premie moeten zijn als zich slechts één persoon zich bij deze maatschappij zou verzekeren?

De verzekeringsmaatschappij bepaalt de premie op 6% van 400 euro; dat is 24 euro. Als we nu per wintersporter kijken, dan zijn er twee mogelijkheden.

1. De wintersporter overkomt niets. De kans daarop is groot, namelijk 94% en de verzekeraar wint 24 euro.
2. De wintersporter overkomt wel wat. De kans hierop is 6% en de verzekeraar verliest 376 euro. Gemiddeld houden de winst en verliesbedragen elkaar in evenwicht, als de 6% en 400 euro goed geschat zijn.

**d** Noem een aantal gevaren voor een verzekeringsmaatschappij.
Vergelijk daarbij een grote en een kleine maatschappij (veel klanten tegenover weinig klanten).

**64** Reisbureaus bieden vlak voor vertrek de zogenaamde last minutereizen aan. Ze proberen het vliegtuig en/of hotel alsnog vol te krijgen door de prijzen te verlagen. Reizen die normaal bijvoorbeeld € 800 kosten, kunnen dan geboekt worden voor € 550. Wie zou dat niet willen?
Maar dit kan alleen als er nog plaatsen over zijn. Dus als je gokt op zo'n last minute aanbieding, loop je het risico dat er helemaal geen plaats is.
Familie Jansen, met 4 personen, wil van de zomer naar Turkije. Het boeken van zo'n reis kan in april voor € 800 per persoon. Vorig jaar zagen zij in de zomer een last minute aanbieding van deze reis voor € 550 per persoon.
Probleem is nu: hoe groot schatten zij de kans dat deze aanbieding dit jaar weer komt. Neem aan dat die kans 0,60 is. Als de aanbieding niet komt zullen ze, om toch naar Turkije te kunnen, een duurdere lijnvlucht moeten boeken. Deze kost € 900 per persoon.
Welk advies zou jij de familie Jansen geven (uitgaande van hun schatting van 0,60): in april boeken of wachten tot de zomer? Ondersteun je advies met een berekening.



# 4.6 Verwachting

65 De levensverwachting voor de Nederlandse vrouw is bij de geboorte ongeveer 82 jaar. In sommige landen in Afrika is de levensverwachting nog geen 50 jaar.
Wat wordt er met een levensverwachting van nog geen 50 jaar bedoeld? Men verwacht, bij de geboorte, dat de inwoners in zo'n Afrikaans land gemiddeld nog geen 50 jaar oud worden. Dat wil natuurlijk niet zeggen dat niemand ouder dan 50 jaar kan worden. Hoe wordt zoiets berekend? Laten we een eenvoudig voorbeeld nemen om te laten zien hoe zo'n levensverwachting berekend wordt.

Eendagsvliegen leven niet lang: maximaal 12 uur.
We gaan 1000 eendagsvliegen vanaf de geboorte volgen. We noteren ieder uur hoeveel van deze 1000 vliegjes nog in leven zijn.

| Na ... uur | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nog ... in leven | 1000 | 850 | 600 | 250 | 100 | 20 | 0 |

**a** Bereken hieruit de gemiddelde leeftijd die deze 1000 vliegjes bereiken. Neem daarbij aan dat vliegjes die bijvoorbeeld tijdens hun achtste levensuur sterven 7,5 uur oud worden.

Bekijk nu alleen de groep van 250 vliegjes die hun 9-de verjaaruur vierden.

**b** Bereken voor deze groep hun levensverwachting (dat is de gemiddelde leeftijd waarop ze stierven)

We bekijken de groep van 100 vliegjes die hun 10-de verjaaruur vierden.

**c** Als we de gemiddelde leeftijd waarop ze stierven berekenen, zal deze dan hoger/lager/even hoog zijn als bij de groep van 250 vliegjes, die hun 9-de verjaaruur vierden? Geef uitleg.

66 In warenhuizen is gedurende een doordeweekse dag bijgehouden hoe lang de mensen met hun boodschappen voor de kassa moesten wachten.

| wachttijd in min. | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| % klanten in A | 20 | 10 | 20 | 25 | 25 |
| % klanten in B | 0 | 40 | 40 | 20 | 0 |

Je leest bijvoorbeeld af dat in winkel A 20% van de klanten 1 minuut moest wachten.

De wachttijden zijn afgerond op halve en hele minuten.
Met deze gegevens maken we een model: we nemen aan dat bovenstaande verdeling voor iedere doordeweekse dag geldt. Voor iedere klant geldt nu dat de kans dat hij/zij 1 minuut in winkel A moet wachten 0,20 is. Voor andere wachttijden en voor winkel B worden op dezelfde wijze de kansen gedefinieerd.

**a** Bereken de gemiddelde wachttijd voor winkel A.
Ook voor winkel B.

**b** Maak een kansboom van de wachttijden voor een klant die eerst naar winkel A gaat en vervolgens naar winkel B.

Een klant bezocht beide winkels.

**c** Bereken de kans dat deze klant in beide winkels even lang moet wachten.

De totale wachttijd voor iemand die beide winkels bezoekt varieert van 0,5 tot 3,5 minuut.

**d** Maak een tabel van de kansen op de verschillende mogelijkheden.

| wachttijd | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kans | | | | | | | |

**e** Bereken de gemiddelde totale wachttijd.

Anneke beweert: “Als je de gemiddelde wachttijden bij winkel A en bij winkel B optelt, krijg je dezelfde uitkomst als bij onderdeel e: de gemiddelde totale wachttijd”.

**f** Onderzoek met een berekening of deze uitspraak juist is.

**67** Naast de lotto kun je ook meedoen aan de zogenaamde Euroloterij. Dat kost € 1. Op het lotto-lot van een deelnemer staan zes cijfers. Bij de trekking wordt het winnende getal van 6 cijfers bekend gemaakt.
Zijn de 6 cijfers van het getal van de deelnemer goed (dus alles is goed) dan krijgt hij € 200.000.
Zijn de laatste 5 cijfers goed, dan € 5000.
Zijn de laatste 4 cijfers goed, dan € 450.
Zijn de laatste 3 cijfers goed, dan € 50.
Zijn de laatste 2 cijfers goed, dan € 5.
Is het laatste cijfer goed, dan ontvangt hij € 1.
Je krijgt niet meer dan één prijs. Als de laatste vier cijfers goed zijn, krijg je alleen daarvoor de prijs (en niet ook nog voor de laatste drie cijfers).

Bereken hoeveel de winst is die de organisator van het cijferspel per deelnemer mag verwachten.

**68** Kansrekening kom je overal in wetenschappelijke publikaties tegen. Helaas is de formulering niet altijd even helder. Hieronder vind je daar een voorbeeld van.

DE RAMP
De stormvloed, die in de nacht van 31 januari op 1 februari 1953 ons land overviel, kwam als een volslagen verrassing. We wisten wel dat een vloed van dergelijke hoogte eens zou voor kunnen komen. Zo'n vloed heeft een frequentie van ongeveer 1/300, dat wil zeggen dat een willekeurige inwoner van het Deltagebied een kans heeft van bijna 25% om een vloed van dit formaat eenmaal in zijn leven mee te maken. Maar zo'n kansberekening sprak niet tot de verbeelding, een eventuele gebeurtenis van deze omvang kon men zich nauwelijks voorstellen. Terwijl in de rampnacht het vloedwater tot angstwekkende hoogte begon te stijgen, hadden vele Delta-bewoners zich dan ook onbekommerd te ruste begeven.

De tekst komt uit het standaardwerk "De Nederlandse Delta". Het gaat de overstromingsramp van 1953. Toen steeg het water bij vloed zo hoog, dat een groot deel van Zuidwest Nederland onder water kwam te staan.
Er wordt gesproken over een frequentie van ongeveer 1/300. Laten we eens aannemen dat de schrijver hiermee bedoelt: *per* 300 *keer dat het vloed is, zal er gemiddeld* 1 *keer zo'n reuzenvloed zijn*.

**a** Bereken hoeveel keer iemand in zijn leven, dat 73 jaar duurt, zo'n reuzenvloed meemaakt. (De tijd tussen twee opeenvolgende keren vloed is 12 uur en 25 minuten.)

Bij onderdeel **a** zul je gevonden hebben dat iemand die 73 jaar oud wordt best wel vaak zo'n reuzenvloed mee zal maken. De schrijver zal dus wel iets anders bedoeld hebben met 1/300. Laten we aannemen dat hij bedoelde: gemiddeld 1 keer in de 300 jaar.
Neem aan, voor ieder jaar is de kans op zo'n vloed 1/300 is.

**b** Bereken de kans dat in de komende 2 jaar in beide jaren zo'n vloed optreedt.

**c** Bereken de kans dat in de komende 10 jaar niet zo'n vloed zal optreden.

**d** Bereken de kans dat iemand die 73 jaar wordt minstens één keer in zijn leven zo'n vloed meemaakt. Komt er ongeveer 25% uit?

Eindexamen wiskunde A havo 1992, eerste tijdvak

69

In Limburg kwamen in het verleden grote overstromingen voor van de Maas, bijvoorbeeld in 1926, 1993 en 1994. In 1994 stond er in de kranten dat voor het tweede achtereenvolgende jaar het water van de Maas een hoogte bereikte die gemiddeld slechts eens in de $50$ jaar werd verwacht.
Vele mensen redeneerden in 1993 als volgt.
*In 1993 was er zo'n overstroming, dus de volgende verwachten we pas over $50$ jaar (in 2043)* .

**a** Wat vind jij van deze redenering?

Neem eens aan dat voor ieder jaar de kans op zo'n overstroming steeds $\frac{1}{50}$ is.

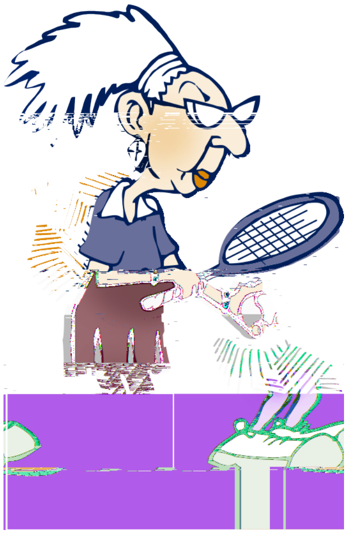
**b** Bereken de kans dat zo'n overstroming $50$ jaar of meer op zich laat wachten.

Overstroming 1926, Venlo

Kansen bepaal je vaak door te tellen. Je telt hoeveel mogelijkheden er zijn voor een resultaat en achterhaalt wat de kans is op elk van de mogelijkheden.
Het onderdeel van de wiskunde dat zich bezighoudt met het tellen van de aantallen mogelijkheden heet **Combinatoriek**.

70

**Wimbledon 2007**
Op de volgende bladzijde zie je het complete speelschema voor het dames tennistoernooi Wimbledon van 2007.
Je ziet in het schema onder andere dat de Belgische Justine Henin in de eerste ronde tegen de Argentijnse Cravero speelt. In de tweede ronde zal de winnaar van deze match spelen tegen de winnaar van Bacsinszky en Dushevina.



In theorie zou Henin tegen Malek (nr.46) kunnen spelen.

**a** In welke ronde zou dat zijn?

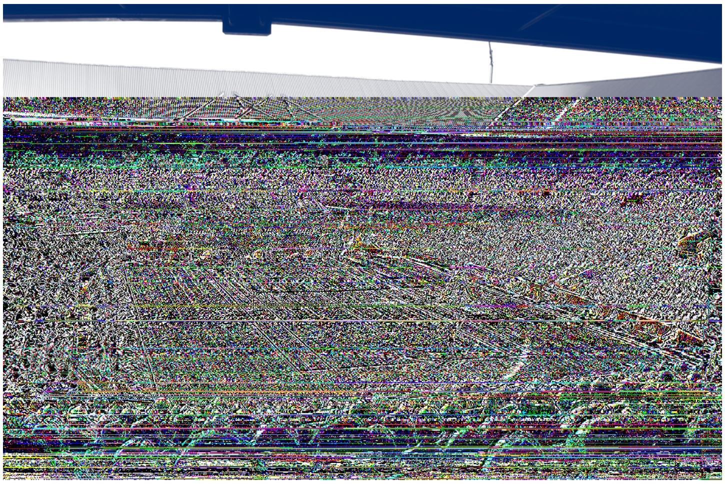
In totaal zijn er zeven rondes (eerste ronde tot en met de finale).

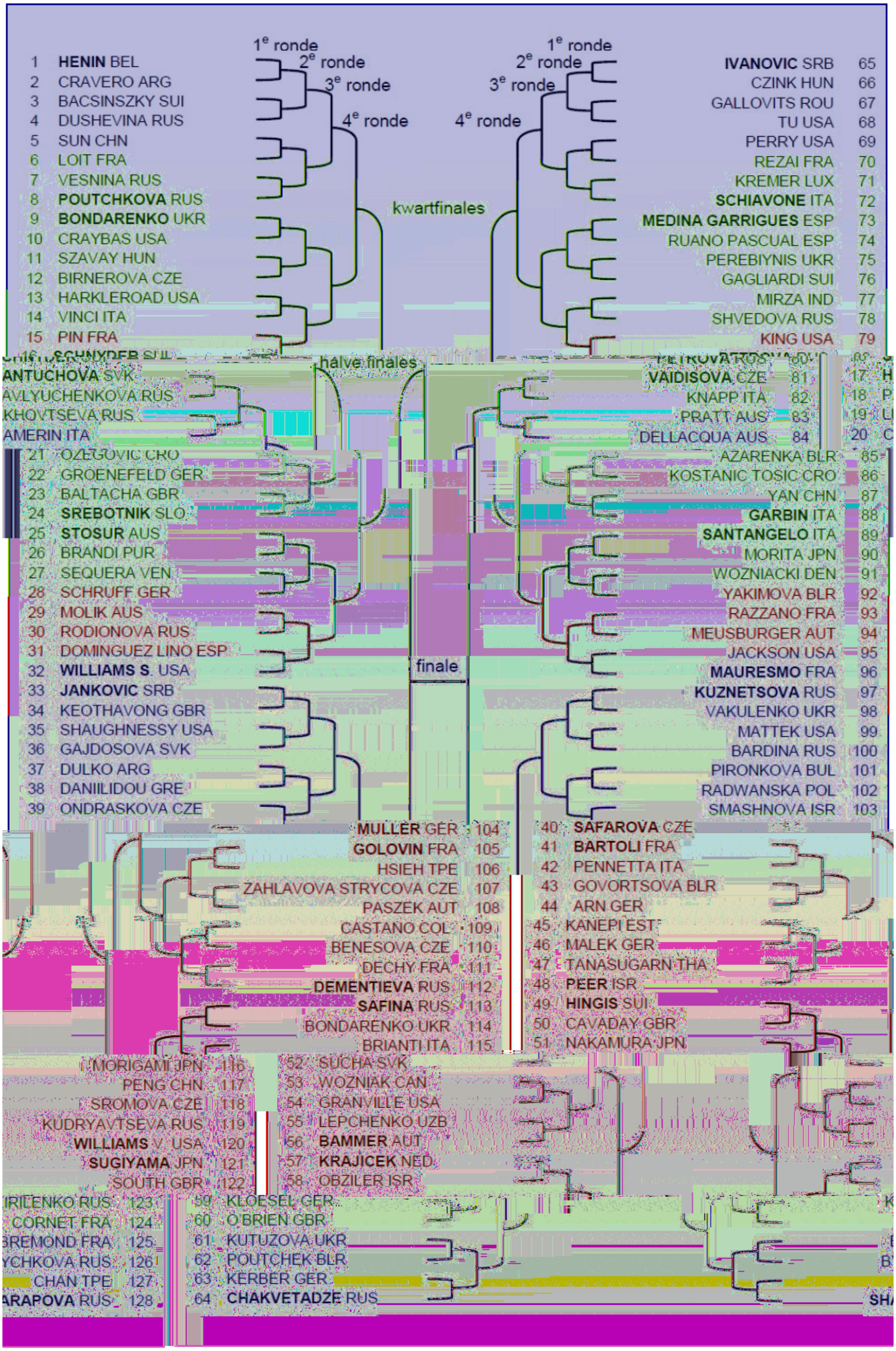
**b** Hoeveel spelers spelen er in de eerste ronde? En hoeveel in de tweede?

**c** Hoeveel wedstrijden worden er volgens dit wedstrijdschema in totaal gespeeld?

De namen van sommige speelsters zijn vetgedrukt; dat zijn “geplaatste” speelsters. Om te voorkomen dat de sterkste speelsters al vroeg in het toernooi tegen elkaar moeten spelen, worden de beste 16 spelers “geplaatst”: ze worden zo over het schema verspreid dat ze elkaar pas later tegen kunnen komen.

