deel 2a havo

de Wageningse Methode

Copyright © 2018 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs Rogier Bos, Leon van den Broek, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Sander Muller, Aafke Piekaar, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN 01234567890-0-0
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

16.1 Intro

1 Neem een rijtje van drie getallen met 1 verschil.

3, 4, 5

100, 101, 102

-6, -5, -4

$\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$

a Pas op elk rijtje het blokschema toe.
Voorbeeld. Bij het rijtje 7, 8, 9 krijg je: $64 \rightarrow 63 \rightarrow 64 - 63 = 1$.
Je moet dus 1 noteren.

b Wat valt je op?

c Als het middelste getal n is, wat zijn dan de andere twee getallen?

d Welke gelijkheid heb je ontdekt?

2 Doe hetzelfde voor rijtjes met 2 verschil, bijvoorbeeld:

3, 5, 7

100, 102, 104

-12, -10, -8

$-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$

Het gebruik van haakjes

5 Anne en Vinja zijn hun huiswerk aan het maken. Op een gegeven moment vraagt Anne: ‘Twee keer drie plus vijf kwadraat, dat is toch honderdeenentwintig?’ ‘Welnee,’ antwoordt Vinja, ‘Volgens mij komt daar honderdachtentwintig uit.’ Beiden hebben geen rekenfouten gemaakt; ze hebben alleen de haakjes verschillend geplaatst. Anne rekent als volgt: $(2 \cdot 3 + 5)^2 = (6 + 5)^2 = 11^2 = 121$.

a Hoe heeft Vinja gerekend?

Bij de rekensom ‘twee keer drie plus vijf in het kwadraat’ kun je op nog drie andere manieren rekenen.

b Probeer die drie manieren te vinden.

c Zoek alle mogelijke antwoorden bij twee min drie maal vijf plus zeven.

6 Achmed en Peter hebben ook een meningsverschil. Twee keer drie kwadraat is volgens Achmed 18 en volgens Peter 36. Achmed heeft $2 \cdot 3^2$ uitgerekend.
Wat heeft Peter uitgerekend?

7 Je hebt eerder rekensommen met haakjes gemaakt. Soms kun je haakjes weglaten zonder dat de som verandert, soms niet. In de paragraaf **Volgorde** van hoofdstuk 1 kwam onder andere de volgende opgave voor.
Iemand heeft een getal in gedachten genomen. Dat getal noemen we a. Je weet niet welk getal a is; a is een **variabele**.
Je gaat bij a de getallen 4 en 2 optellen. Dat kan

- met haakjes: $a + (4 + 2)$
- en zonder haakjes: $a + 4 + 2$.

a Maakt het iets uit of er haakjes staan?

Je gaat van a de getallen 4 en 2 aftrekken. Dat kan

- met haakjes: $a - (4 - 2)$
- en zonder haakjes: $a - 4 - 2$.

b Maakt het iets uit of er haakjes staan?

Je gaat a met de getallen 4 en 2 vermenigvuldigen. Dat kan

- met haakjes: $a \cdot (4 \cdot 2)$
- en zonder haakjes: $a \cdot 4 \cdot 2$.

c Maakt het iets uit of er haakjes staan?

Je gaat a door de getallen 4 en 2 delen. Dat kan

- met haakjes: $a : (4 : 2)$

- en zonder haakjes: $a : 4 : 2$.

d Maakt het iets uit of er haakjes staan?

5 Met de getallen 2, 3 en 4 kun je, door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken, veel getallen maken. Bijvoorbeeld: $\left(2+\sqrt{4}\right)^3 = 64$

a Maak op deze manier, door 2, 3 en 4 elk precies een keer te gebruiken, de getallen 1 tot en met 10. Je mag ook haakjes gebruiken. Sommige zijn erg lastig; geef het niet te snel op.

b Misschien vind je het wel leuk om de getallen 11, 12, 13, . . . zo te maken. Ze lukken natuurlijk niet allemaal.

c Kun je op deze manier ook getallen maken die groter zijn dan 1000?

6 Soms kun je haakjes weglaten zonder dat de som verandert, soms niet. Met getallenvoorbeelden kun je achterhalen wanneer dat wel kan en wanneer niet.

a Welke gelijkheden zijn juist?

$a+(b+c)=a+b+c \qquad a+(b-c)=a+b-c$

$a-(b+c)=a-b+c \qquad a-(b-c)=a-b-c$

b Welke gelijkheden zijn juist?

$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c \qquad a\cdot(b:c)=a\cdot b:c$

$a:(b\cdot c)=a:b\cdot c \qquad a:(b:c)=a:b:c$

c Welke gelijkheden zijn juist?

$a\cdot(b+c)=a\cdot b\cdot c \qquad a\cdot(b-c)=a\cdot b-c$

$a:(b+c)=a:b+c \qquad a:(b-c)=a:b-c$

In eerdere hoofdstukken heb je de volgorde van de bewerkingen geleerd. Hier staan ze nog een keer op een rijtje.

De volgorde van bewerkingen

1. Eerst wat tussen de haakjes staat uitrekenen.
2. Machtsverheffen (dus ook kwadrateren) gaat voor vermenigvuldigen en delen.
3. Vermenigvuldigen en delen gaan voor tegengestelde nemen, optellen en aftrekken.

Met behulp van deze regels kun je de juiste uitkomst van lange berekeningen vinden. Als voorbeeld nemen we de volgende berekening:

$1-2\cdot(3-4)+5:(6+(7-8))-9+10$

We doen deze berekening voor. Kijk goed hoe dat werkt.
Je kunt natuurlijk meer stappen in één keer maken.

8 Maak zo ook de volgende rekensommen.

a $3 \cdot 5 + 20 : (2 - 6) - 3 \cdot (7 - 4) - (6 + (3 - 7))$

b $3 \cdot (4 + 5) + (6 - 9)^2$

c $\left(1 + 2 \cdot 3^4 - 5 \cdot 6\right) : 7$

8 Daan, Sem en Thomas hebben samen 30 knikkers. Sem geeft 5 knikkers aan Thomas. Thomas geeft er 4 aan Daan en Daan geeft er 2 aan Sem. Nu hebben ze alledrie evenveel knikkers. Hoeveel knikkers had Daan eerst?

Kangoeroe2007, wizPROF vraag 4

Opmerking

$-2x$ moet je lezen als het tegengestelde van $2x$.
$-2 \cdot x$ lees je als -2 vermenigvuldigd met x.
Er geldt: $-2x = -2 \cdot x$.
$-x^2$ moet je lezen als het tegengestelde van x^2.
$(-x)^2$ is: het kwadraat van het tegengestelde van x.

9 **a** Laat zien dat $-2x = -2 \cdot x$ voor $x = -3, -1\frac{1}{2}, 3, 12$.

$-x^2$ en $(-x)^2$ zijn niet hetzelfde!
Vul maar eens voor $x = -3, -1\frac{1}{2}, 3, 12$ in.

b Wat is het verband tussen $-x^2$ en $(-x)^2$?

c Welke van de volgende vier getallen zijn gelijk?
$-ax$, $a \cdot -x$, $-a \cdot -x$ en ax.
Vul voor a en x getallen in, ook negatieve.

Samengevat:

- $-a \cdot x = a \cdot -x = -ax$
- $-a \cdot -x = ax$
- $(-x)^2 = x^2$
- $-x^2$ en x^2 zijn elkaars tegengestelde

10

a Bereken $2 \cdot 3 \cdot 10^2$, $2 \cdot (3 \cdot 10)^2$ en $(2 \cdot 3 \cdot 10)^2$.
Je krijgt drie verschillende getallen, denk aan de volgorde van bewerkingen.

b Hoeveel keer zo groot is $(10 \cdot 133)^2$ als $10 \cdot 133^2$ (zonder rekenmachine)?
Hoe kom je daarop?

$(10x)^2 = 10x \cdot 10x = 10 \cdot x \cdot 10 \cdot x = 10 \cdot 10 \cdot x \cdot x = 100x^2$, dus $(10x)^2$ is 10 keer zo groot als $10x^2$.

c Hoe schrijf je $(ab)^2$ zonder haakjes?

d Schrijf $(-3)^2$, $(-3)^3$ en $(-3)^4$ zonder haakjes.

e Schrijf $(-a)^2$, $(-a)^3$ en $(-a)^4$ zonder haakjes.

De distributiewet

Uitdrukkingen met variabelen waar haakjes in voorkomen, kun je ook zonder haakjes schrijven.

Distributiewet

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

11

$8 \cdot 10 = 80$ en $8 \cdot 7 = 56$, dus $8 \cdot 17 = 80 + 56 = 136$.
Hier pas je de distributiewet $a(b + c) = ab + ac$ toe.

a Wat zijn de getallen a, b en c?

De distributiewet $a(b - c) = ab - ac$ kun je toepassen om $18 \cdot 999$ uit te rekenen.

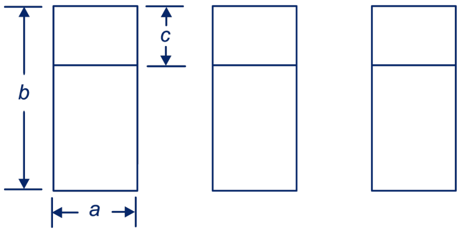
b Wat neem je dan voor a, b en c? Bereken ook $18 \cdot 999$.

Bij de twee gelijkheden kun je plaatjes maken.

c Kleur op het werkblad in de eerste rechthoek het gebied met oppervlakte $a(b+c)$, in de tweede het gebied met oppervlakte ab en in de derde het gebied met oppervlakte ac.
Je ziet: $a(b+c) = ab + ac$.

