meetkunde havo d
2 ruimtelijke figuren in het plat

de Wageningse Methode

Copyright	© 2018 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs	Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage	www.wageningse-methode.nl
ISBN	xxx
Illustraties	Wilson Design Uden
Distributie	Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Dit is het tweede hoofdstuk meetkunde voor havo d.
Dit hoofdstuk gaat over aanzichten en doorsneden van ruimtelijke figuren.

Op 8 december 2013 is geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Zijn bijdragen aan dit hoofdstuk zijn substantieel en kenmerkend voor zijn stijl.
Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We missen nog altijd zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie.
Maar wij zetten zijn werk in zijn geest voort.

De auteurs van de Wageningse Methode

Er worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf weer. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een voorbeeld gegeven wordt. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort.

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad.
Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.

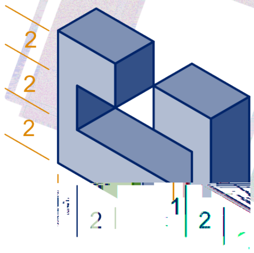
Het hoofdstuk is ook digitaal beschikbaar:
https://www.wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y45h-d

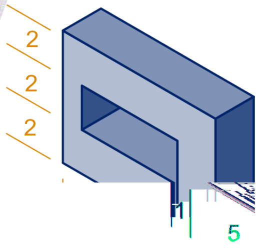

WM

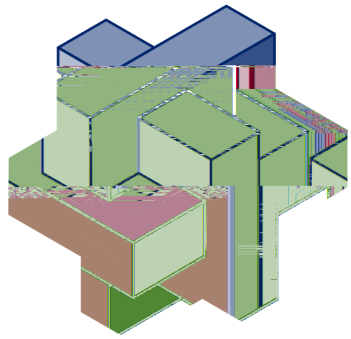
1

De houten knoop

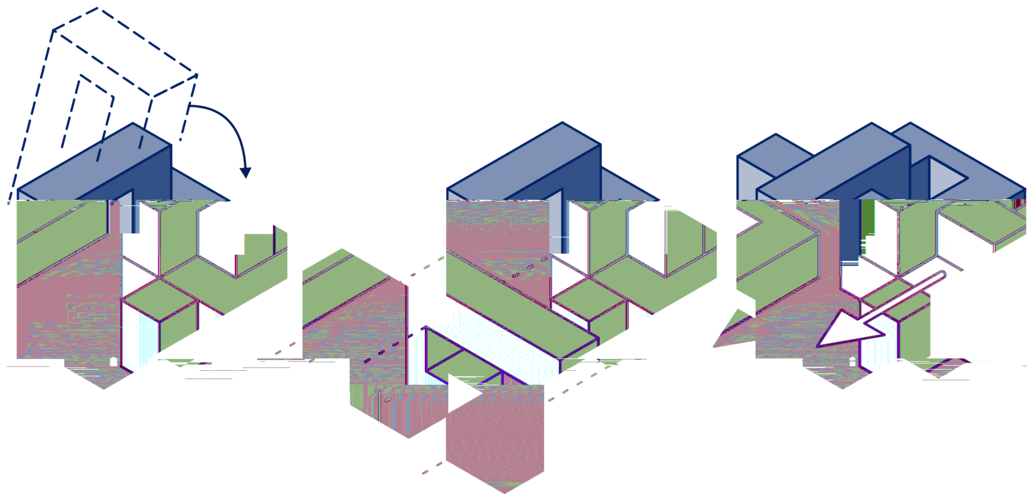
De houten knoop is een puzzel die bestaat uit drie stukken. Twee stukken hebben de vorm van de letter C en een stuk de vorm van de letter O.







Hoe je de knoop in elkaar moet zetten, zie je in de plaatjes hieronder.



- Kantel de O over een C.
- Schuif de tweede C bij de eerste C naar binnen.
- Schuif de tweede C samen met de O naar boven; schuif de O naar links.

a Teken een bovenaanzicht van de knoop. Neem $\frac{1}{2}$ cm als eenheid.

b Bereken de inhoud van de knoop. Ga er vanuit dat hij massief is.

Als je de inhouden van de drie stukken waaruit de knoop bestaat bij elkaar telt, kom je erachter dat de knoop een holte heeft.

c Wat is de inhoud van die holte?

2

Hiernaast zie een afbeelding van de Sint Petruskerk in Gulpen. De vier dakvlakken van de toren op de foto zijn ruiten.
We nemen een toren met dezelfde vorm. Hij is vierkant: 8 bij 8 meter. De spits is 12 meter hoog (dat is het verticale hoogteverschil van de top en de laagste punten van de dakvlakken).

a Teken het bovenaanzicht en het vooraanzicht van de torenspits op schaal $1 : 400$.

b Teken in het bovenaanzicht de doorsneden van de spits op halve hoogte, op een kwart van de hoogte en op driekwart van de hoogte.

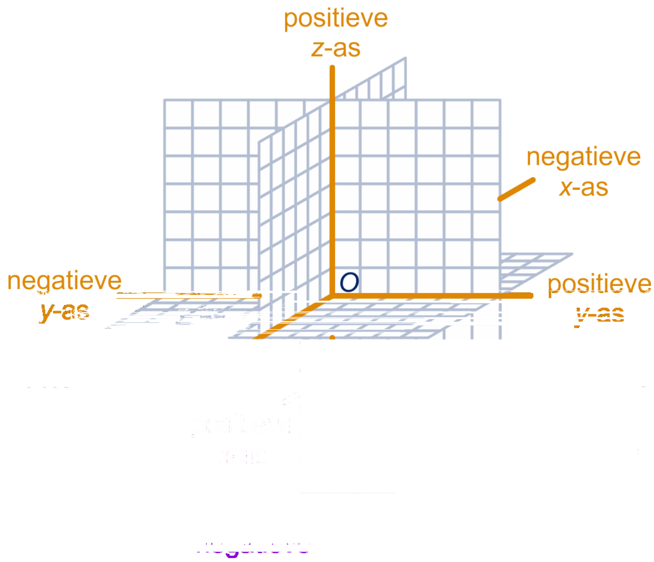
c Bereken de oppervlakte van één dakvlak.

d Bereken de inhoud van de torenspits.

Hint 1.

3

Drie vlakken snijden elkaar loodrecht in het punt O.



a In hoeveel stukken wordt de ruimte verdeeld?

De drie snijlijnen zijn de x-as, de y-as en de z-as. Op deze assen is een schaalverdeling gekozen. Zo kan elk punt in de ruimte door een drietal getallen aangegeven worden.

b Teken het punt $(2,3,\text{-}4)$ op het werkblad.

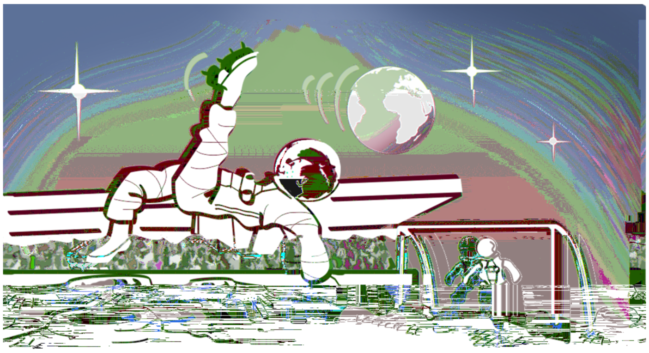
Dit punt ligt in het stuk "vóór-rechts-onder".

c In welk stuk ligt het punt $(\text{-}2,3,5)$? En $(2,\text{-}3,\text{-}5)$?

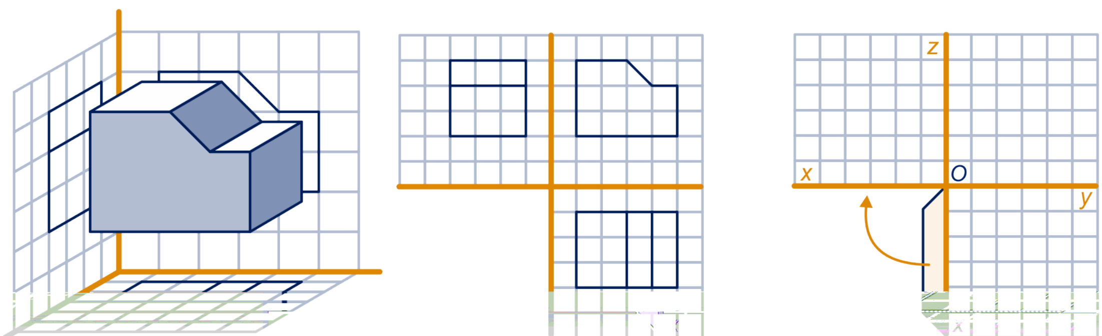
We werken bij voorkeur in dat deel van de ruimte waar de coördinaten alle drie positief zijn: het positieve octant.

d Welk stuk is dat?
e Kun jij de term "octant" verklaren?

Gaat de bal in het doel? De hoofdtribune juicht: zij ziet de bal in het doel gaan; de F-side achter het doel joelt: de bal gaat meters naast.



Om ruimtelijke vormen te "kennen" is één aanzicht niet voldoende: een cirkel kan een aanzicht van een bol, een cilinder, een kegel of nog iets anders zijn. Een rechthoek kan een aanzicht van een cilinder zijn. We plaatsen een ruimtelijk voorwerp in een $Oxyz$-assenstelsel, bij voorkeur in het positieve octant. Vervolgens bekijken we het voorwerp van voren (vanuit de positieve x-as), van opzij (de positieve y-as) en van boven (de positieve z-as). We noemen deze aanzichten de **x-, y- en z-projectie**.
De drie projecties tekenen we in een "drieluik".



Door de positieve x-assen aan elkaar te plakken vouw je het drieluik tot een ruimtelijk model van het positieve octant.

4

$T.ABCD$ is een piramide. Pas op: de piramide is niet regelmatig. In een drieluik op het werkblad zijn de x-, x- en z-projecties getekend. Met de letters T_x , T_y en T_z zijn de x-, y- en x-projectie van T aangegeven.

a Zet bij de x- en y-projectie van de andere hoekpunten op het werkblad in het drieluik de juiste letters (met de juiste indices).

b Geef de coördinaten van de hoekpunten.

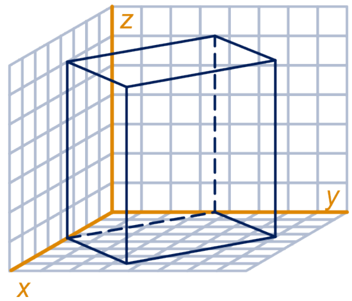
c Teken de piramide in het assenstelsel op het werkblad.

We doorsnijden de piramide met het vlak door de middens van de ribben TA, TB, TC en TD. De snijfiguur is een vierkant.

d Kleur de projecties van de snijfiguur in het drieluik.

5

Kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribbe 5.



In het drieluik op het werkblad is de lengte van een zijvlaksdiagonaal afgerond op 7.

a Ga na dat dit maar weinig afwijkt van de werkelijke lengte.

b Kleur in het drieluik de aanzichten van driehoek BED en van lijn AG.

Driehoek BED en lijn AG snijden elkaar in S. In één van de aanzichten kun je zien hoe hoog S boven het grondvlak van de kubus ligt.

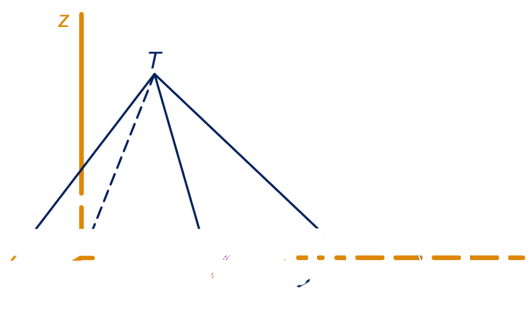
c Bereken deze hoogte (gebruik gelijkvormigheid).

d Wat zijn de coördinaten van S?

e Teken S ook in het ruimtelijke plaatje van de kubus op het werkblad.

6

$ABCO.T$ is een regelmatige piramide waarvan alle ribben lengte 6 hebben.



a Bereken de hoogte van de piramide.

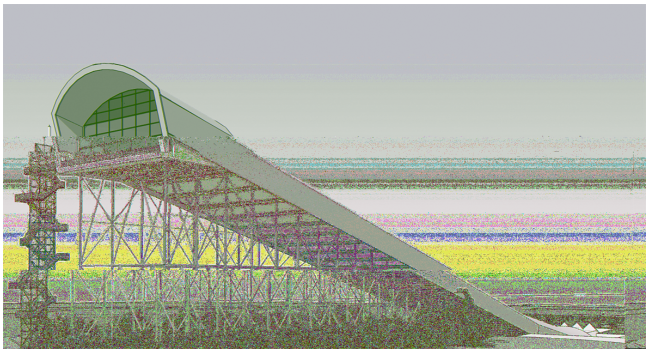
b Teken de aanzichten van de piramide in een drieluik.

c Teken ook een aanzicht van de piramide waarbij je kijkt in de richting van diagonaal AC.

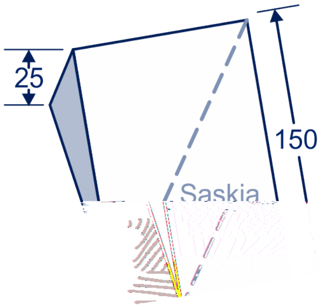
d Kleur in het geschikte aanzicht de hoek tussen een zijvlak van de piramide en het grondvlak. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

e Kleur in het geschikte aanzicht de hoek tussen een opstaande ribbe van de piramide en het grondvlak. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

7 In Nederland heb je kunstmatig aangelegde skihellingen.



Snowworld Zoetermeer



We bekijken er een van 100 meter breed, die overal even steil is. De lengte langs de helling gemeten is 150 meter, het hoogteverschil is 25 meter.

a Wat is de hellingshoek van de skihelling (in graden, in één decimaal nauwkeurig)?

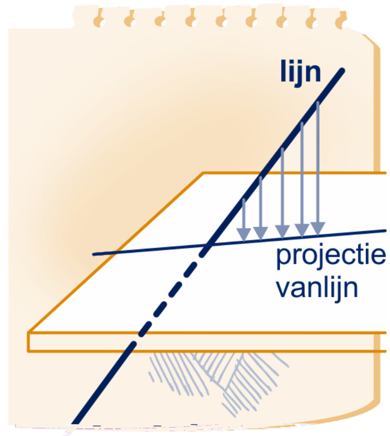
Saskia durft niet zo goed en gaat diagonaalsgewijs naar beneden.

b Wat is de hellingshoek van haar route in graden, in één decimaal nauwkeurig?

Stefan vindt dat nog te steil en gaat zigzaggend naar beneden, met een hellingshoek van $3{,}5^\circ$.

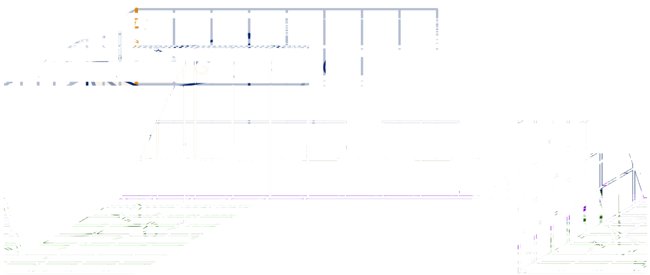
c Hoeveel bochten maakt hij minstens?

De hoek van een lijn en een vlak
De hoek die een lijn en een vlak met elkaar maken (dit is de hellingshoek van de lijn ten opzichte van dat vlak) is de hoek tussen de lijn en de loodrechte projectie van die lijn op het vlak.



In opgave 6e heb je als hoek tussen een opstaande ribbe en het grondvlak de hoek tussen die opstaande ribbe en een diagonaal in het grondvlak genomen. (Een deel van) die diagonaal is de loodrechte projectie van de ribbe op het grondvlak.

8 In het drieluik op het werkblad zie je de x-, y- en z-projectie van kubus $ABCD.EFGH$.
$BDEG$ is een regelmatig viervlak met ribbe 6.



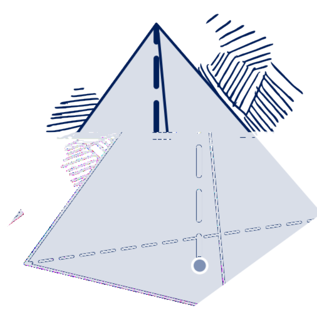
a Teken de drie projecties van het viervlak in de kubus op het werkblad.

Het vlak op halve hoogte verdeelt het viervlak in twee congruente stukken.
b Kleur het snijvlak in de drie projecties.

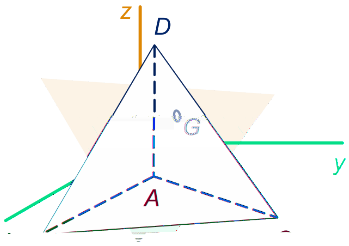
Het viervlak krijg je door van de kubus vier piramides af te snijden.
c Bereken de inhoud van het viervlak dat je overhoudt.

We halen het viervlak uit de kubus en plaatsen het op tafel.
d Bereken de hoogte van het viervlak.
Hint 2.

e Bereken de hoek die een ribbe van het viervlak met een grensvlak van dat viervlak maakt in graden nauwkeurig.



9 **Limonadepakje**
Een Sunkist-drinkkarton heeft de vorm van een regelmatig viervlak $ABCD$. Door een gaatje G in grensvlak BCD steek je het rietje. We houden het drinkkarton met het grondvlak evenwijdig aan het Oxy-vlak, met de ribbe AB evenwijdig aan de x-as.



Op het werkblad is de z-projectie van het viervlak getekend, en is een begin gemaakt met de x-projectie.

a Welke ribbe is in werkelijkheid even lang als zijn x-projectie?

b Maak de x-projectie af en teken de y-projectie.

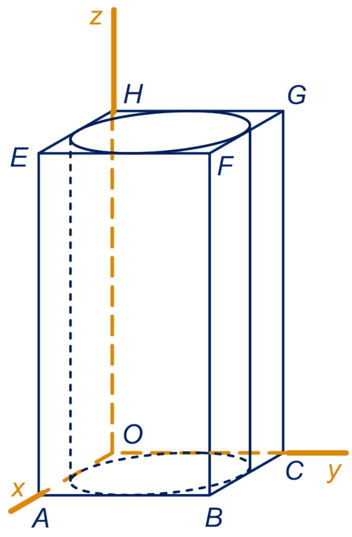
De z-projectie van G is aangegeven.

c Teken de x- en y-projectie van G.

10

$ABCO.EFGH$ is een balk met $O\,(0,0,0)$, $A\,(4,0,0)$, $C\,(0,4,0)$ en $H\,(0,0,6)$, met daarin een cilinder met als grondvlak de ingeschreven cirkel van vierkant $ABCO$ en hoogte 6.

a Teken de x-, y- en z-projectie van de balk in een drieluik met daarin de projecties van de cilinder.



Lijnstuk OF snijdt de cilinder in de punten P en Q.

b Teken P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y en Q_z.

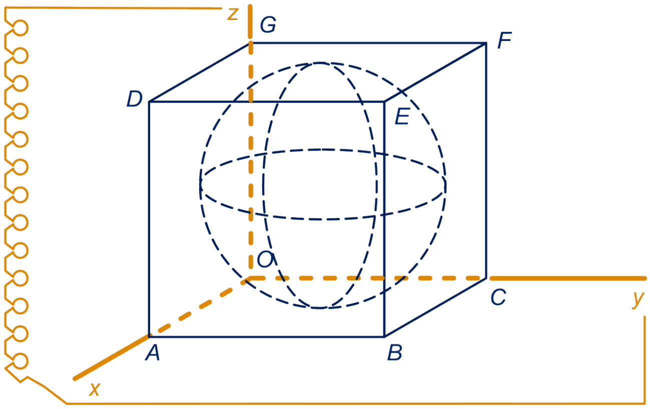
c Welk percentage (in één decimaal) van lijnstuk OF zit binnen de cilinder?

V is het vlak door G, H en de middens van de ribben AE en BF. Dit vlak doorsnijdt de cilinder volgens een ellips.

d Bepaal de lengte van de lange en de korte as van de ellips.

11

$OABC.DEFG$ is een kubus met $O\,(0,0,0)$, $A\,(4,0,0)$, $C\,(0,4,0)$ en $G\,(0,0,4)$. In de kubus zit een bol straal 2. We doorsnijden de kubus-met-bol met horizontale vlak V op hoogte 1.

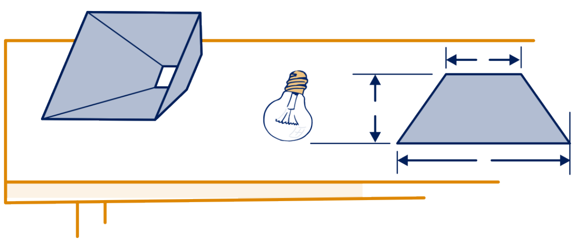


a Teken in een drieluik de kubus met bol in de x-, y- en z-projectie.
Kleur de projecties van de snijcirkel.

b Bereken de straal van de snijcirkel.

12

Een lampenkap ligt op zijn zij op tafel. Hij heeft de vorm van een afgeknotte piramide. De randen zijn vierkanten van 8 bij 8 en 20 bij 20 cm. De lampenkap is 8 cm hoog.



a Hoe groot is de hoek die het vierkante grondvlak van de lampenkap maakt met de tafel?

Na keuze van een assenstelsel kunnen we de situatie in een drieluik tekenen. Op het werkblad zie je de y-projectie.

b Teken de x- en de z-projectie van de lampenkap.

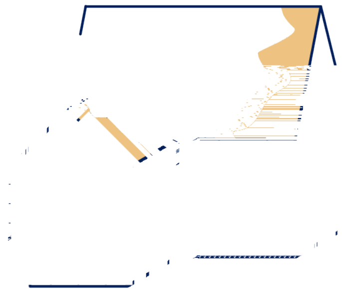
c Bereken de inhoud van de ruimte binnen de lampenkap.

13

Huis met aanbouw

Op het werkblad zie je twee projecties (aanzichten) van een huis dat een architect voor zijn bouwheer getekend heeft.

a Teken de z-projectie.

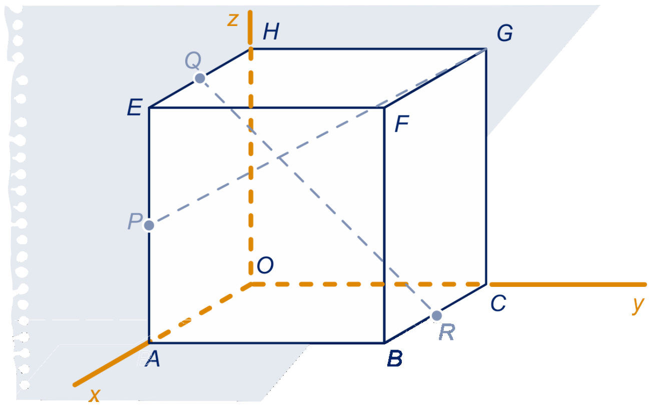


De bouwheer wil ook een ruimtelijk plaatje van zijn toekomstige huis. De architect heeft dat bijna af.

b Teken op het werkblad het punt waar de nok van de aanbouw door het dakvlak van de hoofdvleugel gaat. Maak het ruimtelijke plaatje af.

14

P, Q en R zijn middens van ribben van kubus $ABCO.EFGH$.



a Teken in een drieluik de x-, y- en z-projectie van de kubus met daarin de projecties van de lijnen PG en QR.
Kies als ribbe 6 cm.

In de ruimtelijke tekening lijken de lijnen PG en QR elkaar te snijden.

b Hoe kun je in de projecties zien dat dit niet zo is?

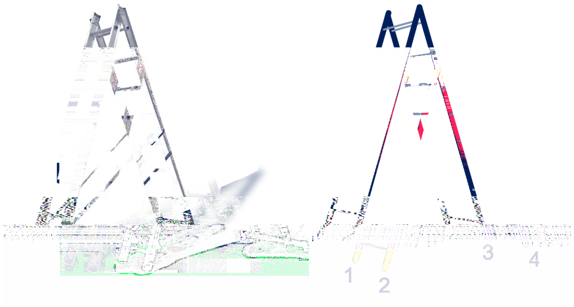
Een mier loopt over ribbe BC. Vanuit R wordt het zicht op punt Q niet belemmerd door lijn PG. X is het punt van ribbe BC van waaruit het zicht op punt Q wel door lijn PG belemmerd wordt: dus lijn XQ en lijn PG snijden elkaar. Het snijpunt noemen we S. Eén van de drie projecties van lijn XQ hangt niet van de plaats van X op ribbe BC af. Dit legt twee coördinaten van S vast.

c Bepaal nu de plaats van X op ribbe BC.

Opmerking

De lijnen QR en PG zijn niet evenwijdig; ze snijden elkaar ook niet. We noemen de lijnen QR en PG **kruisende lijnen**.

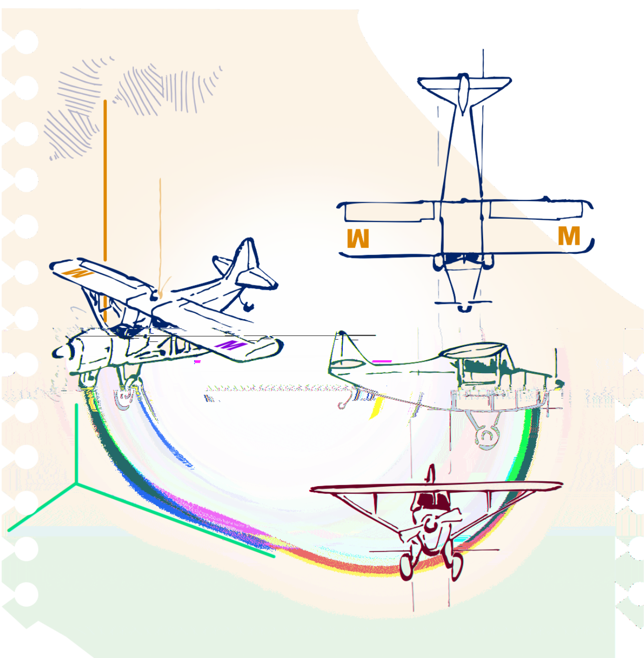
15 Bekijk de reformladder.



a Is het mogelijk de bomen 1 en 2 in één lijn te zien?
b En de bomen 1 en 3?
c En de bomen 1 en 4?
d Is het mogelijk sport 5 en 6 in één lijn te zien?
e Kun je elk tweetal sporten in één lijn zien?