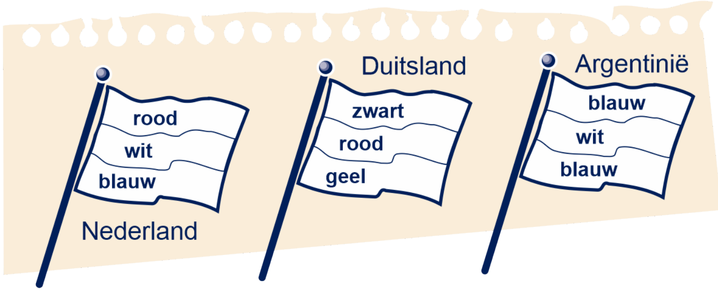
**d** In welke ronde kunnen geplaatste spelers voor het eerst tegen elkaar uitkomen?




1e ronde
2e ronde
3e ronde
4e ronde
kwartfinales
halve finales
finale
1 HENIN BEL
2 CRAVERO ARG
3 BACSINSZKY SUI
4 DUSHEVINA RUS
5 SUN CHN
6 LOIT FRA
7 VESNINA RUS
8 POUTCHKOVA RUS
9 BONDARENKO UKR
10 CRAYBAS USA
11 SZAVAY HUN
12 BIRNEROVA CZE
13 HARKLEROAD USA
14 VINCI ITA
15 PIN FRA
21 OZEGOVIC CRO
22 GROENEFELD GER
23 BALTACHA GBR
24 SREBOTNIK SLO
25 STOSUR AUS
26 BRANDI PUR
27 SEQUERA VEN
28 SCHRUFF GER
29 MOLIK AUS
30 RODIONOVA RUS
31 DOMINGUEZ LINO ESP
32 WILLIAMS S. USA
33 JANKOVIC SRB
34 KEOTHAVONG GBR
35 SHAUGHNESSY USA
36 GAJDOSOVA SVK
37 DULKO ARG
38 DANIILIDOU GRE
39 ONDRASKOVA CZE
40 SAFAROVA CZE
41 BARTOLI FRA
42 PENNETTA ITA
43 GOVORTSOVA BLR
44 ARN GER
45 KANEPI EST
46 MALEK GER
47 TANASUGARN THA
48 PEER ISR
49 HINGIS SUI
50 CAVADAY GBR
51 NAKAMURA JPN
52 SUCHA SVK
53 WOZNIAK CAN
54 GRANVILLE USA
55 LEPCHENKO UZB
56 BAMMER AUT
57 KRAJICEK NED
58 OBZILER ISR
59 KLOESEL GER
60 O'BRIEN GBR
61 KUTUZOVA UKR
62 POUTCHEK BLR
63 KERBER GER
64 CHAKVETADZE RUS
IVANOVIC SRB 65
CZINK HUN 66
GALLOVITS ROU 67
TU USA 68
PERRY USA 69
REZAI FRA 70
KREMER LUX 71
SCHIAVONE ITA 72
MEDINA GARRIGUES ESP 73
RUANO PASCUAL ESP 74
PEREBIYNIS UKR 75
GAGLIARDI SUI 76
MIRZA IND 77
SHVEDOVA RUS 78
KING USA 79
VAIDISOVA CZE 81
KNAPP ITA 82
PRATT AUS 83
DELLACQUA AUS 84
AZARENKA BLR 85
KOSTANIC TOSIC CRO 86
YAN CHN 87
GARBIN ITA 88
SANTANGELO ITA 89
MORITA JPN 90
WOZNIACKI DEN 91
YAKIMOVA BLR 92
RAZZANO FRA 93
MEUSBURGER AUT 94
JACKSON USA 95
MAURESMO FRA 96
KUZNETSOVA RUS 97
VAKULENKO UKR 98
MATTEK USA 99
BARDINA RUS 100
PIRONKOVA BUL 101
RADWANSKA POL 102
SMASHNOVA ISR 103
MULLER GER 104
GOLOVIN FRA 105
HSIEH TPE 106
ZAHLAVOVA STRYCOVA CZE 107
PASZEK AUT 108
CASTANO COL 109
BENESOVA CZE 110
DECHY FRA 111
DEMENTIEVA RUS 112
SAFINA RUS 113
BONDARENKO UKR 114
BRIANTI ITA 115
MORIGAMI JPN 116
PENG CHN 117
SROMOVA CZE 118
KUDRYAVTSEVA RUS 119
WILLIAMS V. USA 120
SUGIYAMA JPN 121
SOUTH GBR 122
CORNET FRA 124
CHAN TPE 127

71 **Vlaggen kleuren I**

Een vlag met drie horizontale banen moet ingekleurd worden. Er is keuze uit vijf kleuren: rood, wit, geel, blauw en zwart.

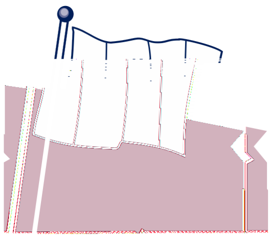



**a** Hoeveel verschillende vlaggen kunnen er gemaakt worden als alle banen een andere kleur moeten krijgen? Maak eventueel een boomdiagram.

**b** Hoeveel verschillende vlaggen kunnen er gemaakt worden als de kleuren meer dan eens gebruikt mogen worden, maar niet in aan elkaar grenzende banen?

72 **Vlaggen kleuren II**

Stel dat de vlag er nu uit moet zien zoals hiernaast en er zijn zeven kleuren beschikbaar.



**a** Hoeveel vlaggen kunnen er gemaakt worden als iedere kleur maar één keer gebruikt mag worden?

**b** Hoeveel verschillende vlaggen kunnen er gemaakt worden als de kleuren meerdere keren gebruikt mogen worden, maar niet in aangrenzende banen?

73 Er zijn zes klinkers: A, E, I, O, U en Y. Iemand kiest vier keer een klinker en schrijft die op een rijtje. Zo'n rijtje waarbij de volgorde van belang is, noemen we ook wel een **rangschikking** of **permutatie**.

Eerst bekijken we het geval dat een letter maar één keer gekozen mag worden.

**a** Hoeveel rangschikkingen van vier klinkers kun je maken als een klinker maar één keer mag voorkomen?

Nu bekijken we het geval dat een letter meerdere keren gekozen mag worden (zelfs vier keer).

**b** Hoeveel rangschikkingen van vier klinkers kun je maken als een klinker meerdere malen mag voorkomen?

**c** Hoeveel rangschikkingen van zes klinkers kun je maken als een klinker maar één keer mag voorkomen?

Je hebt de 8 cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

**d** Hoeveel rangschikkingen (in dit geval getallen) van $8$ cijfers kun je hiermee maken als elk cijfer één keer mag voorkomen?

In de voorgaande opgave heb je gezien dat er $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ rangschikkingen van zes verschillende klinkers zijn en $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ rangschikkingen (of permutaties) van $8$ verschillende cijfers.

Er zijn $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschillende rangschikkingen van $n$ verschillende dingen.
We noteren $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ met $n!$ (spreek uit: $n$ **faculteit**).

Hieronder staan de uitkomsten van $n!$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$.
$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5040$
$8! = 40320$
$9! = 362880$
$10! = 362880$
Je kunt hieruit zien hoe duizelingwekkend snel de faculteitsgetallen groeien.

**74** Een voetbaltrainer kan bijna 40 miljoen opstellingen maken met zijn elf basisspelers.

**a** Geef commentaar op deze bewering.

Op een beetje rekenmachine kun je faculteiten berekenen.
Het kan zeker op je GR.

**b** Zoek uit hoe dat op jouw apparaat werkt.

**75** Als je achter de uitkomst van 9! een nul zet, krijg je de uitkomst van $10!$.

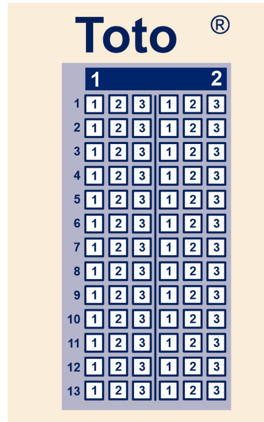
**a** Is dat logisch?

Mijn rekenmachine geeft na intoetsen van $12!$ de uitkomst: $4.79^{08}$. Dat betekent: $4{,}79 \cdot 10^{8} = 479.000.000$.

**b** Hoe kan je erachter komen dat deze uitkomst niet helemaal precies is?

**c** Bereken de precieze uitkomst van $10!$ uitgaande van $10!$ in het lijstje van faculteitsgetallen.

**76** **Toto**




Op één formulier van de toto kunnen de uitslagen van 13 voetbalwedstrijden worden voorspeld. Bij elke wedstrijd doe je dat door daarachter een hokje aan te kruisen met nummer 1, 2 of 3. Als je hokje 1 aankruist, voorspel je dat de thuisclub gaat winnen. Bij hokje 2 verliest de thuisclub en bij hokje 3 wordt het een gelijkspel.

**a** Op hoeveel verschillende manieren kan één kolom worden ingevuld?

**b** Hoeveel mogelijkheden zijn er om één kolom in te vullen waarbij er geen enkel gelijkspel wordt voorspeld?

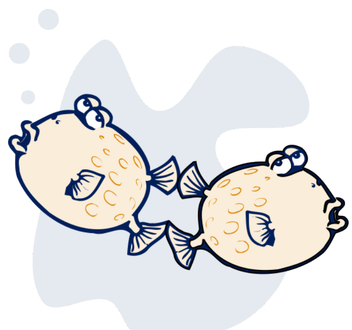
**77** Een meerkeuzetoets bestaat uit 15 vragen. Bij iedere vraag staan vier antwoorden, waarvan er één moet worden aangekruist. Er is altijd maar één antwoord goed.

**a** Op hoeveel manieren kun je de toets maken?

Er is uiteraard maar één manier om de toets helemaal zonder fouten te maken.

**b** Op hoeveel manieren kun je de toets maken met precies één fout?

**78** **Palindroom**



Een palindroom is een woord waarin de letters van links naar rechts en van rechts naar links gelezen in dezelfde volgorde staan.

Voorbeelden zijn: raar, lepel en parterretrap.

**a** Weet je nog een voorbeeld van een palindroom?

We kijken nu naar alle palindromen van vijf letters. Ze hoeven verder geen betekenis te hebben.

**b** Hoeveel palindromen van vijf letters zijn er? En van zes letters?

**c** Hoeveel palindromen van vijf letters zijn er waarbij iedere letter maximaal twee keer voorkomt?

Veel telproblemen kun je terugvoeren tot het tellen van het aantal routes in een rooster.

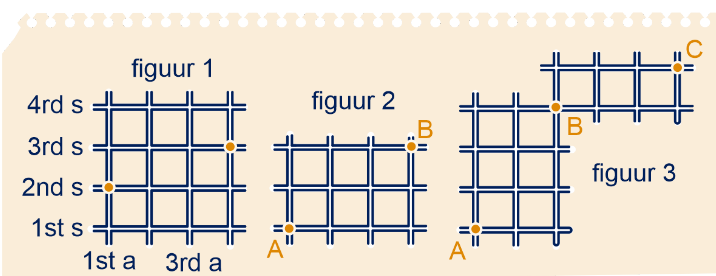
## Routes in een rooster

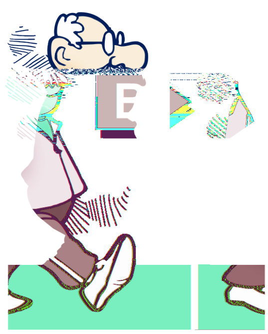
79

**Wandelingen**
Nieuwere wijken in grote steden hebben vaak een rechthoekig stratenpatroon, bijvoorbeeld L'Eixample in Barcelona.

De wegenstructuur in Amerikaanse steden is ook vaak zo. In de benaming van de wegen is die overzichtelijkheid terug te vinden: 1st street, 2nd street ... en 1st avenue, 2nd avenue,..

Een wandeling voert van het kruispunt 2nd street, 1st avenue naar het kruispunt 3rd street, 4th avenue zonder omwegen



**a** Maak een plattegrond zoals in figuur 1 en teken daarin alle mogelijke wandelingen.

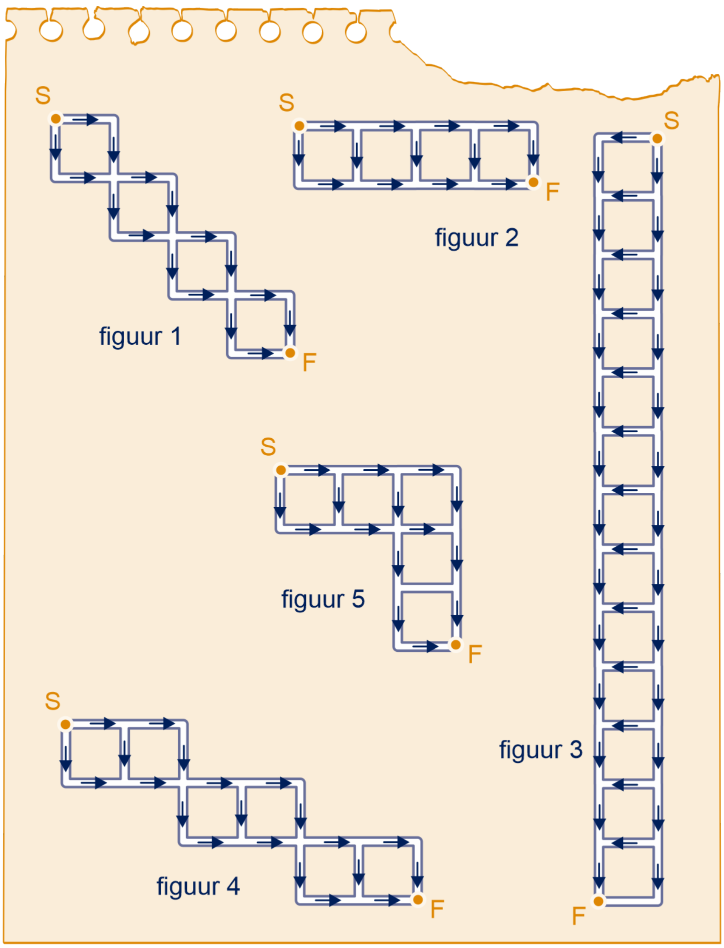
Bij het stukje plattegrond in figuur 2 zijn 10 verschillende wandelingen van A naar B mogelijk
**b** Teken deze wandelingen. Pak het systematisch aan.
**c** Hoeveel wandelingen zijn er in de plattegrond in figuur 3? mogelijk:

- van A naar B?
- van B naar C?

**d** Hoe kun je uit je antwoorden op de vorige vraag het aantal wandelingen van A naar C vinden?

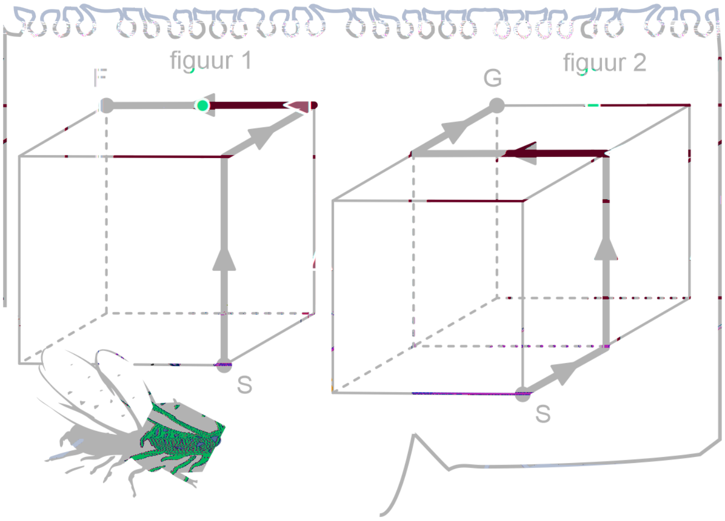
De wandelingen zijn ook te beschrijven met een rijtje bestaande uit twee letters A (avenue) en drie letters S (street). De wandeling in de figuur hiernaast is de wandeling SAASS.
Alle wandelingen van opgave 79**b** kun je zo beschrijven. Je krijgt dan:
AASSS, ASASS, ASSAS, ASSSA, SASSA,
SASAS, SAASS, SSASA, SSAAS, SSSAA

**80** Hoeveel routes zijn er van start S naar finish F in de vijf figuren?



81

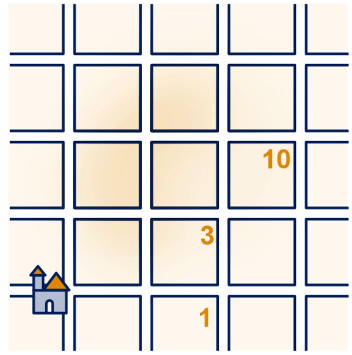
In figuur 1 hieronder zie je een route zonder omwegen langs de ribben van een kubus van S naar F.
Om vanuit S in F te komen moet je één keer omhoog (O), één keer naar links (L) en één keer naar achter (A). De route in de figuur is dus te coderen door OLA.