In figuur 2 zie je weer drie keer eenzelfde rechthoek (in tweeën gedeeld).

d Kleur op het werkblad in de eerste rechthoek het gebied met oppervlakte $a(b-c)$, in de tweede het gebied met oppervlakte ab en in de derde het gebied met oppervlakte ac.
Je ziet: $a(b-c) = ab - ac$.



figuur 2

Maar de gelijkheden kloppen voor alle getallen.

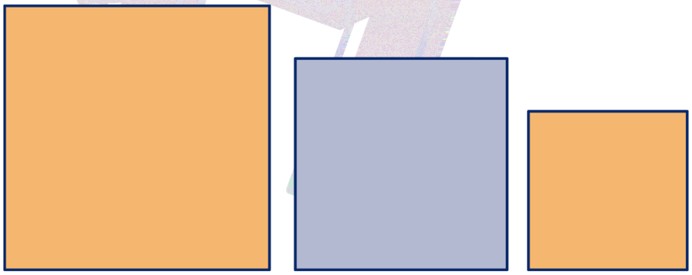
e Controleer de gelijkheid $a(b-c) = ab - ac$ voor $a = \text{-}2$, $b = 3$ en $c = \text{-}4$.

12 Schrijf zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.
$3(x+5) + 3(x-5)$
$\text{-}3(x-5) + 2(x-5)$
$\text{-}3x^2 + (3x)^2$
$a(2a+b) + b(\text{-}a-2b)$

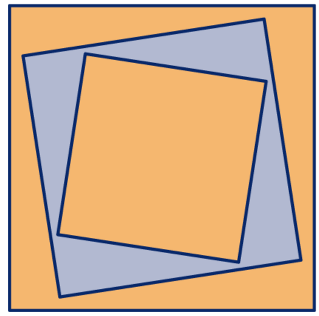
a en b zijn getallen. Een uitdrukking als $a+b$ heet een **tweeterm**, omdat er twee termen worden opgeteld; a en b zijn de **termen**.
Ook $3a^2 + 17ab$ is een tweeterm; $3a^2$ en $17ab$ zijn de termen.
$3a^2 + 17b - ab + 2012$ is een vierterm.

Op twee manieren

13 In figuur 1 zie je drie vierkanten, de okerkleurige hebben oppervlakte 100 en 36 cm^2. De blauwe heeft oppervlakte 64 cm^2.



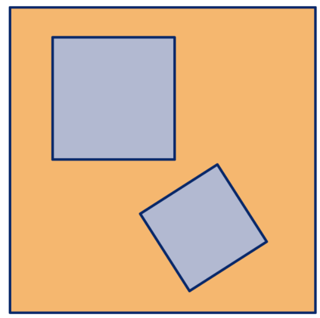
figuur 1



figuur 2

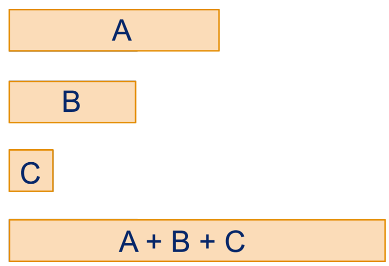
De drie vierkanten worden op elkaar geplakt zoals in figuur 2.
Hoeveel cm^2 oker zie je nog in de geplakte figuur? Je kunt dit op twee manieren berekenen, met en zonder haakjes. Schrijf op hoe.

14 Twee blauwe vierkanten van 16 en 9 cm^2 worden op een oker vierkant van 100 cm^2 geplakt.
Hoe dat gedaan is, zie je in het plaatje.
Hoeveel cm^2 oker nog te zien is, kun je op twee manieren uitrekenen, met en zonder haakjes.
Schrijf de twee berekeningen op.



15 name: optional file: optional state: unknown

Gegeven zijn drie even brede stroken van lengte A, B en C. Daaronder staat een strook van lengte $A + B + C$.



a Teken zo ook stroken van lengte:
$A + B - C$,
$A - B + C$,
$A - B - C$,
$A + (B + C)$,
$A + (B - C)$,
$A - (B + C)$ en
$A - (B - C)$

b Welke van de bovenstaande stroken zijn gelijk?

In de voorgaande opgaven heb je gezien dat je in een uitdrukking als
$a - (b - c)$ of $a - (b + c)$
de haakjes niet zomaar weg kunt laten.
Er geldt namelijk $a - (b - c) = a - b + c$ en $a - (b + c) = a - b + c$.

Herhaling uit hoofdstuk 9 van deel 1b

Bij het optellen en aftrekken van getallen gebruik je het volgende.

Een positief getal erbij tellen: ga op de getallenlijn naar **rechts**
Een negatief getal erbij tellen: ga op de getallenlijn naar **links**
Een positief getal eraf trekken: ga op de getallenlijn naar **links**
Een negatief getal eraf trekken: ga op de getallenlijn naar **rechts**

16 De getallenlijn hieronder met de getallen 0, a en b erop staat ook op het werkblad.

Teken nauwkeurig de getallen $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $a+-b$ en $-a+-b$ op de getallenlijn op het werkblad.

17 Bereken

a $12-(-3+5)$ en $12--3+5$
b $12+(-3+5)$ en $12+-3+5$
c $(-10+2)-(3-15)$ en $-10+2-3-15$
d $(-10+2)+(3-15)$ en $-10+2+3-15$
e $-10-(-3+15-12)$ en $-10--3+15-12$
f $-10+(-3+15-12)$ en $-10+-3+15-12$

name: re-mark file: re-mark state: unknown

Opmerking
In de voorgaande opgave zie je in onderdeel b, d en f:
als je iets van de vorm $(\ldots)+(\ldots)$ of $\ldots+(\ldots)$ uit moet rekenen, kun je de haakjes weglaten.
In de voorgaande opgave zie je in onderdeel a, c en e:
als je iets van de vorm $(\ldots)-(\ldots)$ $\ldots+(\ldots)$ uit moet rekenen, kun je de haakjes niet zomaar weglaten.

Een belangrijk onderwerp in dit hoofdstuk is: uitdrukkingen zonder haakjes schrijven (haakjes wegwerken). Als je haakjes weg wil laten, kan dat door van een aftrekking eerst een optelling te maken.
Hierbij gebruiken we het volgende.

Een getal er van aftrekken = Het tegengestelde erbij tellen

Twee getallen zijn **tegengesteld** als ze samen 0 zijn (hun som 0 is).
Het tegengestelde van x noteren we met $-x$.
Op de getallenlijn liggen tegengestelde getallen symmetrisch ten opzichte van 0.

18 Vul de tabel in.

a	b	$a-b-2$	$-a+b+2$
2	-2		
-7	10		
-11	-12		
-5	7		
	-10	6	

Als je het goed gedaan hebt, zie je dat de getallen in de laatste twee kolommen tegengesteld zijn. Blijkbaar zijn $a-b-2$ en $-a+b+2$ tegengesteld, dus $-(a-b--2) = -a+b+2$.
Dat kun je in het volgend voorbeeld zien.

Voorbeeld

$-(a-b-2)$ zonder haakjes schrijven

$a-b-2$ kun je schrijven als $a+-b+-2$.
Het tegengestelde hiervan is: $-a+b+2$, want $a+-b+-2+-a+b+2 = a+-a+-b+b+-2+2 = 0$.
Kort opgeschreven: $-(a-b-2) = -a+b+2$.

$-a+b-2c$ kun je schrijven als $-a+b+-2c$.
Het tegengestelde hiervan is: $a+-b+2c$, want $-a+b+-2c+a+-b+2c = -a+a+b+-b+-2c+2c = 0$.
Kort opgeschreven: $-(-a+b-2c) = a-b+2c$.

19 Schrijf zonder haakjes.
$-(2+a-2b)$
$-(2a+b-2c)$
$-(-a+-b-c)$

20 In opgave ?? heb je een voorbeeld van de regel $a-(b-c) = a-b+c$ gezien.

a Controleer of die regel ook geldt voor $a=-3$, $b=-7$, $c=10$ en voor $a=-3$, $b=8$, $c=-11$.

In opgave 14 heb je een voorbeeld van de regel $a-(b+c) = a-b-c$ gezien.

b Controleer of die regel ook geldt voor $a=-3$, $b=-7$, $c=10$ en voor $a=-3$, $b=8$, $c=-11$.

name: remark file: remark state: unknown

Opmerking

Dat $a-(b-c) = a-b+c$, kun je ook als volgt inzien:

$$a - (b - c) = a + \text{-}(b - c)$$

want: aftrekken is het tegengestelde erbij tellen

$$a + \text{-}(b - c) = a + (\text{-}b + c)$$

want: het tegengestelde van $b - c$ is $\text{-}b + c$

$$a + (\text{-}b + c) = a + \text{-}b + c$$

want: bij een optelling mag je de haakjes weglaten

Dus: $a - (b - c) = a - b + c$

En: $a - (b + c) = a + \text{-}(b + c) = a + \text{-}b + \text{-}c = a - b - c$.

21 Neem de tabel over en vul hem verder in.

x	a	b	c	$x - (a - b - c)$	$x - a + b + c$
1	2	3	4		
-1	5	-3	-4		
5		1	2	7	
-1	1	-2			-6

name: remark file: remark state: unknown

Opmerking

In de voorgaande opgave zijn de laatste twee kolommen gelijk. Dat kun je als volgt inzien.

$x - (a - b - c) = x + \text{-}(a - b - c) = x + (\text{-}a + b + c) = x + \text{-}a + b + c = x - a + b + c$

Winst en verlies

22 Ali en Ben spelen niets liever dan spelletjes tegen elkaar. Ali houdt het verloop van de spelletjes bij. In de eerste regel staat het verloop van het volgende spel: Ali verliest eerst 2 (eurocent), vervolgens wint hij 3, verliest daarna 5 en wint daarna 2. Dan wint Ben eerst 2, verliest dan 3, wint 5 en verliest ten slotte 2.
In de tweede regel staat het verloop van het tweede spel.