Opmerking

- Je kunt twee lijnstukken in één lijn zien als die twee lijnstukken in één vlak liggen. Twee lijnen liggen in één vlak als ze elkaar snijden of als ze evenwijdig zijn.
- Een vlak is onbegrensd. Een vlakdeel kan wel begrensd zijn. Zo is het voorvlak van een kubus een vlakdeel, en geen vlak.
  Een lijn is aan beide kanten onbegrensd. Een lijnstuk is wel begrensd. Zo is een ribbe van een kubus een lijnstuk, en geen lijn.



2.2 Onderlinge ligging

Bekijk de bewering: als twee lijnen snijdend of evenwijdig zijn, liggen ze in één vlak. Ben jij het daarmee eens?
Kun je de bewering ook omdraaien: als twee lijnen in één vlak liggen dan snijden ze elkaar of zijn ze evenwijdig?
Deze paragraaf gaat over dergelijke beweringen en is dus wat theoretisch van aard. Sommige beweringen zullen voor iedereen onmiddellijk duidelijk zijn, terwijl andere een uitgebreidere toelichting behoeven. Vaak is het goed een plaatje van de situatie te tekenen. Geef bij een foute bewering een voorbeeld.

16 We beginnen met enkele eenvoudige beweringen.

- Als een lijn een vlak snijdt, gebeurt dat in een punt.
- Als twee vlakken elkaar snijden, gebeurt dat volgens een lijn.
- Als twee punten van een lijn in een vlak liggen, dan liggen alle punten van die lijn in dat vlak.

a Ben jij het met deze beweringen eens?

U, V en W zijn drie (verschillende) vlakken.

- Als $U//V$ en $V//W$, dan $U//W$.
- Als U en V snijdend zijn en V en W snijdend zijn, dan zijn U en W snijdend.
- Als U en V snijdend zijn en $V//W$, dan zijn U en W snijdend.

b Ben jij het met deze beweringen eens?

17 k, l en m zijn drie (verschillende) lijnen.

- Als $k//l$ en $l//m$, dan $k//m$.
- Als k en l snijdend zijn en l en m snijdend zijn, dan zijn k en m snijdend.
- Als k en l snijdend zijn en $l//m$, dan zijn k en m snijdend.

Ben jij het met deze beweringen eens?

18 U, V en W zijn drie (verschillende) vlakken.

- Als U en V snijdend zijn en V en W snijdend zijn, dan zijn U en W snijdend.
- Als U en V snijdend zijn en $V//W$, dan zijn U en W snijdend.

Ben jij het met deze beweringen eens?

19

a Teken een plaatje met drie vlakken, die één lijn gemeenschappelijk hebben

b Teken een plaatje met drie vlakken die één punt gemeenschappelijk hebben.

20 U, V en W zijn drie vlakken.
In hoeveel stukken kunnen U, V en W de ruimte verdelen?
Geef bij elk van de mogelijkheden aan hoeveel snijlijnen er zijn.
(Er zijn vijf mogelijkheden; enkele daarvan heb je in voorgaande opgaven al bekeken.)

21 U, V en W zijn drie vlakken.
U en V snijden elkaar; k is hun snijlijn.
V en W snijden elkaar; l is hun snijlijn.
U en W snijden elkaar; m is hun snijlijn.

- Als $k//l$, dan $k//m$ en $l//m$.
- Als k en l snijdend zijn, dan zijn k en m ook snijdend.
- k, l en m gaan door één punt of k, l en m zijn evenwijdig

Ben jij het met deze beweringen eens?

22 U, V en W zijn drie vlakken.
U en V snijden elkaar; k is hun snijlijn.
V en W snijden elkaar; l is hun snijlijn.

- Als $U//V$, dan $k//l$.

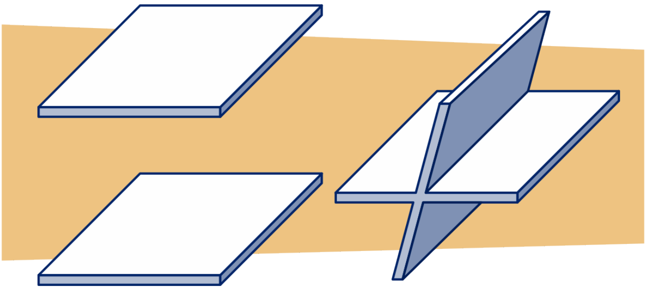
Ben jij het met deze bewering eens?

23 Een rechthoekige plaat rust met de bovenste rand in zijn geheel tegen de muur en met de onderste rand in zijn geheel op de vloer.
Hoe weet je zeker dat de plint (dat is de snijlijn van vloer en muur) evenwijdig met de bovenste en onderste rand is?

Drievlakkenstelling 1
Drie vlakken snijden elkaar twee aan twee.
De drie snijlijnen gaan dan óf door één punt óf ze zijn evenwijdig.

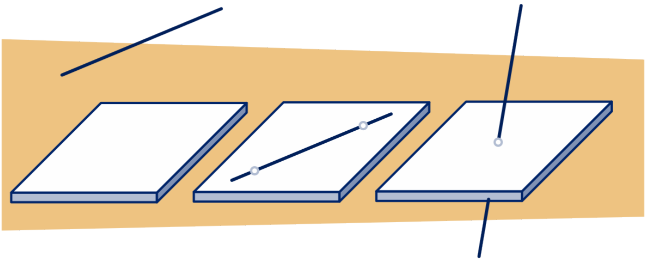
Drievlakkenstelling 2
Twee evenwijdige vlakken wor t

- **De onderlinge ligging van twee vlakken**



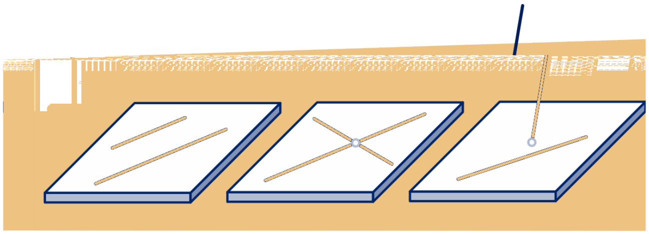
- óf de vlakken zijn evenwijdig,
- óf de vlakken snijden elkaar volgens een lijn.

- **De onderlinge ligging van een lijn en een vlak**



- óf de lijn en het vlak zijn evenwijdig,
- óf de lijn ligt in het vlak,
- óf de lijn en het vlak snijden elkaar in een punt.

- **De onderlinge ligging van twee lijnen**



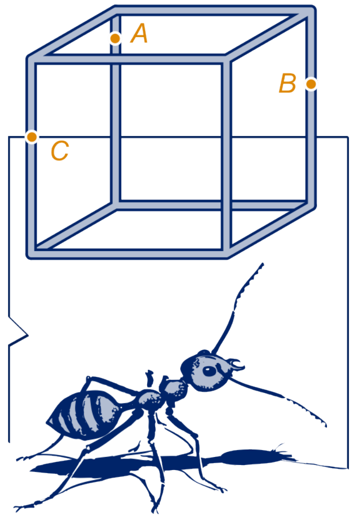
- óf de lijnen liggen in één vlak: ze zijn dan evenwijdig óf ze snijden elkaar,
- óf de lijnen liggen niet in één vlak: de lijnen kruisen elkaar dan.

24

Een staafjeskubus staat op tafel. A, B en C zijn drie punten op ribben van de kubus. Een mier loopt in een rechte lijn over het tafelblad. Op zijn wandeling ziet hij op een gegeven plek A en B als één punt en wat verderop ziet hij ook A en C als één punt.

a Teken de lijn waarover de mier loopt op het werkblad.

b Leg uit dat het snijpunt van lijn BC met de tafel ook op de lijn ligt waarover de mier loopt.



25

A en B zijn punten op lijn l en C en D zijn punten op lijn m.
De lijnen l en m kruisen elkaar.
Kunnen de lijnen AC en BD evenwijdig zijn?
Kunnen de lijnen AC en BD elkaar snijden?
Verklaar je antwoorden, gebruik de conclusies na opgave 23.

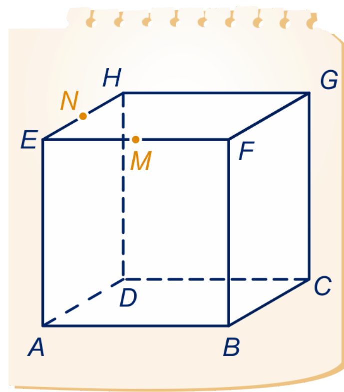
26

a Hoeveel ribben van kubus $ABCD.EFGH$ snijden ribbe AB, hoeveel zijn evenwijdig met AB en hoeveel kruisen AB?

b Welke zijvlaksdiagonalen in de kubus zijn evenwijdig met het vlak dat door de punten B, E en D gaat?

27

Bij kubus $ABCD.EFGH$ is M het midden van ribbe EF en N van ribbe EH.
Wat is de onderlinge ligging van elk van de tweetallen lijnen:
MN en BD, BM en DN, DM en BN, CM en DN?



Opmerking
Drie punten die niet op één lijn liggen, leggen een vlak vast.
Zo noemen we het vlak door de punten M, N en B: vlak MNB.
Dit vlak bestaat niet alleen uit de punten binnen driehoek MNB, maar het is het onbegrensde vlak. Zo ligt bijvoorbeeld ook het D in dat vlak, evenals het spiegelbeeld van A in punt F.

28

$OBCD.T$ is de piramide met $B(6{,}0{,}0)$, $C(4{,}4{,}0)$, $D(0{,}4{,}0)$ en $T(0{,}0{,}6)$.

a Heeft de piramide symmetrievlakken?

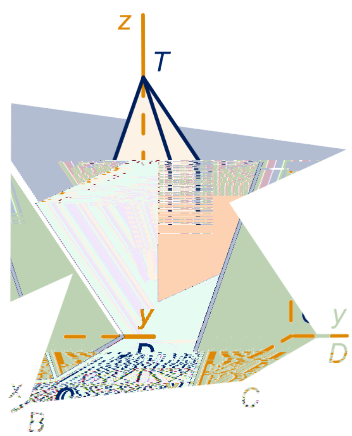
b Wat is de onderlinge ligging van de vlakken TOD en TBC?

We bekijken de snijlijn van de vlakken TOD en TBC.

c Teken de snijlijn op het werkblad .

d Wat gebeurt er met de snijlijn als we punt B over de x-as naar $(4{,}0{,}0)$ laten lopen?

e Wat is de onderlinge ligging van de vlakken TCD en TOB?



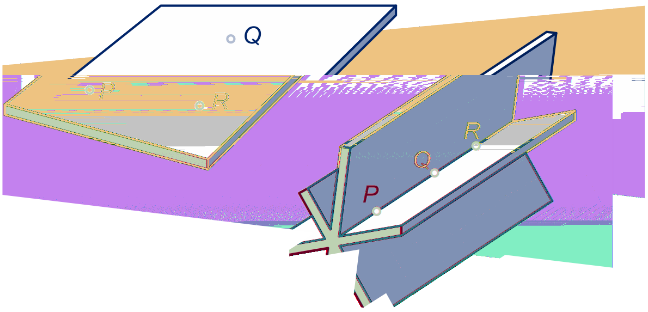
We bekijken de snijlijn van de vlakken TCD en TOB.

f Teken de snijlijn op het werkblad.

g Wat gebeurt er met de snijlijn als we punt D over de y-as oneindig ver naar rechts laten lopen?

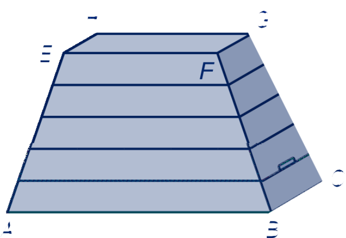
P, Q en R zijn drie punten. Hoeveel vlakken er door P, Q en R gaan hangt af van de onderlinge ligging van deze drie punten.

- óf de punten liggen op één lijn, dan gaan er oneindig veel vlakken door P, Q en R;
- óf de drie punten liggen niet op één lijn: dan gaat er één vlak door P, Q en R.



29 Een kruk met drie poten staat vast op een vlakke vloer, een stoel op vier poten kan 'wiebelen'.
Verklaar dat.

30 Een bekend toestel bij turnen is de springkast. Het grondvlak $ABCD$ meet 70 bij 150 cm, de bovenkant $EFGHB$ is 40 bij 120 cm.
Geef bij elk van je antwoorden een argument.



a Is de kast een afgeknotte piramide?

b Wat is de onderlinge ligging van de opstaande ribben AB en BF? Van BF en CG? En van AE en CG?

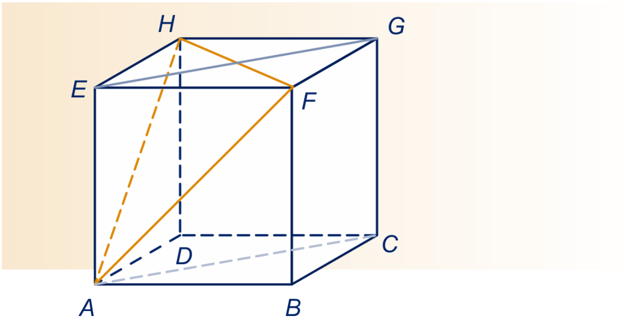
c Wat is de onderlinge ligging van de zijvlaksdiagonalen en er

De schuin-oplopende randen (zoals AE) zijn 105 cm lang.

e Hoe hoog is de kast, in mm nauwkeurig?

31

$ABCD.EFGH$ is een kubus met ribbe 6, l is de snijlijn van de vlakken $ACGE$ en AFH.



a Teken l op het werkblad.

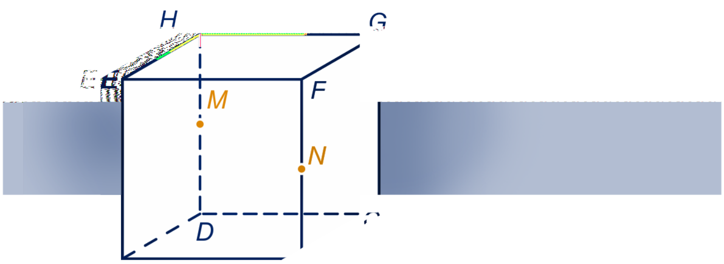
Ad weet niet zeker of de lijnen l en CD elkaar snijden.

b Hoe kan Anneke hem overtuigen?

c Bereken de hoogte van het snijpunt van de lijnen l en CG boven het grondvlak

32

$ABCD.EFGH$ is een kubus met ribbe 6. M en N zijn middens van ribben.



a Liggen A, M, G en N in één vlak? Hoe weet je dat zeker?

s is de snijlijn van de vlakken $DEFC$ en $AMNG$.

b Teken s op het werkblad.

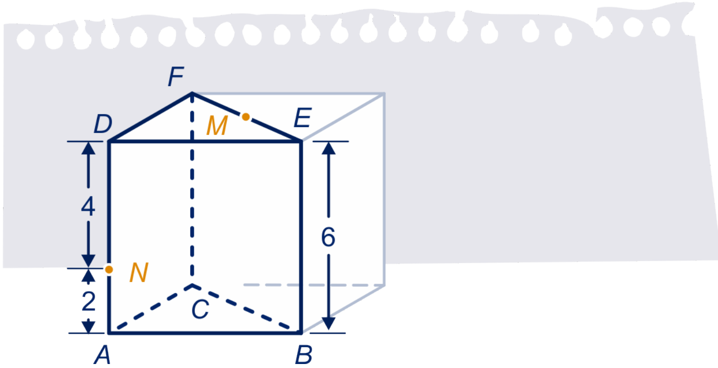
c Hoe weet je zeker dat s lijn CD snijdt?

Het snijpunt van lijn CD en lijn s noemen we S.

d Bereken de afstand van S tot D.

33

$ABC.DEF$ is een recht driezijdig prisma, dus de opstaande zijvlakken zijn rechthoeken. De hoogte van het prisma is 6. N ligt op ribbe AD en $AN = 2$. M is het midden van ribbe EF.



Er is een lijn door N in vlak $ACFD$ die lijn BM snijdt. Het snijpunt noemen we S.

a Teken lijn NS op het werkblad.

b Bereken de hoogte van S boven het grondvlak van het prisma.

Lijn SN snijdt DF in twee stukken.

c Bereken de verhouding van die stukken.

34

U is een vlak en P en Q zijn twee punten aan dezelfde kant van U, die even ver van U afliggen.

a Is de volgende bewering waar?

- De lijn door P en Q is evenwijdig met U.

b Waarom is erbij vermeld dat de punten aan dezelfde kant van U liggen?

35

U is een vlak en l is een lijn die in U ligt. De lijn k ligt niet in U.

- Als $k//l$ dan $k//U$

Is de bewering waar?

36

U en V zijn vlakken. In U liggen drie punten A, B en C die even ver van V liggen.
Is U evenwijdig met V?

37

U en V zijn twee vlakken, k en l zijn twee snijdende lijnen in V.

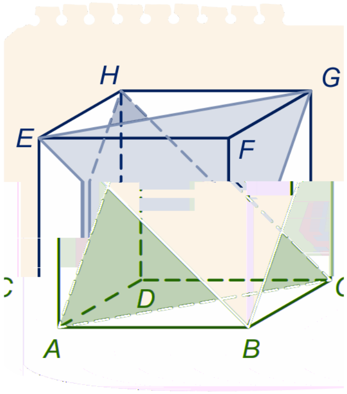
a Is de volgende bewering waar?

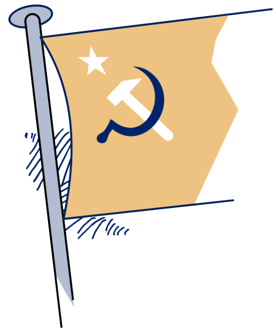
- Als $k//U$ en $l//U$ dan $V//U$..

b Waarom is erbij vermeld dat lijnen k en l elkaar snijden?

38

Hoe kun je met beweringen uit de opgaven 34 tot en met 37 inzien dat de vlakken AHC en BGE in kubus $ABCD.EFGH$ evenwijdig zijn?





39

a Kan de schaduw van een sikkel een rechte streep zijn?

Er brandt een lamp. De schaduw van een object is een rechte streep.

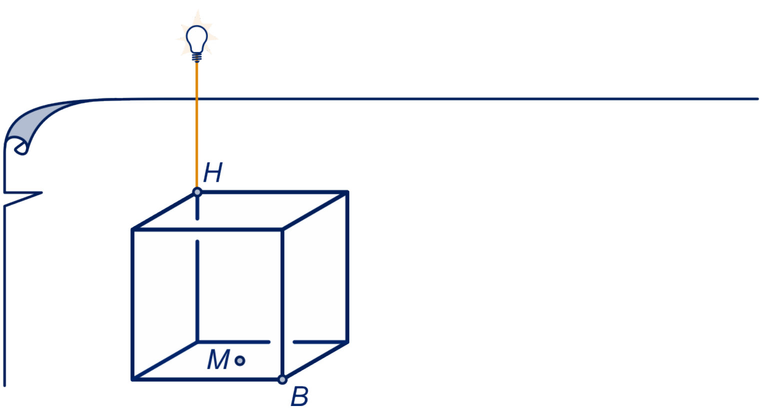
b Wat weet je van de positie van het object ten opzichte van de lamp en de schaduw?

Opmerking

Er brandt een lamp. De schaduw van een lijn valt op een scherm. Je vindt de schaduw als volgt. De lamp en de lijn liggen in één vlak. Snijdt dat vlak met het scherm. De snijlijn is de gezochte schaduw.

40

De kubus op de tafel hieronder heeft ribbe 4. Het is een staafjeskubus.



We beschijnen de kubus met een lampje, dat zich in L op hoogte 4 recht boven hoekpunt H bevindt.
De schaduw op tafel is een vlakke figuur.

a Maak daarvan een tekening op schaal; dus geen ruimtelijk plaatje! Neem $\frac{1}{2}$ cm als eenheid.

b De zon beschijnt de kubus zo, dat de schaduw van H op het midden M van het grondvlak van de kubus valt.

Opmerking

Een tekening van een vlakke figuur (zoals je in de voorgaande opgave gemaakt hebt), noemen we een tekening **ware grootte**.

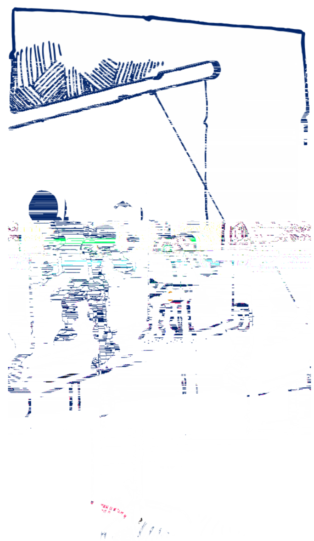
2.3 Zonlicht en lamplicht

41 Zie opgave 40a.
we het We laten het lampje vanuit L naar H zakken.

- **a** Wat gebeurt er met de schaduw van E?
- **b** En wat gebeurt er dan met de schaduw van lijnstuk EB?

42 Zie opgave 40b.
De zon zakt naar de horizon. De zonnestralen blijven steeds evenwijdig met vlak $DBFH$.

- **a** Wat gebeurt er met de schaduw van E?
- **b** En wat gebeurt er dan met de schaduw van lijnstuk EB?



Bij zonlicht zijn de lichtstralen parallel. Het schaduwbeeld dat je krijgt, noemen we een **parallelprojectie** van het origineel.

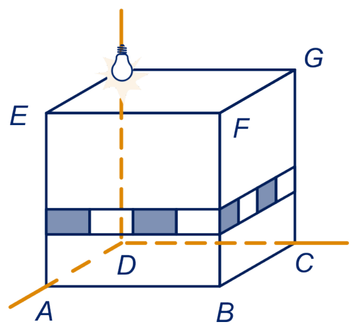
Bij lamplicht komen de lichtstralen uit één punt. Het schaduwbeeld dat je krijgt, noemen we een **centrale projectie** van het origineel.

In opgave 40b is de kubus parallel geprojecteerd in de richting van lijn HM.
In opgave 40a is de kubus centraal geprojecteerd vanuit punt L.

Twee evenwijdige lijnen blijven bij parallelprojectie evenwijdig (of het worden beide punten). Bij centrale projectie hoeft dat niet.
Bij parallelprojectie behouden lijnstukken die evenwijdig zijn aan het vlak waarop geprojecteerd wordt hun lengte. Bij de centrale projectie is dat niet het geval.

43 Kubus $ABCD.EFGH$ staat op tafel en wordt vanuit H beschenen. Dit geeft een schaduwbeeld van de rechthoekig geblokte band op tafel.

- **a** Teken dat schaduwbeeld op het werkblad.
- **b** Wat is de vorm van de beelden van deze donkere blokken?



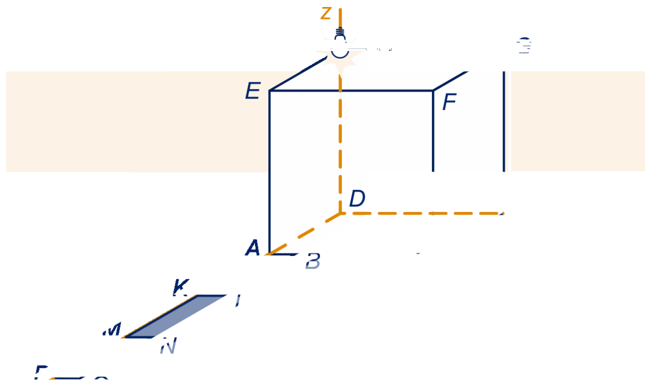
De niet-evenwijdige zijden van deze beelden gaan na verlenging door één punt.

- **c** Welk punt? Hoe weet je dat zeker?

2.3 Zonlicht en lamplicht

44

Op de voorkant van kubus $ABCD.EFGH$ zit een patroon.
Als dat vanuit H met een lamp beschenen wordt zie je het getekende blokkenpatroon op tafel.



De originelen van de lijnen KL, MN en PQ zijn evenwijdig aan lijn AB.

a Leg dat uit.

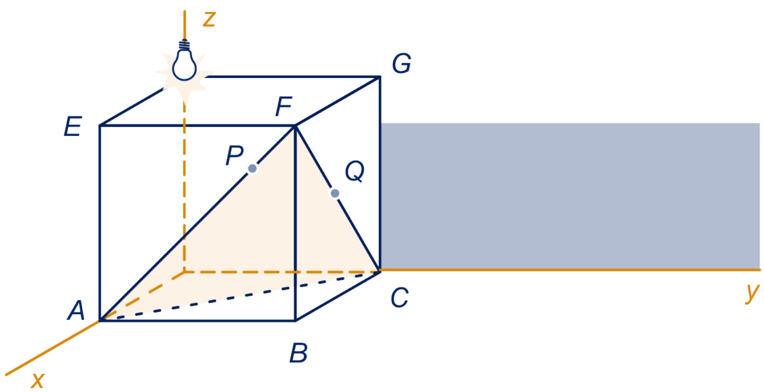
b Teken die origenelen op het werkblad en maak het patroon op de kubus af.

De niet-horizontale lijnen van het patroon op de voorkant gaan na verlenging allemaal door punt E.

c Leg dat uit.