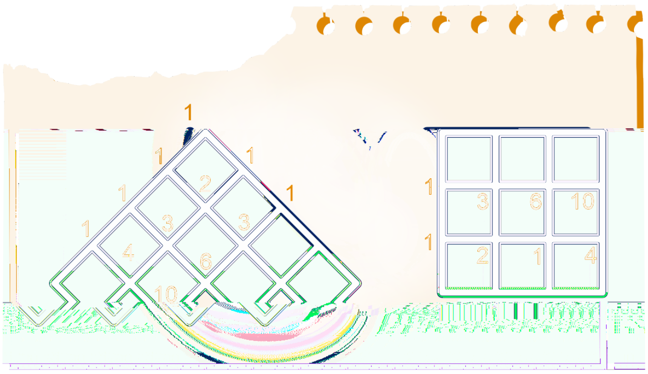

**a** Hoeveel rijtjes kun je maken met O, L en A? Hoeveel routes zijn er dus van S naar F?

**b** Bereken ook het aantal kortste routes in figuur 2 van S naar G.

82 In de plattegrond van Square City wordt bij elk kruispunt vermeld hoeveel routes er zonder omwegen naar dat kruispunt leiden, gerekend vanaf het stadhuis. Bij drie kruispunten is het aantal routes al ingevuld.
Vul zelf de aantallen in bij de andere twaalf kruispunten.

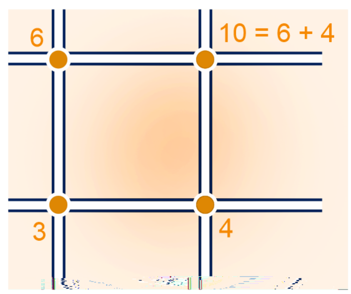



**Opmerking**



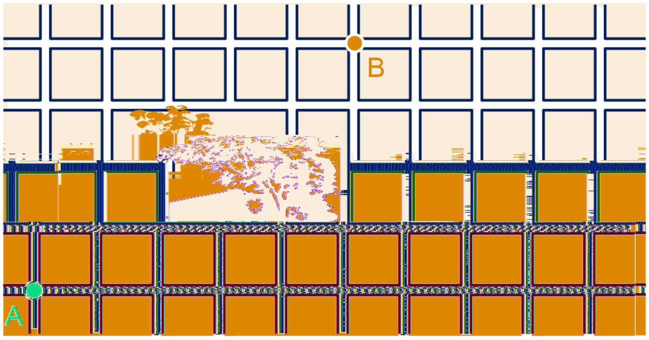
Om de aantallen routes in een rooster te tellen, is het handig om bij elk ‘tussenpunt’ het aantal routes naar dat punt te schrijven. Dat zie je in de volgende opgave.

83 Bekijk het vierkant hiernaast. Uit het aantal routes naar het punt links-boven (6) en het punt rechts-onder (4) kun je door optellen het aantal routes naar het punt rechts-boven (10) vinden.
Leg uit waarom dit zo kan.




84 Bepaal in onderstaande situaties het aantal routes van S naar F door bij elk tussenpunt het aantal routes te schrijven en de optelmethode toe te passen (werkblad).

**85** In Square City is een fraaie tuin aangelegd die niet door voetgangers mag worden betreden.




Hoeveel kortste routes zijn er van A naar B?

De getallen in het stratenplan van opgave 82 geven aan hoeveel kortste routes er mogelijk zijn vanaf het stadhuis. Dat systeem kan verder uitgebreid worden. Zodoende ontstaat een getallenpatroon dat de **driehoek van Pascal** genoemd wordt. Het patroon wordt wel op twee manieren weergegeven:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 9 | | | | | | | | |
| 1 | 8 | 30 | | | | | | | |
| 1 | 7 | 28 | 84 | | | | | | |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | | | | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | | | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | | | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Blaise Pascal (1623 - 1662)

**86** Bekijk hieronder de driehoek van Pascal. We hebben de regels genummerd. De driehoek begint met regel 0; de onderste regel is regel 8.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | regel 0 |
| 1 | 1 | | | | | | | | | regel 1 |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | | regel 2 |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | regel 3 |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | regel 4 |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | regel 5 |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | regel 6 |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | regel 7 |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | regel 8 |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |

Hoe ziet regel 9 er uit?

87 Pascal was overigens niet de eerste wiskundige die de tabel ontdekte en gebruikte. In een Chinees wiskundeboek, van de schrijvers Ssu Yuan Yu en Chuh Shih Chieh, uit het jaar 1303, is de tabel al te vinden. En dat de tabel nog veel ouder is, blijkt uit het feit dat hij in het Chinese boek 'de antieke tabel' wordt genoemd.

[redacted]

Hoe schrijf je het getal 8 in het Chinees?

De getallen in de driehoek van Pascal kun je ook op de GR vinden.
Het getal op de $6$-de plaats in de $10$-de rij wordt op een (grafische) rekenmachine genoteerd met: $10$ nCr $6$.
In de wiskunde gebruiken we de notatie: $\binom{10}{6}$, spreek uit: *tien boven zes*.
Je moet de plaatsen en de rijen bij $0$ beginnen te tellen.
Getallen $\binom{n}{k}$ noemen we **combinatiegetallen**.

88
**a** Zoek uit hoe je $\binom{10}{6}$ met je GR uitrekent en controleer met de GR ook de andere getallen in je antwoord op opgave 86.

In de driehoek van Pascal staat op regel 0 het getal $1$.
De getallen op regel 1 zijn opgeteld $2$.
De getallen op regel 2 zijn opgeteld $4$.

**b** Vul deze lijst aan tot en met regel 6.

**c** Welke uitkomst krijg je als je de getallen op regel 10 optelt?

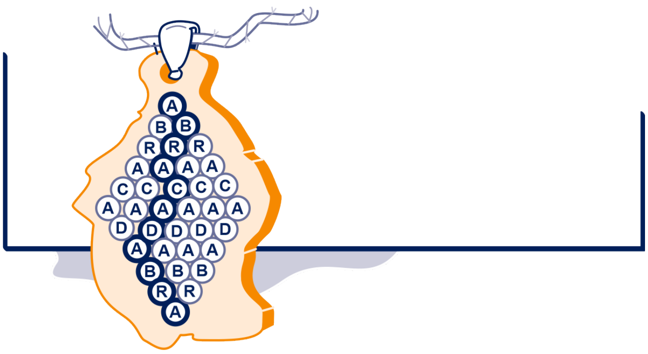
We doen vanuit de bovenste punt zes stappen. De zesde regel bestaat uit zeven plekken. De aantallen routes om op die plekken te komen zijn:
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
Deze aantallen zijn opgeteld $2^6$.

**d** Leg uit waarom de getallen op de zesde regel opgeteld $2^6$ zijn.

**89** Dwars door Square City loopt een kanaal. Langs het kanaal is een mooie boulevard aangelegd met gezellige restaurants en barretjes.
Een inwoonster van Square city wil vanuit punt A zo snel mogelijk naar de boulevard.


Uit hoeveel routes kan zij kiezen?

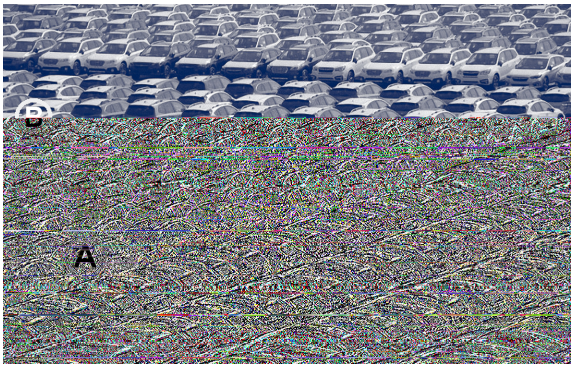
**90** **ABRACADABRA**
ABRACADABRA is een oude bezweringsformule. Het zou de mensen tegen ziekten en kwade invloeden beschermen. Het woord stond vaak op amuletten en talismans vermeld




Een talisman met dit opschrift gaf veel macht, want je kunt het woord ABRACADABRA op heel veel manieren lezen. Eén van die manieren is met cirkeltjes aangegeven in de figuur.
Op hoeveel manieren kun je op deze talisman het woord ABRACADABRA lezen?

# 4.8 Combinaties en permutaties

91 Jaap loopt van de lichtgrijze auto A naar de donkergrijze auto B. Neem aan dat je om alle autos heen kunt lopen.




Op hoeveel manieren kan Jaap dat?

92 Bij een wedstrijd werden in totaal zes doelpunten gemaakt.

**a** Welke eindstanden kunnen voorkomen?

**b** Geef bij elke eindstand aan hoeveel verschillende scoreverlopen daar bij passen.

Het totale aantal mogelijke scoreverlopen is 64.

**c** Had je dit aantal van te voren kunnen uitrekenen?

Bij een route in een rooster heb je steeds twee mogelijkheden: naar boven òf naar rechts. Net zo heb je bij een scoreverloop steeds twee mogelijkheden: een doelpunt voor de thuisclub t of voor de gasten g. Het scoreverloop in opgave 92 kan worden voorgesteld door een rijtje letters, bijvoorbeeld: tgttgt. Je kunt alle mogelijke scoreverlopen bij de einduitslag 2 — 4 vinden door alle rijtjes van twee letters t en vier letters g op te schrijven. Wanneer je dat systematisch doet (en je beschikt over voldoende tijd), dan zul je de 15 mogelijkheden wel vinden. De driehoek van Pascal geeft dit antwoord veel sneller!
De driehoek van Pascal gebruik je in situaties waarin de mogelijkheden vertaald kunnen worden naar rijtjes met twee symbolen (bijvoorbeeld t en g); zo'n rijtje moet bestaan uit een vast aantal t's en een vast aantal g's.
Elk rijtje is dan weer te geven als een route in een rooster.

**Voorbeeld**
Uit een groep van acht mensen moeten er drie gekozen worden. Hoeveel verschillende drietallen zijn er mogelijk?
Voor het gemak nummeren we de personen van 1 tot en met 8. Als een persoon wel gekozen wordt, zetten we een '1' onder zijn nummer, anders een '0'. Als het drietal 2, 3 en 7 gekozen wordt, krijg je het onderstaand rijtje:

| persoon | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gekozen | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Bij ieder drietal hoort zo'n rijtje met vijf keer een '0' en drie keer een '1'.

Het aantal mogelijkheden is $\binom{8}{3} = 56$.

**Voorbeeld**

Hoeveel gezinssamenstellingen zijn er bij een gezin van vier jongens en twee meisjes?

We nummeren de kinderen naar leeftijd van 1 tot en met 6, waarbij 1 de oudste is en 6 de jongste. Een mogelijke gezinssamenstelling is dan:

| kind | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| geslacht | J | J | M | J | J | J |

Het aantal mogelijkheden is $\binom{6}{2} = 15$.

93

**a** Hoeveel rijtjes van vijf J's en vijf M's zijn er?

**b** En van vijf nullen en drie enen?

94

**Meer keuze**

Een test bestaat uit zes opdrachten. Een kandidaat moet er hieruit drie kiezen en deze maken.

Hoeveel keuzemogelijkheden heeft zo'n kandidaat?

95

De toestand van twaalf bomen aan de zuidkant van de Parklaan wordt onderzocht. Zieke exemplaren worden gemerkt met een kruis. Er blijken vijf bomen ziek te zijn.

**a** Op hoeveel volgordes kunnen die vijf bomen over de Parklaan verspreid staan?

**b** Hoeveel volgordes zijn er als je weet dat de eerste drie bomen gezond zijn?

Hint 3.

96

**Klassenfeest**

Vier leerlingen zullen een klassenfeest organiseren: twee jongens en twee meisjes. Ze worden gekozen uit $23$ leerlingen van de klas, $11$ jongens en $12$ meisjes.

**a** Hoeveel tweetallen kun je uit de elf jongens kiezen? En hoeveel tweetallen uit de meisjes?

**b** Hoeveel viertallen kunnen gekozen worden?

# 4.8 Combinaties en permutaties

**97** **Profielkeuze**

Om haar profiel aan te vullen moet Saadet nog drie vakken kiezen uit de vakken: ee, ak, ckv2, gs, du, bi, wb.

**a** Op hoeveel manieren kan zij haar profiel aanvullen?

**b** Bereken het aantal manieren waarop zij haar profiel aan kan vullen als zij geen enkel exact vak (ee, bi, wb) kiest.

**c** Bereken het aantal manieren waarop zij haar profiel aan kan vullen als zij één exact vak kiest.

**d** Op hoeveel manieren kan zij dit doen als zij hoogstens één van de exacte vakken wil kiezen?

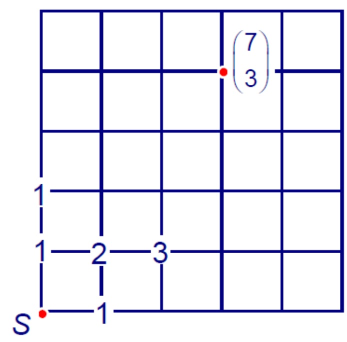
**Opmerking**

$\binom{n}{k}$ is:

- het aantal 0-1 -rijtjes van lengte $n$ met $k$ nullen,
- het aantal kortste routes van lengte $n$ met $k$ stappen naar rechts,
- het aantal grepen van $k$ dingen uit een verzameling van $n$ dingen.

Met een "greep" bedoelen we een **ongeordende greep**: de volgorde waarin je de dingen pakt, is niet van belang.

Het combinatiegetal $\binom{7}{3}$ staat in de driehoek van Pascal op de plaats "3 naar rechts, 4 naar boven" vanaf het startpunt $S$.

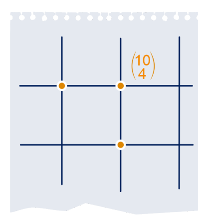



**98** **a** Bepaal in een rooster zoals hiernaast hoe groot $\binom{7}{3}$ is.

**b** Geef in een rooster de plaats aan van $\binom{5}{0}$, $\binom{10}{5}$ en $\binom{6}{4}$.

**c** Hoe groot zijn deze drie combinatiegetallen?

**99** Hiernaast zie je een deel van een rooster met drie punten. Het punt rechtsboven hoort bij $\binom{10}{4}$.

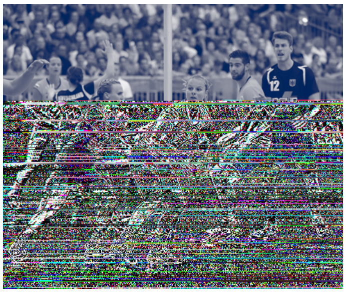



**a** Welke combinatiegetallen horen bij de andere twee?

Er geldt: $\binom{9}{3} = 84$ en $\binom{9}{4} = 126$

**b** Hoe volgt hieruit hoe groot $\binom{10}{4}$ is?

**c** Vul de juiste getallen in: $\binom{80}{33} = \binom{79}{\dots} + \binom{79}{\dots}$.



**100** Een zaalkorfbalteam bestaat uit vier dames en vier heren. De coach wijst voor de wedstrijd uit de twaalf beschikbare spelers (zes dames en zes heren) een team aan.

**a** Hoeveel keuzen heeft hij?

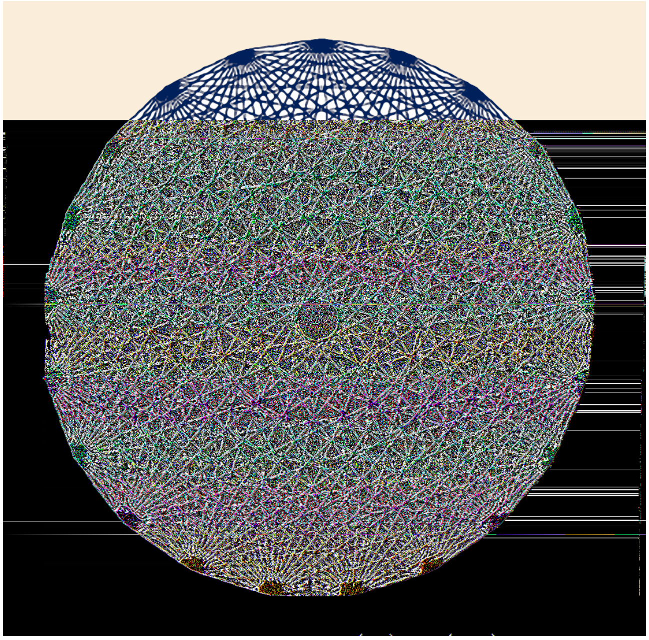
Korfbal wordt gespeeld in twee vakken: een verdedigingsvak en een aanvalsvak. In ieder vak staan van een team twee dames en twee heren. (Waar in het vak de spelers staan, doet er niet toe.)