ALI	BEN
-2 + 3 – 5 + 2	2 – 3 + 5 – 2
2 + a – 3	
-2 – a + b	
	2x – y + 3
-x + y – z	

a Wat moet er in de tweede regel bij Ben staan?

b En in de derde regel?

c Wat krijg je als de twee getallen van Ali en Ben in een regel optelt?

d Neem de tabel over en vul hem verder in.

De getallen a en b hoeven niet postief te zijn. Vul maar eens voor $a = \text{-}3$ en voor $b = \text{-}7$ in.

e Reken uit wat er in de tweede regel bij Ali en Ben uitkomt. En ook in de derde regel.

23

name: optional file: optional state: unknown

Joris en Corien zijn aan het knikkeren. Samen hebben ze 54 knikkers. Als ze beginnen heeft Joris er x.

a Hoeveel heeft Corien er dan? (Uitdrukken in x.)

Joris heeft pech: hij verliest y knikkers aan Corien.

b Hoeveel knikkers heeft Joris nu?

c Druk het aantal knikkers dat Corien nu heeft op twee manieren uit in x en y: met haakjes en zonder haakjes.

d Welke gelijkheid heb je gevonden voor de getallen x en y?

Op de getallenlijn

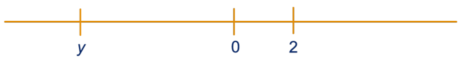
24

Op de getallenlijn in figuur 1 zijn 0, 2 en x aangegeven.

figuur 1

a Neem de getallenlijn over en teken zo nauwkeurig mogelijk:
$x + 2$, $-(x + 2)$, $-x + 2$, $-(-x + 2)$.
Geef aan hoe je dat gedaan hebt.

Op de getallenlijn in figuur 2 zijn 0, 2 en y aangegeven.



figuur 2

b Neem de getallenlijn over en teken zo nauwkeurig mogelijk:
$y + 2$, $-(y + 2)$, $-y + 2$, $-(-y + 2)$.
Hoe doe je dat?

25

Geef op de getallenlijn op het werkblad aan:
$-x$, $-y$, $x + y$, $x + -y$, $x - y$, $-(x + y)$, $-x + -y$.
Geef aan hoe je dat gedaan hebt, gebruik eventueel meer dan één getallenlijn.

Haakjes wegwerken

Voorbeeld

Nog een voorbeeld. Let goed op de stappen:
In dit voorbeeld vereenvoudigen we in een iets andere volgorde.

… − (…) schrijf je zó zonder haakjes.

1. Maak er een optelling van volgens de regel: aftrekken = het tegengestelde erbij optellen.
2. Nu kun je de haakjes weglaten.

26

Schrijf de volgende uitdrukkingen zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

$-(-a - 2b - 2c) + (2a - 3b - 2c)$

$-(-a - 2b - 2c) - (2a - 3b - 2c)$

$(-a + 2b - 2c) - (-2a - 3b + 2c)$

27 Schrijf de volgende uitdrukkingen zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

$3a + (a + 2)$	$20 - (x + 1)$
$-3a - (a - 2)$	$2x - (x - 1)$
$3a + (-a + 2)$	$2x - (3x - 5)$
$-3a + (-a - 2)$	$3x - (3x - 5)$

Voorbeeld

$2x - 2(x + 5) = 2x + -2(x + 5) = 2x + -2x + -10 = -10$

of korter:

$2x - 2(x + 5) = 2x - 2x - 10 = -10$

28

a Schrijf zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

$3(x + 5)$	$3(x + 5) + 5(x - 3)$
$5(x + 5) - 3(x + 2)$	$5(x + 5) - 3(x - 5)$

b Schrijf zonder haakjes.

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)$
$-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)$	$-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}\right)$

29 Vul de tabel in.

x	x^2	$-x^2$	$(-x)^2$	$-2x^2$	$(-2x)^2$	$4x^2$
1						
-3						
5						
-10						

name: re-mark file: re-mark sta-te: un-

Opmerking

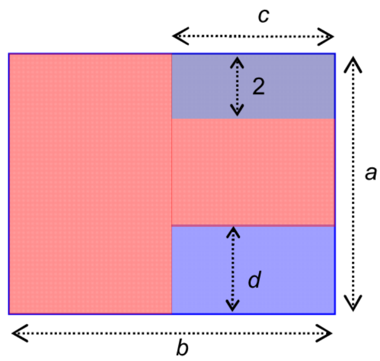
Je ziet in de voorgaande opgave dat de laatste twee kolommen gelijk zijn. Dat komt omdat $(-2x)^2 = -2x \cdot -2x = -2 \cdot x \cdot -2 \cdot x = -2 \cdot -2 \cdot x \cdot x = 4x^2$.

Zo zijn ook $(-x)^2$ en x^2 gelijk.

30 Schrijf zonder haakjes.

$(5x)^2 =$	$3(5x)^2 =$
$(3 \cdot 5x)^2 =$	$5(-2x)^2 =$
$5(-x)^2 =$	$-5 \cdot -x^2 =$

31



De rechthoek van a bij b in de figuur is voor een deel blauw en voor de rest rood gekleurd.
De andere maten staan ook in de figuur.
Het rode deel bestaat uit twee rechthoeken.

a Druk de oppervlakte van elk van de rode rechthoeken in a, b, c en d uit.

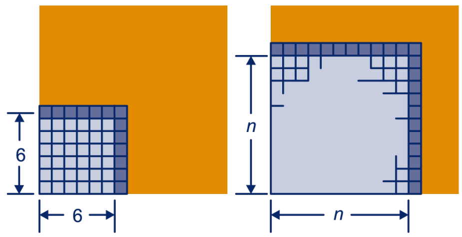
b Druk met behulp van je antwoorden uit **a** de oppervlakte van het rode gebied in a, b, c en d uit. Schrijf je antwoord zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk.

c Druk de oppervlakte van het blauwe deel in c en d uit. Schrijf je antwoord zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk.

De oppervlakte van het rode deel kun je ook vinden door de oppervlakte van het blauwe deel van de oppervlakte van de hele rechthoek af te trekken.

d Doe dat en schrijf je antwoord zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

32 Mijn buurman legt een vierkant terras met vierkante tegels. Hij werkt vanuit de hoek linksonder. Hij gebruikt vierkante betontegels die op een grote stapel voor zijn huis liggen. Op een gegeven moment heeft buurman een stuk van 6 bij 6 tegels gelegd. Hij wil het stuk uitbreiden tot een stuk van 7 bij 7 tegels.



a Hoeveel tegels moet hij dan van de stapel halen (in de tekening links donkerblauw)?

b Hoeveel tegels moet hij halen als hij een stuk van 15 bij 15 tegels wil uitbreiden tot een stuk van 16 bij 16 tegels?

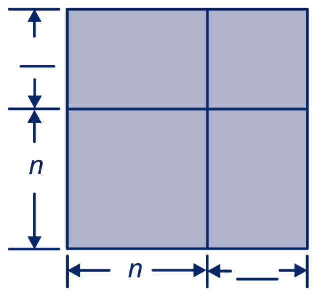
c En hoeveel als hij een stuk van n bij n tegels wil uitbreiden tot een stuk van $n+1$ bij $n+1$ tegels?

d Bereken het aantal tegels dat je nodig hebt voor een terras van $n+1$ bij $n+1$ tegels op de volgende twee manieren.
Manier 1: het aantal tegels voor een terras van n bij n tegels + het aantal tegels dat erbij komt.
Manier 2: het aantal tegels in de lengte × aantal tegels in de breedte.

e Welke gelijkheid vind je?

f Bereken met deze formule 101^2.

33 Een vierkant terras is gelegd met $n^2 + 10n + 25$ tegels. Dat zie je in het plaatje.

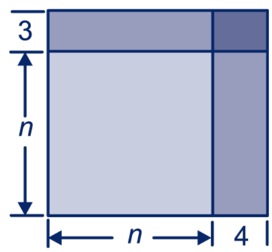


a Hoeveel tegels liggen er op elk van de vier delen van het terras?

b Wat zijn de afmetingen van dit terras (lengte en breedte)?

c Welke gelijkheid vind je als je de oppervlakte van het terras op twee manieren opschrijft?

34 In figuur 1 is een terras getekend van $n+4$ bij $n+3$ tegels.



figuur 1

a Hoeveel tegels liggen er op elk van de vier delen van het terras?

b Welke gelijkheid vind je als je de oppervlakte van het terras op twee manieren opschrijft?

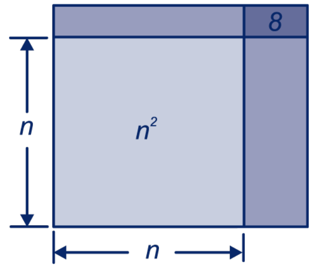
Een ander terras meet $n+2$ bij $n+5$ tegels.

c Teken een plaatje bij dit terras. Vermeld de afmetingen erbij.

d Welke gelijkheid vind je door de oppervlakte van dit terras op twee manieren op te schrijven?