45

$ABCD.EFGH$ is een staafjeskubus, die op tafel staat. ACF is een kartonnen driehoek die vanuit H met lamplicht beschenen wordt. P is een punt op lijnstuk AF en Q is een punt op lijnstuk CF; P en Q liggen niet op dezelfde hoogte.
De schaduwen van P en Q op tafel noemen we P_s en Q_s.



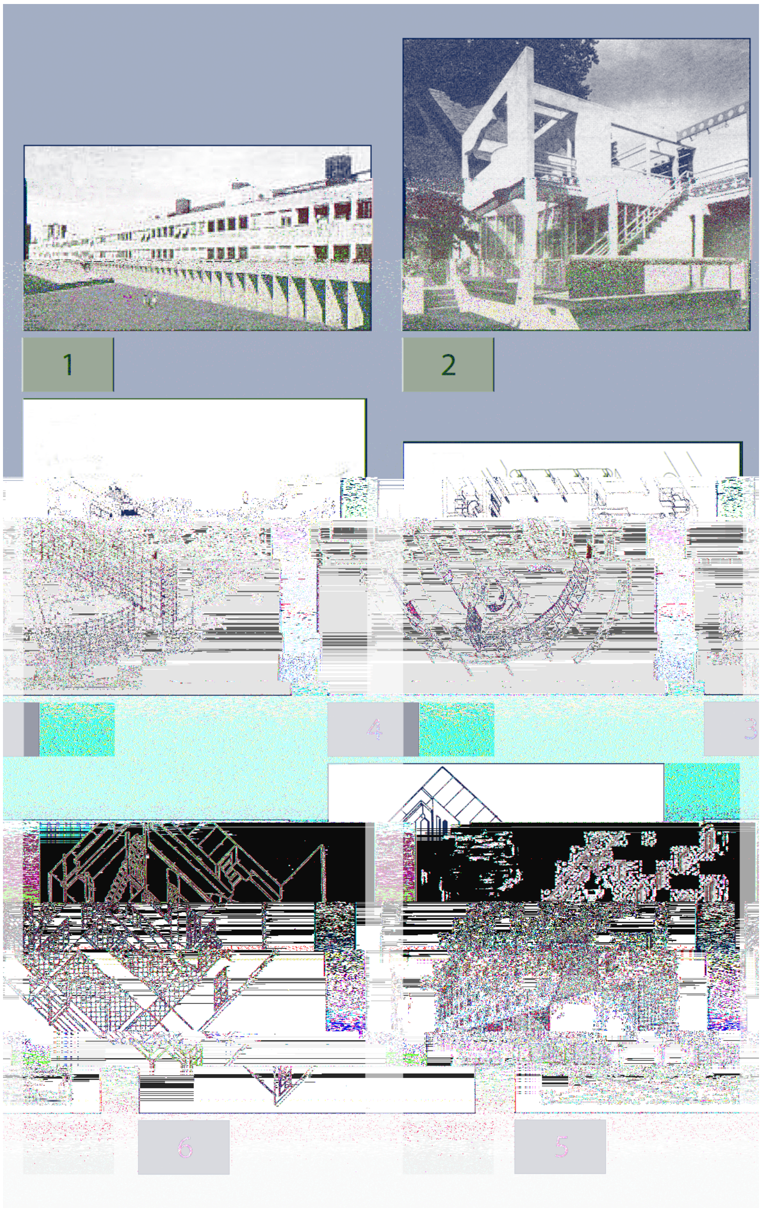
a Teken P_s en Q_s op het werkblad.

b Kleur het schaduwbeeld van driehoek ACF op tafel.

c Hoe kun je met een van de drievlakkenstellingen inzien dat de lijnen AP_s en CQ_s evenwijdig met lijn HF zijn?

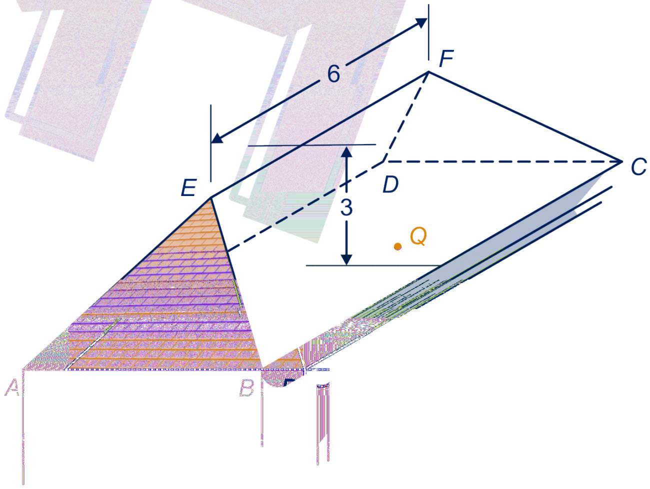
d Hoe kun je met behulp van een van de drievlakkenstellingen inzien dat de lijnen PQ, P_sQ_s en AC door één punt gaan?

46 In de architectuur wordt zowel de centrale als de parallel-projectie gebruikt.
Ga van elk van de tekeningen na of het een parallel- of een centrale projectie is.



47

Mijnheer van Bommel heeft een huis met een zadeldak getekend. Hieronder zie je de zolder. De nok EF is 3 meter hoger dan de goot BC, verticaal gemeten. De is 10 meter lang en de nok 6 meter.



Het dak heeft twee symmetrievlakken.

a Kleur de symmetrievlakken op het werkblad.

b Teken de loodrechte projectie van E op de zoldervloer.

c Hoe groot is de hoek die dakvlak ABE met de zoldervloer maakt in graden nauwkeurig?

Uit dakvlak ABE steekt een pijp omhoog, loodrecht de zoldervloer. De dakdoorvoer van de pijp zit bij P.

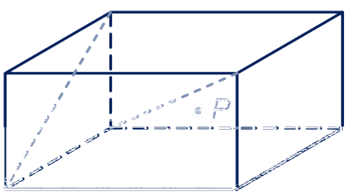
d Teken de loodrechte projectie van P op de zoldervloer.

Bij Q komt de pijp van de afzuigkap uit de keuken door de zoldervloer.

e Teken het punt van vlak $BCFE$ waar de pijp door het dak moet als hij recht omhoog gaat.

48

Charlotte boort door een houten balk. Ze begint in P aan de voorkant en boort evenwijdig met de gestippelde zijvlaksdiagonaal.



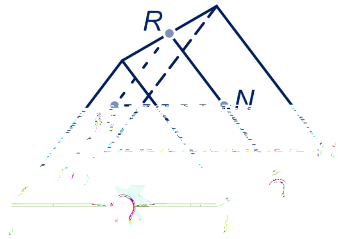
a Teken het punt waar de boor uit de balk komt.

Lisanne begint ook in P maar boort evenwijdig met de getekende lichaamsdiagonaal.

b Teken het punt waar de boor uit de balk komt.

49

Ad bewoont een zolderkamer. Deze heeft de vorm van een recht driezijdig prisma. Halverwege is een dakspant PRQ aangebracht, met een dwarsbalk MN op halve hoogte. We verwaarlozen de dikte van de balk. In het midden van lijnstuk AB brandt een lamp. Dit geeft een geknikte schaduw van MN op de twee schuine zolderwanden.



a Teken die schaduw.
Welk punt van MN heeft de knik als schaduw?

De zolder is 6 meter lang, 6 meter breed en 4 meter hoog.

b Bereken de grootte van de knik in graden. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

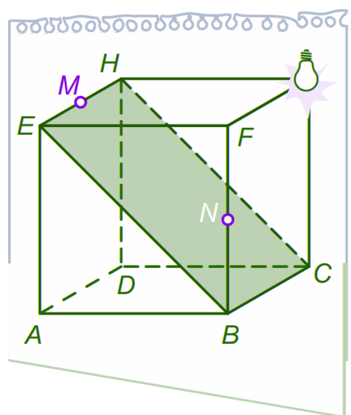
De lamp wordt over lijnstuk AB bewogen.

c Wat gebeurt er met de schaduw van MN? Licht je antwoord toe.

d Welk punt van MN heeft de knik als schaduw als de lamp in het punt halverwege het midden van AB en B is?

50

$ABCD.EFGH$ is een kubus met ribbe 4. M is het midden van EH en N van BF. In G bevindt zich een lampje. $BCHE$ is een rechthoek van karton.
We bekijken de schaduw van lijnstuk MN op het karton.



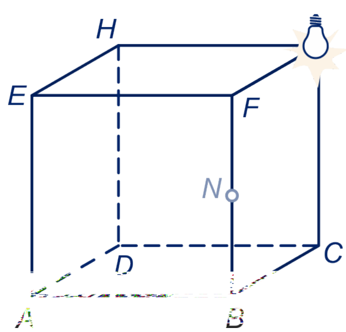
a Teken de schaduw op het werkblad.

Het eindpunt van de schaduw op lijnstuk EB noemen we S.

b Bereken de verhouding $ES : SB$.

51

$ABCD.EFGH$ is een kubus. N is het midden van ribbe EF. In G bevindt zich een lampje. Dat geeft schaduwen van lijnstuk HN op de grensvlakken van de kubus.



a Teken de schaduwen.

Het lijkt alsof een deel van de schaduw evenwijdig met AB is.

b Leg uit dat dit inderdaad het geval is.

De kubus staat op tafel.

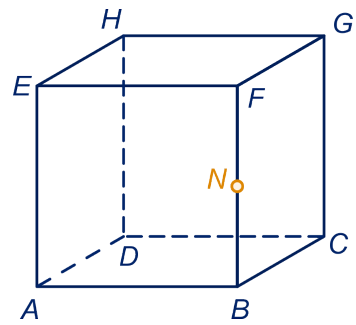
c Teken ook de schaduw van lijnstuk HN op tafel.
Leg uit dat de schaduw evenwijdig met AB is.

52

$ABCD.EFGH$ is een kubus die op tafel staat. N is het midden van ribbe BF.

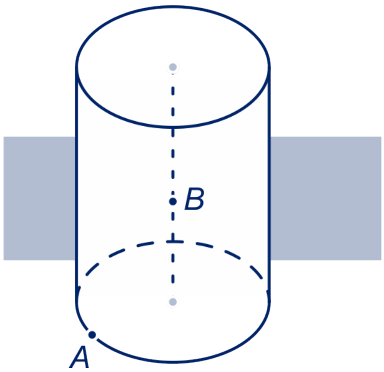
a Teken het snijpunt van lijn HN met het vlak van de tafel.

b Teken ook het snijpunt van lijn FD en vlak BEG.

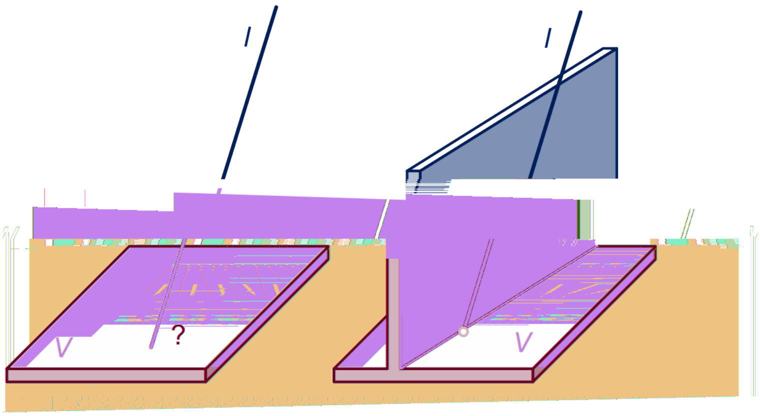


53

In de figuur staat een cilinder met zijn as. A ligt op de grondcirkel en B op de as.
Lijn AB snijdt de cilinder behalve in A in nog een punt.
Teken dat punt op het werkblad.



Om het snijpunt van een lijn l en een vlak V te tekenen, breng je een hulpvlak W aan, waarin l ligt.
Dat hulpvlak moet een bekende snijlijn met V hebben. l snijdt V in een punt van de snijlijn.



In opgave opgave 47b heb je waarschijnlijk het symmetrievlak door E, F en de middens van AB en CD getekend.
In opgave opgave 52a kun je vlak $DBFH$ als hulpvlak nemen.
De methode werkt ook wel als V een gebogen vlak is zie opgave opgave 53. Het hulpvlak gaat door de cilinderas en A.

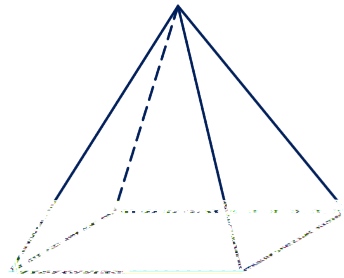
54

Op het werkblad staat de balk $ABCD.EFGH$.
M is het midden van ribbe CG.
Teken het snijpunt van lijn AM en vlak $BCHE$.

Hint 3.

55

Construeer op het werkblad telkens het snijpunt van lijn AB met het grondvlak van de piramide.
In de eerste figuur liggen A en B op ribben;
in de tweede figuur ligt A op ribbe en B in het rechter zijvlak;
in de derde figuur ligt A op het achtervlak en B op het linker zijvlak.

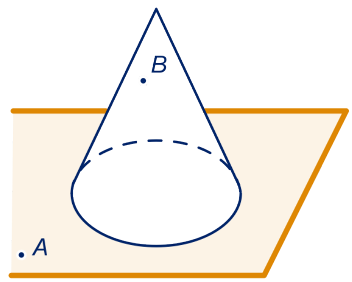


56

Een kegel staat op tafel. A is een punt op tafel en B is een punt "achter" op de kegelmantel.
Lijn AB snijdt de kegel behalve in B in nog een punt "voor" op de mantel.

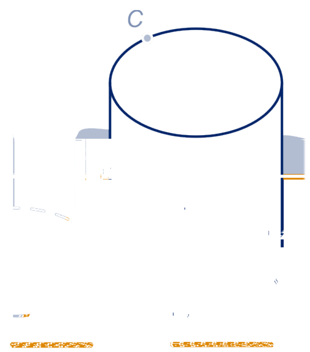
Hint 4.

Teken dat punt op het werkblad.



57

Een cilinder staat op tafel. A is een punt op de tafel en C een punt op de "bovenrand" van de cilinder. Lijn AC snijdt de cilinder behalve in C in nog een ander punt.
Teken dat punt op het werkblad.



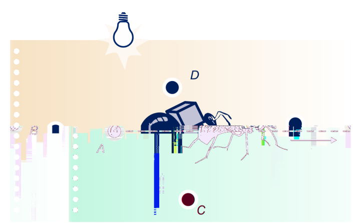
58

Op een glasplaat zitten vier vlekjes: A, B, C en D. Iemand houdt een stuk karton onder de glasplaat. Een lamp L werpt schaduwen van deze vlekjes op het karton. De schaduwen van de punten A, B en C zijn A', B' en C' Die zijn op het werkblad getekend. Een tor op weg van A naar B, bevindt zich in S.

a Teken de schaduw van S op het werkblad.

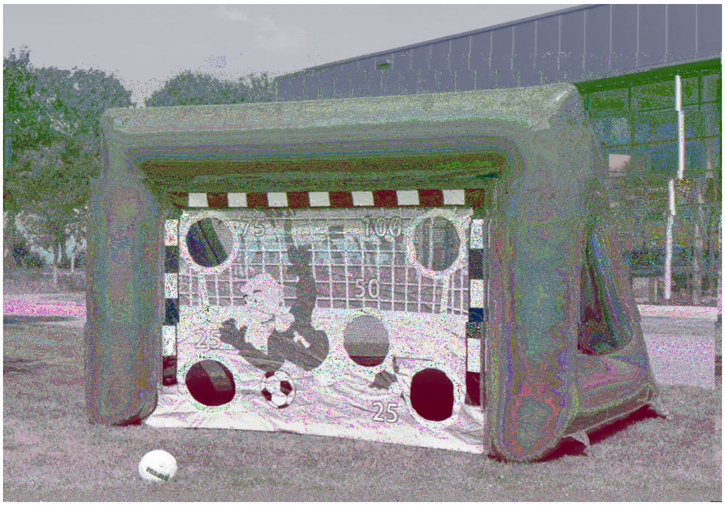
b Teken de schaduw van het punt D op het werkblad.

Hint 5.



59

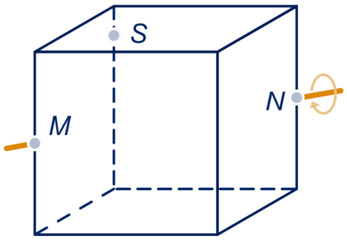
Een plaat is verticaal opgesteld. Er zitten ronde gaten in. Je kent zo'n plaat waarschijnlijk wel van de televisie: *das aktuelle Sport-Studio*. Ook tref je ze wel aan op de speelweide van een zwembad.
We bekijken een dergelijke plaat maar dan met twee vierkante gaten. De zon schijnt; de omtrek van de schaduw van de plaat is op het werkblad getekend.



a Teken er de (door de gaten) verlichte stukken in.

b Is er een zonnestand mogelijk waarbij de verlichte stukken congruent zijn met de gaten zelf (dat wil zeggen: gelijkvormig en even groot)? Bij welke zonshoogte is dat het geval? (De zonshoogte is de hoek die de zonnestralen met het aardoppervlak maken.)

60 Een kubus van doorzichtig plastic staat op tafel. Hij staat half vol water. De waterspiegel is vierkant. M en N zijn middens van ribben. S ligt op de verticale ribbe linksachter. We draaien de kubus een beetje om de lijn MN, zo dat de waterspiegel behalve door M en N ook door S gaat.



a Teken de waterspiegel in de kubus op het werkblad. Welke vierhoekige vorm heeft de waterspiegel?

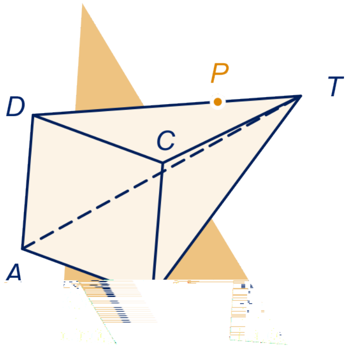
Als je de kubus verder om de lijn MN draait, blijft de waterspiegel niet vierhoekig.

b Welke nieuwe vorm ontstaat?

We draaien de kubus nog verder totdat er weer een vierhoekige vorm ontstaat.

c Wat voor vierhoek?

61 De regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ ligt met grensvlak TAB op tafel. De waterspiegel gaat door P (en is dus evenwijdig met vlak TAB).
Teken de waterspiegel op het werkblad.
Wat is de vorm van de waterspiegel?



62 Hoe ziet het zaagvlak eruit?

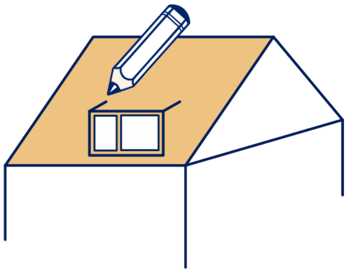
a Als een bal wordt doorgezaagd.

b Als een ronde paal wordt doorgezaagd.

c Als een blok wordt doorgezaagd.

In de voorgaande drie opgaven hebben we **doorsneden** van ruimtelijke lichamen met een vlak bekeken.

63 De zijwanden van de dakkapel hiernaast zijn evenwijdig met de zijgevels van het huis. De tekening is nog niet af.



a Maak de tekening af op het werkblad.

De voorkant van de dakkapel is 2 meter hoog en 3 meter breed. Het dak van de dakkapel heeft een helling van 30°. Het dak van het huis zelf helt onder een hoek van 45°.

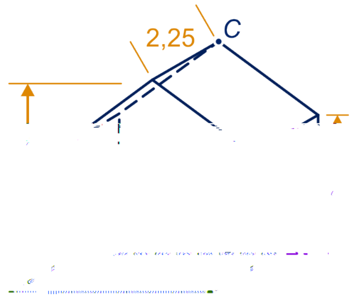
b Bereken de oppervlakte van het dak van de dakkapel in dm^2 nauwkeurig.

c Bereken de inhoud van de dakkapel in dm^3 nauwkeurig.

2.5 Doorsneden

64

Er wordt een dakkapel op een huis gezet. Zo'n dakkapel heeft de vorm van een "huisje", waar je een stuk van af moet halen. Zie de tekening hiernaast: het stuk achter het vlak door A, B en C moet weg.



a Teken op het werkblad de doorsnede van "het huisje" met het vlak door A, B en C.

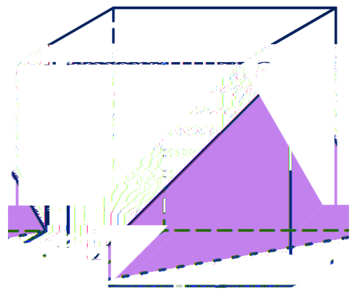
Hint 6.

De nok van het huisje ligt 3 m boven de bodem en de onderste dakrand 2 m. De nok is $2{,}25$ m lang. Het huisje is 3 meter breed.

b Teken de doorsnede op schaal $1 : 100$.

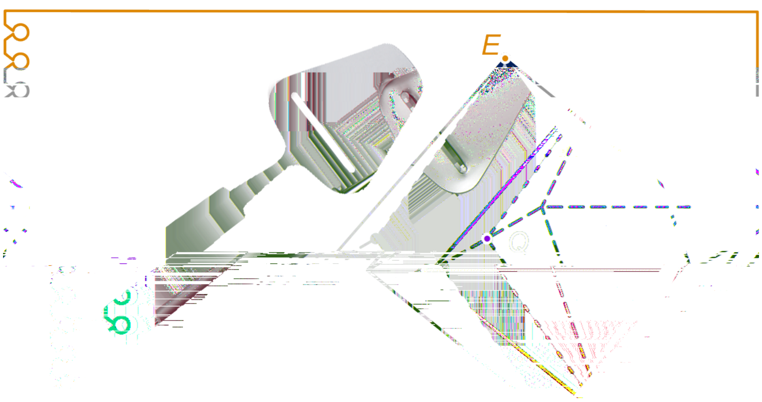
65

Verdeel kubus $ABCD.EFGH$ in zes even dikke plakjes waarbij de doorsneden evenwijdig lopen aan vlak ACF.
Op sommige ribben zijn al verdeelpunten aangegeven.



66

$ABCDEF$ is een regelmatig achtvlak (octaëder). P is het midden van ribbe BC en Q het midden van ribbe AD.



Verdeel het achtvlak in vier plakjes van gelijke dikte waarbij de doorsneden evenwijdig lopen aan vlak $FPEQ$.

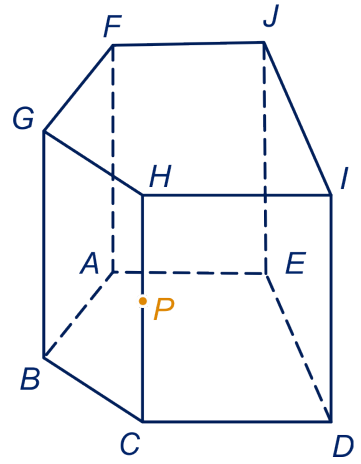
67

Hetzelfde achtvlak als in de vorige opgave moet in vier plakjes van gelijke dikte verdeeld worden, waarbij doorsneden evenwijdig aan vlak ABF zijn.

Bij het tekenen van de doorsnede van een lichaam met een vlak V is het vaak handig om eerst de **grondlijn** te tekenen, dat is de snijlijn van V met het vlak waar het lichaam op staat.
In de volgende opgave zie je hoe dat gaat.

68

$ABCDE.FGHIJ$ is een vijfzijdig prisma (de opstaande ribben zijn evenwijdig). P is een punt op ribbe CH. We gaan de doorsnede van het prisma met vlak GJP tekenen, dat wil zeggen: we tekenen het snijlijnstuk van vlak GJP met elk grensvlak van het prisma.



a Teken het snijlijnstuk met grensvlak $BCHG$.

b Teken de snijpunten van de lijnen GP en JP met het grondvlak.
Teken nu de grondlijn.

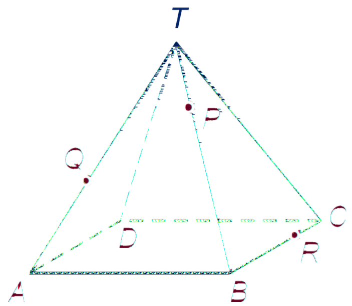
c Teken het snijpunt van de grondlijn met vlak $DEJI$.

Nu heb je twee punten van vlak GJP in vlak $DEJI$.
Dus kun je het snijlijnstuk van vlak GJP met het grensvlak $DEJI$ tekenen.

d Maak de doorsnede verder af.

69

$T.ABCD$ is een piramide met een rechthoekig grondvlak. P ligt op ribbe BT, Q op ribbe AT en R op ribbe BC.



a Teken de grondlijn van het vlak PQR.

b Teken de doorsnede van vlak PQR met de piramide.

Het snijpunt van vlak PQR met ribbe AD noemen we S.

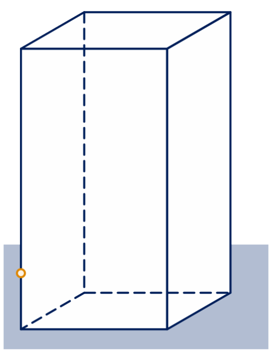
c Hoe weet je dat de lijnen PR en QR elkaar snijden?

Het snijpunt van PR en QS noemen we L.

d Waarom weet je zeker dat lijn LT evenwijdig is aan het grondvlak?

70

Een rechte balk met vierkant grondvlak wordt in twee stukken gezaagd. Het (rechte) zaagvlak snijdt de vier opstaande ribben op de hoogten 1 (links voor), 2, 3 en 4.



a Welke ribbe wordt dan op hoogte 4 gesneden?

De twee stukken hebben dezelfde inhoud.

b Hoe hoog is de balk dus?

De twee stukken zijn congruent: ze hebben dezelfde vorm en zijn even groot.