**b** Op hoeveel manieren kan de coach uit de al aangewezen vier dames en vier heren een beginopstelling vormen?

**101** **a** Bereken zonder rekenmachine $\binom{80}{1}$, $\binom{97}{1}$ en geef een formule voor $\binom{n}{1}$.

**b** Bereken zonder rekenmachine $\binom{80}{0}$, $\binom{97}{0}$ en geef een formule voor $\binom{n}{0}$.

**102** Op een cirkel liggen 21 punten. Door deze twee aan twee te verbinden, ontstaat onderstaande figuur.



**a** Hoeveel verbindingslijntjes zijn er getekend?

**b** Welk combinatiegetal $\binom{\dots}{\dots}$ is dat?

**103**

**a** Bereken zonder rekenmachine $\binom{80}{2}$ en $\binom{200}{2}$

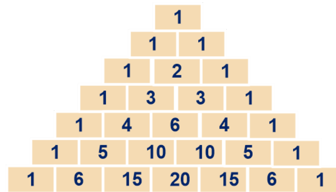
**b** Geef een formule voor $\binom{n}{2}$.

**Opmerking**

Sommige combinatiegetallen zijn dus eenvoudig te berekenen. Maar de meeste vind je niet zo gemakkelijk.
Er zijn verschillende mogelijkheden om bijvoorbeeld te vinden.

- In een rooster kun je dat getal stap voor stap opbouwen.
- Uit de driehoek van Pascal (hiernaast) kun je het getal aflezen.
- Op sommige rekenmachines zit er een speciale knop voor: nCr.

Verderop leren we hoe je het getal met behulp van de faculteitknop ($x$!) kunt berekenen.




**104**

In de driehoek van Pascal kun je zien dat $\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$.

**a** Hoe kun je dat uitleggen met behulp van routes?

**b** Hoe kun je dat uitleggen met behulp van 0-1-rijtjes?

**c** Hoe kun je dat uitleggen met behulp van grepen?

**105**

**Lotto**

Als je meedoet in de lotto, mag je tegen betaling, zes nummers kiezen uit de getallen 1 tot en met 45. Komen die zes nummers op zaterdagavond toevallig uit de lottomachine gerold, dan win je een miljoen. Per lottoformulier kun je $10$ keer je geluk beproeven.

**a** Hoeveel complete formulieren moet je invullen om zeker te zijn van de hoofdprijs?

**b** Hoe groot is de kans op "alle zes goed", als je maar één formulier invult?

**106** **Play-offs**
De basketbalcompetitie telt tien clubs. De vier clubs die het hoogst eindigen, spelen de zogenaamde play-offs om het kampioenschap van Nederland. Ze bepalen in een onderlinge competitie wie 1, 2, 3 en 4 wordt. Die volgorde noemen we de "uitslag" van de competitie.

**a** Hoeveel viertallen uit de tien clubs zijn er in principe mogelijk?

Een van die viertallen wordt gevormd door: Weert, Den Bosch, Den Helder en Groningen.

**b** Hoeveel uitslagen zijn er voor deze vier mogelijk?
**c** Hoe vind je uit **a** en **b** het aantal uitslagen dat mogelijk is voor de basketbalcompetitie?
**d** Hoe kun je het aantal uitslagen voor de tien clubs ook rechtstreeks uitrekenen?

In opgave 106**d** heb je aantal **rangschikkingen** van vier uit tien berekend. Dat is het aantal manieren waarop je vier dingen uit tien op een rij kunt zetten. Bij een rangschikking is de *volgorde* van belang, bij een greep *niet*.
In plaats van rangschikking wordt ook wel de term **permutatie** gebruikt.

Je hebt nu op twee manieren berekend hoeveel rangschikkingen er zijn van 4 uit 10:
$\binom{10}{4} \cdot 4!$ en $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.
Dus: $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}$.

**107** $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ is nog wel met een rekenmachine te berekenen.
Vervelender is al $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.
Er geldt: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6!} = \frac{10!}{6!}$.
Leg dat uit en bereken $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ door twee faculteitsgetallen op elkaar te delen.

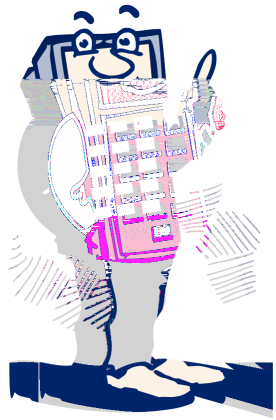
**108** Het aantal rangschikkingen van drie dingen uit een verzameling van tien is: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.
Dit aantal kun je ook berekenen door twee faculteitsgetallen op elkaar te delen.
**a** Doe dat.
**b** Bereken het aantal rangschikkingen van 6 dingen uit een verzameling van 18 door twee faculteitsgetallen op elkaar te delen.

Vul de juiste uitdrukking in $n$ en $k$ in.

**c** Het aantal rangschikkingen van $k$ dingen uit een verzameling van $n$ is: $\frac{n!}{...!}$.

Op veel rekenmachines en de GR kun je het aantal rangschikkingen berekenen met de optie $n\mathrm{P}k$.

**d** Zoek uit hoe dat op jouw machine gaat en bereken hiermee het aantal rangschikkingen van 5 uit 15.



Het aantal rangschikkingen van vijf dingen uit een verzameling van elf is $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{11!}{6!}$.
Algemeen: het aantal rangschikkingen (permutaties) van $k$ dingen uit een verzameling van $n$ is $\frac{n!}{(n-k)!}$.
Op veel rekenmachines en de GR vind je dit aantal met de optie $n\mathrm{P}k$.

In opgave 106 heb je gezien: het aantal raangschikkingen van 4 uit 10 vind je door het aantal combinaties van 4 uit 10 met 4! te vermenigvuldigen, dus $\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!}$. Algemeen geldt het volgende.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**109** Aan een internationaal jeugdvoetbaltoernooi nemen 10 clubs deel, waarvan 2 uit Nederland.

**a** Hoveel finales zijn er mogelijk?

**b** Wat is de kans dat de twee Nederlandse clubs de finale spelen?

Er wordt ook nog om de derde plaats gespeeld.

**c** Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de bezetting van de plaatsen 1, 2 en 3?

**110** Een voetbalcoach beschikt over een selectie van 18 spelers.

**a** Op hoeveel manieren kan hij hieruit elf spelers kiezen?

Er zijn 2 keepers, 6 verdedigers, 5 middenvelders en 5 aanvallers. De coach besluit 4-2-4 te spelen, dat wil zeggen met 4 verdedigers, 2 middenvelders en 4 aanvallers (en 1 keeper)

**b** Uit hoeveel elftallen kan hij kiezen? (Alle spelers kunnen zowel links als rechts uit de voeten.)

Tijdens een griepepidemie melden zich 7 spelers ziek, zodat hij nog precies één elftal overhoudt.

**c** Wat is de kans dat hij daarmee 4-2-4 kan spelen?

111

**Toepen**

Bij het kaartspel toepen worden alleen de kaarten B, V, H, A, 7, 8, 9, 10 gebruikt van elk van de kleuren schoppen, harten, ruiten en klaveren. Elke speler krijgt vier willekeurige kaarten uit de 32 kaarten. De vier kaarten die een speler krijgt noemt men een hand. De 10-en zijn de hoogste kaarten; het is dus gunstig als je veel 10-en hebt.

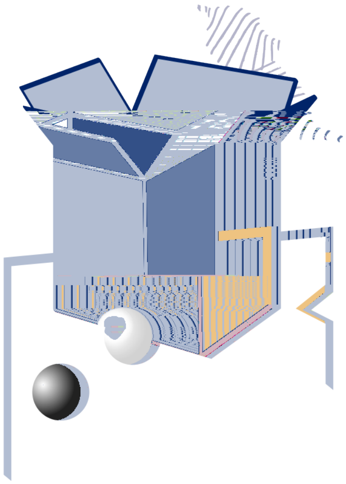
**a** Hoeveel mogelijkheden zijn er voor een hand?

**b** Hoeveel “gunstige” grepen zijn er, dat wil zeggen bij hoeveel grepen zijn er twee 10-en en twee niet-10-en?

**c** Wat is de kans op (precies) twee 10-en?

112

In een doos zitten 30 ballen: 20 witte en 100 zwarte. Pak er acht ballen uit (zonder terugleggen).



**a** Hoeveel grepen van acht ballen zijn er uit een doos met 30 ballen? Geef je antwoord met een combinatiegetal.

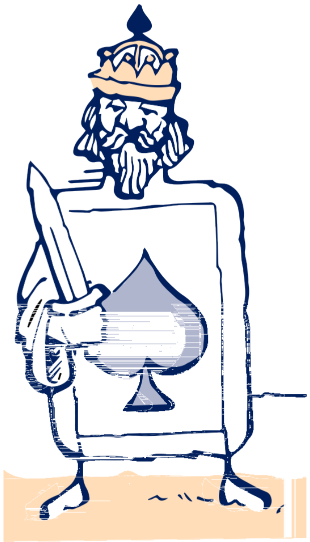
**b** Bij hoeveel grepen heb je vijf witte ballen en drie zwarte gepakt? Schrijf je antwoord als product van twee combinatiegetallen.

**c** Wat is de kans dat je vijf witte en drie zwarte ballen pakt? Schrijf de kans met behulp van combinatiegetallen en bereken hem.

113

**Bridge**

Bij bridge krijgt elk van de spelers dertien kaarten uit een volledig kaartspel van 52 kaarten.



**a** Hoeveel ’handen’ zijn er voor een speler mogelijk?

**b** Bij hoeveel handen zijn de dertien kaarten vijf schoppen, vier harten, twee ruiten en twee klaveren?

**c** Wat is dus de kans op vijf schoppen, vier harten, twee ruiten en twee klaveren?

114

Als nieuw lid van een boekenclub mag je gratis drie boeken kiezen uit een lijst van tien. De eerste vier zijn dure boeken met prachtige platen in kleur, de andere zes zijn romans.

Je kiest willekeurig drie boeken uit de tien, dat wil zeggen dat alle drietallen boeken even waarschijnlijk zijn.

**a** Bereken de kans dat je één platenboek kiest en twee romans.

**b** Bereken ook de kans op
- drie platenboeken
- twee platenboeken en één roman
- drie romans

**c** Hoe kun je je antwoorden op **a** en **b** controleren?

# 4.8 Combinaties en permutaties

Veel opgaven in deze paragraaf komen hierop neer:
je hebt een populatie waarbij de leden een eigenschap wel of niet hebben; hieruit worden er een aantal gepakt; $X$ is het aantal dat gepakt wordt dat de eigenschap wel heeft.
Dit is hetzelfde als trekken zonder terugleggen van een aantal ballen uit een doos met witte en zwarte ballen.
Dat het zonder terugleggen is, herken je zo: de kans dat de tweede bal wit is, hangt af van de kleur van de eerste bal.

**Voorbeeld**
In een doos zitten tien ballen, vier witte en zes zwarte.
Iemand trekt zonder terugleggen vijf ballen uit die doos.

Dan is de kans op twee witte ballen: $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}$.

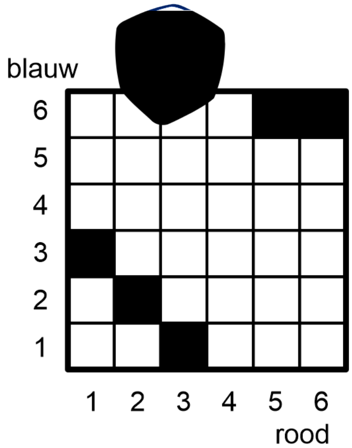
| | | | totaal |
|---|---|---|---|
| doos | 4 | 6 | 10 |
| greep | 2 | 3 | 5 |

**115** Uit een klas van tien jongens en twaalf meisjes wordt een afvaardiging van zes leerlingen gekozen.
Hoe groot is de kans dat er evenveel meisjes als jongens gekozen worden? Schrijf je antwoord met behulp van combinatiegetallen en benader de uitkomst in drie decimalen.

**116** Na de wedstrijd van Ajax tegen Feyenoord is het weer eens mis. Vijfentwintig supporters, tien van Ajax en vijftien van Feyenoord gaan met elkaar op de vuist. De politie grijpt in, zonder ergens op te letten. Elke supporter heeft daardoor dezelfde kans om opgepakt te worden. In totaal worden er acht supporters gearresteerd.
Hoe groot is de kans dat er drie aanhangers van Ajax en vijf van Feyenoord naar het bureau moeten? Schrijf ook nu je antwoord eerst met combinatiegetallen en bereken daarna de kans, afgerond op drie decimalen.

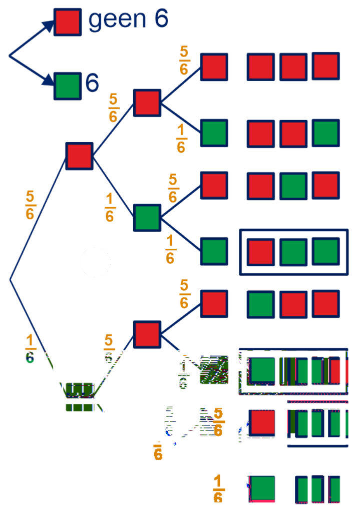
## Kans

Gegeven is een experiment met uitkomstenverzameling $U$. De kans op een gebeurtenis $G$ is: $\frac{\text{het aantal elementen van } G}{\text{het aantal elementen van } U}$.



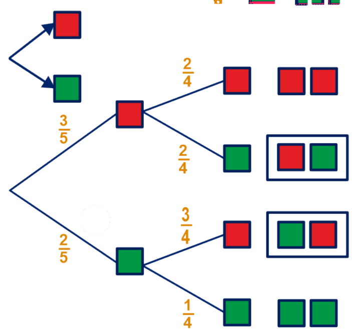

Met een **kansboom** kun je op een elementaire manier kansen berekenen.
De kans aan een uiteinde kun je berekenen door de kansen die langs de takken staan met elkaar te vermenigvuldigen.

### Voorbeeld 1




Je gooit drie keer met een dobbelsteen. Wat is de kans dat je twee keer 6 ogen gooit?
De kansboom waarmee je de gevraagde kans kunt berekenen staat hiernaast.
De gevraagde kans vind je door de kansen op de uitslagen in de hokjes op te tellen, dus: $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$.

### Voorbeeld 2



Uit een vaas met twee groene en drie rode ballen, trek je achter elkaar, zonder terugleggen, twee ballen.
Wat is de kans op een rode en een groene bal? De kansboom waarmee je de gevraagde kans kunt berekenen staat hiernaast.
De gevraagde kans vind je door de kansen op de uitslagen in de hokjes op te tellen, dus: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$.

In voorbeeld 1 spreek je over een probleem **met terugleggen** en in voorbeeld 2 **zonder terugleggen** en wel hierom.
Je doet iets een aantal keren (in voorbeeld 1 gooien met een dobbelsteen, in voorbeeld 2 trekken van een bal uit een vaas).
In voorbeeld 1 veranderen de kansen op zes/geen zes in een volgende keer niet, in voorbeeld 2 hangt de kans op rood/groen in een volgende keer af van wat er de vorige keer getrokken is.

**Permuaties en combinaties**

Een rijtje dingen (bijvoorbeeld getallen) waarbij de volgorde van belang is, noemen we ook wel een **rangschikking** of **permutatie**.

Er zijn $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschillende rangschikkingen van $n$ verschillende dingen.
We noteren $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ met $n!$ (spreek uit: $n$ **faculteit**).

Bijvoorbeeld: de acht getallen $5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ kun je op $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ manieren op een rij zetten.

Je kunt ook kortere rijtjes van bijvoorbeeld zes getallen van die acht getallen maken. Je spreekt dan van **rangschikkingen (of permutaties) van zes uit acht**.
Het aantal permutaties van $k$ uit $n$ is $\frac{n!}{(n-k)!}$.
Op veel rekenmachines en de GR vind je dit aantal met de optie $n\text{P}k$.
Je kunt ook zes getallen uit die acht nemen *zonder* op de volgorde te letten, dan spreek je van een **combinatie** of **greep** van zes uit acht.

Het aantal combinaties van $k$ uit $n$ noteren we met $\binom{n}{k}$.

De getallen $\binom{n}{k}$ noemen we **combinatiegetallen**. Er geldt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
Op veel rekenmachines en de GR vind je dit aantal met de optie $n\text{C}k$.

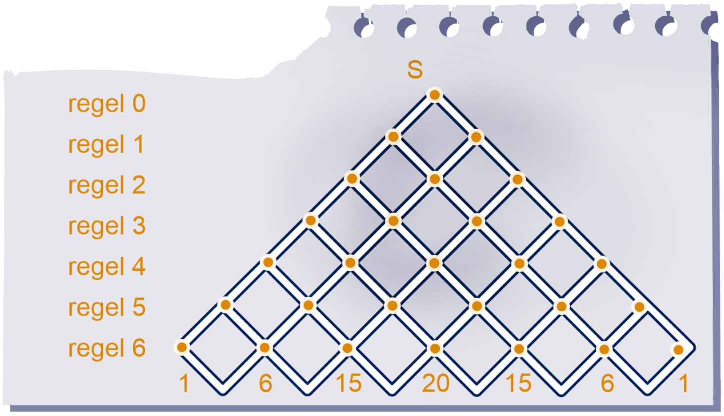
**De driehoek van Pascal**

Bekijk het rechthoekig stratenplan op de volgende bladzijde. Zet je bij elke hoek het aantal kortste wegen van $S$ naar die hoek, dan krijg je de **driehoek van Pascal**. In de figuur is dat bij de zesde regel gedaan.