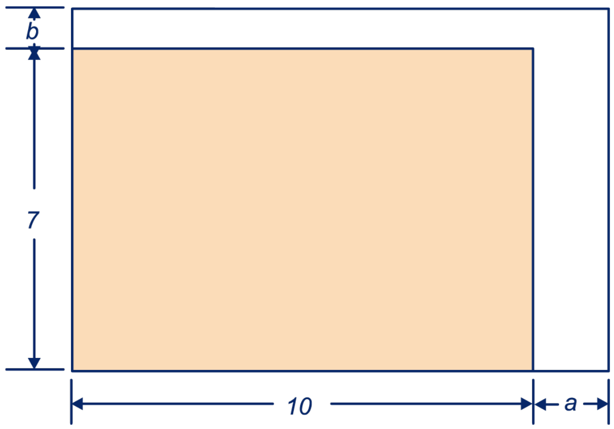
Een rechthoekig terras is gelegd met $n^2 + 6n + 8$ tegels.

e Welke gelijkheid vind je door de oppervlakte van het terras op een andere manier op te schrijven?
Je kunt gebruik maken van figuur 2.



figuur 2

35 Een rechthoek van lengte 10 en breedte 7 heeft oppervlakte 70. Een tweede rechthoek is iets langer en ook iets breder; de lengte is $10 + a$, de breedte is $7 + b$.



a Hoeveel is de oppervlakte van de rechthoek groter dan 70 (uitdrukken in a en b)?

b Hoe kun je $(10 + a)(7 + b)$ zonder haakjes schrijven?

Het getal $100 + p$ vermenigvuldigen we met $3 + q$: dus $(100 + p)(3 + q)$.
De uitkomst bestaat uit vier termen.

c Schrijf die uitkomst op.

d Schrijf $(a + 3)(b + 5)$ zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk (kijk naar onderdeel **a**). Maak er eventueel een plaatje bij.

a, b, c en d zijn getallen. $(a + b)(c + d)$ is een product van twee tweetermen, omdat twee tweetermen $(a + b)$ en $(c + d)$ worden vermenigvuldigd.

Voor alle getallen a, b, c en d geldt:
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

36 Controleer de bovenstaande gelijkheid voor de getallen $a = -1$, $b = 5$, $c = -7$ en $d = 3$.

Als je twee tweetermen vermenigvuldigt, bestaat de uitkomst uit vier termen. Elke term van de eerste tweeterm moet worden vermenigvuldigd met elke term van de tweede tweeterm.

37 Teken voor positieve getallen a, b, c en d een plaatje bij de gelijkheid $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.
Leg uit hoe je aan de hand van het plaatje de gelijkheid kunt begrijpen.

38 De gelijkheid $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ kun je gebruiken om de getallen 34 en 27 te vermenigvuldigen: $34 \cdot 27 = (30+4)(20+7) = 30 \cdot 20 + 30 \cdot 7 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 7 = \ldots.$

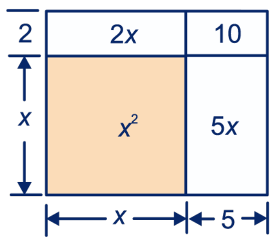
a Welke uitkomst krijg je?

b Bereken zo ook: $\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{2}\right)$. Controleer achteraf je uitkomst door het product $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2}$ met je rekenmachine uit te rekenen.

c Vul in en bereken: $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = \frac{\ldots}{2} \cdot \frac{\ldots}{2} = \ldots.$
Vind je hetzelfde als in het vorige onderdeel?

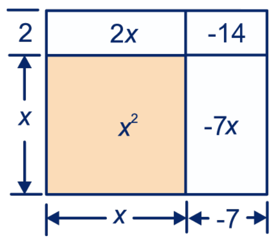
Oefenen

Voorbeeld
$(x+2)(x+5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 2 \cdot x + 2 \cdot 5$ en dit kun je korter schrijven als $x^2 + 7x + 10$. Bij deze gelijkheid kun je een plaatje tekenen (zie figuur 1).



figuur 1

$(x+2)(x-7) = (x+2)(x+\text{-}7) = x \cdot x + x \cdot \text{-}7 + 2 \cdot x + 2 \cdot \text{-}7 = x^2 - 5x - 14.$
Bij $(x+2)(x-7)$ kun je ook een plaatje tekenen, al heeft dat weinig met de werkelijkheid te maken (zie figuur 2).



figuur 2

39
a Schrijf de volgende uitdrukkingen zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.
Kijk goed naar de voorbeelden hierboven. Maak er zo nodig een plaatje bij.

$(x-3)(x-7)$	$(x+3)(x-7)$
$(x+8)(x-1)$	$(x-8)(x+1)$
$(x+4)(x-4)$	$(x-4)(x-4)$
$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$	$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

b

$(2x-3)(x-7)$ $\quad$ $(2x+3)(x-7)$
$(2x+8)(3x-1)$ $\quad$ $(2x-8)(3x+1)$
$(2x+4)\left(\frac{1}{2}x-4\right)$ $\quad$ $(2x-4)(2x-4)$
$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$ $\quad$ $2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

c $(p+2q)^2$ $\quad$ $(p-2q)^2$
$(5p+2q)^2$ $\quad$ $(5p-2q)^2$
$(-5p+2q)^2$ $\quad$ $(-5p-2q)^2$
$(-5p+2q)(5p+2q)$ $\quad$ $(5p-2q)(-5p+2q)$

40 In opgave 4 heb je met knippen de volgende gelijkheid gezien.
$a(a+1)=(a+2)(a-1)+2$
Laat zien dat deze gelijkheid juist is door de haakjes weg te werken.

41 Een marktkoopman koopt 20 kilo bessen in voor 2 euro per kilo.

a Hij verkoopt ze voor $2+x$ euro per kilo.
Hoeveel heeft hij verdiend?

De zaken gaan goed. In plaats van 20 kilo, koopt hij n kilo meer, dus $20+n$ kilo.

b Druk het bedrag dat hij ervoor moet betalen uit in n.
Doe dat op twee manieren, met en zonder haakjes.

De verkoopprijs op de markt is $2+x$ euro. Hij verkoopt al zijn bessen, dus $20+n$ kilo. Het totale verkoopbedrag is $(2+x)(20+n)$.

c Schrijf dit zonder haakjes.

42 We hebben in opgave 39 een product van tweetermen als drieterm geschreven. Andersom kan ook. Doe dat bij:

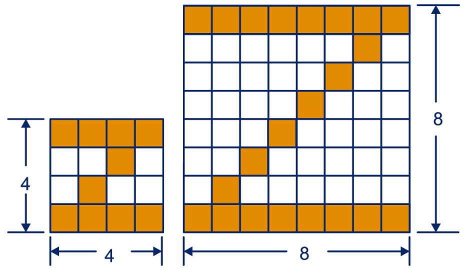
$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$ $\quad$ x^2-5x+6
$x^2+7x+6=(x+\ldots)(x+\ldots)$ $\quad$ x^2-7x+6
x^2+x-6 $\quad$ x^2-x-6
x^2+5x-6 $\quad$ x^2-5x-6

42 We hebben in opgave 39 een product van tweetermen als drieterm geschreven. Andersom kan ook. Doe dat bij:

$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$ $\quad$ $4a^2-4ab+b^2$
x^2+7x+6 $\quad$ $4a^2-5ab+b^2$
x^2-x-6 $\quad$ $2a^2+7ab+5b^2$
x^2+5x-6 $\quad$ $2a^2+11ab+5b^2$

43

In figuur 1 zie je twee vierkanten. Het linker vierkant is 4 bij 4 hokjes en telt dus 16 hokjes. Door een aantal hokjes te kleuren, is in dit vierkant de letter Z aangeven.
Een mooiere letter Z krijg je als je begint met een vierkant van 8 bij 8 hokjes. Dan bestaat het vierkant uit 64 hokjes. Op deze manier worden op het scherm van een computer letters en cijfers aangegeven.



figuur 1

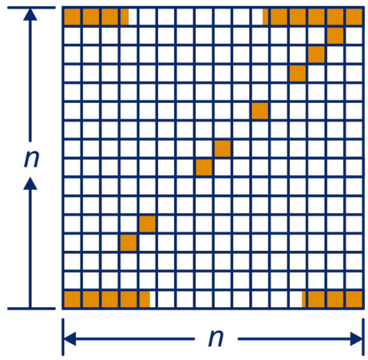
a Hoeveel hokjes blijven er wit als je op deze manier de letter Z aangeeft in een vierkant van 8 bij 8 hokjes?
En in een vierkant van 32 bij 32 hokjes?

Het aantal hokjes dat wit blijft als je de letter Z aangeeft in een vierkant, kun je op twee manieren berekenen.

- Je berekent het totaal aantal hokjes en trekt daar het aantal gekleurde hokjes van af.
- Je let niet op de bovenste en de onderste rij van het vierkant; dat zijn allemaal gekleurde hokjes. Dan doe je: aantal rijen maal aantal witte hokjes per rij.

b Bereken op deze twee manieren het aantal hokjes dat wit blijft in een vierkant van 64 bij 64 hokjes.

In een vierkant van n bij n hokjes de letter Z aangegeven, zie figuur 2.



figuur 2

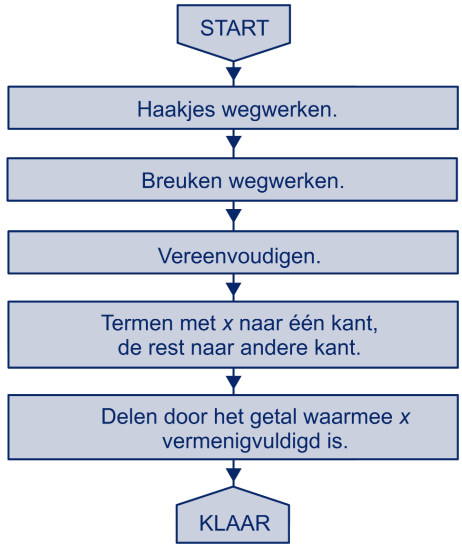
c Schrijf op de twee manieren het aantal hokjes op dat wit blijft. Laat haakjes in je antwoord gewoon staan.
d Welke gelijkheid vind je?
e Werk de haakjes uit en controleer of de gelijkheid klopt.

Voorbeeld

In hoofdstuk 14 heb je vergelijkingen opgelost volgens het afgebeelde schema.