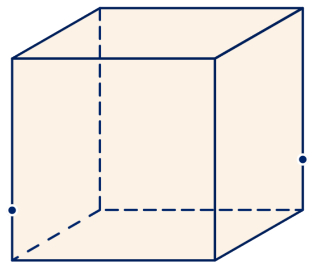
c Kun je het ene stuk zo draaien dat het precies op de plaats van het andere stuk past?

2.5 Doorsneden

71

Een kubus met ribbe 12 is gedeeltelijk gevuld met water. Hij wordt zo gehouden dat de waterspiegel door P, Q en een hoekpunt van de kubus gaat. P en Q liggen op ribben op hoogte 4. De waterspiegel is vijfhoekig.

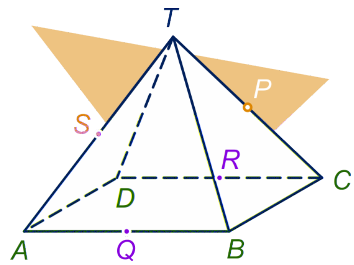
- **a** Teken de waterspiegel in de ruimtelijke figuur op het werkblad, en ook op ware grootte (één van de twee mogelijkheden).
- **b** Hoeveel water zit er in de kubus?



72

$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide. P, Q, R, en S zijn middens van ribben.

- **a** Teken de doorsnede van vlak PQR met de piramide.
- **b** Teken de doorsnede van vlak PQS met de piramide
- **c** Bereken de verhouding van de stukken waarin ribbe TD door vlak PQS verdeeld wordt.

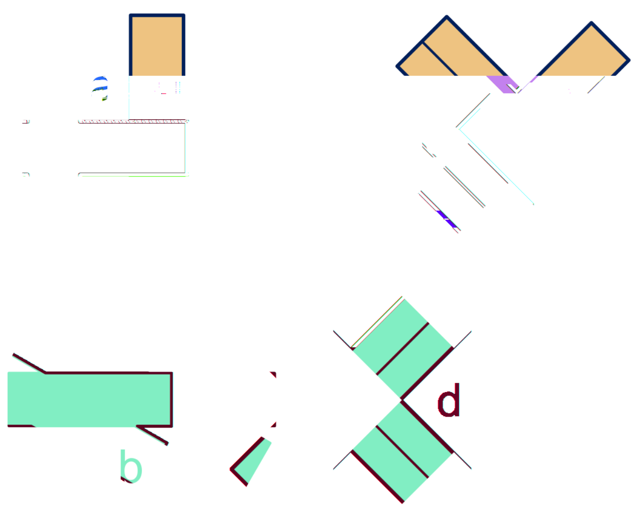


73

Op het werkblad zijn drie kubussen getekend. Op elk van de kubussen zijn drie punten op ribben aangegeven.
Teken telkens de doorsnede van het vlak dat door deze drie punten gaat met de kubus.

74

Twee vierkante balken van 3 bij 3 bij 15 liggen op tafel. De balken liggen door elkaar heen. We bekijken vier manieren waarop dat kan. Hieronder staan de bovenaanzichten.

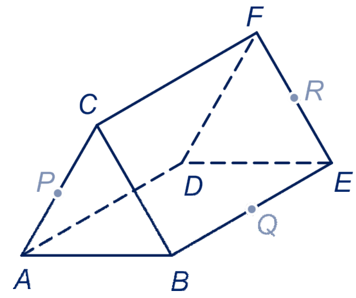


In figuur a snijden ze elkaar loodrecht.
In figuur b snijden elkaar onder een hoek van $60°$.
In figuur c is één balk is $\frac{1}{8}$-slag om zijn lengte-as gedraaid.
In figuur d zijn beide balken zijn $\frac{1}{8}$-slag gedraaid om hun

lengte-as.
In deze stand is de situatie op het werkblad getekend.
Hoe ziet de doorsnede van de balken eruit in elk van deze gevallen? De doorsnede is het gemeenschappelijk stuk, dus het stuk dat in beide balken zit.

75

$ABC.DEF$ is een regelmatig driezijdig prisma. $AB = 6$ en $EB = 12$. P, Q en R zijn middens van ribben. Vlak $AB = 6$ Vlak PQR snijdt DF in S en lijn AD in T.

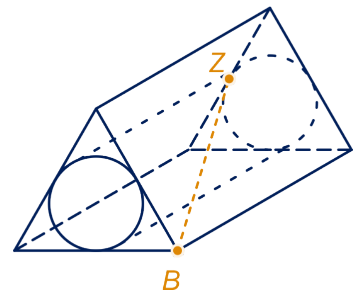


- **a** Teken S op het werkblad.
- **b** Teken op het werkblad de doorsnede van vlak PQR met het prisma.
- **c** Bereken de lengte van FS en van AT.
- **d** Bereken de straal van de cilinder met zo groot mogelijke inhoud, die liggend (met de as evenwijdig aan vlak $ABED$) in het prisma past.
- **e** Bereken de straal van de cilinder met zo groot mogelijke inhoud, die staand (met de as loodrecht op vlak $ABED$) in het prisma past.

Hint 7.

76

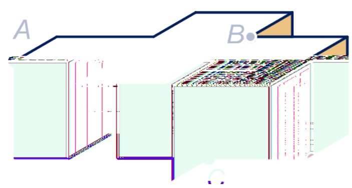
We bekijken hetzelfde prisma als in de vorige opgave. Hierin ligt dezelfde cilinder als in onderdeel c. Z is het midden van ribbe FD. Lijnstuk BZ heeft behalve punt Z nog een punt met de cilindermantel gemeenschappelijk.



- **a** Teken dat punt op het werkblad.
- **b** Bereken exact welk deel van het lijnstuk BZ binnen de cilinder ligt.

77

Vijf kubussen zijn zo gegroepeerd dat ze een kruis vormen. A, B en C zijn hoekpunten.
Teken de doorsnede van het kruis met vlak ABC.

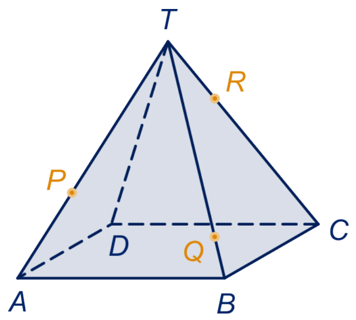


78

$T.ABCD$ is een vierzijdige piramide. P ligt op ribbe TA, Q op ribbe TB en R op ribbe TC. Het tekenen van de doorsnede van vlak PQR met de piramide komt neer op het zoeken van het snijpunt van vlak PQR met ribbe TD. Dit snijpunt noemen we X. We zoeken dus het punt X op ribbe TD zó, dat lijn XQ lijn PR snijdt.

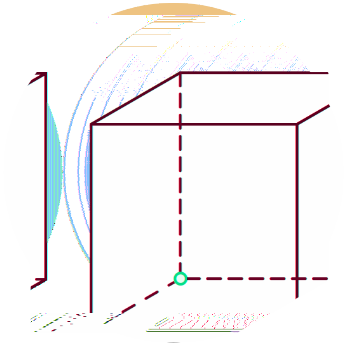
a Bepaal X zonder iets buiten de piramide te tekenen.

b Bepaal X met behulp van de grondlijn van vlak PQR.



79

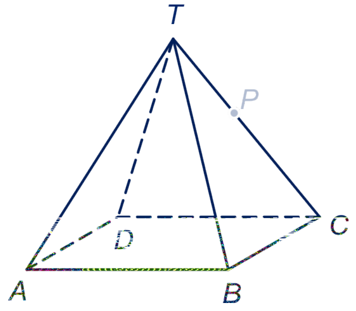
Een kubus heeft ribbe 1.
Schets de doorsnede van de bol met straal $\sqrt{2}$ en met middelpunt het hoekpunt links-achter-onder met de voorkant, de bovenkant en de rechter zijkant van de kubus.



80

$T.ABCD$ is een regelmatige piramide, P is een punt op ribbe TC.
Teken de doorsnede van het vlak door P en B, evenwijdig aan ribbe TA met de piramide.

Hint 8.



81

Hieronder zie je de tekening van een vakantiehuis. De vier gevels hebben de vorm van een gelijkbenige driehoek. Het huis is 3 meter hoog, 6 meter lang en 6 meter breed.

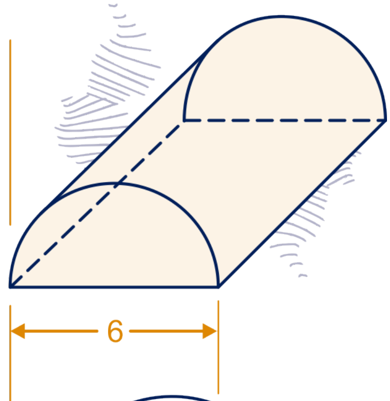
a Bereken de inhoud van het huis.

b Teken de doorsnede van het huis op 2 meter hoogte op ware grootte.
Bereken de oppervlakte van de doorsnede.

c Druk de oppervlakte van de doorsnede op hoogte h in h uit.

Een tongewelf (dat is een halve cilinder) is 6 meter breed en 10 meter lang.

d Hoe breed is het tongewelf op 2 meter hoogte? En op h meter hoogte?

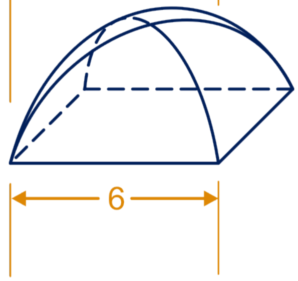


Als twee tongewelven elkaar loodrecht snijden krijgen we een kruisgewelf. We bekijken een kruisgewelf met een vierkant grondvlak van 6 bij 6 meter.

e Welke vorm hebben de horizontale doorsneden van het kruisgewelf?

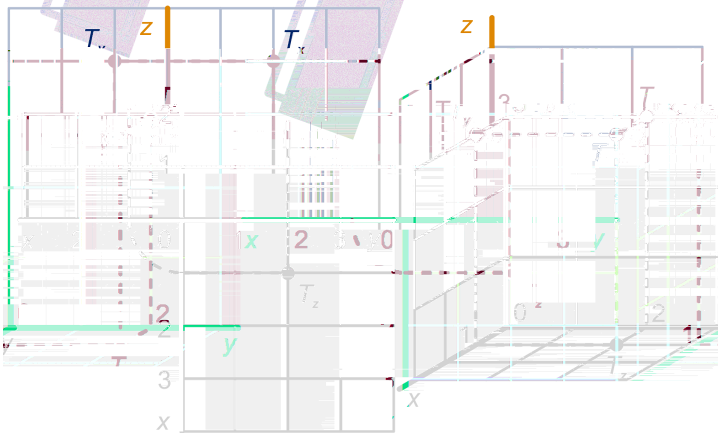
f Hoe groot is de oppervlakte van de horizontale doorsnede op h meter hoogte?

g Wat is de inhoud van het kruisgewelf?



Een drieluik

Om ruimtelijke vormen te bestuderen teken je ze wel eens in een **drieluik**. Het drieluik kan gevouwen worden tot een model van het positieve octant.
Als $T = (1{,}2{,}3)$, dan
$T_x = (0{,}2{,}3)$, $T_y = (1{,}0{,}3)$ en $T_z = (1{,}2{,}0)$.



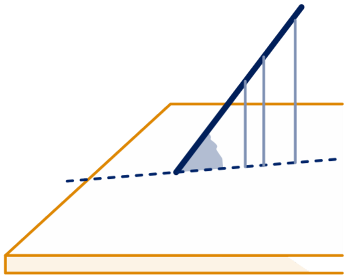
Een vlak wordt vastgelegd door drie punten die niet op één lijn liggen.
Het vlak vastgelegd door drie punten P, Q en R noemen we vlak PQR.
Als twee punten A en B in een vlak liggen, liggen alle punten van lijn AB in dat vlak.

Onderlinge ligging

- **van twee lijnen**
  ze snijden elkaar;
  ze zijn evenwijdig;
  ze kruisen elkaar.
  In de eerste twee gevallen liggen de lijnen in één vlak.
- **van een lijn en vlak**
  de lijn ligt in het vlak;
  de lijn is evenwijdig met het vlak;
  de lijn snijdt het vlak (in één punt).

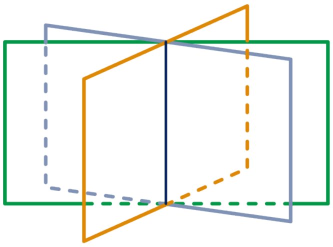
In het laatste geval kun je spreken over de **hellingshoek** van de lijn ten opzichte van het vlak. Dat is de hoek tussen de lijn en zijn loodrechte projectie op het vlak.

- **van twee vlakken**
  de vlakken zijn evenwijdig;
  de vlakken snijden elkaar (volgens een lijn, de **snijlijn** van de twee vlakken.)

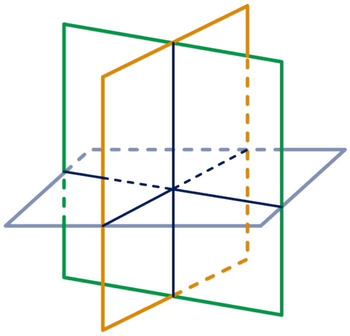


de hellingshoek van een lijn

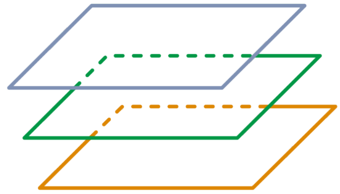
- **van drie vlakken**
  In de figuur hieronder zie je hoe drie vlakken ten opzichte van elkaar kunnen liggen.



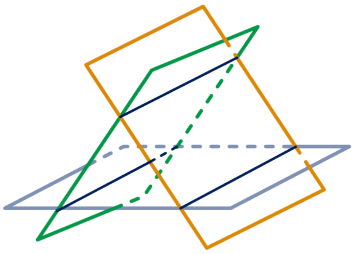
met één snijlijn



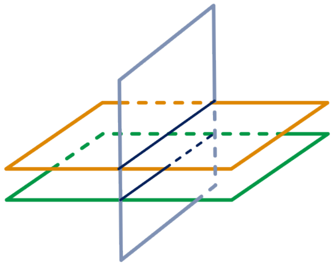
met drie snijlijnen door één punt



zonder snijlijnen (evenwijdig)

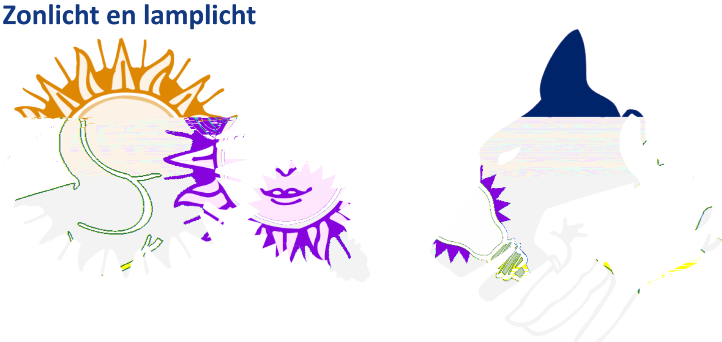


met drie evenwijdige snijlijnen



met twee evenwijdige snijlijnen

Zonlicht en lamplicht



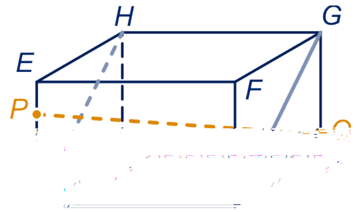
Het schaduwbeeld van een voorwerp bij zonlicht is een **parallelprojectie** van het voorwerp.
Het schaduwbeeld bij lamplicht is een **centrale projectie** van het voorwerp.
Twee evenwijdige lijnen blijven bij parallelprojectie evenwijdig (of het worden beide punten). Bij centrale projectie hoeft dat niet.
Bij parallelprojectie behouden lijnstukken die evenwijdig zijn aan het vlak waarop geprojecteerd wordt hun lengte. Bij de

centrale projectie is dat niet het geval.
In de ruimtemeetkunde geven we om deze reden dan ook de voorkeur aan de parallelprojectie.

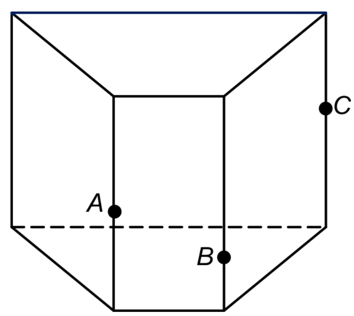
Een tekening **op ware grootte** is een tekening op schaal. Alle hoeken worden dus op werkelijke grootte afgebeeld, en de verhouding van alle lengten is correct. Dit in tegenstelling tot tekeningen volgens parallel- of centrale projectie. Daarbij kunnen allerlei vervormingen optreden.

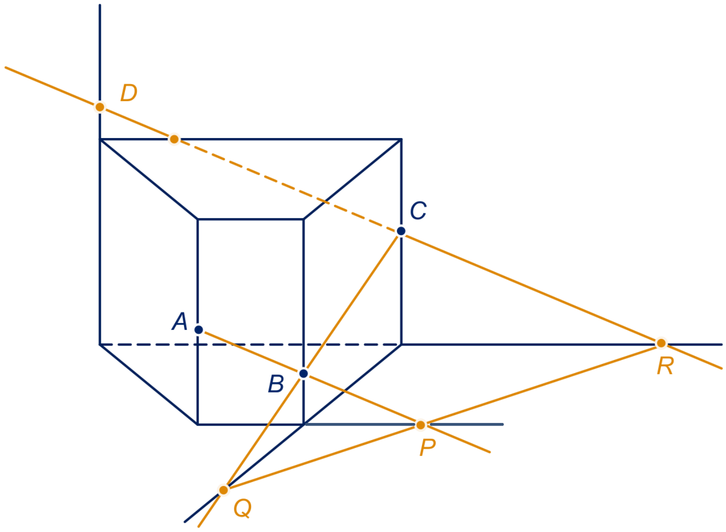
Bij het tekenen van een doorsnede
Het snijpunt van een lijn l en een vlak V vind je vaak zo:
breng een hulpvlak aan door l waarvan je de snijlijn met V kent.

Voorbeeld
Hiernaast is blok $ABCD.EFGH$ getekend, met de punten P en Q op opstaande ribben.
Gevraagd wordt het snijpunt van lijn PQ met vlak $ABGH$.
We nemen als hulpvlak $ACGE$.
Teken de snijlijn van $ABGH$ met dit hulpvlak, dit is lijn AG.
Lijn PQ snijdt deze snijlijn in het gezochte punt.
Het gezochte punt is dus het snijpunt van de lijnen AG en PQ.



Voorbeeld
Hiernaast is een vierzijdige prisma getekend met de punten A, B en C op opstaande ribben. Voorvlak en achtervlak van het vierzijdige prisma zijn evenwijdig.
Gevraagd wordt de doorsnede van vlak ABC met het prisma.
Het snijpunt D met het verlengde van de opstaande ribbe links-achter van het prisma kun je op twee manieren vinden:
- met behulp van een lijn door C, evenwijdig aan AB.
- met behulp van de **grondlijn**, dat is de snijlijn van vlak ABC met het (uitgebreide) grondvlak van het prisma.
De tweede manier zie je op de volgende bladzijde.





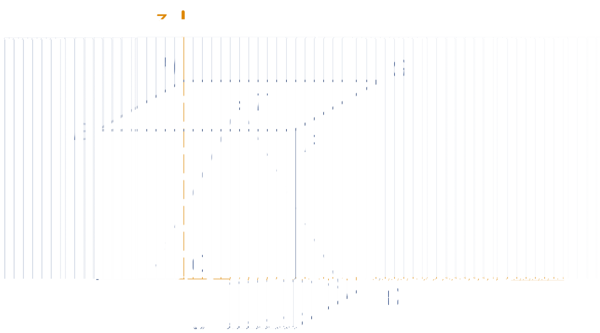
Het snijpunt van lijn AB met het grondvlak is P;
het snijpunt van lijn BC met het grondvlak is Q;
dus de grondlijn is lijn PQ;
de grondlijn snijdt de achterkant van het prisma in R;
D is het snijpunt van het verlengde van de ribbe met lijn RC.

1 $ABCO.T$ is een regelmatige piramide met hoogte 8 en een grondvlak met zijde 8. Een mier kruipt over zijvlakken van de piramide omhoog. Zijn route is $A-P-Q-R-T$. Hierbij heeft P op TB hoogte 2, Q op TC hoogte 4 en R op TD op hoogte 6.

a Kleur de aanzichten van de route in een drieluik.

b Bereken de hellingshoek van elk van de rechte stukken van het traject.

2 $ABCO.EFGH$ is een kubus met $A\,(10{,}0{,}0)$, $C\,(0{,}10{,}0)$ en $H\,(0{,}0{,}10)$. In de kubus zit een kegel: zijn top T is het midden van het bovenvlak van de kubus en zijn grondcirkel raakt de zijden van vierkant $ABCO$.



a Teken de kubus met kegel in een drieluik.

b Bereken de inhoud van de kegel exact.

Op de grondcirkel liggen twee punten P en Q met x-coördinaat 8.

c Teken de drie projecties van P en van Q. Zet er de juiste letters bij (met de goede index).
Wat zijn de coördinaten van P en Q?

d Kleur de projecties van driehoek PQT.

e Bereken de oppervlakte van driehoek PQT exact.

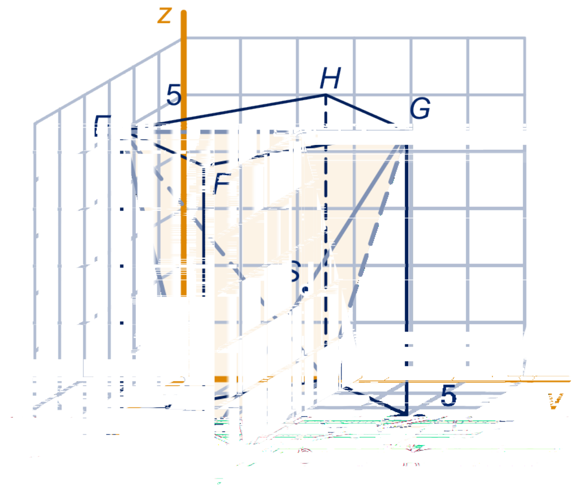
Driehoek PQT verdeelt de kegel in tweeën.

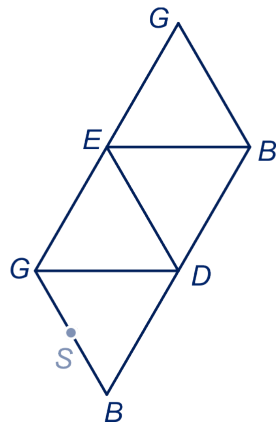
f Bereken de inhoud van het kleinste stuk in twee decimalen.

2.7 Extra opgaven

3

$ABCD.EFGH$ is een kubus, met daarin viervlak $BDEG$. Het viervlak heeft ribbe 5. Een mier maakt een rondwandeling over grensvlakken van het viervlak en blijft steeds op dezelfde (z-)hoogte. Het startpunt van de wandeling is aangegeven met S (halverwege ribbe BG).





- **a** Teken het viervlak met de rondweg in een drieluik.
- **b** Bereken de lengte van de weg.
- **c** Neem nog een ander startpunt op ribbe BG, teken de bijbehorende rondweg en bepaal zijn lengte.
- **d** Toon aan dat de lengte van de rondweg niet van van het startpunt op BG afhangt door de rondweg in de uitslag van het viervlak op het werkblad te tekenen.

4

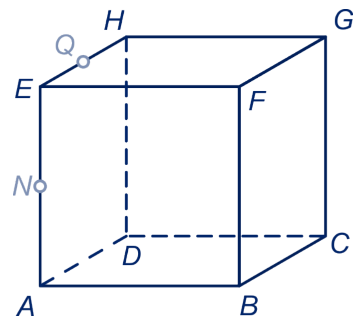
$ABCD.EFGH$ is een kubus met ribbe 6, l is de snijlijn van de vlakken DEG en AFH.

- **a** Beschrijf l.
- **b** Bereken exact op welke hoogte l door vlak $BCGF$ gaat.

5

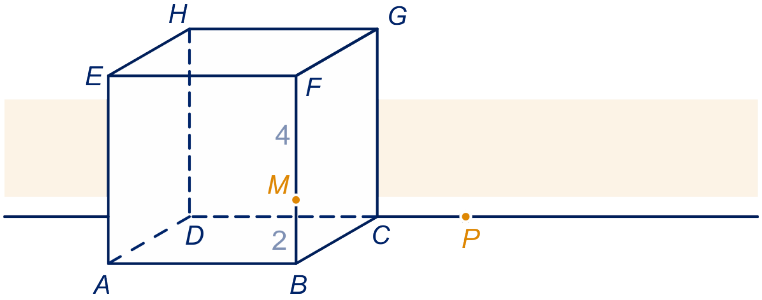
$ABCD.EFGH$ is een kubus met ribbe 4. P en Q zijn de middens van de ribben AE en EH.

- **a** Teken op het werkblad de doorsnede van vlak PQG met de kubus.
- **b** Teken de doorsnede van vlak PQG met de kubus ook op ware grootte en bereken de oppervlakte daarvan.
- **c** Teken op het werkblad de doorsnede van vlak PQC met de kubus.



6

$ABCD.EFGH$ is een kubus met ribbe 6. P ligt op het verlengde bij C van ribbe CD. S is het snijpunt van lijn EP met het rechter zijvlak van de kubus.



a Teken op het werkblad het snijpunt van lijn EP met het rechter zijvlak van de kubus in de getekende situatie.

P loopt over het verlengde bij C van ribbe CD.

b Wat kun je zeggen over de ligging van S?

c Bereken CP als S op hoogte 4 ligt.

M ligt op ribbe BF op hoogte 2.

d Teken P op het werkblad als lijn EP en lijn HM elkaar snijden.

e Bereken in dit geval CP.