Je krijgt dan de combinatiegetallen $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{6}{5}$, $\binom{6}{6}$.

# 4.9 Eindpunt

In de driehoek van Pascal staat het $\binom{n}{k}$ in de $n$-de regel op plaats $k$.




**Trekken zonder terugleggen**

Veel kansexperimenten kun je terugbrengen tot het trekken uit een vaas met ballen.
Als je *niet* teruglegt, kun je dat soort kansen berekenen met combinatiegetallen.

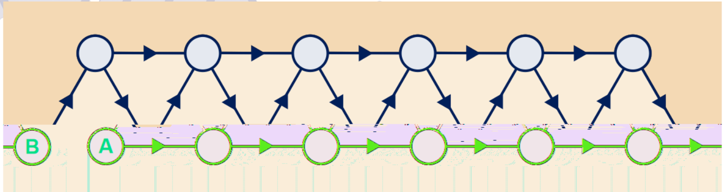
**Voorbeeld 3**

Je trekt uit een vaas met tien witte en vijf zwarte ballen zonder terugleggen drie ballen.
De kans dat je twee zwarte trekt kun je als volgt berekenen.
Drie ballen uit de vaas trekken kan op $\binom{15}{5}$ manieren. Twee zwarte ballen trekken op $\binom{5}{2}$ manieren en één witte op $\binom{10}{1}$ manieren.

De gevraagde kans is dus: $\dfrac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{15}{5}} = \dfrac{100}{3003} \approx 0{,}033.$

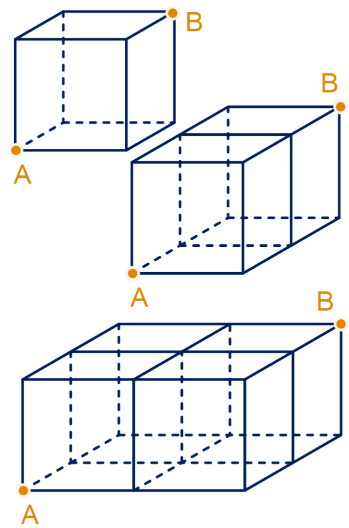
# 4.10 Extra opgaven

**1** Hoeveel verschillende routes zijn er van A naar B?

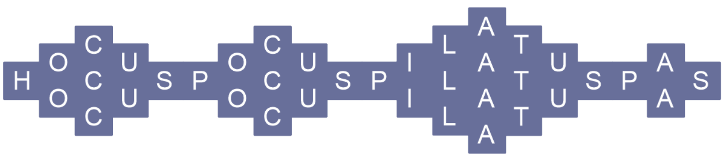



**2** We vergelijken twee systemen van lettercombinaties.
Systeem I: Uit de acht letters A tot en met H worden rijtjes van drie letters gevormd, bijvoorbeeld: AAB, BCD, FGF, HHH.
Systeem II: Uit de drie letters A, B, C worden rijtjes van acht letters gevormd, bijvoorbeeld: ABBACCCA, ABCABCAB.
Welk systeem bevat de meeste lettercombinaties?

**3** In de kubus hiernaast zijn er zes routes van A naar B. In de dubbele kubus zijn er twaalf routes van A naar B.
Hoeveel routes zijn er in het kwartet kubussen van A naar B?




**4** **Hocus pocus**
Een bekende toverspreuk is HOCUS POCUS PILATUS PAS.



Op hoeveel manieren kun je die spreuk in het letterpatroon hieronder lezen?

**5** **Pincodes**
Een pincode is een geheime code van vier cijfers die hoort bij een giro- of bankpas. Sommige mensen vinden het lastig om hun pincode te onthouden. Daarom hebben zij graag een mooie pincode. We noemen een pincode mooi als er maar twee verschillende cijfers voorkomen.
Bereken hoeveel mooie pincodes er zijn.

**6** De gastvrouw heeft nogal spijt van de gekozen rangschikking van haar 14 gasten aan tafel (7 mannen en 7 vrouwen).

Uit hoeveel rangschikkingen kan zij kiezen als zij de afwisseling man-vrouw-man-vrouw enzovoort wil handhaven?

**7** Bij een groot internationaal congres worden de volgende talen gesproken: Duits, Engels, Frans, Russisch, Spaans, Portugees en Nederlands. Als er iemand een lezing houdt, wordt die via een computer vertaald in alle andere talen.

**a** Hoeveel verschillend vertaalprogramma's zijn er in totaal nodig?

Men voert een centrale taal in: Esperanto. Alles wordt nu vanuit een taal eerst in Esperanto vertaald en daarna vanuit Esperanto naar de andere talen.
Voorbeeld: Duits → Esperanto → Engels.

**b** Hoeveel verschillende vertaalprogramma's zijn er in deze situatie in totaal nodig?

**8** Bij de lotto laat men zes balletjes één voor één uit een trommel rollen. In de trommel zitten 45 balletjes, genummerd van 1 tot en met 45. We letten niet op het zogenaamde reservegetal en ook niet op de "kleurbal". De balletjes worden vervolgens op volgorde van trekking naast elkaar gezet.
Een mogelijke volgorde is: 32 3 41 1 4 31.

**a** Hoeveel van dit soort rijtjes zijn er in totaal mogelijk?

Op het eind van de trekking worden ze op volgorde gezet, van klein naar groot. In ons voorbeeld krijg je dan het rijtje:
1 3 4 31 32 41.

**b** Hoeveel van dit soort rijtjes zijn er in totaal mogelijk?

**9** Victor vist in een vijver waar twaalf vissen zijn uitgezet, waaronder vier platvissen. Hij gooit een gevangen vis niet terug in het water. Alle vissen laten zich even gemakkelijk vangen. Victor vangt twee vissen.
Bereken de kans dat Victor minstens één platvis heeft gevangen.

**10** **Coderingen**

Codes zijn vaak gedigitaliseerd, dat wil zeggen dat ze alleen uit enen en nullen bestaan. 110010 is zo'n code. We kijken in deze opgave alleen naar codes die uit zes cijfers bestaan.

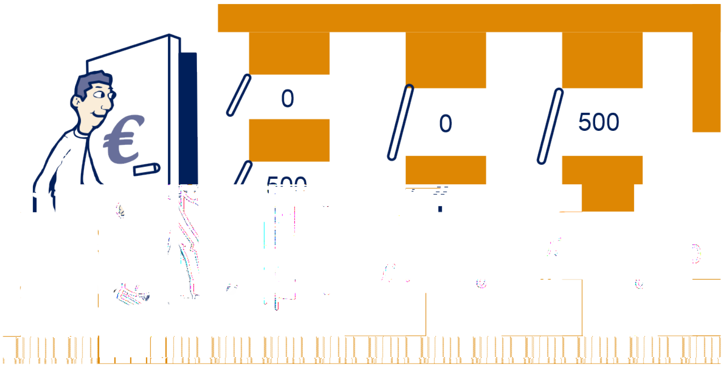
**a** Hoeveel van zulke codes zijn er?

Als een andere code op één plek afwijkt van het voorbeeld hierboven, dan zeggen we dat de afstand tussen deze twee codes 1

is. Wijken er twee cijfers af, dan is de afstand 2, enzovoort.
Voorbeeld: de afstand tussen 100100 en 001101 is 3.

**b** Hoeveel codes zijn er die afstand 2 hebben tot de code 110010?

**11** In een tv-quiz bepaalt de winnaar zijn prijs door drie deuren te openen. Hij moet eerst een A-deur openen, daarna een B-deur en ten slotte een C-deur. De gewonnen prijs is de som van de bedragen die achter de gekozen deuren vermeld staan (in euro's).

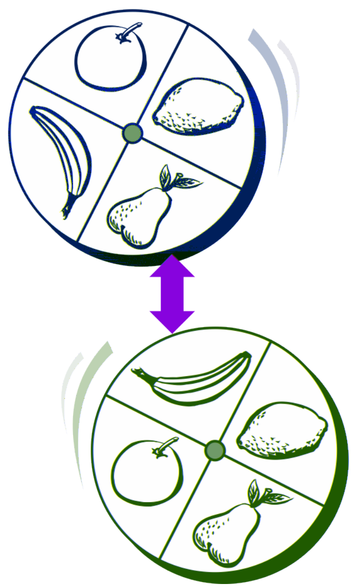



**a** Hoe groot is de kans om niets te krijgen?

**b** Hoe groot is de kans op een totale prijs van meer dan duizend euro?

**c** Hoeveel kosten naar verwachting de omroep 120 speelavonden?

**12** Hiernaast zie je een vereenvoudigde "fruitautomaat" zoals je die in cafetaria's aantreft. Hij bestaat uit twee schijven die onafhankelijk van elkaar draaien. Op elke schijf staat een appel, een banaan, een citroen en een peer. Als je speelt op de automaat, gaan de schijven draaien en komen elk in een willekeurige plek tot stilstand.



**a** Bereken de kans dat er geen appel en geen peer in het venster verschijnt.

Bij twee gelijke vruchten betaalt de automaat € 5 uit, bij een appel en een peer € 3 en bij een citroen en een banaan € 2.

**b** Bereken de kans dat je na één keer spelen € 5 wint.

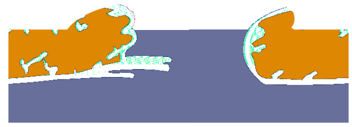
**c** Maak een tabel van de kansverdeling van de uitbetaling bij één keer spelen.

**d** Hoeveel moet een keer spelen minstens kosten, opdat de eigenaar van de automaat naar verwachting geen verlies lijdt?

Hint 4.

# 4.10 Extra opgaven

13 Boze tongen beweren dat 20% van de profwielrenners die deelnemen aan zware etappewedstrijden gebruik maken van verboden stimulerende middelen. Neem aan dat dat waar is. Na afloop van een etappe in zo'n wedstrijd worden drie renners door het lot aangewezen om naar de dopingcontrole te gaan. (Die dopingcontrole is volkomen betrouwbaar, dit in tegenstelling tot de praktijk.)



**a** Is dit "trekken met" of "trekken zonder terugleggen"?

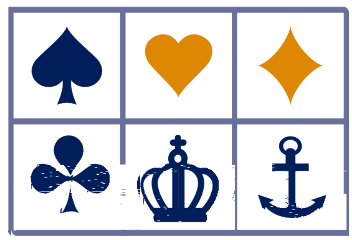
De kans om doping te constateren, is bij de eerste renner die wordt aangewezen anders dan bij de tweede en de derde. Maar die kansen verschillen niet zo veel. We nemen aan dat voor elke renner de kans $0{,}2$ is dat hij doping heeft gebruikt.

**b** Maak een tabel van de kansverdeling van het aantal wielrenners dat op doping wordt betrapt

Elke dag wordt er een dopingcontrole gehouden.

**c** Hoeveel wielrenners worden er dagelijks gemiddeld betrapt?

14 **Crown and Anchor**



Crown and Anchor is een oud Engels bordspel. Vroeger werd het veel gespeeld in pubs en op kermissen onder leiding van de zogenaamde playmaster. Het is een simpel gokspelletje. Het speelbord bestaat uit zes vakken. In ieder vak staat een teken, achtereenvolgens Schoppen, Harten, Ruiten, Klaver, Kroon en Anker. Er horen ook nog drie kubusvormige dobbelstenen bij met deze zes tekens op de kanten.
Iedereen die wil, zet geld in op één van de vakken. De drie dobbelstenen worden gegooid. Winnaars zijn diegenen die ingezet hebben op een van de tekens die de dobbelstenen aangeven. Ze krijgen van de playmaster hun inzet terug plus zoveel maal die inzet als het aantal keren dat het teken boven kwam.
Er wordt bijvoorbeeld Kroon, Kroon, Klaver gegooid. In dat geval krijgen de kroongokkers in totaal driemaal hun inzet, de klavergokkers tweemaal hun inzet en de overigen zijn hun inzet kwijt.
We bekijken het spel van iemand die één shilling zet op Anker

**a** Maak een tabel van de kansen op het aantal keer Anker.

| Aantal Anker | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| kans | | | | |

Iemand speelt twee keer het spel. Hij zet in op Anker.

**b** Bereken de kans dat hij beide keren winst maakt.

**15**

Peter woont in Bodegraven en geeft les op een school in Utrecht. Dagelijks reist hij met de trein heen en terug. Er zijn twee onafhankelijke redenen om vertraging te krijgen.

1. De trein vertrekt niet op tijd. De kans hierop is 0,2.
2. De reisduur is langer dan gepland. De kans hierop is 0,05.

Er is sprake van vertraging, als er afwijkingen ten opzichte van het spoorboekje zijn.

**a** Beschrijf hoe je de gegeven kans van $0{,}2$ (bij 1) in de praktijk zou kunnen controleren.

Peter is 's ochtends op tijd op het station.

**b** Laat zien dat de kans dat hij met vertraging in Utrecht arriveert gelijk is aan $0{,}24$.

Peter maakt in een week vier keer de reis Bodegraven-Utrecht. In een week schrijft hij voor elke reisdag op of hij vertraging heeft (v) of niet (n).
Als hij een week twee keer vertraging heeft, kan het rijtje er zó uitzien: vnvn.

**c** Hoeveel rijtjes met twee keer v en twee keer n kun je maken?

**d** Maak een tabel van de kansverdeling van het aantal dagen dat hij vertraging heeft. Rond de kansen af op vier decimalen.

| aantal dagen met vertraging | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| kans | | | | | |

**e** Bereken hoeveel dagen Peter naar verwachting met vertraging zal reizen.

Peter reist in een jaar $40$ weken van Bodegraven naar Utrecht. De overige weken heeft hij vakantie.

**f** Wat is naar verwachting het aantal dagen dat Peter jaarlijks met vertraging zal reizen?

Bij deze paragraaf zijn geen antwoorden.

1

## Kettingbrieven

Kettingbrieven komen regelmatig in het nieuws. Daarbij gaat het niet om de onschuldige vorm met ansichtkaarten. Een wettelijk verboden variant werkt met geld. Onderstaand artikel was bedoeld om de Nederlandse bevolking tegen dit soort kettingbrief te waarschuwen.

**Kettingbrief: toch maar niet doen**

Iemand in Nederland zit op dit moment heel rijk te worden. Als alles gaat zoals hij of zij het bedacht heeft, komt er zo'n 800 duizend gulden binnen. Keurig verpakt in enveloppen van elk honderd piek. Dat is de bedenker van de kettingbrief Gouden Cirkel, die naar het lijkt de halve randstad en Utrecht in zijn greep houdt. De Gouden Cirkel noemt zichzelf geen kettingbrief (omdat dat verboden is), maar werkt wel op de bekende kettingmanier. Bijzonder is ook dat de brief zelf gekocht moet worden. De prijs is nog eens honderd gulden. Om quitte te draaien moet de deelnemer dus twee brieven doorverkopen. Dat houdt vaart in de brief. Wie inmiddels nog niet benaderd is voor de aanschaf, moet wel heel geïsoleerd leven. De verspreiding gaat nogal snel namelijk. Een rekensommetje om [illegible] er minstens 4096 mensen meedoen (en waarschijnlijk meer, want er zijn al wat eerste namen weggevallen). Voordat nummer twaalf nummer één wordt, doen er 4096x4096 = 16,78 miljoen mensen mee. Laten we zeggen: geheel Nederland en een gedeelte van Vlaanderen. Wie daarna inschrijft heeft 33,5 miljoen deelnemers nodig. Wie daarna komt 67,1 miljoen. Het ministerie van Justitie heeft afgelopen weken al wat vragen te verwerken gekregen over de brief. Antwoord: kettingbrieven zijn verboden in de Wet op de Kansspelen. Deze brief ook. Vanwege artikel 1 van de wet: "Het is verboden om mee te dingen naar prijzen of premies als de aanwijzing van winnaars geschiedt door enige kansbepaling, waar de deelnemer geen overwegende invloed op kan uitoefenen". De Hoge Raad [illegible] in 1932 van toepassing op kettingbrieven [illegible] op de lijst. Dat betekent dat

**a** Ga na wat de 'spelregels' voor deze kettingbrief zijn.

**b** Controleer de getallen ƒ 800.000 en 4096 die in het artikel genoemd worden.

**c** Wat voor soort kettingbrieven zijn er zoal in omloop?

**d** Leg uit wat een kettingbrief is.

2

Anneke doet een serie worpen met een dobbelsteen en telt de geworpen aantallen ogen op. We letten op het aantal worpen dat Anneke nodig heeft om aan een totaal van 30 of meer ogen te komen.
Simuleer dit spel een flink aantal keer. Kies zelf een manier hoe dat te doen. Noteer bij elke keer hoeveel worpen je nodig hebt om de 30 ogen of meer te bereiken.
Hoe groot schat jij op grond van je simulatie het aantal worpen dat Anneke gemiddeld nodig heeft per keer spelen?