Los op: $\frac{1}{2}(x-7) = 2x - \left(\frac{1}{4}x + 1\right)$

We lossen deze vergelijking op volgens het schema.



Controle:

$\frac{1}{2}(x-7) = \frac{1}{2}(\text{-}2-7) = \frac{1}{2}\cdot\text{-}9 = \text{-}4\frac{1}{2}$

$2x - \left(\frac{1}{4}x+1\right) = 2\cdot\text{-}2 - \left(\frac{1}{4}\cdot\text{-}2+1\right) = \text{-}4 - \left(\text{-}\frac{1}{2}+1\right) = \text{-}4 - \frac{1}{2} = \text{-}4\frac{1}{2}$

Klopt!

44 Los op.

a $3(x-5) = 2(x-7)$

b $3x - 5 = 2x - (x-1)$

c $\text{-}3x - 5 = 2x - (x+1)$

d $\text{-}3(x-5) = x - 3(x+1)$

45 Los op en controleer je antwoord.

a $(x+4)(x-4) = (x-2)^2$

b $2x^2 - (x+1)^2 = (x-2)^2$

c $4(x+1)(x-3) = (2x)^2$

d $x(x+5) = (x+1)(x+5)$

46 Bij de slijterij kun je kistjes kopen met twee flessen drank erin. Leuk om iemand cadeau te doen. Je kunt kiezen uit drie combinaties:

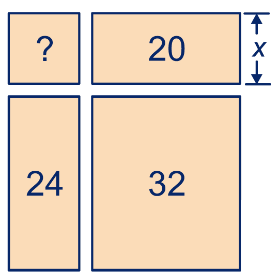
- 1 fles wijn en 1 fles sherry: zo'n kistje kost 12 euro,
- 1 fles sherry en 1 fles cognac: zo'n kistje kost 17 euro,
- 1 fles cognac en 1 fles wijn: zo'n kistje kost 20 euro.

Hierbij is de slijter uitgegaan van een zekere prijs voor de fles wijn, voor de fles sherry en voor de fles cognac. Noem de prijs van een fles wijn: x (euro).

a Druk de prijs van een fles sherry uit in x.
Druk ook de prijs van een fles cognac uit in x.

b Bereken de prijs van een fles wijn, de prijs van een fles sherry en de prijs van een fles cognac.

47 Een rechthoek is in vier kleinere rechthoeken gezaagd. De omtrek van drie van deze kleinere rechthoeken is bekend: 20, 24 en 32. De hoogte van de vierhoek met het ? noemen we x.



a Druk de hoogte en de breedte van de andere rechthoeken in x uit.

b Wat is de omtrek van de vierde rechthoek?

Kangoeroe 2010, wizBRAIN vraag 16.

Meer vereenvoudigen

In het volgende voorbeeld is het vereenvoudigen nog wat moeilijker.

Voorbeeld

48 Vereenvoudig.

a $3(x-3)+4x-7-2(3-x)$
b $8-(\text{-}2x+4)+\text{-}2(x-7)$
c $2x-3(x-2y)+(\text{-}2x-2y)$
d $2x-y-(\text{-}x-2y)-(\text{-}2x-2y)$

49 Los op.

a $x+2-2(2x+4)=6$
b $\text{-}2(2x+3)-5(6x-7)=81-x$
c $\text{-}(x+3)+3(2x+4)=\text{-}7(x-3)$

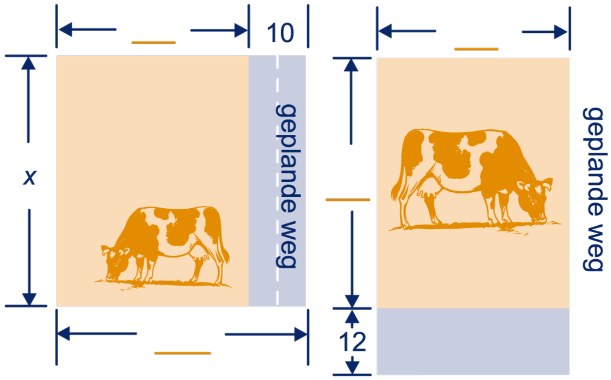
50 In de bioscoopzaal Carré is het aantal stoelen in een rij net zo groot als het aantal rijen. De zaal Carolus is langer en smaller: er zijn vijf rijen meer dan in Carré, maar in elke rij staan er vier stoelen minder.
We noemen het aantal rijen in Carré x.

a Druk het aantal plaatsen in Carré uit in x.
b Druk het aantal rijen in Carolus uit in x.
Druk het aantal stoelen op een rij in Carolus uit in x.

Nu is bovendien gegeven dat er in de bioscoopzalen evenveel plaatsen zijn.

c Welke vergelijking voor x volgt hieruit?
d Los deze vergelijking op.
e Hoeveel plaatsen zijn er in elk van de zalen?

51 Boer Berends - uit het hoofdstuk Vergelijkingen - had een vierkante akker. Het oostelijke deel van die akker, een strook van 10 meter breed, heeft hij moeten afstaan vanwege de aanleg van een weg. Je ziet dat in de linker tekening.
In plaats van die oostelijke strook krijgt hij er aan de zuidkant een andere strook bij. Die strook is 12 meter breed. Dat zie je in de rechter tekening. De akker van boer Berends is nu rechthoekig geworden, maar de oppervlakte is hetzelfde gebleven. Uit deze gegevens kunnen we de afmetingen van de akker berekenen. We noemen de lengte van de oude akker x meter.



a Wat zijn de afmetingen van de nieuwe akker van Berends?

b Hoe groot is de oppervlakte van de oorspronkelijke vierkante akker?
En van de rechthoekige akker?

c Welke vergelijking kun je nu opstellen?

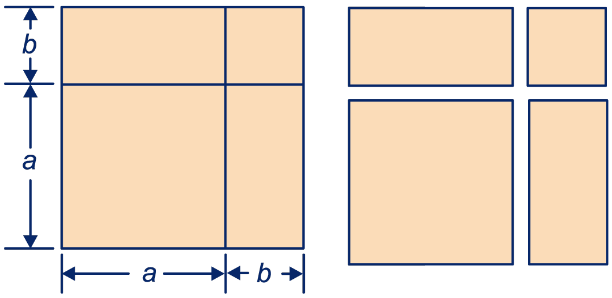
d Los die vergelijking op.

e Wat zijn de afmetingen van de nieuwe akker?

Voor alle getallen a, b en c geldt:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Dit zijn de zogenaamde **merkwaardige producten**. De producten krijgen extra aandacht, omdat er vaak tegen gezondigd wordt.

52 Om te zien dat de drie gelijkheden juist zijn, hoef je alleen maar de haakjes uit te werken. Doe dat.

53 Het plaatje hoort bij het eerste merkwaardige product (voor positieve getallen a en b).
Leg uit hoe je met het plaatje kunt begrijpen dat
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



54 Schrijf zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

a $3(x+1)^2$, $(3x-1)^2$ en $(3x+1)(3x-1)$
b $(x+1)^2 - (x-1)^2$, $(x+1)^2 + (x-1)^2$ en $((x+1)(x-1))^2$

De term merkwaardig komt van 'opmerkenswaardig': de moeite van het onthouden waard, zou je dat (vrij) kunnen vertalen. De drie merkwaardige producten zijn onder die naam pas eind negentiende eeuw in het onderwijs terecht gekomen.

55
a Schrijf $a^2 - (a+b)(a-b)$ zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

In de INTRO heb je de volgende gelijkheden ontdekt.
In opgave 1: $n^2 - (n+1)(n-1) = 1$;
In opgave 2: $n^2 - (n+2)(n-2) = 4$;
In opgave 3: $n^2 - (n+3)(n-3) = 9$.

b Verklaar het bovenstaande met het resultaat van onderdeel **a**.

De merkwaardige producten worden vooral van rechts naar links gebruikt, dus als:

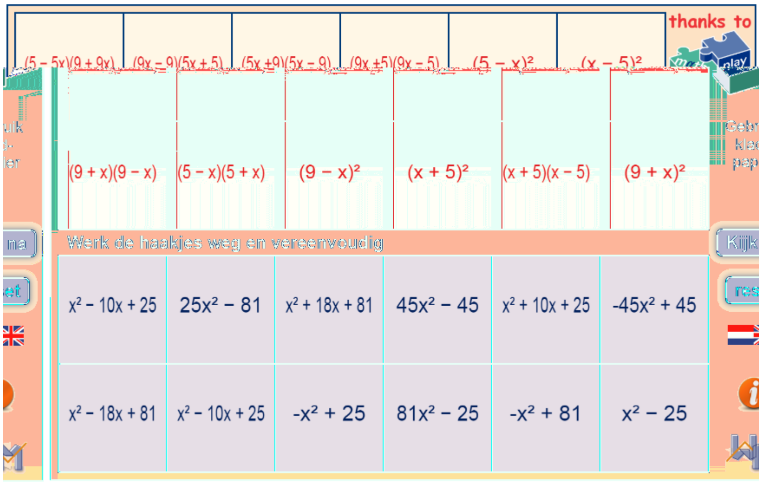
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

56

Schrijf op deze manier als kwadraat of als product van twee tweetermen.

$x^2 + 16x + 64$	$x^2 - 16x + 64$	$x^2 - 64$
$4x^2 + 12x + 9$	$4x^2 - 12x + 9$	$4x^2 - 9$
$100x^2 + 20xy + y^2$	$100x^2 - 20xy + y^2$	$100x^2 - y^2$

Met de volgende 'miniloco' kun je oefenen.



de volgorde van bewerkingen

1. Eerst wat tussen de haakjes staat uitrekenen.
2. Machtsverheffen (waaronder worteltrekken en kwadrateren) gaat voor vermenigvuldigen en delen.
3. Vermenigvuldigen en delen gaan voor optellen en aftrekken.