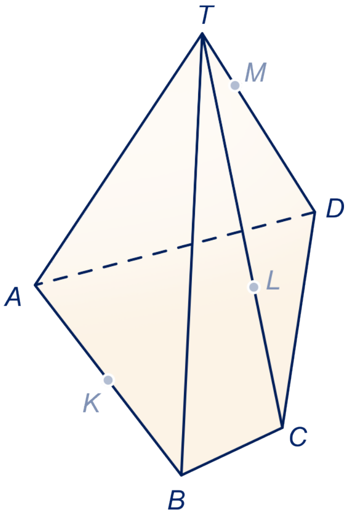
7

$T.ABCD$ is een piramide. K ligt op AB, L op CT en M op DT.

a Kleur de doorsnede van vlak KLM met de piramide.

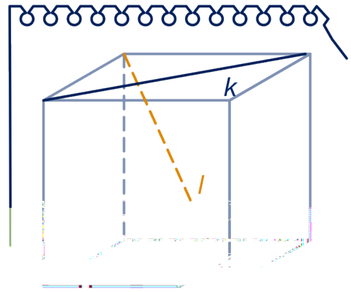
k is de lijn die door M gaat en evenwijdig is aan BC.

b Kleur het deel van k dat binnen de piramide ligt.



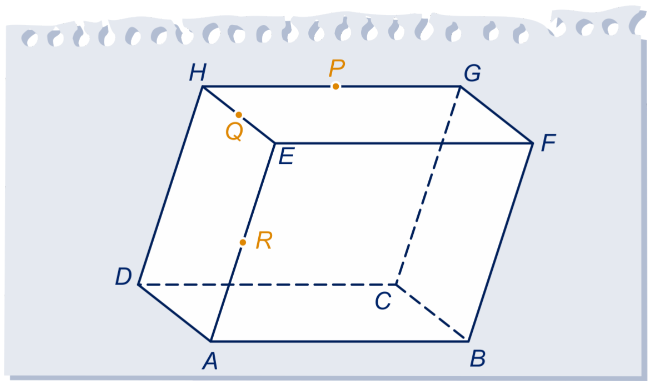
8

In de kubus hiernaast is k een zijvlaksdiagonaal en is l een lichaamsdiagonaal. P is het midden van een ribbe.
Teken de doorsnede met de kubus van het vlak dat door P gaat en evenwijdig is aan k en l.



9

$ABCD.EFGH$ is een parallellepipedum. $ABCD$, $ABFE$, $EFGH$ en $DCGH$ zijn vierkanten met zijde 2.
$\angle FBC = \angle EAD = 60^\circ$. P, Q en R zijn middens van ribben.
We bekijken de doorsnede van het parallellepipedum met vlak PQR.



a Teken de doorsnede van het parallellepipedum met vlak PQR.

b Bereken de lengte van de zijden van de doorsnede.

c Teken de doorsnede op ware grootte.

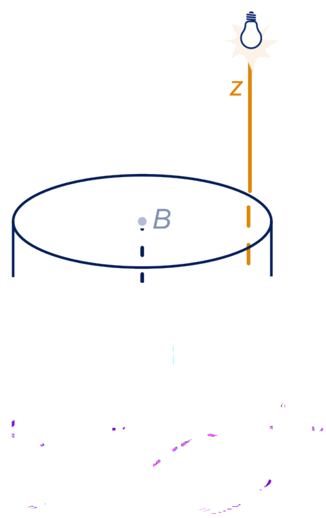
d Bereken de oppervlaktevan de doorsnede exact.

10

Hiernaast zijn getekend de punten $A\,(3{,}0{,}0)$, $B\,(3{,}0{,}4)$, $M\,(3{,}0{,}2)$, $L\,(0{,}0{,}6)$ en $P(7{,}0{,}0)$ en de cilinder met lijnstuk AB als as en straal 2. De lijn door P en M snijdt de cilinder in twee punten.

a Bepaal die twee punten op het werkblad.

b Bereken van elk van die punten de hoogte.



De cilinder wordt vanuit L met lamplicht beschenen. Dit geeft een schaduw op het Oxy-vlak.

c Beschrijf de schaduw van de "deksel" van de cilinder (dit is de cirkel met middelpunt B) in het Oxy-vlak.
Geef een toelichting.

d Teken op ware grootte de schaduw van de cilinder op het Oxy-vlak.

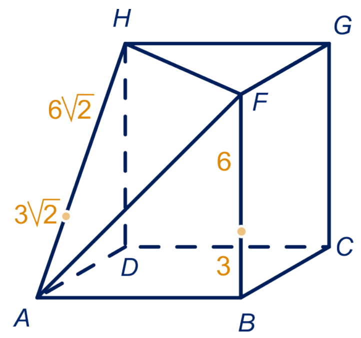
11

Van kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 9 is de punt $AEFH$ afgesneden. Je houdt het lichaam $ABCD.FGH$ over.
P ligt op ribbe AH en Q op ribbe BF beide op hoogte 3.

a Teken de doorsnede van het vlak PQG met het lichaam $ABCD.FGH$.

b Bereken de hoogte waarop vlak PQG ribbe DH snijdt.

Hint 9.



12

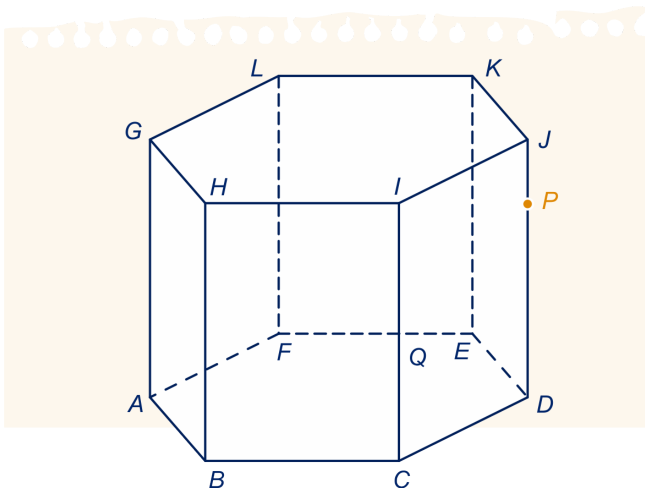
P ligt op BT en Q op ribbe CT van de regelmatige piramide $T.ABCD$.

a Teken de doorsnede van de piramide met vlak PQD.

b Teken de doorsnede van de piramide met vlak PQA. Gebruik nu eens niet de grondlijn maar de lijn door T evenwijdig aan AD.

13

$ABCDEF.GHIJKL$ is een prisma met hoogte 8. De opstaande zijvlakken zijn rechthoeken en het onder- en bovenvlak zijn regelmatige zeshoeken, met zijde 6. Op ribbe DJ ligt een punt P zó, dat $DP = 6$.



a Teken de doorsnede van vlak BPF met het prisma en geef in de tekening duidelijk aan hoe je dat gedaan .

Het snijpunt van vlak BPF met ribbe CI noemen we Q.

b Toon aan dat $CQ = 4$ en bereken de oppervlakte van de in onderdeel a getekende doorsnede.

14 In een kubus kun je op twee manieren een regelmatig viervlak plaatsen waarvan de hoekpunten samenvallen met hoekpunten van de kubus.

a Teken die viervlakken in de kubus en kleur hun doorsnede. Wat voor een bijzondere figuur is die doorsnede?

b Bereken exact inhoud van de doorsnede als de kubus ribbe 6 heeft.

15 Een Sunkist limonadepakje heeft de vorm van een regelmatig viervlak. Het zit precies half vol limonade. Je kunt het pakje zó houden dat de limonadespiegel één van de ribben als rand heeft.

a Teken de limonadespiegel op ware grootte.

Je kunt het pakje zó houden dat twee hoekpunten dezelfde hoogte hebben en de twee andere ook.

b Hoe ziet de doorsnede er dan uit? Licht je antwoord toe.

In opgave 8 heb je gezien dat de inhoud van een viervlak met ribbe 6 gelijk is aan $18\sqrt{2}$.

c Bereken de ribbe van het pakje in cm nauwkeurig als er 20 cl limonade in kan.

2.7 Extra opgaven

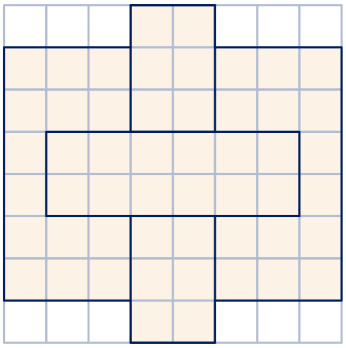
Projecties in richting van de assen

1

a Zie figuur.

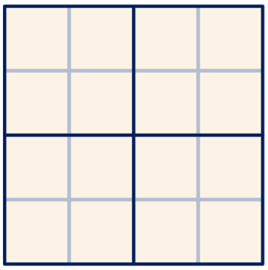
b $3 \cdot (6 \cdot 2 \cdot 8) - 8 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 224$

c Inhoud "O" is $2 \cdot 6 \cdot 8 - 5 \cdot 2 \cdot 2 = 76$;
inhoud "C" is $76 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 68$.
De drie letters hebben samen een inhoud van $76 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 68$, dus de loze ruimte heeft een inhoud van $224 - 204 = 20$.

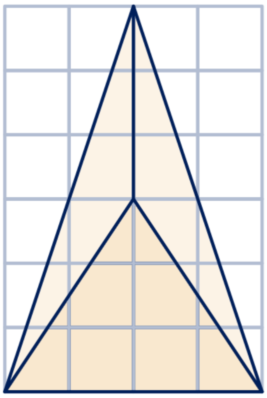


2

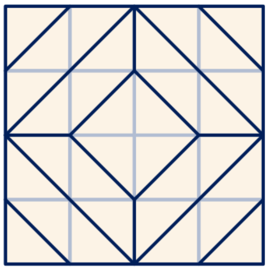
a Zie figuur.



bovenaanzicht



vooraanzicht



doorsnedes vraag b

Het 'grote' vierkant (bovenaanzicht) is 2 bij 2 cm.

b Een dakvlak is een ruit. De diagonalen van de ruit zijn $4\sqrt{2}$ en $\sqrt{4^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{176}$, dus de oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{176} = 8\sqrt{22}$ m^2

d Het deel 'boven' halve hoogte is een piramide . Die kan in vieren verdeeld worden. Die vier stukken kunnen gebruikt worden om het deel 'onder' halve hoogte aan te vullen tot een blok met hoogte 6 en en vierkant grondvlak van 8 bij 8, dus de inhoud is $6 \cdot 8 \cdot 8 = 384$ m^3.

3

a 8

b Zie einde hoofdstuk.

c Rechts-achterboven; links-voor-onder

d Het stuk rechts-voor-boven

e De ruimte wordt door de drievlakken in acht stukken verdeeld.

4

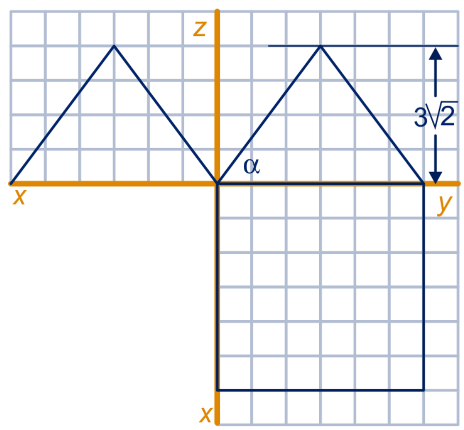
a Zie einde hoofdstuk.

b $A\,(5,2,1)$, $B\,(5,6,1)$, $C\,(1,6,1)$, $D\,(1,2,1)$, $T\,(1,4,7)$

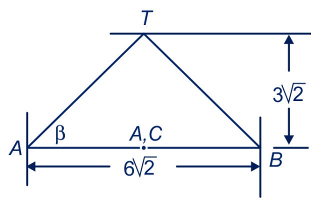
c Zie einde hoofdstuk.
d Zie einde hoofdstuk.

5
a $\sqrt{50} = 7{,}07\ldots$
b Zie einde hoofdstuk.
c De driehoeken OS_xD_x en $G_xS_xE_x$ zijn gelijkvormig (twee gelijke hoeken).
De vergrotingsfactor van klein naar groot is $\frac{G_xE_x}{OD_x} = 2$, dus S_x ligt op hoogte $\frac{1}{3} \cdot 5 = 1\frac{2}{3}$.
d Met dezelfde gelijkvormigheid zie je in de x-projectie dat de y-coördinaat van S gelijk is aan $7 = 2\frac{1}{3}$.
Alle punten van lijn AG hebben eerste coördinaat $3\frac{1}{2}$, dus $S = \left(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}\right)$.
e Zie einde hoofdstuk.

6
a Noem de projectie van T op het grondvlak S. De stelling van Pythagoras in driehoek OTS geeft: $TS = \sqrt{6^2 - 3^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$.
b Zie figuur.



figuur bij opgave 6b



figuur bij opgave 6c

d Die hoek is α in het drieluik. Er geldt: $\tan(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, dus $\alpha \approx 55^\circ$.
e Die hoek is β in de figuur bij onderdeel c. Die hoek is exact 45°.

7
a $\sin^{-1}\left(\frac{25}{150}\right) \approx 9{,}6^\circ$
b De lengte van haar weg is $\sqrt{150^2 + 100^2}$. De hellingshoek is dus:
$\sin^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{150^2 + 100^2}}\right) \approx 7{,}9^\circ$.
c De lengte van Stefan's weg is $\frac{25}{\sin(3{,}5^\circ)} = 409{,}5\ldots$. Hij maakt zo weinig mogelijk bochten als hij aan de randen van de baan keert. Stel hij doet dat k keer, dan $\sqrt{(k \cdot 100)^2 + 150^2} = 409{,}5\ldots$, dus $k \approx 3{,}8$. Hij maakt dus minstens 3 bochten.

8
a Zie einde hoofdstuk.

b Zie einde hoofdstuk.

c De kubus heeft ribbelengte $3\sqrt{2}$. De inhoud van bijvoorbeeld viervlak $BCDG = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$.

De inhoud van viervlak $BDEG$ is dus $\left(3\sqrt{2}\right)^3 - 4 \cdot 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$.

d De oppervlakte van het grondvlak van het viervlak is $3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$; noem de hoogte van het viervlak h, dan $\frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot h = 18\sqrt{2}$, dus $h = 2\sqrt{6}$.

e Noem die hoek α, dan $\sin(\alpha) = \dfrac{h}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, dus $\alpha \approx 55°$.

9

a CD

b Zie einde hoofdstuk.

D_x vind je door $C_xD_x = 6$ te nemen.

c Zie einde hoofdstuk.

Teken een 'hulplijnstuk', bijvoorbeeld lijnstuk DE, waarbij E het snijpunt van ribbe BC met lijn DG is.

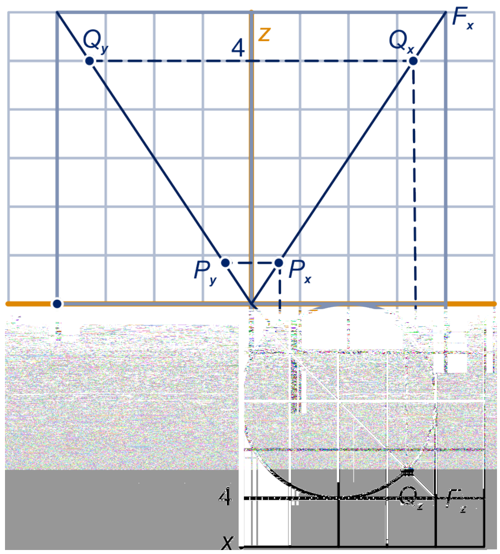
10

a Zie figuur.

b Zie figuur.

c Dat is $\dfrac{P_zQ_z}{O_zF_z} \cdot 100 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 100 \approx 70{,}7$.

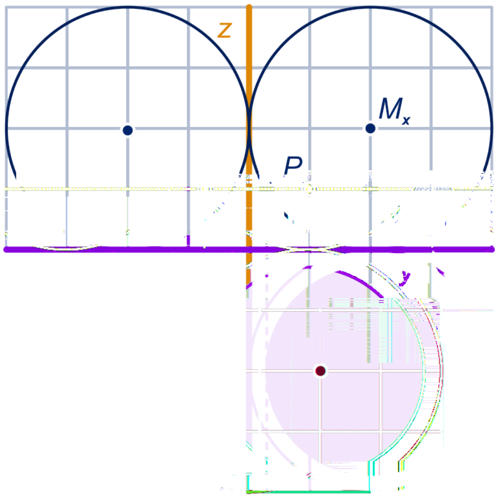
d De lengte van de korte as is de diameter van de cirkel, dus 4; de lengte van de lange as is de afstand van G tot het midden van BF dus $\sqrt{4^2 + 3^3} = 5$.



11

a Zie de figuur hiernaast.

b De projectie van het middelpunt M op V noemen we N. P is een punt op de snijcirkel met minimale y-coördinaat. De straal van de snijcirkel noemen we r. De stelling van Pythagoras in driehoek $P_x M_x N_x$ geeft: $r = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.



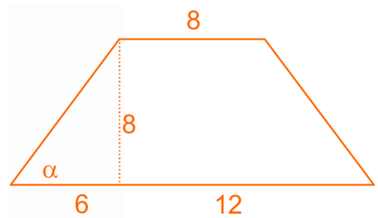
figuur bij opgave 11

12

a In de figuur zie je een dwarsdoorsnede van de lampenkap. De gevraagde hoek is α. Er geldt $\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$, dus $\alpha \approx 53°$.

b Zie einde hoofdstuk.

c De lampenkap is een afgeknotte piramide. Maak die af tot een hele piramide. De hoogte van de piramide die er bovenop komt (het topje) heeft hoogte h, dan $\frac{h}{8} = \frac{6}{8}$, dus $h = 5\frac{1}{3}$.
De inhoud van het topje is $\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{3} \cdot 8^2 = \frac{1024}{9}$.
De inhoud van de hele piramide is $\frac{1}{3} \cdot 13\frac{1}{3} \cdot 20^2 = \frac{16000}{9}$, dus de inhoud van de kap is $\frac{16000}{9} - \frac{1024}{9} = 1664$.



figuur bij opgave 12a

13

a Zie einde hoofdstuk.

b Zie einde hoofdstuk.
A, B en C zijn 'hoekpunten' van het huis. M is het midden van AB. Teken k door M evenwijdig aan BC.
D is het snijpunt van het verlengde van dakrand p met k. Teken n evenwijdig aan dakrand r.
Het snijpunt van n met de nok m van de aanbouw is het gevraagde punt.
Om de tekening af te maken teken je nog een dakrand rechts en lijnstuk SC.

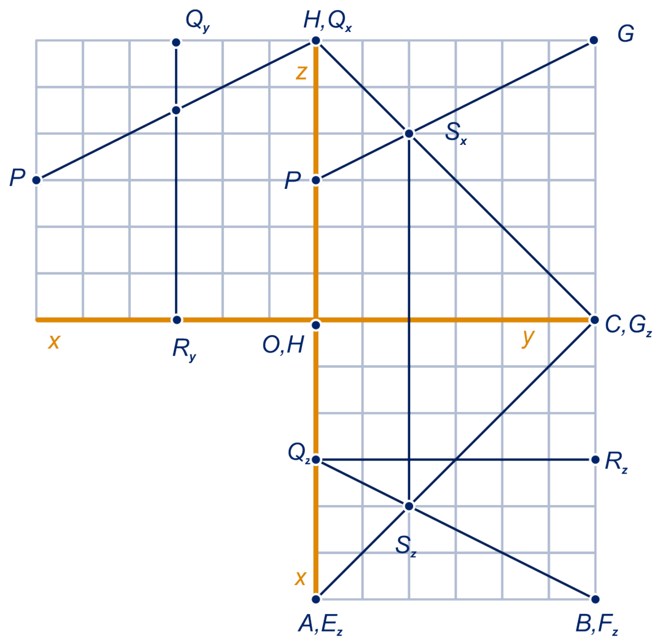
14

a Zie figuur aan het einde van de opgave.

b Het zogenaamde snijpunt heeft in de x-projectie y-coördinaat 2 en in de z-projectie y-coördinaat 3!

c De x-projectie van lijn XQ hangt niet van de positie van x op lijn BC af, want $B_x = C_x$. Dus $S_x = (0{,}2{,}4)$ en $S = (x{,}2{,}4)$, voor zekere x. Omdat S_z op $A_z C_z$

ligt, is $x = 4$, dus $S = (4,2,4)$.
Het snijpunt van Q_zS_z met B_zC_z is X_z, dus $X = B$.
Zie figuur.



15
- **a** Ja
- **b** Ja
- **c** Nee
- **d** Ja
- **e** Ja

Onderlinge ligging

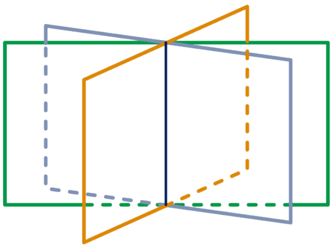
16
- **a** Ja
- **b** De eerste bewering is juist; de tweede is onjuist, U en W kunnen evenwijdig zijn, bijvoorbeeld U is het grondvlak van een kubus, V een zijvlak en W het bovenvlak; de derde is juist.

17
De eerste bewering is juist;
de tweede is onjuist: bijvoorbeeld in kubus $ABCD.EFGH$ zijn AB en AD snijdend, evenals AD en HD, maar AB en HD snijden elkaar niet;
de derde is onjuist: bijvoorbeeld in kubus $ABCD.EFGH$ zijn AB en AE snijdend en AE en CG zijn evenwijdig, maar AB en CG snijden elkaar niet.

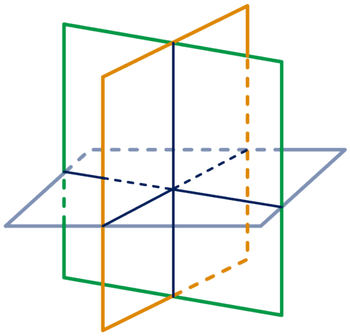
18
De eerste bewering is onjuist. Neem bijvoorbeeld in kubus $ABCD.EFGH$ voor U het vlak $ABCD$, voor V het vlak $ADHE$ en voor W het vlak $EFGH$.
De tweede bewering is juist.

19
- **a** Zie figuur 1 bij opgave 20.
- **b** Zie figuur 2 bij opgave 20.

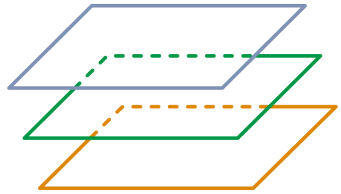
20 In figuur 1: één snijlijn, de ruimte is verdeeld in zes stukken;
in figuur 2: drie snijlijnen, de ruimte is verdeeld in acht stukken;
in figuur 3: geen snijlijnen, de ruimte is verdeeld in vier stukken;
in figuur 4: drie snijlijnen, de ruimte is verdeeld in zeven stukken;
in figuur 5: twee snijlijnen, de ruimte is verdeeld in zes stukken.
De snijlijnen hebben steeds dezelfde kleur.



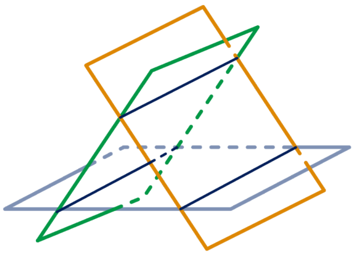
met één snijlijn



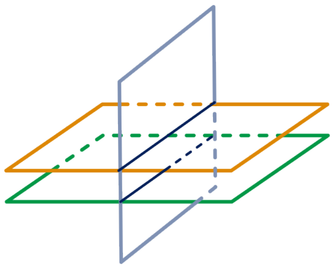
met drie snijlijnen door één punt



zonder snijlijnen (evenwijdig)



met drie evenwijdige snijlijnen



met twee evenwijdige snijlijnen

21 Ja, zie de mogelijkheden van de voorgaande opgave.

22 Ja

23 Bekijk de volgende drie vlakken: de muur, de vloer en de plaat; omdat de plaat rechthoekig is, zijn twee snijlijnen van deze drie vlakken evenwijdig, dus ook de derde (de plint). (Het is de eerste bewering van opgave 21.)

24
a Zie einde hoofdstuk.
S is het snijpunt van lijn AC met het tafelblad en T is het snijpunt van lijn AB met het tafelblad. De meit loopt over lijn ST.
b De mier loopt over de snijlijn van vlak ABC en het tafelblad, lijn BC snijdt die snijlijn.

25 Nee, want twee snijdende lijnen of twee evenwijdige lijnen liggen in één vlak. Dan zouden de lijnen AC en BD ook in één vlak liggen, maar twee kruisende lijnen liggen niet in één vlak.

26
a Snijden: 4, namelijk AC, AD, AH;
evenwijdig: 3, namelijk CD, GH en EF;

kruisen: 4, namelijk FG, EH CG, DH.

b CF, FH en CH

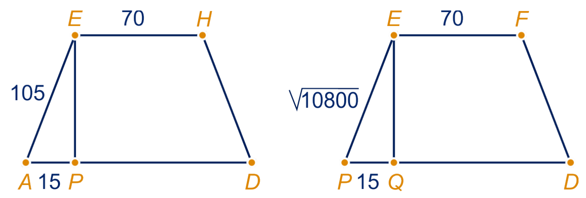
27 MN en BD zijn evenwijdig,
BM en DN zijn snijdend,
DM en BN zijn snijdend,
CM en DN zijn kruisend.

28
a Nee
b Ze snijden elkaar.
c Zie einde hoofdstu.
S is het snijpunt van de lijnen OD en BC. De snijlijn is lijn ST.
d Die wordt evenwijdig met de y-as.
e Ze snijden elkaar.
f Zie einde hoofdstuk.
het is de lijn k door T evenwijdig met de x-as.
g Het wordt de lijn door T en $(4,0,0)$.