# 4.11 Opdrachten

3 Twee even sterke tennissers spelen een wedstrijd volgens best of five. Dat wil zeggen, degene die het drie sets gewonnen heeft, is winnaar van de wedstrijd. We nemen aan dat voor beiden en voor elke set de kans $\frac{1}{2}$ is om hem te winnen.

**a** Bepaal de verwachtingswaarde van het aantal sets dat de wedstrijd duurt.

**b** Bepaal de kans dat degene die de eerste set wint ook de wedstrijd wint.

4 Het doen van een bloedtest is kostbaar. Onderzoeken uit het verleden leren ons dat het bloed van 95% van de onderzochte personen in orde is. In plaats van één bloedtest per persoon, is het ziekenhuis overgestapt op een bloedtest van tien personen tegelijk. Men neemt van ieder van de tien personen een beetje van het bloedmonster en doet die beetjes bij elkaar. Daarmee voert men de test uit. Het bloed kan in orde blijken te zijn en het kan niet in orde blijken te zijn.

**a** Bespreek de voor- en nadelen van deze aanpak.

**b** Bereken de kans dat het bloed van 10 personen in orde is.

Bij deze aanpak heeft men voor een groep van tien personen of 1 test nodig, of 11 testen.

**c** Bereken het gemiddeld aantal testen dat men voor een groep van tien personen nodig heeft.

Iedere test kost € 25. In het oude systeem (één test per persoon) waren de kosten voor een groep van tien dus € 250.

**d** Is het nieuwe systeem naar verwachting goedkoper?

5 Moet je als patiënt in paniek raken als de dokter je vertelt dat een of andere medische test positief is uitgevallen?

“Positief” wil zeggen dat de test aangeeft dat de onderzochte persoon de ziekte heeft (terecht of niet).

Stel dat een test die een bepaalde ziekte moet aantonen in 98% van de gevallen correct werkt en in 2% van de gevallen een verkeerde uitslag geeft. En stel dat 1 op de 200 mensen deze ziekte heeft.

We bekijken een groep van 10.000 mensen. Hiervan zullen er dus 50 naar verwachting de ziekte hebben.

**a** Teken een stroomdiagram waarbij een groep van 10.000 mensen wordt onderzocht.

Hint 5.

**b** Hoeveel positieve uitslagen verwacht je?

**c** Hoe groot is de kans dat je de ziekte hebt als de testuitslag positief is?

6

### Postcode

Om het automatisch sorteren van post mogelijk te maken, is destijds de postcode ingevoerd. Ieder adres in Nederland is gecodeerd met vier cijfers en twee letters.



**a** Zoek uit hoe het postcodesysteem in Nederland in elkaar zit.

**b** Wat is het maximale aantal adressen dat met de postcode in Nederland kan worden aangeduid?

7

We spelen een spel met vier enveloppen. In twee enveloppen zit een briefje van $10$ euro, in één envelop zit een briefje van $50$ euro en één envelop is leeg.

Iemand kiest een envelop en maakt die open. Hij mag de inhoud houden. Maar als de envelop leeg blijkt te zijn is het spel afgelopen. Anders neemt hij een volgende envelop. Enzovoort.

**a** Bereken de kans dat hij achtereenvolgens $10$, $50$ en $0$ euro pakt.

**b** Bereken de kans dat hij na de tweede envelop moet stoppen.

**c** Bereken de verwachtingswaarde van het totale bedrag dat hij pakt.

# 4.11 Opdrachten

**8** Een leraar verloot een taart in een klas van 25 leerlingen. In een zak doet hij 25 lootjes. Op één lot heeft hij de taart getekend; dit is het winnende lot. Elke leerling trekt een lootje uit de zak. De leraar begint vooraan in de klas, bij Henk. Diederik zit achterin. Diederik twijfelt of hij wel evenveel kans op de taart heeft als Henk.

**a** Is Diederiks kans op de taart kleiner dan Henks kans, denk je?

Stel dat een taart verloot wordt onder maar twee leerlingen. Henk trekt als eerste een lootje, Diederik als tweede.

**b** Wie heeft dan de meeste kans?

**c** En hoe zit het bij drie leerlingen?

**9** Prinses Ariana is het derde kind van Willem Alexander en Maxima. Voor haar geboorte stond het bericht hiernaast op de koningshuissite van 3 april 2007.

Je kunt redeneren:

De eerste twee kinderen zijn meisjes, dus zal het derde kind ook wel een meisje worden.

- De eerste twee kinderen zijn meisjes, dus waarschijnlijk wordt het nu een jongen.
- De meeste Nederlanders denken dat het een jongen wordt. Dus dat heeft meer kans.

Wat vind jij?

***Nederlanders gokken op een zoon voor Maxima***

*Het derde kind van Willem-Alexander en Máxima wordt een zoon. Tenminste dat denkt 63 procent van de bevolking. Op de online wedkantoor Unibet staan meerdere weddenschappen rond de geboorte van de nieuwe telg in de koninklijke familie.*

**10** In Spanje gokt men als in geen ander land. Gemiddeld geeft een Spanjaard (kinderen meegerekend) meer dan duizend euro per jaar uit aan loterijen. El Niño (het kind) is een van de twee grote loterijen rond kerst. De trekkingen worden in urenlange uitzendingen op de tv getoond. In 1994 en in 1996 viel de hoofdprijs in het bergdorpje Sort: 17 miljard peseta's. Sort is het Catalaanse woord voor geluk. Iedereen hoopt nu dat het wonder zich in Sort zal herhalen; er is een stormloop op het plaatselijke loterijkantoor: iedereen wil loten kopen in Sort.

Iemand redeneert als volgt: "Als er veel loten in Sort verkocht worden, vergroot dat automatisch de kans op een winnend lot in Sort. En dat draagt weer bij aan de mythe van Sort. Dus kun je het beste loten in dat dorp kopen."

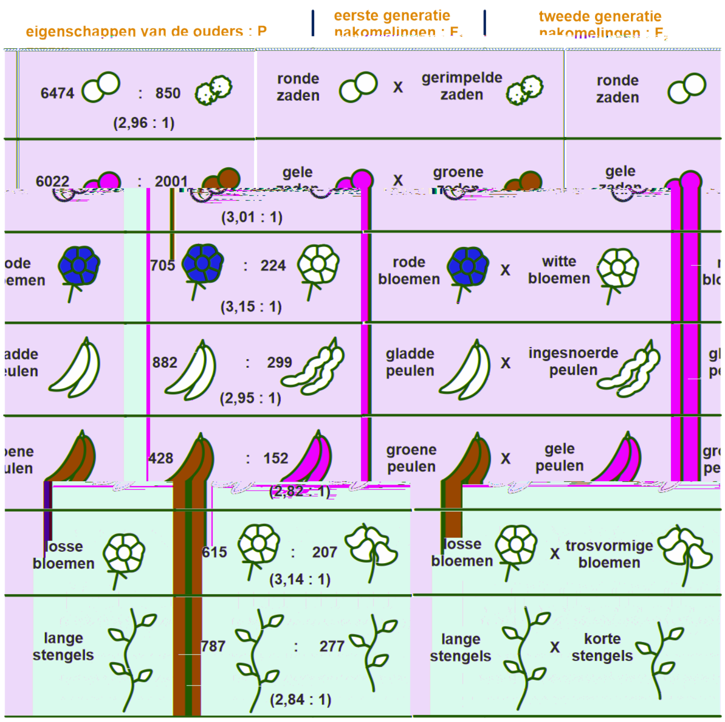
Wat vind je van deze redenering?

**11**

Als je twee raszuivere groene erwten kruist, krijg je 100% raszuivere groene nakomelingen. Als je twee raszuivere gele erwten kruist, krijg je 100% raszuivere gele nakomelingen. Wat gebeurt er nu als je een raszuivere groene erwt kruist met een raszuivere gele erwt? De nakomelingen zijn dan allemaal geel, maar niet raszuiver! Dat blijkt uit de tweede nakomelingen (de nakomelingen van de nakomelingen); daar zijn zowel groene als gele exemplaren bij. Wel zijn er meer gele dan groene.

De Tsjechische monnik Gregor Mendel deed uitgebreide experimenten met erwten. Hij bestudeerde de overerving van zeven verschillende eigenschappen. Dat waren: vorm en kleur van de zaden, vorm en kleur van de bloemen, vorm en kleur van de peulen, lengte van de stengels. De tweede nakomelingen telden 6022 exemplaren met gele zaden en 2001 met groene zaden.

Mendel (1822-1884) legde de basis voor de genetica. Tijdens zijn leven werden zijn resultaten nauwelijks begrepen. Hij werd gepromoveerd naar een managementfunctie en ten slotte abt van zijn klooster. Pas in het begin van de twintigste eeuw vonden zijn resultaten erkenning




Uit: De DNA-makers, Natuur en Techniek

**a** Ga na dat de verhouding tussen de aantallen met gele zaden en met groene zaden ongeveer 3:1 is.

**b** Hoe is die verhouding bij elk van de andere zes eigenschappen ongeveer?

**c** Is het niet verontrustend dat bij geen van de zeven eigenschappen die Mendel onderzocht deze mooie verhouding precies uitkwam?

12

**Lotto**

Je kunt tegenwoordig de lotto ook elke dag spelen. De speelmogelijkheden zijn daarbij aangepast.

**a** Onderzoek wat de mogelijkheden zijn.

Je kunt gigantische bedragen winnen. Toch wordt lang niet het hele bedrag dat is ingelegd uitgekeerd.

**b** Hoeveel procent wordt uitgekeerd?
Wat gebeurt er met de rest van de inleg?

**c** Bereken de kans dat op een zaterdagavond de jackpot valt.

**d** Hoe groot is de kans dat de jackpot groter dan 25 miljoen wordt?

13

**De kans op 6 en 7 ogen met twee dobbelstenen**

In het boekje *Rekeningh in Spelen van Geluck* van Christaan Huygens (1652) staat het volgende voorbeeld.
A en B spelen een dobbelspel. Om beurten werpen ze met twee dobbelstenen; A begint. A moet met de twee dobbelstenen samen 66 ogen gooien en B moet er samen 7 ogen mee gooien. Wie het eerst slaagt, heeft gewonnen. De kansen om te winnen blijken voor beiden ongeveer gelijk te zijn.

**a** Wat is het voordeel voor speler A?
Wat is het voordeel voor speler B?

**b** Bereken de kans dat A meteen de eerste keer slaagt. Bereken de kans dat A de eerste keer niet slaagt en B daarna wel.

**c** Bereken de kans dat het spel na vijf keer werpen (drie keer door A en twee keer door B) nog niet is afgelopen.

Huygens berekende de kansen voor A en B om het dobbelspel te winnen: A heeft kans $\frac{30}{61}$, B heeft kans $\frac{31}{61}$.
We leggen hier niet uit hoe Huygens deze kansen heeft berekend.

14

**Twee zessen met twaalf dobbelstenen**

Samual Pepys legde het volgende probleem voor aan Isaac Newton.
Twee mensen spelen een dobbelspel. De een heeft opdracht minstens één zes te gooien met zes dobbelstenen. De andere heeft opdracht minstens twee zessen te gooien met twaalf dobbelstenen.
Wie heeft het meeste kans zijn opdracht uit te voeren?
Newton loste dit probleem op in 1693.

15

**De Petersburgse paradox**

Een munt wordt net zo lang opgegooid totdat hij op kop valt. Als dat meteen de eerste keer gebeurt, betaalt de bank hem 1 euro. Als dat voor het eerst de tweede keer gebeurt, betaalt de bank hem 2 euro. Als dat voor het eerst de derde keer gebeurt, betaalt de bank hem 4 euro. Enzovoort: de vierde keer 8 euro, de vijfde keer 16 euro, ...; elke volgende keer het dubbele bedrag.

Als het spel heel vaak gespeeld zal worden, welk bedrag zal de bank dan naar verwachting gemiddeld per spel uitbetalen?

Dit gokprobleem is voor het eerst geformuleerd door Nicolaus Bernoulli in 1713 en is later in een wetenschappelijke tijdschrift in Sint Petersburg gepubliceerd, vandaar de naam.

Nicolaus Bernoulli (1687-1759)

## Intro

1
**a** -
**b** -
**c** -
**d** -
**e** -
**f** -

2
**a** $\frac{1}{14{,}5}$
**b** $52 \cdot 0{,}4 = 20{,}8$

3
**a** Op een willekeurige plek in Nederland schijnt de zon tussen zonsopkomst en zonsondergang gedurende 40% van de tijd.
**b** Op 40% van de plaatsen in Nederland valt morgen tussen 0:00 uur en 24:00 uur ten minste 0,3 mm neerslag (regen, hagel, sneeuw).

4
**a** $\frac{2}{7} \cdot 100 = 28{,}57\%$
**b** $\frac{1}{6} \cdot 100 = 16{,}67$
**c** $\frac{3}{8}$
**d** Dat ligt aan de situatie waarin je het moet gebruiken.

5
**a** $7 + 3 + 5 = 15\%$
**b** $100 - 30 - 13 - 7 - 5 - 3 - 2 - 1 - 1 - 3 = 35\%$
**c** $400 \cdot 0{,}15 = 60$

6
**a** 69 van de 306 wedstrijden, dat is ongeveer 22,5%
**b** 21 van de 306 wedstrijden, dat is ongeveer 6,9%

7
$\frac{9}{25}, \frac{10}{25}, \frac{17}{25}$

8
**a** $\frac{15}{36}$
**b** $\frac{1}{6}$
**c** $\frac{1}{9}$
**d** $\frac{1}{4}$
**e** $\frac{11}{36}$
**f** $\frac{11}{36}$

9
**a** Je kunt alle hokjes kleuren, behalve de vijf op de diagonaal (1,1)) - (5,5) (dus de hokjes met de coördinaten (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) en (5,5)). En omdat de figuur gespiegeld is over die diagonaal kun je nog een helft ‘weggummen’. Je houdt dan 10 gekleurde hokjes over.
**b** $\frac{3}{10}$
**c** $\frac{1}{10}$

d $\frac{6}{10}$

**10** a Elk hokje stelt een combinatie van twee kamers voor. Hokje (3,5) stelt kamer 23 (Anneke) en 25 (Vinja) voor.

b $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

**11** a $\frac{2}{7}$

b $\frac{4}{200} = \frac{1}{50}$

c $\frac{10}{200} = \frac{1}{20}$

d $\frac{185}{200} = \frac{37}{40}$

**12** a $24 + 2 = 26\%$

b $100 - 61 = 39\%$

**13** a Zie figuur.

b $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$

c $\frac{1}{2}$


**14** a $\frac{7}{42} = \frac{1}{6}$

b 17% ; ja, want $6\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}$.

c $\frac{8}{42}$

d $\frac{21}{42} = \frac{1}{2}$

**15** a De middelste tegel heeft de grootste kans. Hij heeft namelijk 4 aangrenzende vakken. De andere vakken hebben drie of zelfs maar twee (hoektegels) aangrenzende vakken en hebben daarom minder kans om aangedaan te worden.

b

c $\frac{8 + 12 + 8 + 11}{4} = 9{,}75$ en $\frac{9{,}75}{120} \approx \frac{1}{12}$

d $\frac{4}{12} + \frac{4}{8} + \frac{1}{6} = 1$

e

## Experiment en simulatie

**16** a Het is best mogelijk dat je zes keer achter elkaar geluk hebt en dus blijft leven.

b $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}335$

c Zes keer gooien. Als je bijvoorbeeld 1 oog gooit, ben je dood.

d -

**17** a 83,33%, 55%

b Klopt.

c 57,1% ; 52,4%

**18** a mkkmmmkkmkkkkmmmkkmm, kmmkmkkkkkmmkmmmmmmk

**b** In het begin variëren ze heel veel, later gaan ze rond de 50% hangen.
**c** Het zal uiteindelijk rond de 90% gaan hangen.
**d** 3535%

19
**a** $800 \cdot 0{,}4 = 320$
**b** Uiteindelijk zal het rond de 40 gaan hangen

20
**a** 100548 jongens, 95452 meisjes
**b** 1053,4
**c** Mannen worden niet zo oud als vrouwen.

21
**a** $\frac{480}{10} = 48$ weken, dus 4 weken vakantie.
**b** $\frac{37}{480} \approx 0{,}077$
**c** $37 \cdot 30 = 1110$ en $480 \cdot 1{,}50 = 720$, nee dus!