Voorbeelden

- $3 \cdot (2 - 5)^2 - 8 : (6 - (4 - 2)) = 3 \cdot (\text{-}3)^2 - 8 : (6 - 2) = 27 - 8 : 4 = 27 - 2 = 25$
- $5 \cdot (\text{-}4x)^2 = 5 \cdot 16x^2 = 80x^2$
- $5 \cdot \text{-}4x^2 = \text{-}20x^2$

de distributiewet

Voor alle getallen a, b en c geldt:

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

Voorbeelden

- $3(2x - 5) = 6x - 15$
- $\text{-}3(\text{-}2x + 5) = 6x - 15$

tegengestelde

- Het tegengestelde van a noteren we als $\text{-}a$.
- Als twee getallen elkaars tegengestelde zijn, liggen ze symmetrisch om 0 op de getallenlijn.
- Als twee getallen elkaars tegengestelde zijn, dan is hun som gelijk aan nul.

Voorbeelden

- $\text{-}(3x - 2) = \text{-}3x + 2$
- $2(x - 1) + \text{-}(x - 2) = 2x - 2 + \text{-}x + 2 = x$
- $2(x - 1) + \text{-}(2x + 7) = 2x - 2 + \text{-}2x - 7 = \text{-}9$

trek af = tel het tegengestelde erbij op

Ergens iets van aftrekken is hetzelfde als het tegengestelde erbij optellen.

Voorbeelden

- $\text{-}(2x - 1) - (\text{-}2x + 3) = \text{-}2x + 1 + (2x - 3) = \text{-}2$
- $3(x - 2) - (\text{-}2x - 6) = 3x - 6 + (2x + 6) = 5x$

producten van tweetermen

Voor alle getallen a, b, c en d geldt:

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Voorbeelden

- $(a + 2)(b - 3) = ab - 3a + 2b - 6$
- $(2a + b)(2a - 3b) = 4a^2 - 4ab - 3b^2$

Voorbeelden

- $(2a + 5)(3b - 2) = 6ab - 4a + 15b - 10$
- $(2 + x)(3 - x) = 6 + x - x^2$
- Omgekeerd kun je $x^2 + 5x + 6$ schrijven als $(x + 3)(x + 2)$.

vergelijking opstellen en oplossen

Ad koopt twee broodjes kaas en een broodje ham voor 4,75 euro, Ed neemt een broodje kaas en een broodje gezond voor 3,40 euro en Ot een broodje ham en een broodje gezond voor 3,65 euro.

Wat kost een broodje kaas?

Oplossing

Noem de prijs van een broodje kaas x euro, dan:

broodje ham kost $4{,}75 - 2x$ euro (Ad),

broodje gezond kost $3{,}40 - x$ euro (Ed).

Dus: $4{,}75 - 2x + 3{,}40 - x = 3{,}65$ (Ot)

$4{,}75 + 3{,}40 - 3{,}65 = 3x$

$3x = 4{,}50$

$x = 1{,}50$.

Dus een broodje kaas kost 1,50 euro.

merkwaardige producten

Voor alle getallen a en b geldt:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Voorbeelden

- $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$
- $(2a - 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$
- $(2a + 3b)(2a - 3b) = 4a^2 - 9b^2$
- Omgekeerd kun je $a^2 - 9b^2$ schrijven als $(a + 3b)(a - 3b)$.

1

a Schrijf zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

$5 \cdot (\text{-}4x)^2$
$5 - (4x)^2$
$(5 - 4x)^2$
$(5 - 4)\,x^2$

b Schrijf zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

$\text{-}(2x - y - 2(x - y))$
$\text{-}(2x - y) - 2(x - y)$
$\text{-}(2x - (y - 2(x - y)))$
$2x - (y - 2(x - y))$

c Schrijf zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

$(2x - 5)^2$
$\text{-}(2x - 5)^2$
$2(x - 5)^2$
$(2(x - 5))^2$

d Schrijf zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

$3(x + 1)\,(y - 2)$
$3(x + 1) + (y - 2)$
$3(x + 1) - (y - 2)$
$3 - (x + 1) - (y - 2)$

e Schrijf als product van twee tweetermen.

$x^2 + 10x + 24$	$x^2 - 25$
$x^2 - 10x - 24$	$x^2 - 25y^2$
$x^2 + 10x - 24$	$xy + x + y + 1$
$x^2 - 10x + 24$	$xy - x + y - 1$

2

Om een vierkant grasveld wordt een trottoir gelegd van 2,50 meter breed. Daarvoor zijn 800 tegels van 50 bij 50 cm nodig. We gaan de afmetingen van het grasveld berekenen. De lengte van het grasveld noemen we x (m).

a Wat is de oppervlakte van een trottoirtegel in m^2?

b Schrijf de oppervlakte van het trottoir als verschil van twee kwadraten.

c Stel een vergelijking op voor x en bereken daaruit x.

d Wat zijn de afmetingen van het grasveld?

3

Een appel en een kiwi wegen samen 340 g, een kiwi en een peer wegen samen 300 g en een appel en een peer wegen samen 400 g.
Noem het gewicht van de appel a (gram).

a Wat wegen dan de kiwi en de peer, uitgedrukt in a?

b Stel een vergelijking op voor a en los die op.

c Wat weegt elk van de vruchten?

4

a Bereken $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}$ en $4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2}$.

De uitkomsten hebben een mooie regelmaat. Ze zijn allemaal een geheel getal min een kwart.
Bijvoorbeeld $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = 8\frac{3}{4}$ en $8\frac{3}{4} = 9 - \frac{1}{4}$. En 9 heeft iets met de grootste van 2 en 3 te maken.

b Wat?

c Schrijf $\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$ zonder haakjes.

d Kun je nu uit je hoofd $9\frac{1}{2} \cdot 10\frac{1}{2}$ uitrekenen?

5

Op de getallenlijn zijn twee getallen aangegeven: $-x+1$ en $2x-3$.

a Hoe groot is, uitgedrukt in x, de afstand tussen deze twee getallen? Schrijf je antwoord zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

Midden tussen de getallen $-x+1$ en $2x-3$ ligt het getal $3x - 8\frac{1}{2}$.

b Stel een vergelijking op voor x en bereken x.

6

Los op.

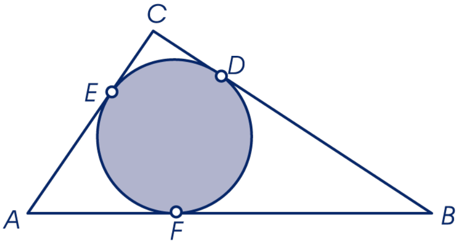
a $x - (1 - x) + 8 = 3(3 + x)$

b $(x + 3)(x - 3) = (x + 1)(x - 3)$

c $x - \frac{1}{2}(3x + 4) = -\left(2\frac{1}{2} - x\right)$

7

Driehoek ABC heeft zijden van 55, 45 en 30 mm. In de driehoek wordt de ingeschreven cirkel getekend; die raakt de zijden in de punten D, E en F. De lijnstukken AF en AE zijn gelijk. Evenzo BF en BD en ook CD en CE.
De lengte van AF noemen we x (mm).

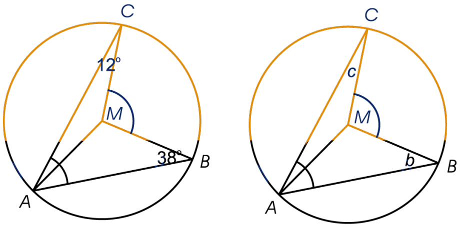


a Druk de lengte van de andere lijnstukken uit in x.

b Stel een vergelijking op voor x en los die op.

8

De punten A, B en C liggen op een cirkel met middelpunt M.
Stel dat $\angle C = 12^\circ$ en $\angle B = 38^\circ$.