29 Door drie punten gaat een vlak, een vierde punt hoeft niet in dit vlak te liggen.

30
a Nee, stel dat het wel zo is. Noem de top T.
De driehoeken TAB en TEF zijn dan gelijkvormig evenals de driehoeken TBC en TFG met dezelfde vergrotingsfactor. Die is in het eerste geval $\frac{70}{120}$ en in het tweede geval $\frac{40}{70}$. Maar deze zijn niet gelijk.
Of: dan moeten de rechthoeken $ABCD$ en $EFGH$ gelijkvormig zijn (want de een krijg je uit de ander door een vermenigvuldiging vanuit T), maar ze zijn het niet, want de verhouding van de zijden is niet hetzelfde.
b AB en BF snijden elkaar want ze liggen in één vlak en zijn niet evenwijdig;
BF en CG snijden elkaar want ze liggen in één vlak en zijn niet evenwijdig;
AE en CG kruisen elkaar, want als ze elkaar zouden snijden, zouden $ABCD$ en $EFGH$ evenwijdige diagonalen hebben en dat is niet zo want dan zou de verhouding van de zijden in de twee rechthoeken gelijk zijn.
c AC en EG zijn kruisend, want als ze in één vlak zouden liggen, dan zouden ze evenwijdig zijn;
AH en BG snijden elkaar, want de punten A, B, G en H liggen in één vlak, want AB en GH zijn evenwijdig.
d AG en BH snijden elkaar, want de punten A, B, G en H liggen in één vlak, want AB en GH zijn evenwijdig;
AG en CE kruisen elkaar, want anders liggen ze in één vlak en dan zijn EG en AC evenwijdig.
e In de figuur links is zijkant $ADHE$ van de kast getekend (niet op schaal!).

P is de projectie van E op ribbe AD. Dan volgt uit de stelling van Pythagoras dat $EP = \sqrt{10800}$.



In de figuur rechts is de doorsnede van de kast door E en F loodrecht op het grondvlak getekend (niet op schaal!). De projectie van E op het grondvlak noemen we Q. De stelling van Pythagoras geeft: de hoogte van de kast is $\sqrt{10800 - 15^2} \approx 102{,}8$ cm.

31

a Zie einde hoofdstuk.
M is het midden van het bovenvlak van de kubus. Dan is l de lijn door A en D.

b CD en l liggen beide in vlak $ACGE$ (en zijn niet evenwijdig).

c Noem het snijpunt S en het midden van het bovenvlak van de kubus M. Dan zijn de driehoeken EMS en CSA gelijkvormig met vergrotingsfactor $\frac{AC}{EM} = 2$, dus de hoogte van S boven het grondvlak van de kubus is $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

32

a Het midden van de kubus ligt op de lichaamsdiagonalen maar ook op lijn MN, dus lijn MN en lijn AG snijden elkaar, liggen dus in één vlak.

b Zie einde hoofdstuk.
Het snijpunt van ED en AM noemen we T en het snijpunt van FC en GN noemen we U. De snijlijn is lijn UT.

c s ligt met lijn CD in vlak $DEFC$

d Dan zijn de driehoeken ETA en DTM gelijkvormig, dus $TD = \frac{1}{3}ED$.
Op eenzelfde manier vind je $UC = \frac{2}{3}FC$, dus de driehoeken STD en SUC zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor 2, dus $SD = DC = 6$.

33

a Zie einde hoofdstuk. S is het snijpunt van de lijnen CF en BM.

b De driehoeken SFM en SCB zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor $\frac{BC}{MF} = 2$, dus $SC = 12$.

c Noem het snijpunt T, dan zijn de driehoeken TND en TSF gelijkvormig en $DT : TF = DN : SF = 2 : 3$.

34

a Ja

b Anders snijdt lijn PQ vlak U.

35

Ja

36

Als A, B en C aan dezelfde kant van U liggen wel, anders niet.

37

a Ja

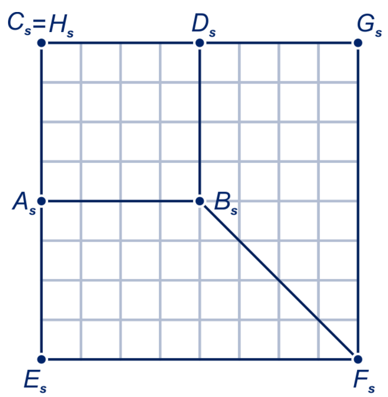
b Als k en l evenwijdig zijn, hoeft de bewering niet waar te zijn. Neem bijvoorbeeld in kubus $ABCD.EFGH$, k de lijn door de middens van de ribben EA, HD, l de lijn EH en U het grondvlak van de kubus.

38 $BE//CH$ dus $BE//$vlak AHC;
$BG//AH$, dus $BG//$vlak AHC;
BG en BE snijden elkaar, dus vlak $BEG//$ vlak AHC.

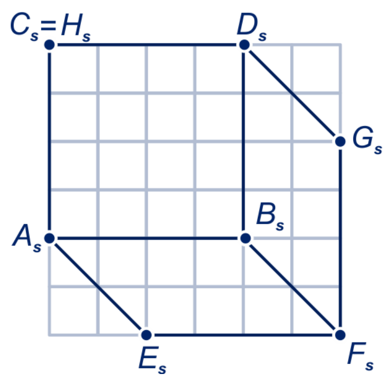
Zonlicht en lamplicht

39
a Ja
b Die liggen in één vlak.

40
a Zie figuur. De roosterlijnen hebben afstand $\frac{1}{2}$ cm, de schaduw van A is A_s, enzovoort.
b Zie figuur.



figuur bij opgave 40a



figuur bij opgave 40b

41
a De schaduw van E komt "oneindig ver" weg te líggen op lijn AD.
b De schaduw van lijnstuk EB wordt een halve lijn $//AD$ met beginpunt B.

42
a Die verschuift over de lijn door A evenwijdig aan BD naar "voren".
b Die Wordt de "helft" van Íijn BD, met beginpunt B aan de kant waar D niet lígt.

43
a Zie einde hoofdstuk.
b Trapezia
c Door D, want het beeld van zo'n verticale rechthoekszijde ligt op de snijlijn van het vlak van de tafel met het vlak door die verticale rechthoekszijde en H; punt D ligt op de snijlÍjn van die vlakken.

44
a Het origineel van KL is de snijlijn van vlak KLH met de voorkant van de kubus. Bekijk de drie vlakken KLH, het vlak van de tafel en het vlak waar de voorkant van de kubus in ligt; deze drie vlakken hebben drie evenwijdíge snijlijnen.
b Zie einde hoofdstuk.

c Neem een niet-horizontale lijn van het patroon op de voorkant van de kubus. Deze is origineel van een lijn in het grondvlak evenwijdig aan lijn AD. Het origineel ligt dus in een vlak door H evenwijdig aan AD. Het punt E ligt in dit vlak en ook op de voorkant.

45

a Zie einde hoofdstuk.
P' en Q' zijn de projecties van P en Q op het grondvlak. Dan is P_s het snijpunt van lijn HP met lijn DP' en Q_s het snijpunt van lijn HQ met lijn DQ'.

b Zie einde hoofdstuk.
De schaduw wordt begrens door de halve lijn met beginpunt A door P_s, de halve lijn met beginpunt C door Q_s en lijnstuk AC.

c Het bovenvlak en het grondvlak van de kubus zijn evenwijdig en worden door vlak AFH gesneden volgens evenwijdige lijnen. Dus is de schaduw van lijn AF evenwijdig met lijn HF.
Op eenzelfde manier zie je in dat de schaduw van lijn CF evenwijdig is met lijn HF.

d Bekijk de volgende drie vlakken: vlak HPQ, vlak ACF en het vlak van de tafel; de drie snijlijnen zijn lijn PQ, lijn AC en lijn P_sQ_s. Omdat deze lijnen niet evenwijdig zijn, gaan ze door één punt.

46

Centraal: 1, 3 en 4
parallel: 2, 5 en 6

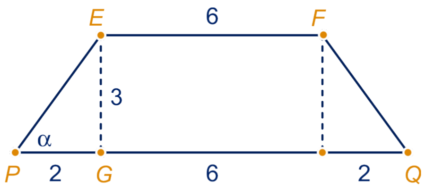
Lijn en vlak

47

a Zie einde hoofdstuk.
R, S, T en U zijn de middens van opeenvolgend AB, BC CD en DA; N is het midden van EF.
Dan zijn de symmetrievlakken vlak SUN en vlak $RTFE$.

b Zie einde hoofdstuk.
M is het snijpunt van de lijnen RT en SU

c Hiernaast is symmetrievlak $RTFE$ getekend. G is de projectie van E op de zoldervloer. De gevraagde hoek is α.
Er geldt: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56°$.



d Zie einde hoofdstuk.
V is het snijpunt van de lijnen EP en AB.
De projectie W is het snijpunt van lijn VG met de lijn door P evenwijdig met lijn EG.

e Zie einde hoofdstuk.
Teken X op BC zó, dat QX evenwijdig is met AB.
Teken Y op EF zó, dat XY evenwijdig is met NS.
Teken het gevraagde punt Z op XY zó, dat ZQ evenwijdig is met EG.

48

a Zie einde hoofdstuk.
Teken het snijpunt J van de lijnen AP en BF.
Teken het snijpunt K van ribbe BF met de lijn door J evenwijdig met lijn AH.
Het gevraagde punt L is het snijpunt van lijn HK en de lijn door P evenwijdig met lijn AH.

b Zie einde hoofdstuk.
Teken het snijpunt M van de lijnen FP en AB.
Het gevraagde punt N is het snijpunt van lijn DM en de lijn door P evenwijdig met DF.

49

a Zie einde hoofdstuk.
Het punt van de knik noemen K en de plaats van de lamp Z. Het snijpunt van de lijnen ZK en MN is het punt dat de knik als schaduw heeft.

b Lijnstuk MN is de middenparallel in driehoek ABK, dus K is het eindpunt van de nok. $AK = \sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{61}$.
Dus de knik is $2 \cdot \angle ZKB = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{ZB}{KB}\right) \approx 45{,}2°$.

c Die blijft hetzelfde. De schaduw bestaat uit de snijlijnen van de twee dakvlakken met vlak LMN, waarbij L de plaats van de lamp is. In dit vlak ligt lijn AB, onafhankelijk van de plaats van L op AB.

d Zie einde hoofdstuk.
Noem de plaats van de lamp L. Het gevraagde punt X is het snijpunt van lijn KL met lijn MN. Dit ligt op MN op $\frac{1}{4}$ deel van N.

50

a Zie einde hoofdstuk.
Teken het snijpunt K van de lijnen GM en BC.
Teken het snijpunt S van de lijnen EB en NK.
De schaduw is lijnstuk NS.

b Het snijpunt van lijn GN met lijn BC noemen we T. Dan is S het snijpunt van lijn MT met lijnstuk EB.
De driehoeken TNB en TCG zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor 2, dus $TB = 4$.
De driehoeken EMS en BTS zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor $\frac{TB}{EM} = 2$, dus $ES : SB = 1 : 2$.

51

a Zie einde hoofdstuk.
M is het midden van ribbe AE. De schaduw bestaat uit de lijnstukken MN en MH.

b De schaduw op de voorkant van de kubus is de snijlijn van vlak GHN met de kubus. Bekijk de volgende drie vlakken: de voorkant van de kubus, de achterkant en vlak GHN. Dit is het geval: twee evenwijdige vlakken gesneden door en derde. De snijlijnen zijn evenwijdig.

c Zie einde hoofdstuk.
P is het snijpunt van de lijnen BC en GN en Q van de lijnen AD en HM. De schaduw is de halve lijn met beginpunt P door Q.

Bekijk de volgende drie vlakken: de tafel, de voorkant van de kubus en vlak GHN. Dat zijn drie vlakken met drie evenwijdige snijlijnen. De snijlijn van vlak GHN met de tafel is de schaduw van GH.

52

a Zie einde hoofdstuk.
P is het snijpunt van de lijnen BD en HN.

b Zie einde hoofdstuk.
Breng door lijn DF het 'hulpvlak' $BFHD$ aan. Dit vlak snijdt vlak BEG volgens lijn BM, waarbij M het midden van het bovenvlak van de kubus is.
Het gevraagde punt Q is het snijpunt van de lijnen QM en DF.

53

Zie einde hoofdstuk.
We brengen een vlak V door A en de as van de cilinder aan. Het middelpunt van de grondcirkel is M. Lijn Am snijdt de grondcirkel ook in C. V snijdt de cilindermantel in de lijnen door A en C evenwijdig met de as van de cilinder. Het gevraagde punt D is het snijpunt van lijn AB met de lijn door C evenwijdig met de as van de cilinder.

54

Zie einde hoofdstuk.
Neem als hulpvlak bijvoorbeeld vlak ADM. Dat snijdt vlak $BCHE$ volgens lijn HB.
Het gevraagde punt P is het snijpunt van de lijnen HB en AM.

55

Zie einde hoofdstuk.
De hoekpunten van het grondvlak noemen we P, Q, R en S en de top T. Het hulpvlak is steeds ABT.
In het eerste geval is de snijlijn met het grondvlak lijn SQ. Het gevraagde punt C is het snijpunt met deze snijlijn en lijn AB.
In het tweede geval snijdt het hulpvlak ribbe QR in U en is de snijlijn met het grondvlak SU. Het gevraagde punt C is het snijpunt met deze snijlijn en lijn AB.
In het derde geval snijdt het hulpvlak de ribben in het grondvlak in V en W en is de snijlijn met het grondvlak VW. Het gevraagde punt C is het snijpunt met deze snijlijn en lijn AB.

56

Zie einde hoofdstuk.
De top van de kegel noemen we T. Neem als hulpvlak vlak ABT. Dat snijdt de grondcirkel in C en D. Het gevraagde punt S is het snijpunt van de lijnen TD en AB.

57

Zie einde hoofdstuk.
Neem als hulpvlak V het vlak door A en C evenwijdig aan de as van de cilinder. V snijdt de grondcirkel in B en D. Het gevraagde punt S is het snijpunt van lijn AC en de lijn door D evenwijdig aan de as van de cilinder.

58

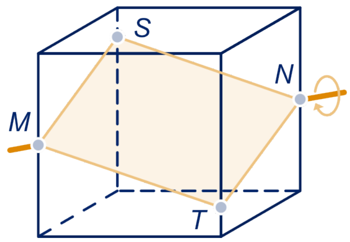
a Zie einde hoofdstuk.
De schaduw S' van S is het snijpunt van de lijnen $A'B'$ en LS.

b Zie einde hoofdstuk.
Teken het snijpunt E van de lijnen AB en CD. De schaduw E' van E is het snijpunt van de lijnen $A'B'$ en LE. De schaduw D'van D is het snijpunt van de lijnen LD en $C'D'$.

59
a Toelichting. Lijnen met dezelfde pijlen zijn evenwijdig, evenals de stippellijn.
b Onder een hoek van $45°$.

Doorsneden

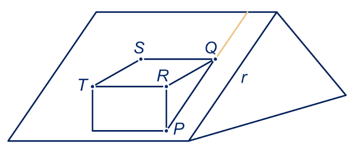
60
a Zie einde hoofdstuk.
T ligt op de ribbe zó, dat de lijnen MT en SN evenwijdig zijn.
Een ruit
b Zie figuur.
Een zeshoek
c Rechthoek namelijk het diagonaalvlak van de kubus door M en N.



61
Zie einde hoofdstuk.
PQ en RS met BT.
Een gelijkbenig trapezium

62
a Een cirkel
b Een rechthoek, een cirkel, een ellips
c Een driehoek, een vierhoek, een zeshoek

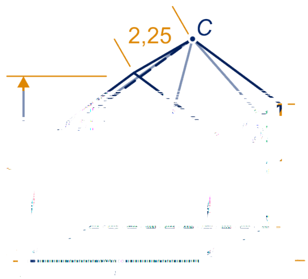
63
a Zie einde hoofdstuk.
PQ is evenwijdig aan r; SQ is evenwijdig aan TR.
b Zie figuur.
Hierin is het zijaanzicht ABC van de dakkapel getekend.
De lengte van lijnstuk BD noemen we x. Dan $CD = x + 2$, want hoek DAC is $45°$, maar ook $CD = x\sqrt{3}$, want hoek DBC is $30°$. Dus $x + 2 = x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.



Een dakrand is $2x$, de andere 3, de oppervlakte van het dak is $6x$ m^2, dus 1639 dm^2.
c De inhoud is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x\sqrt{3} \cdot 3 = 3x\sqrt{3}$m^3, dus 14196 dm^3.

64
a Zie einde hoofdstuk.
Teken het m c e

De snijpunten van de doorsnede met de 'dakranden' noemen we P en Q, het midden van AB noemen we M en het snijpunt van lijn MC met lijn PQ noemen we R.
Dan $MC = \sqrt{2{,}25^2 + 3^2} = 3{,}75$. Verder: $MR : MC = 2 : 3$, dus $AP = BQ = MR = \frac{2}{3}MC = 2{,}5$.



65 Zie einde hoofdstuk.
De hoekpunten van de 'plakjes' zijn hoekpunten van de kubus of middens van ribben.

66 Zie einde hoofdstuk.
De hoekpunten van de 'plakjes' verdelen ribben van het achtvlak in vier of twee gelijke stukken.

67 Zie einde hoofdstuk.
De hoekpunten van de 'plakjes' verdelen ribben van het achtvlak in vier gelijke stukken.

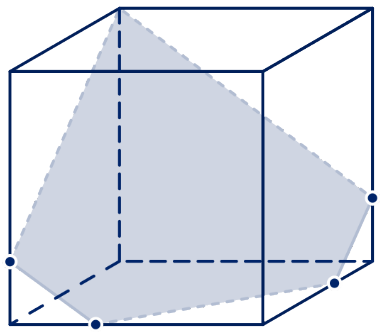
68
- **a** Zie einde hoofdstuk.
- **b** Het snijpunt Q van lijn GP met het grondvlak is het snijpunt met lijn BC.
  Het snijpunt R van lijn JP met het grondvlak is het snijpunt met lijn CE. De grondlijn is lijn QR.
- **c** Het gevraagde punt S is het snijpunt van de grondlijn met lijn ED.
- **d** T is het snijpunt van lijn JS met ribbe DI.
  De doorsnede is vierhoek $PTJG$.

69
- **a** Zie einde hoofdstuk. Het snijpunt van de lijnen PQ en AB is E. De grondlijn is lijn ER.
- **b** Het snijpunt van de grondlijn met ribbe AD is S. De doorsnede is vierhoek $PQSR$.
- **c** Ze liggen beide in vlak PQR.
- **d** De vlakken ADT, BCT en $ABCD$ hebben twee (AD en BC) en dus drie evenwijdige snijlijnen.

70
- **a** De ribbe rechts-achter
- **b** 5
- **c** Nee

71
- **a** Zie einde hoofdstuk voor de ruimtelijke tekening. Voor de tekening op ware grootte voeren we eerst wat berekeningen uit.

$HG : CT = GQ : QC$, dus $CT = 6$;
$QC : SC = EP : EH = 2 : 3$, dus $SC = 6$.
Dus $UR = RS = ST = 6\sqrt{2}$ en $HT = HU = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}$.
Nu kunnen we een tekening op ware grootte maken.



b De inhoud van piramide $H.DTU = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 18 \cdot 12 = 648$;
de inhoud van piramide $P.AUR = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 648 = 24$.
Dus de waterhoeveelheid is $648 - 2 \cdot 24 = 600$.

72
a Zie einde hoofdstuk.
De doorsnede is parallellogram $PUQR$, waarbij U het midden van ribbe BT is.
b Zie einde hoofdstuk.
De doorsnede is gelijkbenig trapezium $PSQV$, waarbij V het midden van ribbe AT is.
c Het snijpunt van vlak PQS met ribbe TD noemen we W, met ribbe BC noemen we Z en met ribbe TD noemen we W.
Lijn QZ is middenparallel in driehoek ABC, dus $DV : VB = 3 : 1$.
De lijnen SQ, TB, VW en PZ zijn evenwijdig. Dus $TW : VWD = 3 : 1$.

73
Zie einde hoofdstuk.
Figuur 1.
Teken S op ribbe EH zó, dat PS evenwijdig is met GR.
Teken T op ribbe AB zó, dat TR evenwijdig is met GS.
De doorsnede is vijfhoek $PTRGS$.
Figuur 2.
Teken U op ribbe GH zó, dat EU evenwijdig is met AR.
Teken V op ribbe AB zó, dat VR evenwijdig is met EU.
Teken W op ribbe GC zó, dat UW evenwijdig is met EV.
De doorsnede is vijfhoek $EUWRV$. Figuur 3.
Teken N op ribbe EF zó, dat NK evenwijdig is met LM.
Teken O op ribbe GC zó, dat OM evenwijdig is met LN.
De doorsnede is vijfhoek $KNLMO$.

74
Figuur a: een kubus met ribbe 3;
figuur b: een vierzijdig prisma met een ruit als grondvlak en hoogte 3;
figuur c: een zeszijdig prisma;
foguur d: een octaëder.

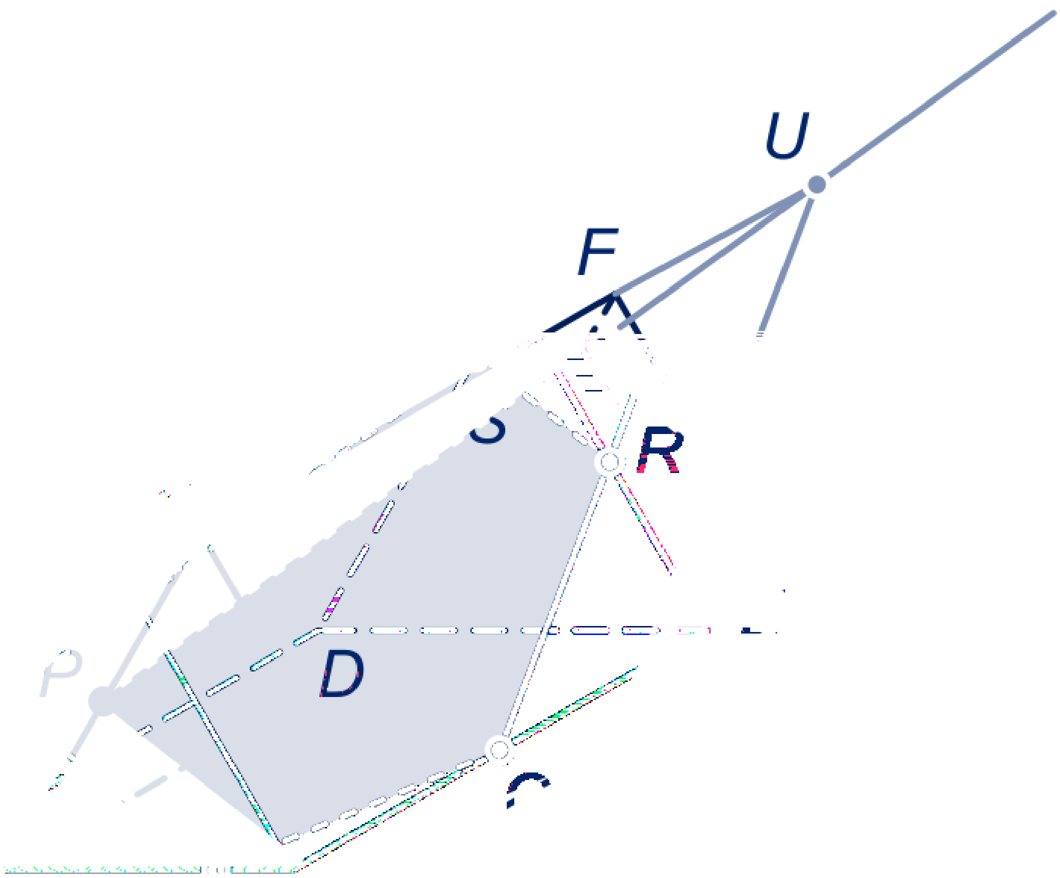
75
a Zie einde hoofdstuk.
U is het snijpunt van de lijnen QR en CF.
S is het snijpunt van de lijnen PU en DF.

b Zie einde hoofdstuk.
V ligt op ribbe AB zó, dat de lijnen PV en SR evenwijdig zijn.
De doorsnede is vijfhoek $PVQRS$.

c Zie de figuur hieronder. U is het snijpunt van de lijnen PS en CF.
De driehoeken RUF en RQE zijn congruent, dus $UF = 6$.
De driehoeken CPU en FSU zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor $\frac{CU}{FU} = 3$, dus $FS = \frac{1}{3} \cdot CP = 1$.
De driehoeken PAT en PUC zijn congruent, dus $AT = CU = 18$.

d Zie de figuur hieronder. Het is de straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC. Noem het middelpunt van die cirkel M en het midden van AB: N.
De straal is $\frac{BN}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

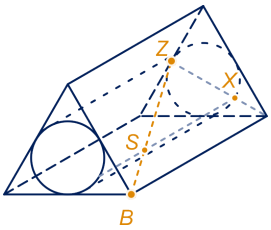
e Zie de figuur hieronder. Noem de straal van de cilinder r en de hoogte h. Dan (zie figuur) $\frac{x}{r} = \tan(60°) = \sqrt{3}$, dus $h = 3\sqrt{3} - x = (3 - r)\sqrt{3}$.
We zoeken nu de waarde van r waarvoor $I = r^2(3 - r)$ maximaal is.
$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r} = 6r - 3r^2$, dus I is maximaal voor $r = 2$.



76

a Zie einde hoofdstuk.
Lijn ZC snijdt de cirkel in driehoek DCF ook nog in X. De lijn door X evenwijdig aan lijn BC snijdt lijn ZB in het gevraagde punt S.