22
$5362 \cdot 0{,}3 = 168{,}8$, $5362 \cdot 0{,}13 = 697{,}06$ en $5362 \cdot 0{,}08 = 428{,}96$, dus
1609 ; 697 ; 429

23
**a** 47 keer
**b** Alle even getallen kop, alle oneven getallen munt
**c** 2 en lager is kop, 3 en hoger is munt

24
**a** Kies een regel toevalsgetallen. Een toevalsgetal is het aantal ogen dat je gooit. De getallen 7, 8, 9 en 0 sla je gewoon over. Zodra je het getal “6” treft, mag je beginnen. Noteer het hoeveelste toevalsgetal dat is.
**b** -
**c** Ongeveer 0,5?

25
**a** -
**b** -
**c** -

26
**a** Kies steeds drietallen toevalsgetallen.
Het eerste getal geldt voor vriend 1; die wordt toegelaten als het 1, 2, 3, 4 of 5 is, anders niet.
Het tweede getal geldt voor vriend 2; die wordt toegelaten als het 1,

**b** $\frac{5}{8} \cdot 100 \approx 62$, $\frac{3}{8} \cdot 100 \approx 38$

**c** Appius: 87 , Brutus: 13

**28**

**a** $\dfrac{91+89+86+83+86}{5} = 87$, 87% kans

87% voor Appius en 13% voor Brutus.

**b** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}875$

**c** Appius: $50 + 25 + 12{,}5 = 87{,}5\%$

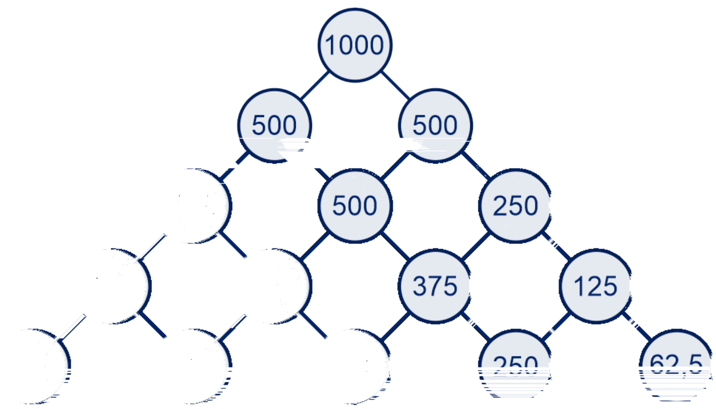
Brutus: $100 - 87{,}5 = 12{,}5\%$

**29**

**a** Bakje C.

**b** 37,5%

**c** Zie figuur.



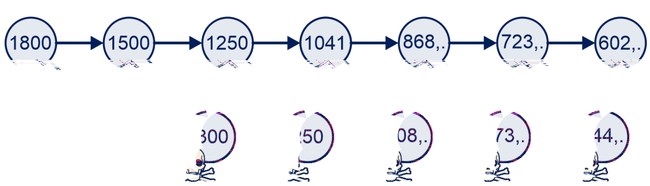

**d** 37,5%

**e** Zie tabel.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 6,25 | 25 | 37,5 | 25 | 6,25 |

**30**

**a** 1500, 1250



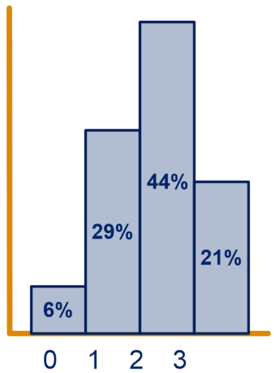

**b** $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot 100 \approx 33{,}5\%$

31

**a** Zie figuur.

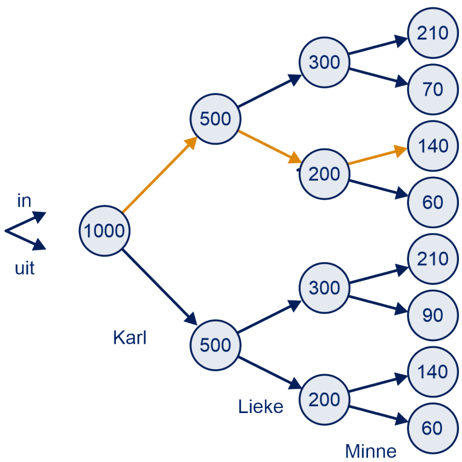
**b** 21%

**c** Zie figuur.




32

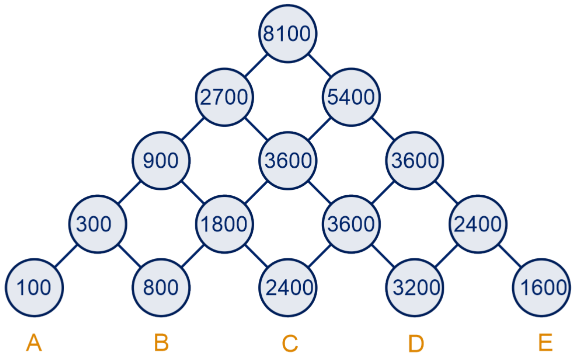
**a** Zie figuur.




**b** 14%

**c** De aantallen waarbij een persoon wordt uitgeloot optellen, en de aantallen waarbij twee personen worden uitgeloot optellen.

33 a Zie figuur.



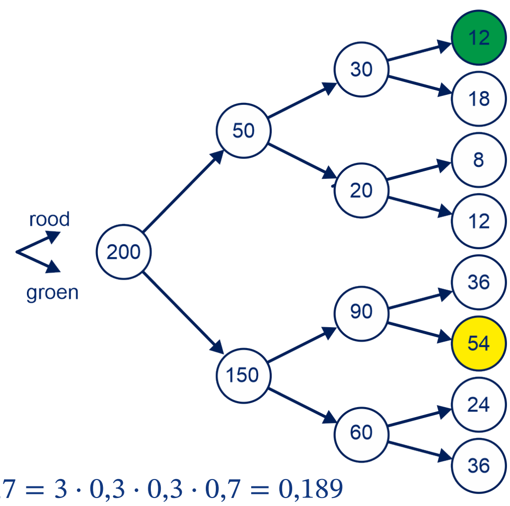

b 19,8%

c Zie tabel.

| Bakje | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Percentage %) | 1,23 | 9,87 | 29,63 | 39,51 | 19,8 |

34 a Zie figuur.
6%, zie figuur (groen).

b 27%, zie figuur (geel).




35 a $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 56{,}25\%$

b Dan moet ze eerste drie keer een carambole maken en de vierde keer niet. Die kans is: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \approx 10{,}5\%$

36 a 52%

b 33,8%

c 5,1

37 a $0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}343$

b $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}189$

## Rekenen met kansen (1)

38 a In de onderste rij komt van links naar rechts: 25 15 10 15 9 6 10 6 4.

b 0,06

c 0,25

d 0,38

39 a 12, 15

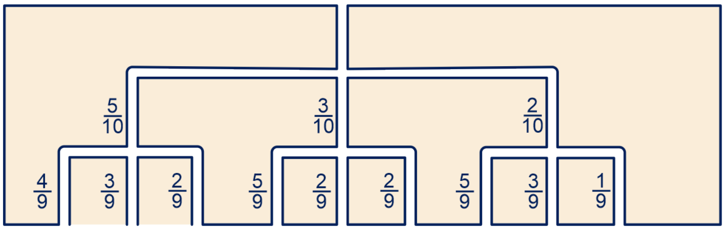
b $0{,}3 \cdot 0{,}2$

c $0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$

40 $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

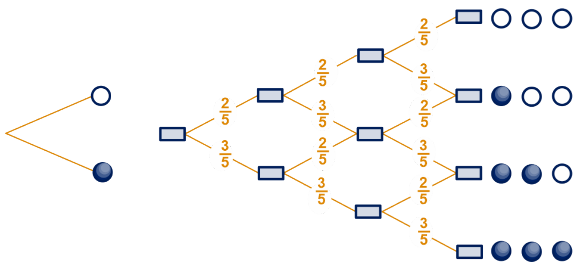
41
a Sharon moet drie keer succes hebben, de kans daarop is $0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$.
b Mark moet drie keer geen succes hebben, de kans daarop is $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$.

42
a $\frac{4}{9}, \frac{5}{9}$
b Zie figuur.



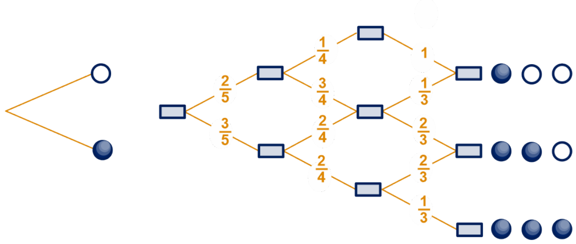

c $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$
d Dan pakt ze gg, gb, bg of bb, de kans daarop is: $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{90} = \frac{2}{9}$.
e $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$

43
a Zie figuur.



b $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{125}$
c $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{36}{125}$

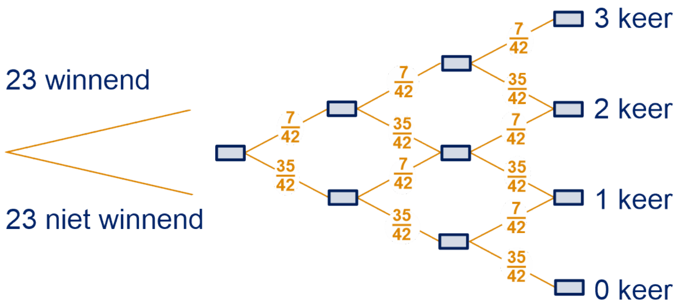
44
a Zie figuur.

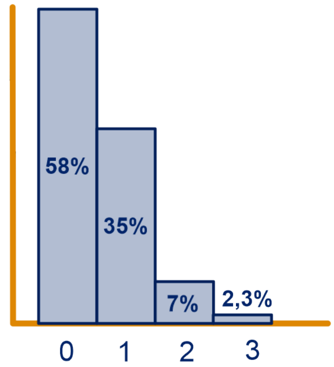


b $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$
c $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$

**45**

**a** Zie de figuur links



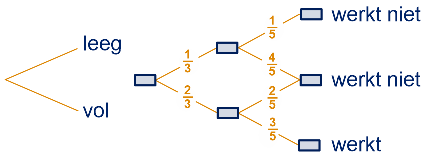




**b** $\frac{7}{42} \cdot \frac{35}{42} \cdot \frac{35}{42} \cdot 3 = \frac{75}{216} \approx 0{,}35$

**c** Zie de figuur rechts.

**46**

**a** Zie figuur.



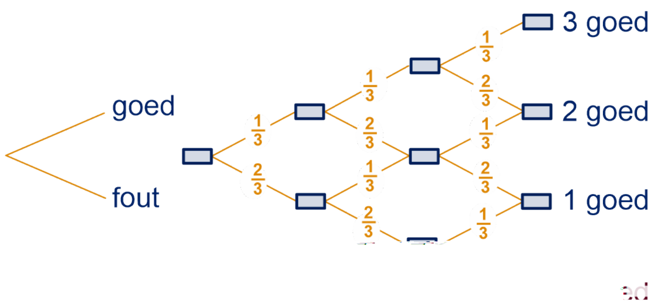

kansboom bij 46

**b** $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

**c** $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

**47**

**a** Zie figuur.



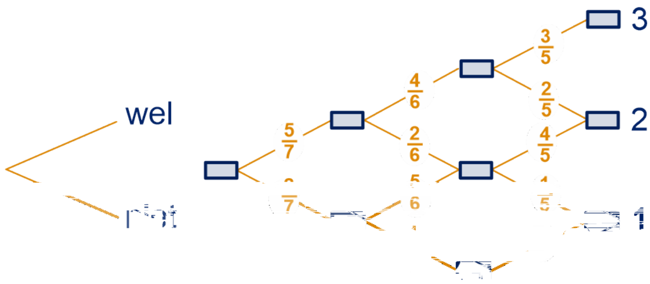

kansboom bij 47

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

**b** $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

48

a Zonder terugleggen.




kansboom bij 48

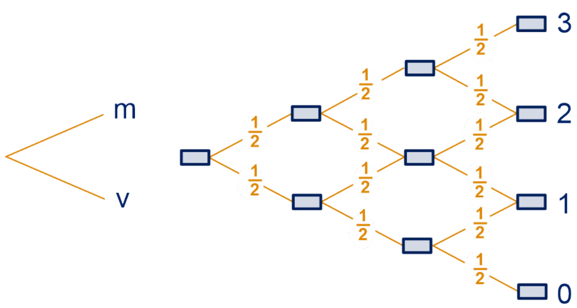
b $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{7}$

c $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

## Rekenen met kansen (2)

49

a Met terugleggen




kansboom bij 49

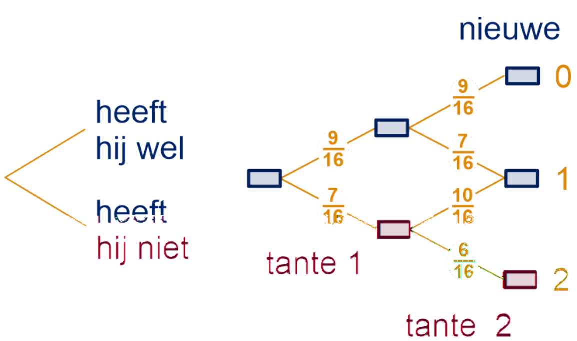
b $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

c $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

d $\frac{1}{2}$; ja want de kans dat er meer mannetjes zijn als vrouwtjes is even groot.

50

a Zie figuur.




kansboom bij 50

b $\frac{7}{16} \cdot \frac{6}{16} = \frac{42}{256}$
c $\frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{256}$

51
a $\frac{5}{25} \cdot \frac{20}{25} \cdot \frac{20}{25} + \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{25} + \frac{20}{25} \cdot \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{48}{125}$
b $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$
c $\frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{1}{30}$

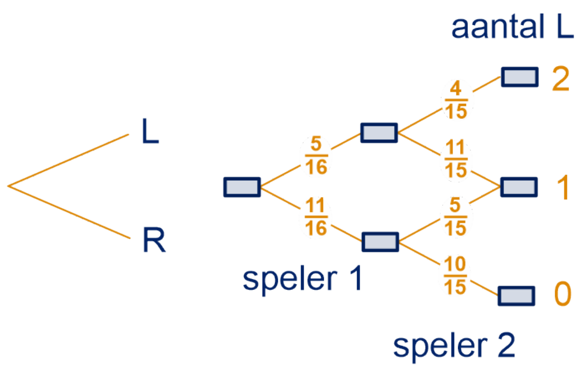
52
a $\frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{13}{23} \approx 0{,}198$
b $3 \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} \approx 0{,}457$
c $\frac{10}{25} \cdot 5 = 2$

53
a $(0{,}95)^5 \approx 0{,}774$
b $(0{,}9)^5 \approx 0{,}590$
c $(0{,}85)^5 \approx 0{,}444$

54
a $\frac{2}{7}$
b $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$
c $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{21}$

55
a 7%
b In de eerste auto 1 en de tweede 3, in beide auto's 2 of in de eerste auto 3 en in de tweede 1.
De kans is: $0{,}58 \cdot 0{,}13 + 0{,}22 \cdot 0{,}22 + 0{,}13 \cdot 0{,}58 = 0{,}1992$.

56
a $\frac{5}{16} \cdot \frac{11}{15} + \frac{11}{16} \cdot \frac{5}{15} = \frac{11}{24}$
b Zie figuur.




kansboom bij 56

Zonder terugleggen

c Zie tabel.

| finale tussen | R en R | L en R | L en L |
|---|---|---|---|
| kans daarop | $\frac{11}{24}$ | $\frac{11}{24}$ | $\frac{1}{12}$ |

De som van de drie kansen is 1.

d $1 - \frac{11}{24} = \frac{13}{24}$

57 a $3 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}432$

b $1 - (0{,}6)^3 = 0{,}784$

58 a $3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b $1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{6}$

59 $10 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456$

## Verwachting

60 a 1250 keer; 6250, 12500, 12500, 6250 1250 keer

b € 712500

c maximaal € 4.000.000 , minimaal € 320.000

d Ja, want de gemiddelde uitbetaling is € 17,0125.

e € 168750

f 4,25

g -

61 a Zie tabel.

| uitbetaling | \$ 0 | \$ 2 | \$ 3 | \$ 4 |
|---|---|---|---|---|
| kans | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

b 5787, 3472, 694, 46 keer

c In totaal \$9210, dat is gemiddeld \$0,079 per spel.

d 216

62 a Bij elke 100 keer: 30 keer € 0,75 en 70 keer € 2,00, in totaal € 162,50.
Gemiddeld per keer € 1,625 en dat is meer dan € 1,50.

b Van elke 100 keer: 30 keer $x$ euro en 70 keer € 2,00, dus in totaal totaal € $30x + 140$.
Dit moet minder dan € 150 zijn.
Dus $x \leq 0{,}33$.