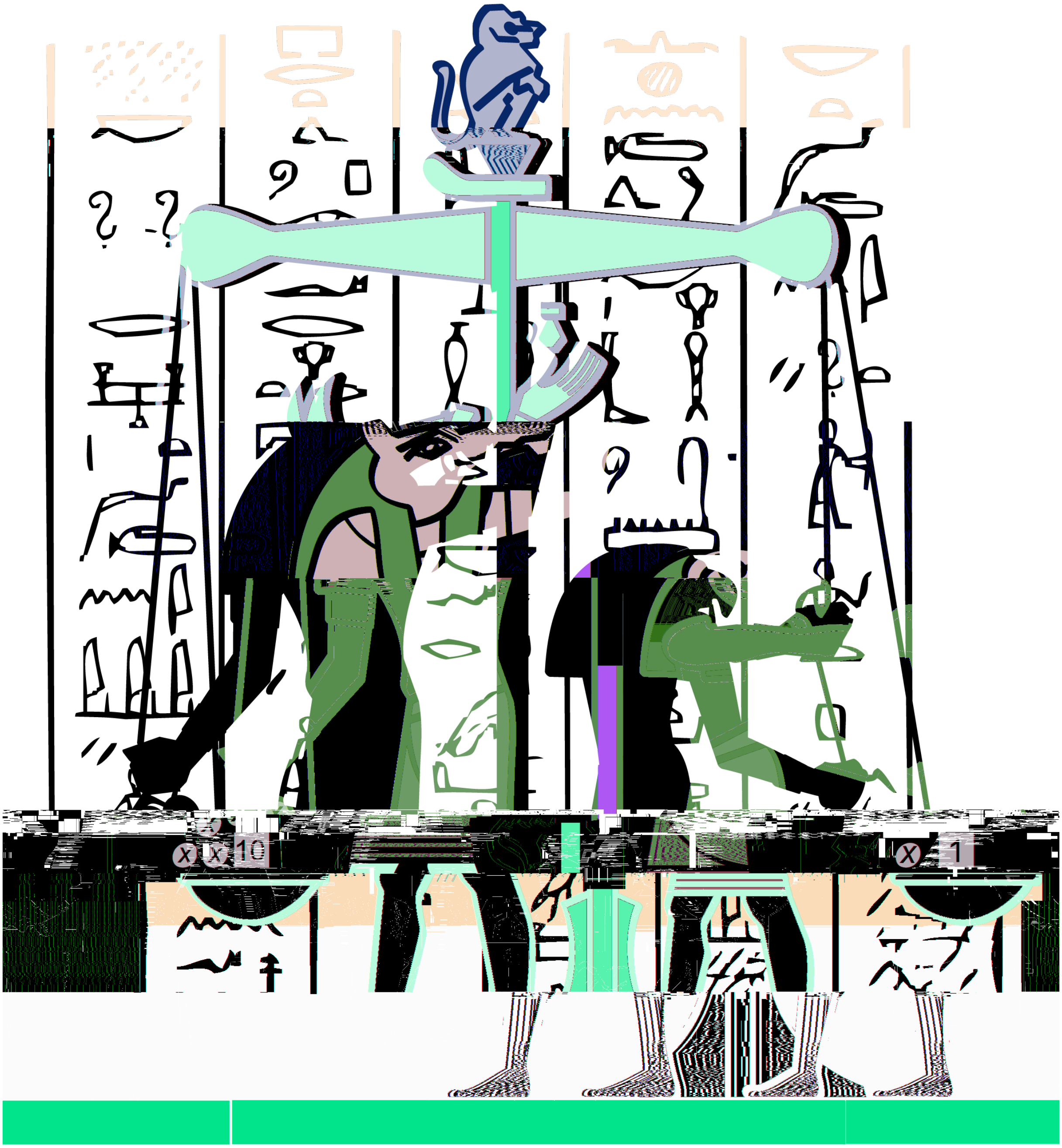
a Bereken $\angle BAC$ en $\angle BMC$.

Algemeen: noem $\angle C = c^\circ$ en $\angle B = b^\circ$.

b Druk $\angle BAC$ en $\angle BMC$ uit in b en c. Schrijf je antwoorden zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

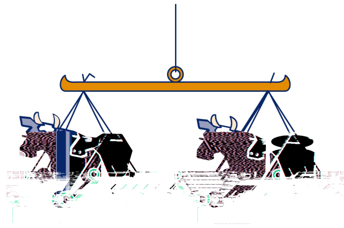
Als je drie punten A, B en C hebt op een cirkel met middelpunt M, dan is er een relatie tussen $\angle BAC$ en $\angle BMC$.

c Welke?


x x 10
x 1

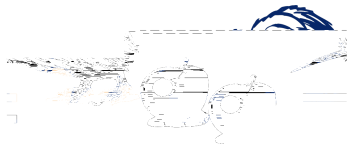
14.1 Intro

Je krijgt een aantal puzzels. Probeer maar of je het antwoord kunt vinden. Het is niet erg als je niet elke puzzel op kunt lossen.



1 Een koe weegt 500 pond plus de helft van haar eigen gewicht.
Wat weegt de koe?

2 Een man at zestig druiven in drie dagen. Elke dag at hij er acht meer dan de dag ervoor.
Hoeveel druiven at de man de eerste dag?



3 Twee appels kosten net zo veel als één kiwi. Zes kiwi's en acht appels kosten samen €5,–.
Wat kost een appel en wat kost een kiwi?

4 Ton is één jaar jonger dan Janneke en elf jaar ouder dan Gerd. Samen zijn ze 92 jaar.
Hoe oud is ieder?

14.2 Wat is het getal x?

Kun jij het getal x vinden waarvoor geldt:
$3x - 5 = 100$?
De regel hierboven noemen we een **vergelijking** in x. De uitdrukking $3x - 5$ links van het =-teken noemen we het **linkerlid** van de vergelijking en de uitdrukking rechts van het =-teken noemen we het **rechterlid**. De getallen x bepalen waarvoor de vergelijking juist is, noemen we: de vergelijking **oplossen**.
Dit hoofdstuk gaat over het oplossen van vergelijkingen.

Voorbeeld
Er is maar één getal x waarvoor geldt dat $3x - 5 = 100$. Je kunt dat getal vinden met de volgende redenering.

- Als je 5 van $3x$ aftrekt, moet er 100 uitkomen. Dus moet $3x$ wel 105 zijn.
- Als je x met 3 vermenigvuldigt, moet er 105 uitkomen. Dus moet x wel 35 zijn.

5 Probeer uit te vinden welk getal x is.
$x + 37 = 61$
$4x = 30$
$2x + 5 = 33$
$6x - 13 = 29$
$15 - 2x = 7$
$5(1 + x) = 40$

6 Ook bij de volgende vragen kun je beredeneren welk getal x is.
$3x + 5 = 2x + 5$
$3(x + 5) = 2(x + 5)$
$x - 5 = 5 - x$

7 Los de volgende vergelijkingen op.
$x^2 = 1$ (meer dan één oplossing)
$x^2 = -1$
$5 - x = 100$
$5x = 100$
$3x = -5$
$\frac{1}{2}x = 7$

14.3 De weegschaalmethode

8 Johan moet pakken papier van 25 kg van de begane grond naar de zevende verdieping brengen.
De lift heeft een "maximum laadvermogen".

a Wat betekent dat?

Als Johan 20 pakken papier in de lift heeft gezet, komt Paul eraan, die wil ook naar boven. Samen met Johan stapt hij in de lift en het lampje VOL gaat branden. Dat betekent dat de lift het gewicht van de twee heren plus de 20 pakken papier precies aankan.
Op het bord dat in de lift hangt is aangegeven hoeveel gewicht de lift maximaal aankan. De maker van het bordje gaat uit van een bepaald gemiddeld gewicht per persoon. Neem aan dat Johan en Paul van dat gemiddelde gewicht zijn.

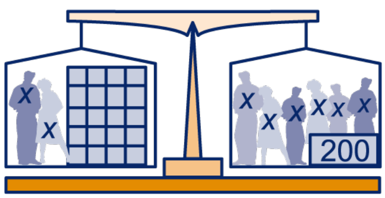
b Probeer met bovenstaande gegevens uit te zoeken van welk gemiddelde gewicht op het bordje is uitgegaan. Schrijf op hoe je je antwoord hebt gevonden. Lukt het niet, bekijk dan de volgende opgave.

9 De oplossing van het probleem in de vorige opgave kun je ook opschrijven met behulp van een variabele. Het gemiddelde gewicht van een persoon noemen we x (in kg).
Het gewicht van Johan, Paul en de twintig pakken papier is samen $2x + 500$.

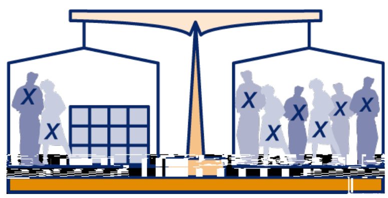
a Wat is het gewicht van 6 personen en 200 kg goederen samen (uitgedrukt in x)?

Johan, Paul en de twintig pakken papier wegen samen evenveel als de zes personen en 200 kg goederen.
We vinden zo de vergelijking $2x + 500 = 6x + 200$.

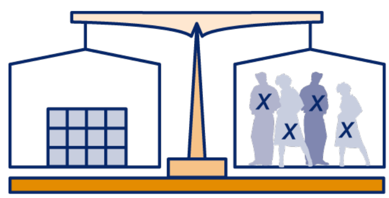
b Neem voor x het gemiddelde gewicht dat je in de vorige opgave gevonden hebt. Levert het linker- en het rechterlid van de vergelijking hetzelfde op?



figuur 1



figuur 2



figuur 3

De vergelijking kun je oplossen met behulp van de weegschaalmethode. Bekijk figuur 1.
Links op de weegschaal staan Johan en Paul (elk met gewicht x kg) samen met de 20 pakken papier (totaalgewicht 500 kg). Aan de rechterkant staan 6 personen (elk met gewicht x kg) en 200 kg goederen. De weegschaal is in evenwicht. De vergelijking

erbij luidt: $2x + 500 = 6x + 200$. Aan beide kanten van de weegschaal halen we nu 200 kg weg.
Dan blijft de weegschaal uiteraard in evenwicht.

c Welke vergelijking hoort bij figuur 2?

Vervolgens halen we aan beide kanten van de weegschaal twee personen weg. Ook dan blijft de weegschaal in evenwicht (omdat alle personen even zwaar zijn).

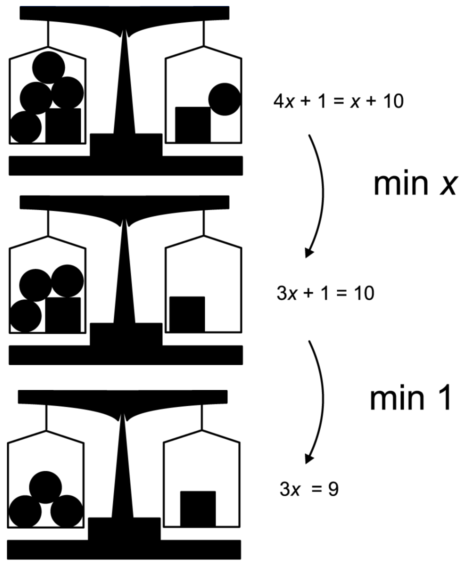
d Welke vergelijking hoort bij figuur 3?

e Welk getal stelt x voor?

f Wat weegt dus één persoon gemiddeld?