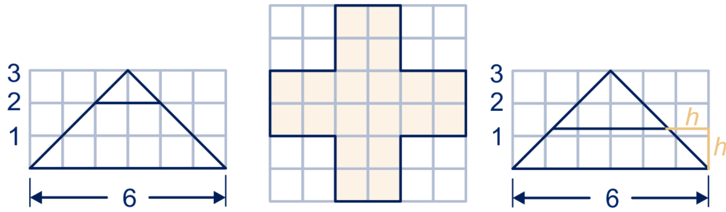
b Zie figuur.
Het snijpunt (niet Z) van de ingeschreven cirkel van driehoek DEF met lijnstuk ZE noemen we X. Vanwege gelijkvormigheid is het deel van het lijnstuk BZ dat binnen de cilinder ligt gelijk aan $\frac{ZX}{ZE} = \frac{2}{3}$, zie opgave 75b.



77

Zie einde hoofdstuk.
Lijn AC snijdt een opstaande ribbe in S.
De lijn door S evenwijdig met lijn BC snijdt een ribbe in het grondvlak in T.
Lijn TC snijdt een ribbe in het grondvlak in U.
De lijn door U evenwijdig met lijn BC snijdt evenwijdig met lij

d Zie figuur 4 hiernaast.

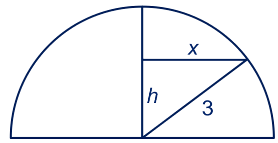


vooraanzicht
figuur 1

doorsnede op
2m hoogte
figuur 2

vooraanzicht
figuur 3

De breedte op hoogte h is $2x\ = 2\sqrt{9-h^2}$. (Dus op hoogte 2: $2\sqrt{5}$.)



e Vierkanten. De tongewelven hebben als doorsnede rechthoeken, het kruisgewelf heeft als doorsnede het gemeenschappelijk deel van twee rechtheoek die loodrecht op elkaar staan.

f De doorsnede is een vierkant met zijden van $2\sqrt{9-h^2}$, dus de oppervlakte is $\left(2\sqrt{9-h^2}\right)^2 = 36 - 4h^2$.

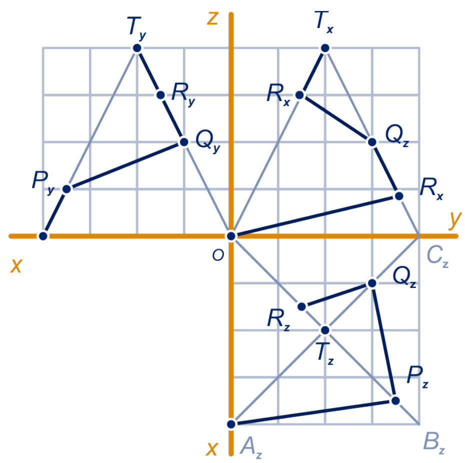
g Op iedere hoogte hebben de doorsnede van het vakantiehuis en het kruisgewelf dezelfde oppervlakte, dus hebben ze ook dezelfde inhoud volgens de "bierviltjes-methode", dus de inhoud is 72 m^3.

Extra opgaven

1

a Zie figuur.

b Noem de hellingshoeken achtereenvolgens α_1, α_2, α_3 en α_4.
Dan $\tan\left(\alpha_1\right) = \frac{2}{A_zP_z} = \frac{2}{\sqrt{50}}$,
dus $\alpha_1 \approx 16^\circ$;
$\tan\left(\alpha_2\right) = \frac{2}{Q_zP_z} = \frac{2}{\sqrt{26}}$,
dus $\alpha_2 \approx 21^\circ$;
$\tan\left(\alpha_3\right) = \frac{2}{Q_zR_z} = \frac{2}{\sqrt{10}}$,
dus $\alpha_3 \approx 32^\circ$;
$\tan\left(\alpha_4\right) = \frac{8}{OT_z} = \frac{8}{\sqrt{32}}$,
dus $\alpha_4 \approx 55^\circ$.



2

a Zie figuur.

b Noem de straal van de grondcirkel r en de hoogte van de kegel h dan is de inhoud $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 5^2\cdot 10 = \frac{250}{3}\pi$.

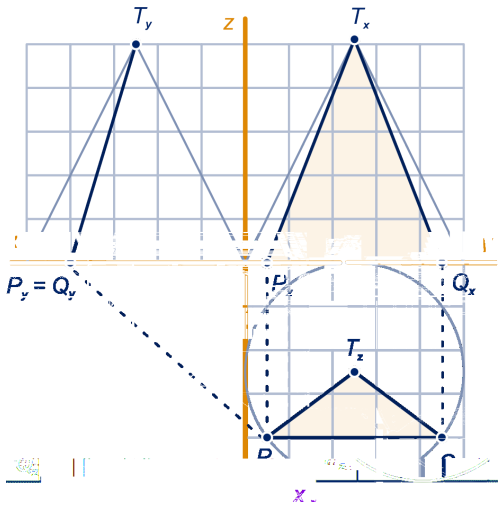
c Zie figuur.
De grondcirkel van de kegel heeft vergelijking $(x-5)^2 + (y-5)^2\ =\ 25$. Als

$x = 8$, dan $(y - 5)^2 = 25 - 3^2 = 16$, dus $y = 1$ of $y = 9$, dus de coördinaten zijn: $(8,1,0)$ en $(8,9,0)$.

d Zie figuur.

e Neem als basis $PQ = 8$, dan is de hoogte $T_yP_y = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109}$, dus de oppervlakte is $4\sqrt{109}$.

f Lijnstuk PQ verdeelt de grondcirkel van de kegel in twee stukken. Noem het middelpunt van de grondcirkel M. Dan is hoek $PMQ = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 106{,}26\ldots°$, dus de oppervlakte van de cirkelsector MPQ is gelijk aan $\frac{106{,}26\ldots}{360} \cdot 25\pi = 23{,}182\ldots$, dus de oppervlakte van het kleinste stuk van de grondcirkel is $23{,}182\ldots$−opp driehoek $PMQ = 23{,}182\ldots - 4 \cdot 3 = 11{,}182\ldots$, dus de inhoud van het kleinste stuk van de kegel is $\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 11{,}182\ldots \approx 37{,}27$.



figuur bij opgave 2a,c,d

3

a Noem de hoekpunten van de rondweg achtereenvolgens S, T, U en V. Verder zie figuur.

b In de z-projectie zie je de weg op ware grootte, want de weg is evenwijdig met het Oxy-vlak.
De lengte is dus 10.

c Zie figuur, de lengte blijft gelijk.

d Noem de hoekpunten van een andere rondweg achtereenvolgens S_1, T_1, U_1 en V_1.
De weg $S_1 \to T_1 \to U_1 \to V_1 \to S_1$ is even lang als de weg $S \to T \to U \to V \to S$, zie figuur.

4

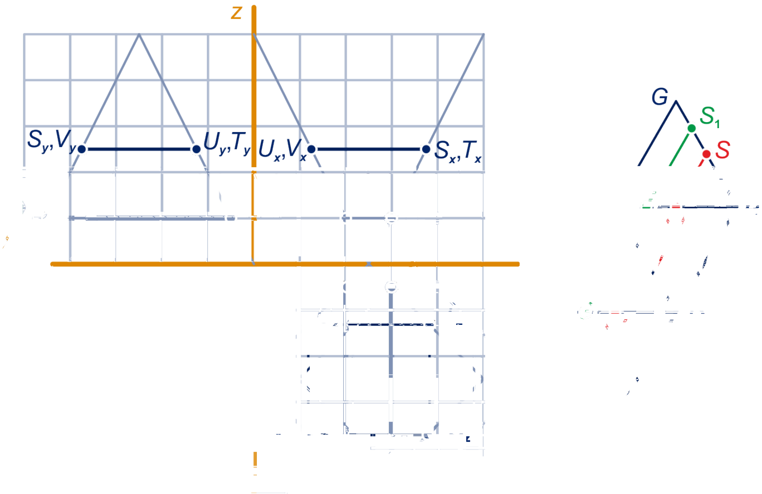
a P is het midden van vierkant $ADHE$ en Q is het midden van vierkant $EFGH$. Dan is lijn PQ de gevraagde lijn l.

b Van P naar Q ga je 3 eenheden in de y-richting en 3 eenheden in de z-richting. Om in vlak $BCGF$ te komen, moet je dat nog eens doen, dan ben je op hoogte 9.

5

a Zie einde hoofdstuk.
X is het snijpunt van de lijnen AD en PQ.
De lijn door X evenwijdig met lijn GQ snijdt de kubus in B.
De doorsnede is $BGQP$.

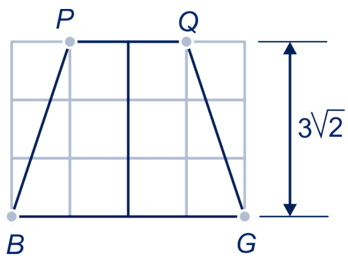
b De doorsnede is het gelijkbenig trapezium $BGQP$. De hoogte van dat trapezium is de afstand van het midden van PQ en het midden van BG, dus



figuur bij opgave 3a,c,d

$3\sqrt{2}$. Verder: $PQ = 2\sqrt{2}$ en $BQ = 4\sqrt{2}$.
Nu kun je het trapezium tekenen. De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \left(4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = 18$.
Zie figuur.

c Zie einde hoofdstuk.
X is als in onderdeel a.
R is het snijpunt van lijn XC met lijn AB.
S is het snijpunt van de lijn door C evenwijdig met lijn PR.
De doorsnede is $PRCSQ$.



figuur bij opgave 5b

6

a Zie einde hoofdstuk.
Het gevraagde punt is het snijpunt Q van de lijnen EP en BC.

b S loopt over lijnstuk CF.

c De driehoeken SCP en EDP zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor $\frac{ED}{SC} = 1\frac{1}{2}$, dus $CP = 2 \cdot CD = 12$.

d Zie einde hoofdstuk.
De lijnen EP en HM moeten dan in één vlak liggen, dus P is het snijpunt van lijn CD met vlak HEM. Dit vlak snijdt de 'voorkant' van de kubus volgens lijn EM, dus de achterkant volgens een lijn evenwijdig daarmee. Dus P is het snijpunt van lijn CD met de lijn door H evenwijdig met EM.

e N is het punt op ribbe CG op hoogte 2. Dan ligt P op lijn HN en zijn de driehoeken HNG en NCP gelijkvormig met vergrotingsfactor $\frac{NG}{NC} = 2$, dus $CP = \frac{1}{2}GH = 3$.

7

a Zie einde hoofdstuk.
X is het snijpunt van de lijnen LM en CD.

Y is het snijpunt van de lijnen KX en AD.
N is het snijpunt van de lijnen YM en AT.
P is het snijpunt van de lijnen KX en BC.
De doorsnede is $PKNML$.

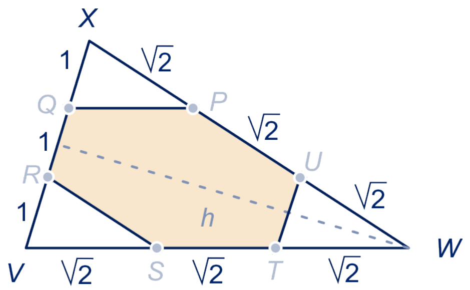
b Zie einde hoofdstuk.
Teken lijn n door D evenwijdig aan lijn BC. Het snijpunt van n met lijn AB noemen we R.
Teken in vlak TDR de lijn door M evenwijdig met lijn n. Het snijpunt met lijn TR noemen we S.
Het lijnstuk SM moet gekleurd worden.

8 Zie einde hoofdstuk.
De lijn door P evenwijdig met k snijdt de ribbe BC in Q, lijn BD in X en lijn AD in Y.
De lijn door X evenwijdig met l snijdt ribbe HD in R.
Lijn RY snijdt ribbe EA in S.
T is het snijpunt van ribbe GC met de lijn door Q evenwijdig met lijn RS.
De doorsnede is $PQTRS$.

9
a Zie einde hoofdstuk.
Lijn QR snijdt het grondvlak in V;
de lijn door V evenwijdig met lijn PQ snijdt de ribben van het parallellepipedum in S en T.
De lijn door T evenwijdig aan lijn QR snijdt ribbe GC in U.
De doorsnede is zeshoek $PQRSTU$.

b De driehoeken QRE, CUT en ARV zijn gelijkzijdig, dus de zijden zijn 1. De zijden QR en TU hebben dus lengte 1 en de andere zijden lengte $\sqrt{2}$.

c Zie figuur.
Het snijpunt van de lijnen VT en PU noemen we W en het snijpunt van de lijnen VR en PU noemen we X. Dan: $VW = XW = 3\sqrt{2}$ en $VX = 3$.
We kunnen driehoek VWX tekenen.
De zeshoekige doorsnede vind je dan door de 'punten van driehoek VWX af te snijden', zie figuur.



d Met de stelling van Pythagoras vind je: $h = 1\frac{1}{2}\sqrt{7}$, dus de oppervlakte van driehoek $VWX = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{7} = 2\frac{1}{4}\sqrt{7}$,
dus de oppervlakte van de doorsnede is: $2\frac{1}{4}\sqrt{7} - 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \sqrt{7} = 1\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

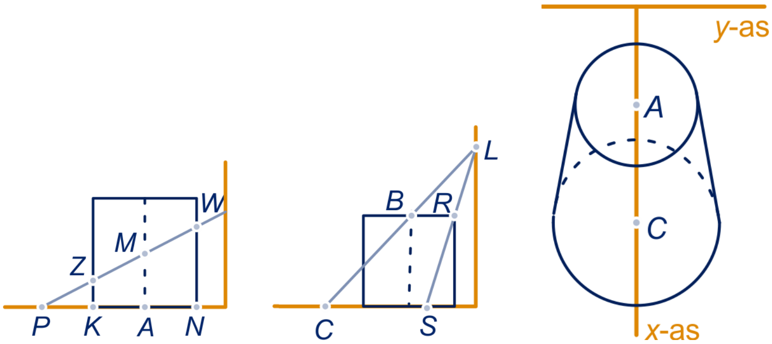
10
a Zie einde hoofdstuk.
De snijpunten van de cilinder met de x-as noemen we K en N. De lijnen door die snijpunten evenwijdig met de z-as zijn k en n. De gevraagde punten Z en W zijn de snijpunten van k en n met lijn PM.

b Bekijk de projectie in de y-richting, zie hieronder.
De driehoeken PZK, PMA en PWN zijn gelijkvormig en $\frac{MA}{PA} = \frac{1}{2}$, dus

$ZK = \frac{1}{2}PK = 1$ en $WN = \frac{1}{2}PN = 3$.

c We kijken weer in de y-richting, zie hieronder.
Het middelpunt van schaduw is het snijpunt C van lijn BM met de x-as.
C is het beeld van B bij vermenigvuldiging vanuit L met de factor $\frac{7}{3}$. Dus $C = (7{,}0{,}0)$.
Elk van de rand van de deksel wordt ook met $\frac{7}{3}$ vermenigvuldigd ten opzichte van L, komt dus te liggen op afstand $\frac{7}{3} \cdot 2 = 4\frac{2}{3}$ van C. De schaduw van de deksel is dus een cirkel met middelpunt C en straal $4\frac{2}{3}$.

d Zie hieronder. De schaduw bestaat uit het gebied begrensd door de cirkel met middelpunt A en straal 2, de cirkel met middelpunt C en straal $4\frac{2}{3}$ en de gemeenschappelijke raaklijnstukken van de twee cirkels.



figuur bij onderdeel b

figuur bij onderdeel c

figuur bij onderdeel d

11

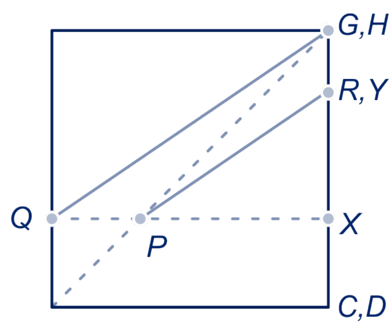
a Zie einde hoofdstuk.
Teken lijn GQ;
teken de lijn door P evenwijdig aan GQ, die snijdt ribbe HD in R.
Teken lijn GR.
Teken de lijn door Q evenwijdig aan GR, deze snijdt ribbe AF in S.
De doorsnede is $PRGQS$.

b Bekijk de zaak in de y-projectie.
X is het punt op ribbe HD op hoogte 3 en Y het punt op ribbe CG op hoogte 3. Dan zijn de driehoeken PXR en QYG gelijkvormig, dus $XR = 4$, dus R ligt op hoogte 7.

12

a Zie einde hoofdstuk.
X is het snijpunt van de lijnen BC en PQ.
R is het snijpunt van de lijnen AB en DX.
De doorsnede is $PQDR$.

b Zie einde hoofdstuk.
Teken de lijn door T evenwijdig aan lijn AB.
Lijn PQ snijdt deze lijn in X.
Lijn XA snijdt lijn TB in R.
De doorsnede is $APQR$.



13

a Zie einde hoofdstuk.
X is het snijpunt van de lijnen BF en CD.
Q is het snijpunt van de lijnen CI en PX.
R is het snijpunt van de lijn door F evenwijdig aan BQ.
De doorsnede is $BQPRF$.

b Driehoek XCB is een 30-60-90-graden driehoek dus $XC = 2 \cdot BC = 12$.
De driehoeken XQC en XPD zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor $\frac{XD}{XC} = 1\frac{1}{2}$, dus $QC = \frac{2}{3}PD = 4$.

14

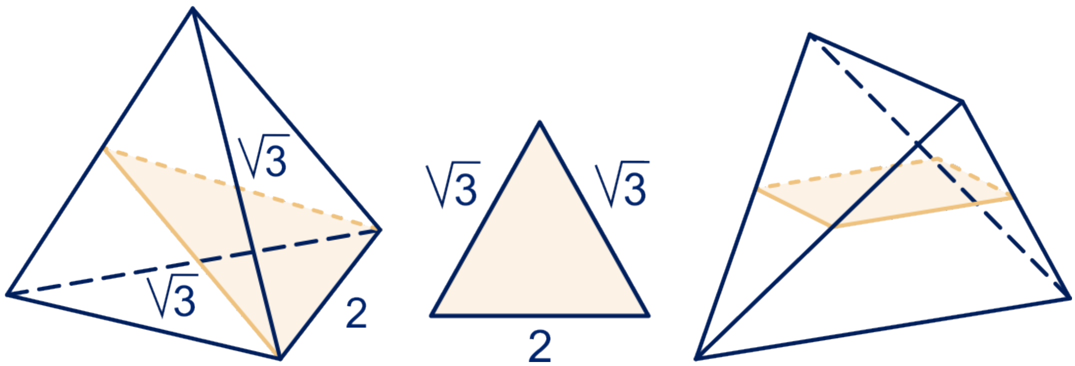
a Zie einde hoofdstuk.
Een regelmatig achtvlak (octaëder).

b Het achtvlak bestaat uit twee piramides met hoogte 3 en oppervlakte van het grondvlak 18, dus de inhoud is $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 3 = 36$.

15

a De limonadespiegel is een gelijkbenige driehoek met één ribbe als zijde, die door het midden van de ribbe gaat die de eerste ribbe kruist, zie figuur 1,
De zijden van de de driehoek verhouden zich als $\sqrt{3} : \sqrt{3} : 2$, zie figuur 2.

b De limonadespiegel gaat door de middens van de vier ribben, zie figuur 3. Het is een vierkant waarvan de zijden half zo lang zijn als die van het viervlak.

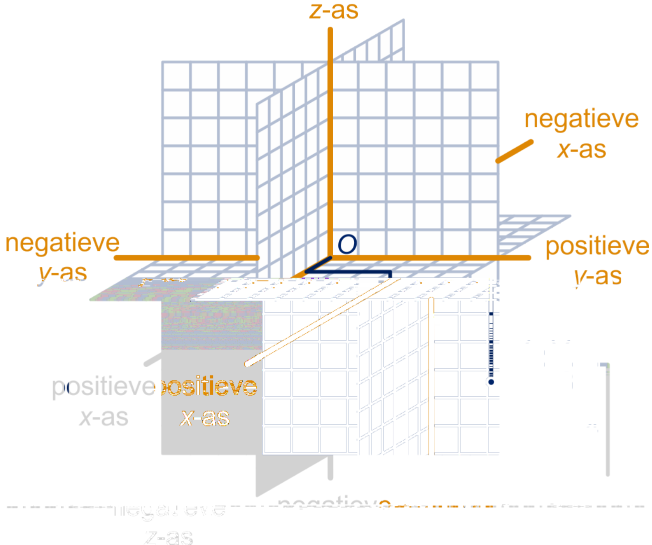


figuur 1 figuur 2 figuur 3

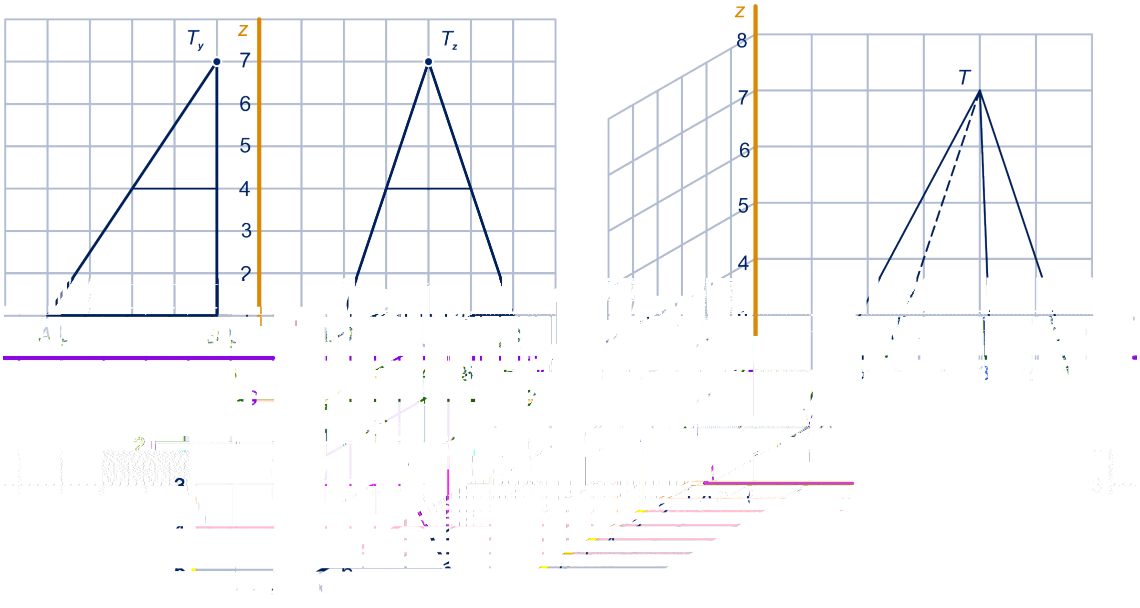
c 20 cl komt overeen met 200 cm^3.

Neem aan de ribbe is $f \cdot 6$ cm, dan $f^3 \cdot 18\sqrt{2} = 200$. Dus $f = \left(\frac{200}{18\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}987\ldots$ en $f \cdot 6 \approx 11{,}92$, dus het pakje heeft ribbe 12 cm.