63 a Stel de premie is $x$ euro, dan $10000x = 6000 \cdot 400$, dus $x = 24$.

b Ook € 24

c € 24

**d** Als de verzekeringsmaatschappij pech heeft, krijgt zij relatief veel schadeclaims en moet veel meer geld uitkeren dan de inkomsten bedragen. Een kleine maatschappij kan dat moeilijker opvangen dan een grote maatschappij (en kan dan failliet gaan).

**64** Als ze gokken op een last minute vlucht hebben ze kans 0,6 op een voordeel van € 1000 en kans 0,4 op een verlies van € 400 (ten opzichte van een gewone vlucht van € 800 per persoon). Gemiddeld is dat een voordeel van $600 - 160 = 440$ euro. Dus advies: wachten tot de zomer.

**65**

**a** 8,32 uur

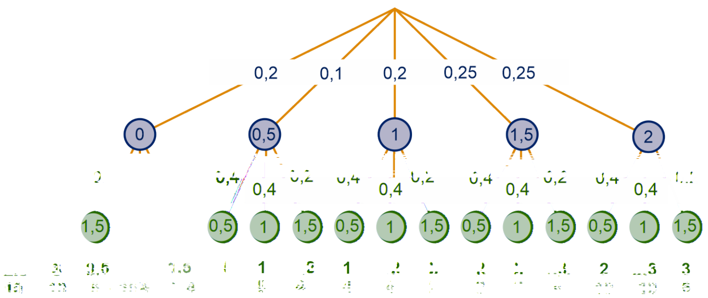
**b** 9,98

**c** Hoger, want het grootste deel van de 250 vliegjes die hun 9-de verjaardag vierden wordt geen 10 uur oud.

**66**

**a** Winkel A: $0{,}20 \cdot 0 + 0{,}10 \cdot 0{,}5 + 0{,}20 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 1{,}5 + 0{,}25 \cdot 2 = 1{,}125$ minuten; winkel B $0 \cdot 0 + 0{,}40 \cdot 0{,}5 + 0{,}40 \cdot 1 + 0{,}20 \cdot 1{,}5 + 0 \cdot 2 = 0{,}9$ minuten

**b** Zie figuur.




**c** $0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}17$

**d** Zie tabel.

| wachttijd | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kans | 0,08 | 0,12 | 0,16 | 0,20 | 0,24 | 0,15 | 0,05 |

**e** $0{,}08 \cdot 0{,}5 + 0{,}12 \cdot 1 + 0{,}16 \cdot 1{,}5 + 0{,}20 \cdot 2 + 0{,}24 \cdot 2{,}5 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 3{,}5 = 2{,}025$

**f** De gemiddelde wachttijd bij A + de gemiddelde wachttijd bij B is 2,025 minuut en dat is precies de gemiddelde totale wachttijd. De uitspraak is dus juist.

**67** De kansen per lot zijn:

alle cijfers goed: $\frac{1}{1.000.000}$,

laatste vijf goed: $\frac{9}{100.000}$,

laatste vier goed: $\frac{9}{10.000}$,

laatste drie goed: $\frac{9}{1000}$,

laatste twee goed: $\frac{9}{100}$,

laatste goed: $\frac{9}{10}$.

De verwachte uitbetaling per lot is:

$\frac{1}{1.000.000} \cdot 200.000 + \frac{9}{1.000.000} \cdot 5000 + \frac{9}{100.000} \cdot 450 + \frac{9}{10.000} \cdot 50 + \frac{9}{1000} \cdot 5 + \frac{9}{100} \cdot 1 = \frac{4655}{10.000}$.
De verwachte winst per lot is $1 - \frac{4655}{10.000} = \frac{5345}{10.000}$ euro.

**68**
**a** $73 \cdot 365{,}25 \cdot 24 : 12\frac{25}{60} \approx 51537$ keer vloed, dus $51537 : 300 \approx 172$ keer reuzenvloed
**b** $\frac{1}{90.000}$
**c** $\left(\frac{299}{300}\right)^{10} \approx 0{,}967$
**d** $1 - \left(\frac{299}{300}\right)^{73} \approx 0{,}216$; ja

**69**
**a** Die is fout. Het weer heeft geen geheugen. Het weer volgend jaar is onafhankelijk van het weer dit jaar.
**b** $\left(\frac{49}{50}\right)^{50} \approx 0{,}364$

## Hoeveel mogelijkheden?

**70**
**a** In de halve finale
**b** 128; 64
**c** $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$
**d** In de derde ronde

**71**
**a** $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
**b** $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$

**72**
**a** $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
**b** $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1512$

**73**
**a** $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
**b** $6^4 = 1296$
**c** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
**d** $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

**74**
**a** $11! = 11 \cdot 3628800 = 39916800$, ja dat klopt maar dan staat niet bijvoorbeeld de keeper altijd op het goal, of de spits in de spits.
**b** -

**75**
**a** Ja, want $10! = 9! \cdot 10$
**b** $12!$ kan nooit op zo veel nullen eindigen (want voor een 0 heb je getallen met een factor 5 nodig en die zijn er maar twee in $12!$)
**c** 479.001.600

**76**
**a** $3^{13} = 1594323$
**b** $2^{13} = 8192$

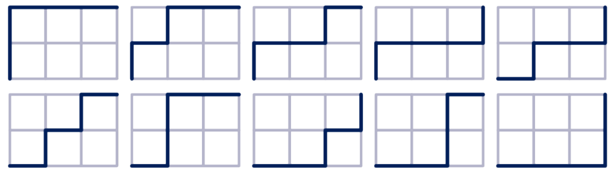
**77**
**a** $4^{15} = 1073741824$
**b** $15 \cdot 3 = 45$

**78**
**a** meetsysteem ; racecar

**b** $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$; ook $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$
**c** $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$

79 **a** Zie figuur 1.

figuur 1



figuur 2

**b** Zie figuur 2.
**c** 10, 4
**d** Door de twee aantallen te vermenigvuldigen: $10 \cdot 4 = 40$.

80 In figuur 1: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$,
in figuur 2: 5,
in figuur 3: 14,
in figuur 4: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$,
in figuur 5: $3 \cdot 3 + 1 = 10$

81 **a** 6
**b** Je kun die routes coderen met rijtjes van twee keer A, één keer L en één ker O.
Er zijn er 6 die met A beginnen, 3 die met L beginnen en 3 die met O beginnen.
In totaal 12

## Combinaties en permutaties

82 Zie figuur.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 10 | 20 |
| 1 | 3 | 6 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

83 Omdat de aantallen 6 en 4 kortste routes zijn en er vanuit elk van deze punten maar één weg is naar het eindpunt, kun je deze getallen gewoon optellen.

84 70; 19 ; 162 ; $6 \cdot 20 = 120$

85 42

86 1 ; 10 ; 45 ; 120 ; 210 ; 252 ; 210 ; 120 ; 45 ; 10 ; 1

87 Als de letter E

88 **a** -

**b** $1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64$
**c** $2^{10} = 1024$
**d** De som van de getallen op de zesde regel is het totaal aantal routes van zes stappen. En voor een route van zes stappen moet je 6 keer kiezen tussen links en rechts. Er zijn dus $2^6$ van die routes.

**89** 64

**90** 252 manieren

**91** $\binom{14}{10} = 1001$

**92**
**a** $6 - 0, 5 - 1, 4 - 2, 3 - 3, 2 - 4, 1 - 5, 0 - 6$
**b** $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$
**c** Ja, elk scoreverloop kun je coderen met rijtjes van 6 letters waarbij elke letter t (thuisploeg scoort) of g (gasten scoren) is, bijvoorbeeld bij het rijtje tgttgt hoort de uitslag $4 - 2$.

**93**
**a** $\binom{10}{5} = 252$
**b** $\binom{8}{3} = 56$

**94** $\binom{6}{3} = 20$

**95**
**a** $\binom{12}{5} = 792$
**b** Van de overige negen zijn er vijf ziek, dus $\binom{9}{5} = 126$.

**96**
**a** $\binom{11}{2} = 55 ; \binom{12}{2} = 66$
**b** $55 \cdot 66 = 3630$

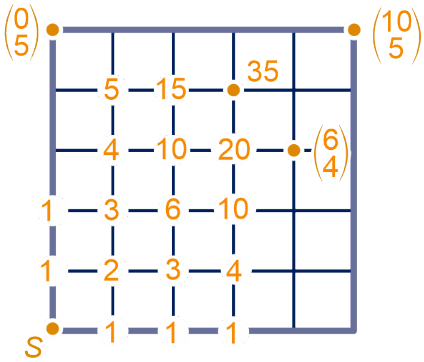
**97**
**a** $\binom{7}{3} = 35$
**b** 4
**c** $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} = 18$
**d** $18 + 4 = 22$

**98**

**a** Zie figuur.

**b** Zie figuur.

**c** $\binom{5}{0} = 1, \binom{10}{5} = 252, \binom{6}{4} = 15$




**99**

**a** Bij het punt links ervan: $\binom{9}{3}$ en het punt eronder $\binom{9}{4}$

**b** $\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 210$

**c** $\binom{80}{33} = \binom{79}{33} + \binom{79}{32}$

**100**

**a** $\binom{6}{4} \cdot \binom{6}{4} = 225$

**b** $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36$

**101**

**a** 80, 97, $\binom{n}{1} = n$

**b** 1, 1 , $\binom{n}{0} = 1$

**102**

**a** $\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 20 = 210$

**b** $\binom{21}{2} = 210$

**103**

**a** $\binom{80}{2} = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 79 = 3160, \binom{200}{2} = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 199 = 1990$

**b** $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$

**104**

**a** Er zijn evenveel routes naar het punt “6 rechts, 4 boven” als naar het punt “4 rechts, 6 boven”.

**b** Er zijn evenveel rijtjes van 10 cijfers met 6 nullen als rijtjes met 6 enen.

**c** Er zijn evenveel grepen uit 10 waarbij je 6 dingen wel pakt en 4 dingen niet, als grepen uit 10 waarbij je 4 dingen wel pakt en 6 dingen niet.

**105**

**a** $\frac{1}{10} \cdot \binom{41}{6} = 449639$ (afgerond)

**b** $\frac{1}{449639} \approx 0{,}0000022$

106 **a** $\binom{10}{4} = 210$

**b** $4! = 24$

**c** $\binom{10}{4} \cdot 4! = 5040$

**d** $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

107 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ in teller kun je wegdelen tegen 6! in de noemer.;

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = \frac{10!}{2!} = 1814400$

108 **a** $\frac{10!}{7!}$

**b** $\frac{18!}{12!} = 13366080$

**c** $\frac{n!}{(n-k)!}$

**d** $15P5 = 360360$

109 **a** $\binom{10}{2} = 45$

**b** $\frac{1}{45}$

**c** $10P3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$

110 **a** $\binom{18}{11} = 31824$

**b** $\binom{2}{1} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 1500$

**c** $\frac{1500}{31824} \approx 0{,}047$

111 **a** De volgorde speelt geen rol: $\binom{32}{4} = 35960.$

**b** $\binom{28}{2} \cdot \binom{4}{2} = 6 \cdot 378 = 2268$

**c** $\frac{2268}{35960} \approx 0{,}063$

112 **a** $\binom{30}{8}$

**b** $\binom{20}{5} \cdot \binom{10}{3}$

**c** $\frac{\binom{20}{5} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{30}{8}} \approx 0{,}31787$

**113**

**a** $\binom{52}{13} \approx 6{,}35 \cdot 10^{11}$

**b** $\binom{13}{5} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2} = 5598527200$

**c** 0,008816

**114**

**a** $\dfrac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = 0{,}5$

**b** $\dfrac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$, $\dfrac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$, $\dfrac{\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$

**c** De som van de vier kansen moet 1 zijn en dat klopt.

**115**

$$\dfrac{\binom{10}{3} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} \approx 0{,}354$$

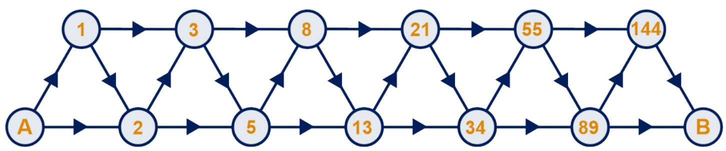
**116**

$$\dfrac{\binom{10}{3} \cdot \binom{15}{5}}{\binom{25}{8}} \approx 0{,}333$$

## Extra opgaven

**1**

233




**2**

Systeem I heeft $8^3 = 512$, systeem II heeft er $3^8 = 6561$, dus systeem II.

**3**

$12 + 12 + 6 = 30$

**4**

HOCUS en POCUS kun je op 6 manieren doorlopen, PILATUS op 20 manieren.
Dus op $6 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 2 = 1440$ manieren.

**5**

Met drie gelijke cijfers: er zijn 10 keuzes voor het cijfer dat drie keer voorkomt en daarna nog 9 voor het cijfer dat enkel voorkomt. Verder kan het enkele cijfer op vier plaatsen staan, dit geeft $10 \cdot 9 \cdot 4 = 360$ mogelijkheden.

Met twee keer twee gelijke cijfers: er zijn $\binom{10}{2} = 45$ keuzes voor de twee cijfers. Er zijn $\binom{4}{2} = 6$

volgordes voor die twee cijfers, dit geeft $45 \cdot 6 = 270$.
In totaal zijn er dus $360 + 270 = 630$ mooie pincodes.

**6** De zeven vrouwen kun je op 7! manieren rangschikken, evenals de zeven mannen. Verder kun je met een man of een vrouw beginnen, dus er zijn $2 \cdot 7! \cdot 7! = 50803200$ ranhschikkingen.

**7**
**a** $7 \cdot 6 = 42$
**b** taal → Esperanto en Esperanto → taal, dus $7 + 7 = 14$

**8**
**a** Het aantal permutaties van 6 uit 45, dus 45P6= 5864443200.
**b** Het aantal combinaties van 6 uit 45, dus 45C6= 8145060.

**9** De kans dat hij geen platvis vangt is: $\frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$, dus de kans dat hij minstens een plavis vangt is: $1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$.

**10**
**a** $2^6 = 64$
**b** Dan moet zo'n code op twee plaatsen verschillen van de gegeven code. Er zijn $\binom{6}{2} = 15$ mogelijkheden voor die twee plaatsen.

**11**
**a** $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
**b** Schrijf alle mogelijkheden op. Elke heeft kans $^{1}$

**b** Zie tabel.

| Aantal betrapt | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| kans | $0{,}8^3 = 0{,}512$ | $3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384$ | $3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}096$ | $0{,}2^3 = 0{,}008$ |

**c** Neem aan dat er 1000 dagen wordt gecontroleerd, dan kun je $512 \cdot 0 + 384 \cdot 1 + 96 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 600$ betrapten verwachten, dus gemiddeld 0,6.

**14**

**a** Zie tabel.

| Aantal Anker | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| kans | $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ | $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$ | $3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{216}$ | $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ |

**b** $\left(\frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216}\right)^2 = \left(\frac{91}{216}\right)^2 \approx 0{,}1775$

**15**

**a** Neem bijvoorbeeld 50 reisdagen dat zijn 100 enkele reizen. Daarvan zouden er ongeveer 20 te laat moeten vertrekken.

**b** De kans op *geen* vetraging betekent: op tijd vertrekken en goede reisduur, de kans daarop is $0{,}8 \cdot 0{,}95 = 0{,}76$. Dus de kans op vertraging is $1 - 0{,}76 = 0{,}24$.

**c** $\binom{4}{2} = 6$

**d** Zie tabel.

| aantal vertraging | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| kans | $0{,}76^4$ | $4 \cdot 0{,}76^3 \cdot 0{,}24$ | $6 \cdot 0{,}76^2 \cdot 0{,}24^2$ | $4 \cdot 0{,}76 \cdot 0{,}24^3$ | $0{,}24^4$ |
| kans | 0,3336 | 0,4214 | 0,1996 | 0,0420 | 0,0033 |

**e** $0{,}3336 \cdot 0 + 0{,}4214 \cdot 1 + 0{,}1996 \cdot 2 + 0{,}0420 \cdot 3 + 0{,}0033 \cdot 4 = 0{,}96$

**f** $40 \cdot 0{,}96 = 38{,}4$

## Opdrachten

## 4 Kansen_1

1. Alle drie de telefoontjes moeten dan dus succes hebben.
2. Stel dat we dit probleem na willen spelen met een vaas met balletjes. Hoeveel verschillende kleuren hebben we dan nodig? Hoeveel van elke kleur moeten er in de vaas? Hoeveel keer moeten we hier een balletje uit halen? Moeten we de balletjes telkens weer terugleggen of niet?
   Teken de bijbehorende kansboom
3. Dus GGG?????????
4. Bekijk de verwachte uitbetaling in $80$ spelen.
5. Maak een splitsing in “patiënt heeft ziekte” of “patiënt heeft ziekte niet” en maak een splitsing in “positieve uitslag” of “negatieve uitslag”.