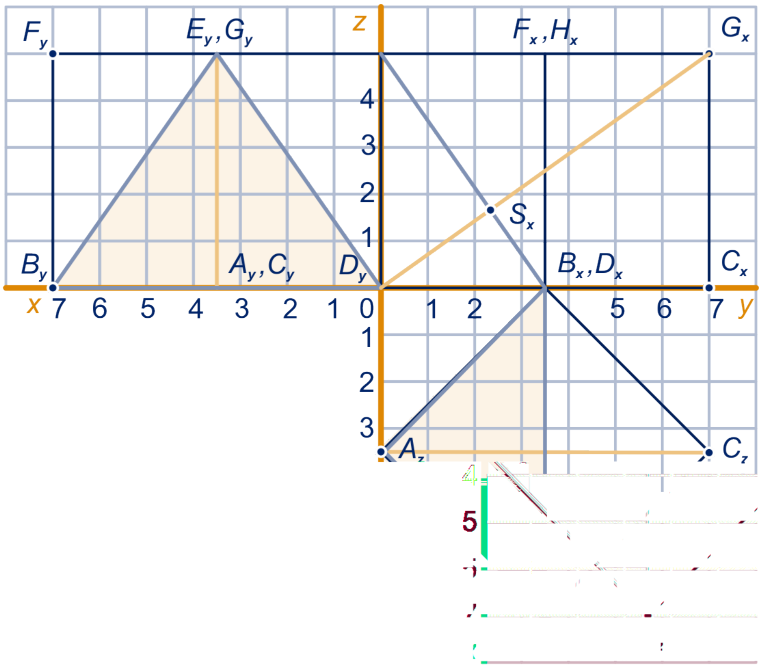
Antwoorden werkbladen



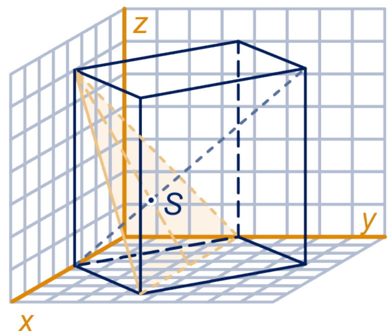
opgave 3



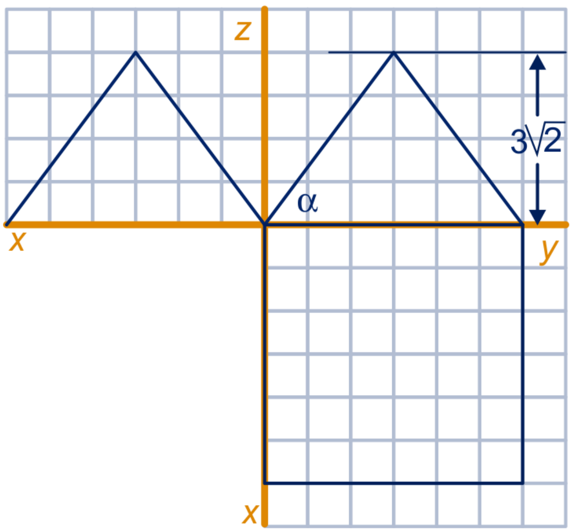
opgave 4



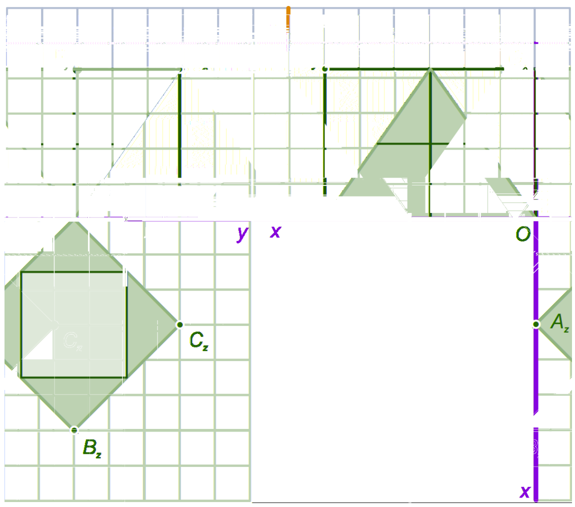
opgave 5b



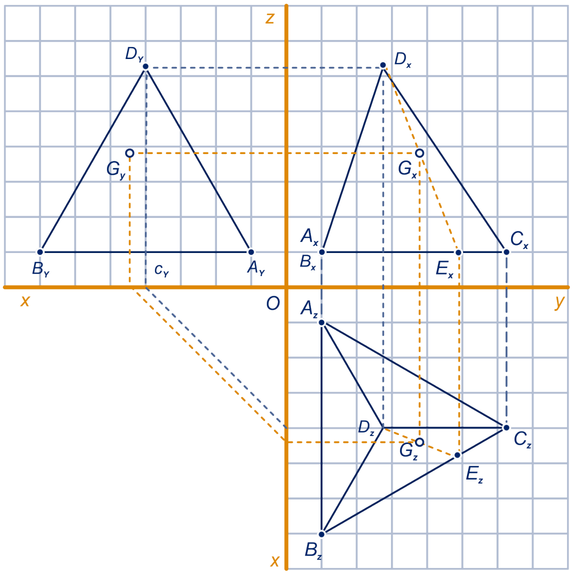
opgave 5e



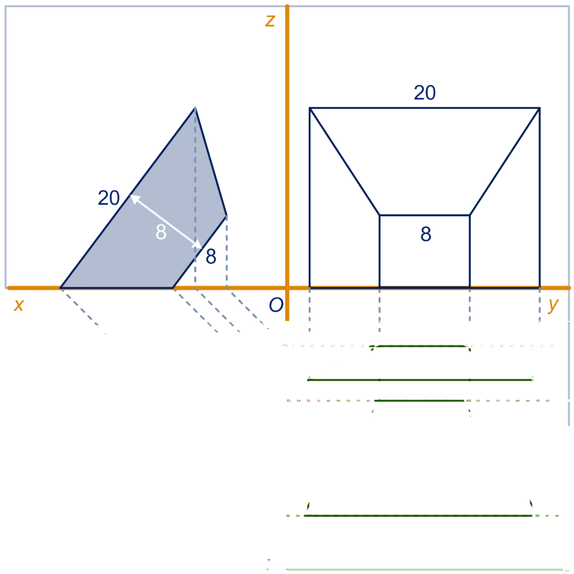
opgave 6a



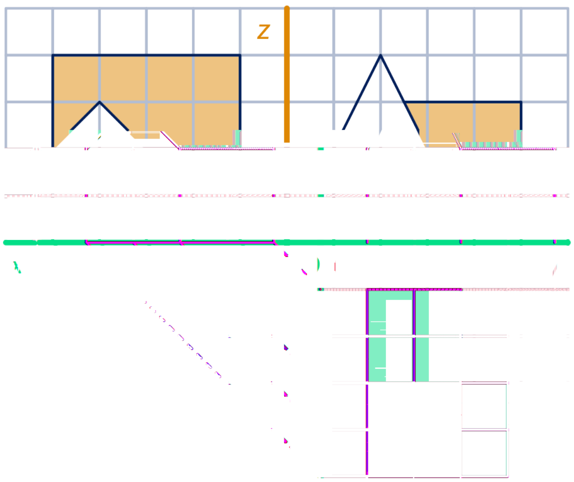
opgave 8



opgave 9a

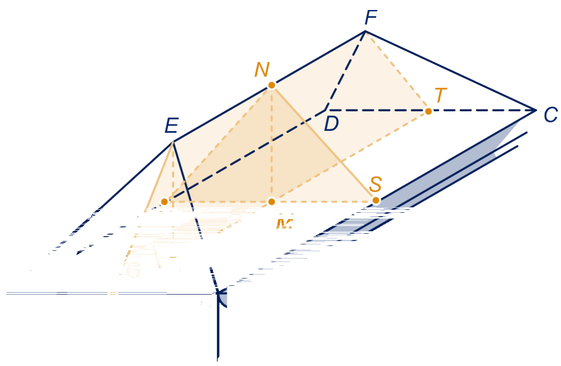


opgave 12

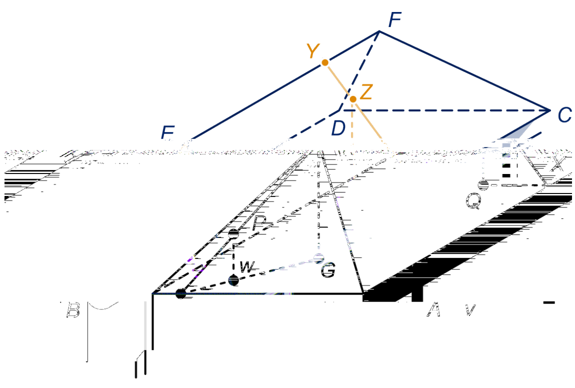


opgave 13a

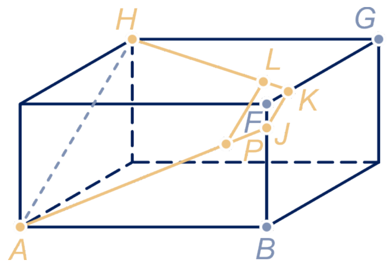
opgave 13b



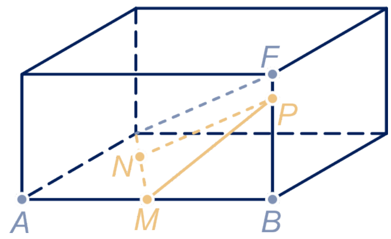
opgave 47a



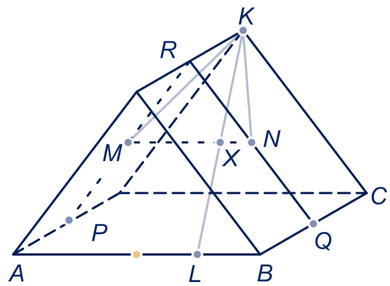
opgave 47b,d,e



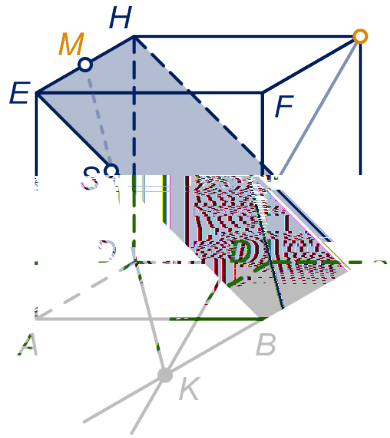
opgave 48a



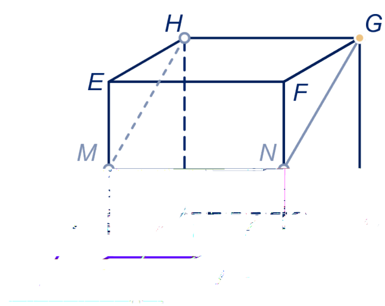
opgave 48b,d,e



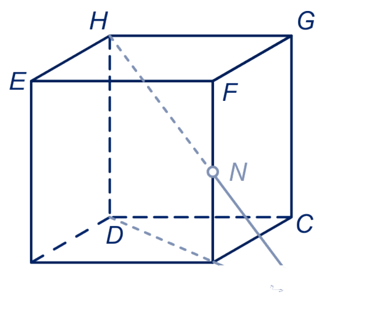
opgave 49



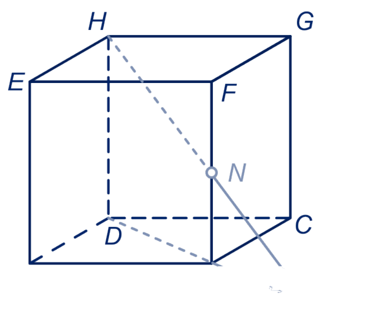
opgave 50



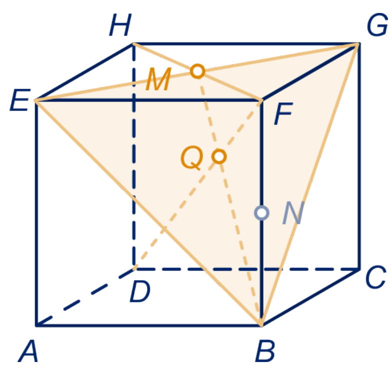
opgave 51a



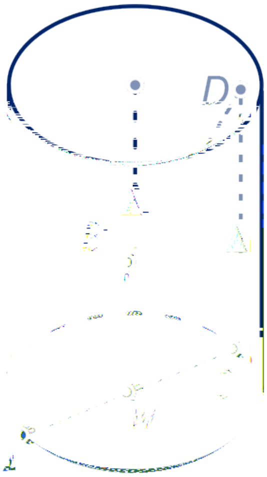
opgave 51c



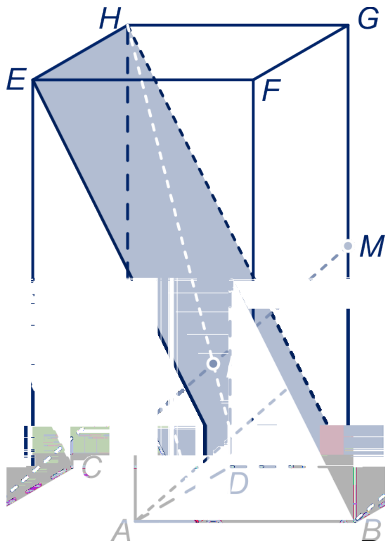
opgave 52a



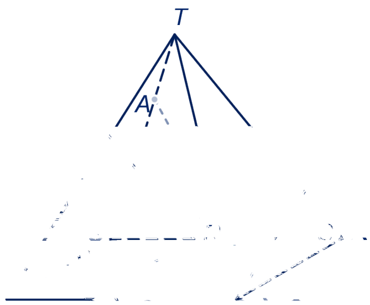
opgave 52b



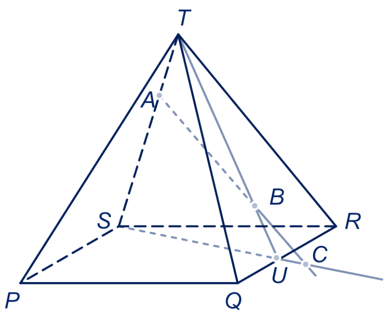
opgave 53



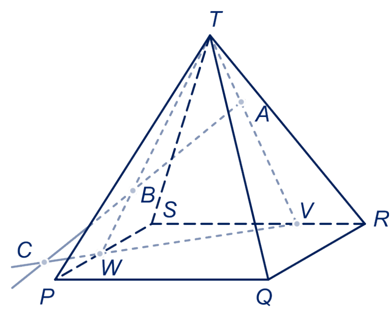
opgave 54b



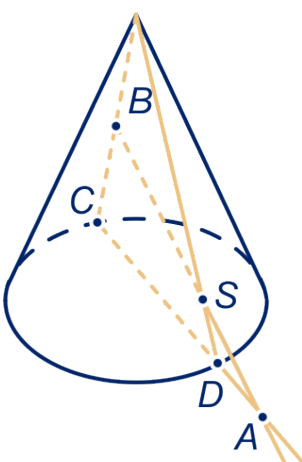
opgave 55



opgave 55b

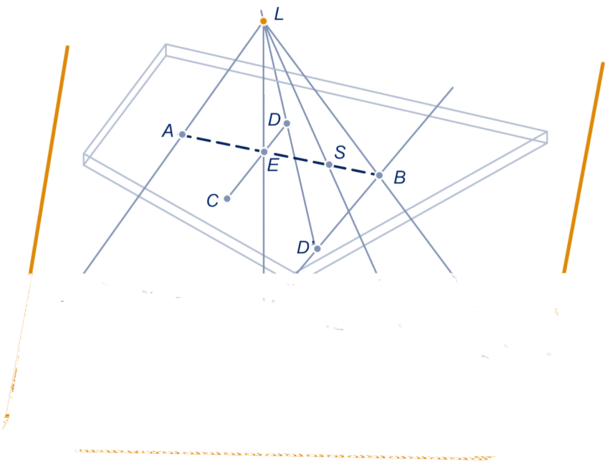


opgave 55

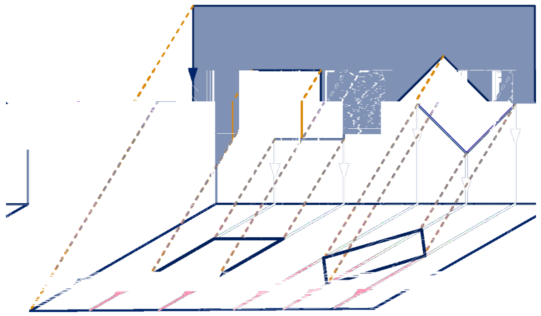


opgave 56

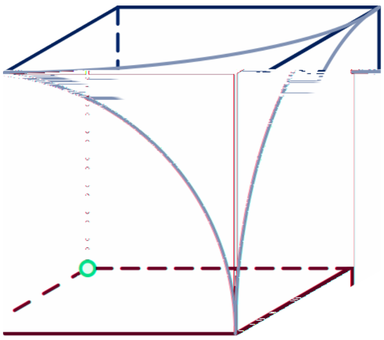
opgave 57

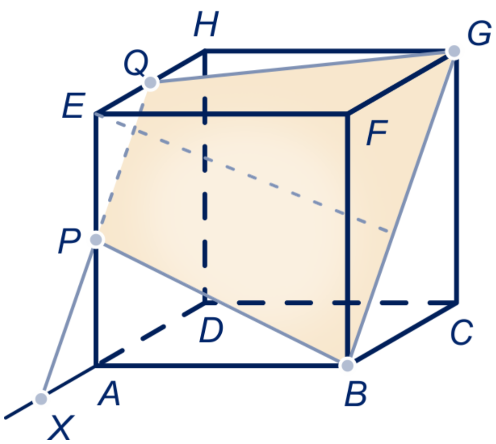


opgave 58

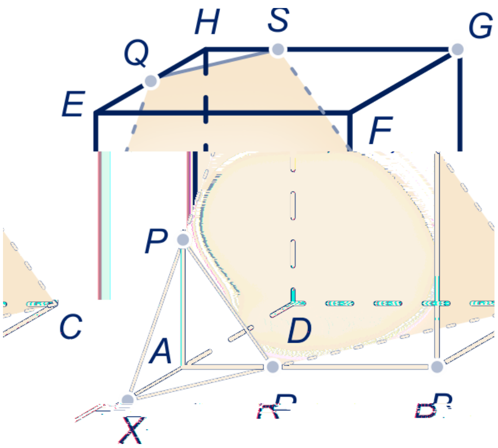


opgave 59

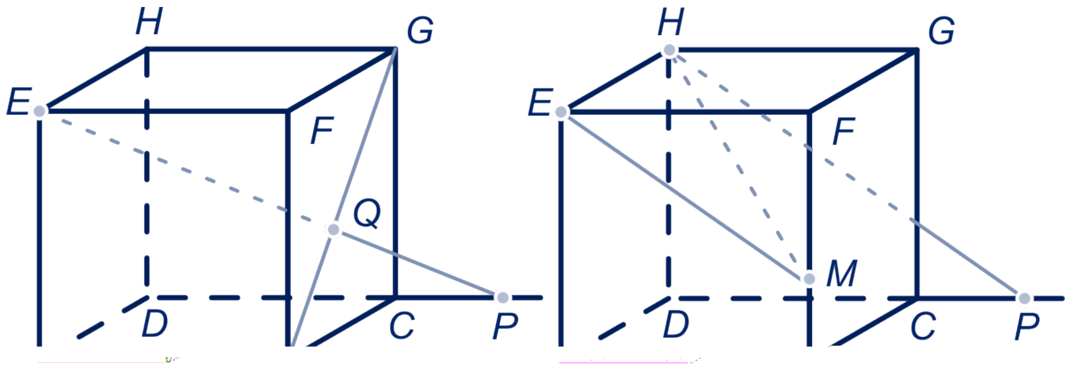




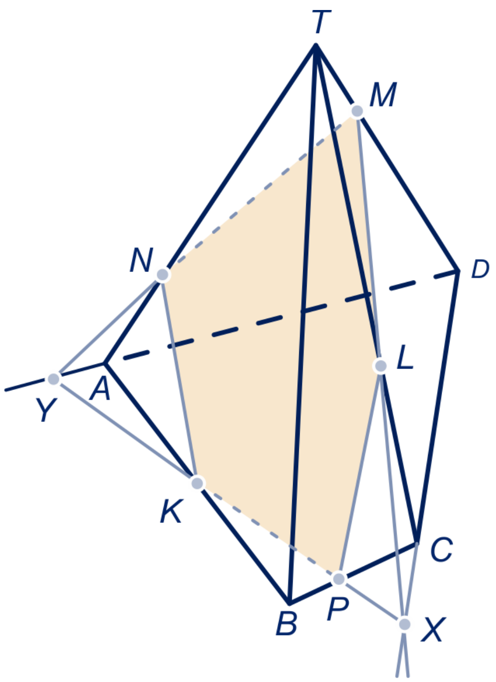
extraopgave 5a



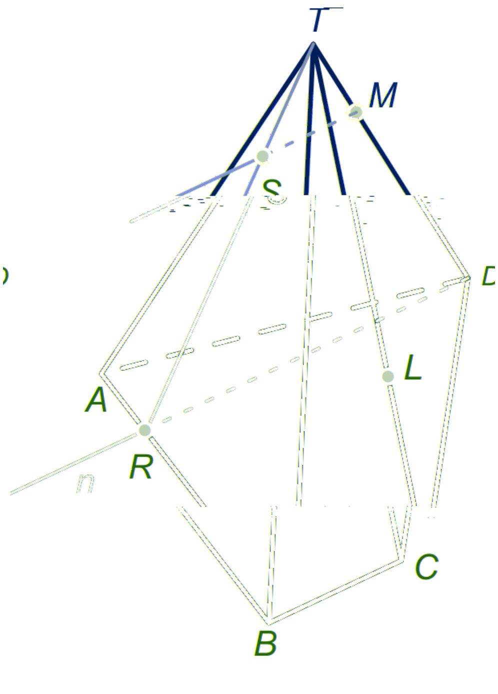
extraopgave 5c



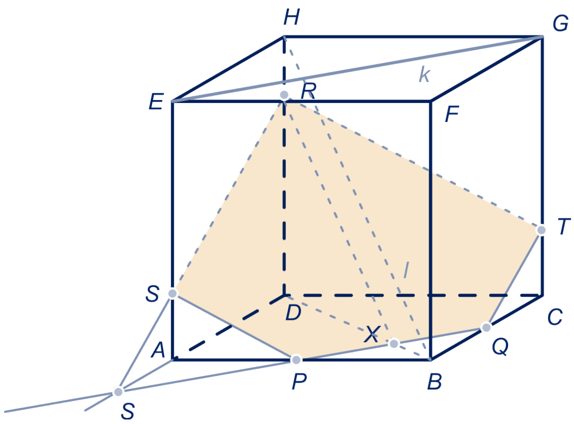
extraopgave 6



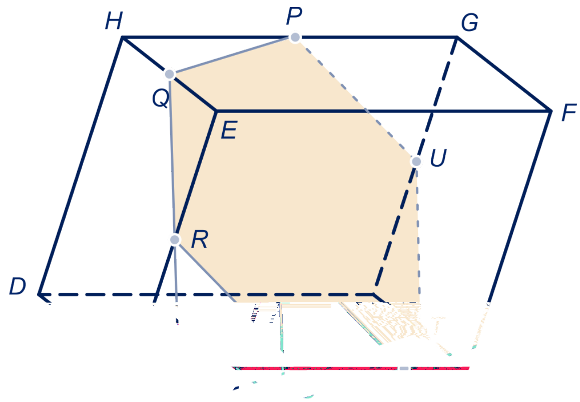
extraopgave 7a



extraopgave 7d

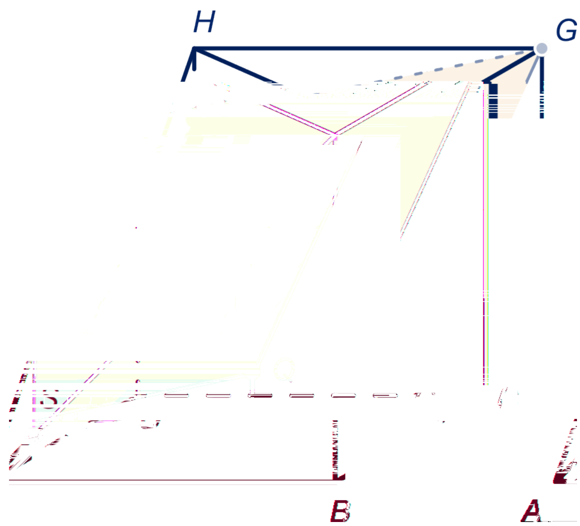


extraopgave 8

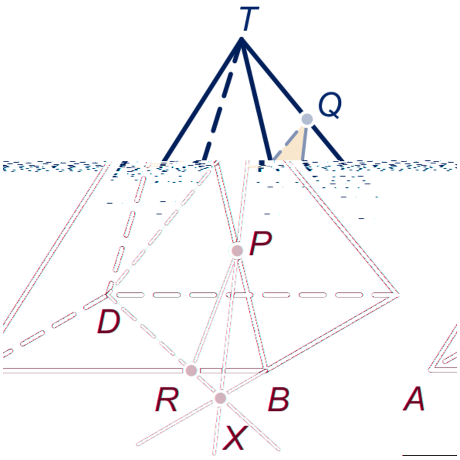


extraopgave 9

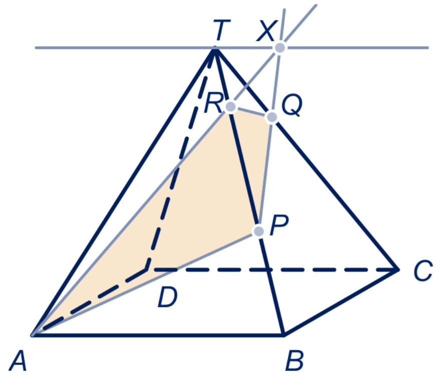
extraopgave 10a



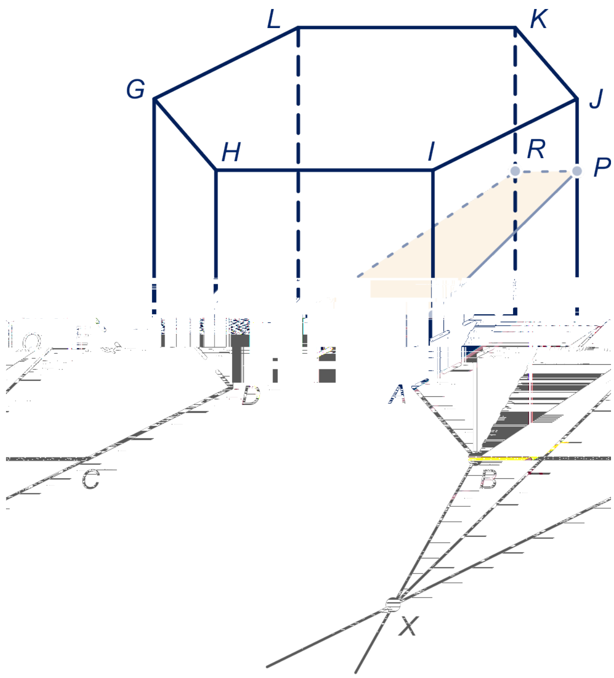
extraopgave 11



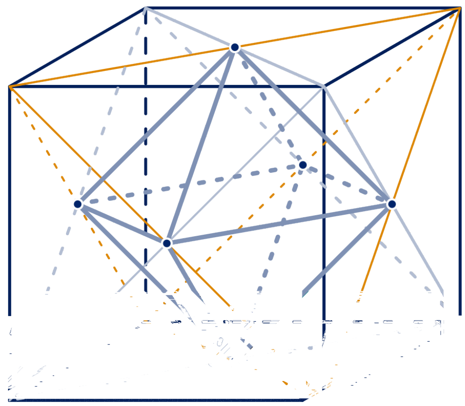
extraopgave 12 a



extraopgave 12 b



extraopgave 13



extraopgave 14

2 Ruimtelijke figuren in het plat

1. De inhoud van een piramide is $\frac{1}{3} \cdot$ opp grondvlak $\cdot$ hoogte.
2. Gebruik onderdeel c.
3. Neem als hulpvlak bijvoorbeeld vlak ADM.
4. Neem als hulpvlak het vlak door de top van de kegel en de punten A en B.
5. Teken lijnstuk CD. van twee punten van dat lijnstuk ken je de schaduw.
6. De doorsnede snijdt de zijkanten van het huis evenwijdig met de lijn door C en het midden van AB.
7. Noem de straal van de cilinder r en druk de hoogte en daarna ook de inhoud van de cilinder in r uit.
8. Teken het snijpunt van de lijn door P evenwijdig aan ribbe TA met het grondvlak.
9. Bekijk de zaak in de y-projectie.