Veel vergelijkingen kun je oplossen met behulp van de weegschaalmethode. Als voorbeeld nemen we de vergelijking $4x + 1 = x + 10$. Kijk goed hoe het werkt.
In twee stappen wordt de vergelijking teruggebracht tot een wel heel eenvoudige: $3x = 9$.
Door beide leden te delen door 3 vind je: $x = 3$.
Het is verstandig een oplossing die je gevonden hebt achteraf te controleren in de oorspronkelijke vergelijking. Als volgt:

- Als $x = 3$, dan is het linkerlid $4 \cdot 3 + 1 = 13$.
- Als $x = 3$, dan is het rechterlid $3 + 10 = 13$.
- Inderdaad zijn de twee leden gelijk, als $x = 3$. Je hebt dus het goede antwoord gevonden!



Om het onbekende gewicht op een weegschaal te vinden, doe je steeds twee dingen:

- je haalt van beide schalen hetzelfde gewicht af (of doet het erbij),
- je neemt van beide schalen hetzelfde deel.

Zonder weegschaal komt dat hier op neer:

- je trekt van beide leden hetzelfde getal af (of telt het erbij op),
- je deelt beide leden door hetzelfde getal (of vermenigvuldigt ze ermee).

Voorbeeld

Een voorbeeld zonder weegschaal

Controleer het antwoord:

- als $a = 4$, dan is het linkerlid $5 \cdot 4 + 9 = 29$
- als $a = 4$, dan is het rechterlid $3 \cdot 4 + 17 = 29$

10

a Los de volgende vergelijkingen op, net als in het voorbeeld. Controleer ook je antwoord.

$4x + 10 = 20 + 2x$

$3y + 660 = 7y + 36$

$7t + 10 = 15t + 9$

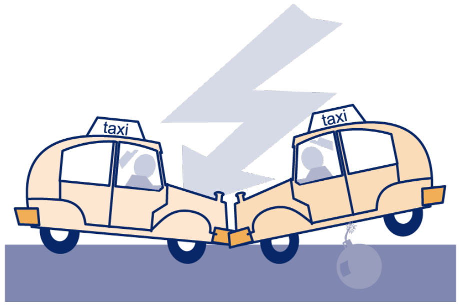
$b + 6 = 8b + 1$

$2p + 9 = 5p$

$7x + 15 = 5x + 11$

b Bij de laatste vergelijking kun je eigenlijk geen weegschaal tekenen. Waarom niet?

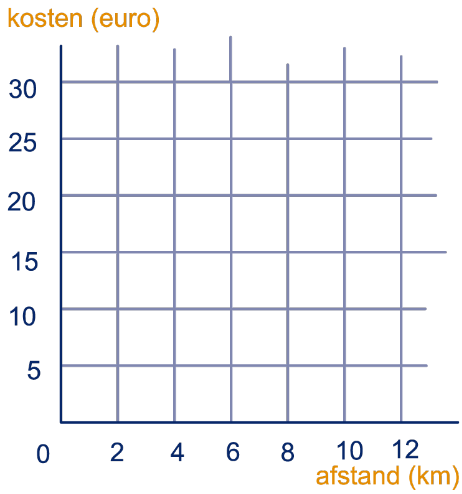
11 In een stad zijn er twee concurrerende taxibedrijven: de taxicentrale en citytax. De taxicentrale en citytax hanteren verschillende tarieven. De taxicentrale berekent voorrijkosten: als je een rit met een taxi van de taxicentrale maakt, moet je sowieso € 5,– betalen. Daar bovenop komt een kilometerprijs van € 2,– (dat wil zeggen dat je per gereden kilometer € 2,– moet betalen). Citytax kent geen voorrijkosten. Daartegenover staat een hogere kilometerprijs bij citytax: € 2,50.



a Neem de afstand-kostentabel over en vul hem in voor beide taxibedrijven.

afstand	0	4	8	12
kosten taxicentrale				
kosten citytax				

b Neem het rooster over en teken de afstand-kostengrafiek voor beide taxibedrijven. Zet de afstand op de horizontale as (2 km = 1 cm) en de kosten op de verticale as (€ 5,- = 1 cm). Schrijf bij elke grafiek welk taxibedrijf het betreft.



c Lees met behulp van de grafieken af bij welke afstand de kosten bij beide taxibedrijven even groot zijn.

We kunnen die afstand met een vergelijking berekenen. We gaan uit van een rit van x km.

d Wat kost die rit bij de taxicentrale (uitgedrukt in x)? En bij citytax?

Wij zijn op zoek naar de afstand x waarbij de kosten bij de taxicentrale en bij citytax gelijk zijn.

e Welke vergelijking voor x vind je hieruit?
Los die vergelijking op.

12 De familie de Vries gaat op vakantie. Er is alleen nog niet beslist waarheen. Het wordt Frankrijk of Indonesië. Wat zo'n vakantie gaat kosten hangt af van het aantal dagen dat ze in het vakantieland doorbrengen.
De reiskosten naar Frankrijk zijn € 800,–.
De reiskosten naar Indonesië zijn € 4300,–.
De verblijfkosten in Frankrijk zijn € 300,– per dag.
In Indonesië zijn die veel lager: slechts € 50,– per dag.

a Wat zijn de totale kosten als de familie 10 dagen naar Frankrijk gaat?
En als ze 10 dagen naar Indonesië gaat?

b Neem de aantal-dagen-kostentabel over en vul hem verder in.

aantal dagen	5	10	15	20
kosten Frankrijk				
kosten Indonesië				

c Teken voor beide landen de aantal-dagen-kostengrafiek. Zet het aantal dagen langs de horizontale as (5 dagen = 2 cm) en de kosten langs de verticale as (€ 1000,– = 1 cm). Geef aan welke grafiek bij welke bestemming hoort.

d Lees uit de grafiek af bij welk aantal dagen de kosten in beide landen even groot zijn.

We gaan dit aantal dagen met behulp van een vergelijking berekenen. Stel dat dat aantal d dagen is.

e Wat zijn dan de kosten als ze naar Frankrijk gaan (uitgedrukt in d)?
En als ze naar Indonesië gaan?
Welke vergelijking kun je opstellen voor d?

f Los die vergelijking op.

g Wat kost de vakantie bij dat aantal dagen in beide landen?

h Bij welk aantal dagen is een vakantie naar Indonesië goedkoper dan een vakantie naar Frankrijk?

13 In een bad zit 1000 liter water. Het bad loopt leeg met een snelheid van 150 liter per minuut.
Een jacuzzi bevat 600 liter. Die loopt tegelijkertijd leeg, met een snelheid van 75 liter per minuut.

a Hoelang duurt het voordat het bad leeg is?

b Hoelang duurt het voordat de jacuzzi leeg is?

c Teken de tijd-hoeveelheid-watergrafiek (t horizontaal en w verticaal) voor het bad en de jacuzzi.

Voor het bad geldt de formule: $w = 1000 - 150t$.

d Druk ook voor de jacuzzi w uit in t.

e Stel een vergelijking op en bereken daarmee na hoeveel minuten er evenveel water in het bad zit als in de jacuzzi.

f Hoeveel liter zit er dan nog in de jacuzzi en in het bad?

12 KPN heeft voor mobiele telefonie drie FlexiBel abonnementen: Economy, Premium en Allround. Economy is voordelig als je maar weinig belt, Allround is juist voordelig als je heel veel belt.
In de tabel kun je de kosten voor elk van de drie abonnementen aflezen. De kosten bestaan uit vaste abonnementskosten en variabele gesprekskosten.

Abonnement	Economy	Premium	Allround
Abonnements-kosten per maand	€ 8,95	€ 13,95	€ 18,95
Gesprekskosten per minuut			
Piek naar vast	30 cent	20 cent	15 cent
Dal naar vast	10 cent	10 cent	9 cent
Piek naar mobiel	45 cent	35 cent	30 cent
Dal naar mobiel	25 cent	21 cent	18 cent

Loes belt alleen tijdens daluren en altijd naar mobiel. Ze heeft nu een Premium-abonnement, maar ze vraagt zich af of ze niet beter een Allround-abonnement kan nemen.

a Neem de tabel over en vul de kosten bij een Premium- en een Allround-abonnement in. Denk aan de abonnementskosten!

aantal minuten	0	100	200	400
kosten Premium				
kosten Allround				

b Teken in een grafiek de aantal-minuten-kostengrafiek voor het Premium-abonnement en voor het Allround-abonnement.

c Lees uit de grafiek af vanaf welk aantal belminuten per maand een Allround-abonnement voor Loes goedkoper is dan een Premium-abonnement.

Stel dat Loes m minuten per maand belt (alleen in de daluren en naar mobiel).

d Wat zijn dan de kosten (in centen) per maand bij een Premium-abonnement? En wat zijn de kosten (in centen) per maand bij een Allround-abonnement?

We gaan met een vergelijking het aantal minuten m bepalen waarbij de kosten bij het Premium-abonnement gelijk zijn aan die bij een Allround-abonnement.

e Stel een vergelijking op waaruit je dit aantal minuten kunt berekenen en los die vergelijking op.

Ben belt ook alleen in de daluren en ook altijd naar mobiel. Hij belt veel minder dan Loes. Ook hij heeft een Premium-abonnement, maar hij vraagt zich af of hij niet goedkoper uit is met een Economy-abonnement.

f Bereken bij welk aantal belminuten per maand de kosten bij een Premium-abonnement en de kosten bij een Economy-abonnement voor Ben even hoog zijn. Gebruik een vergelijking.

14 Het oplossen van de vergelijking $4x + 35 = 8x + 5$, kun je zien als het berekenen van de x-coördinaat van het snijpunt van twee rechte lijnen, de lijn met vergelijking $y = 4x + 35$ en de lijn met vergelijking $y = 8x + 5$.

a Teken de lijnen $y = 4x + 35$ en $y = 8x + 5$ in één assenstelsel. Zet x op de horizontale as ($0 \leq x \leq 10$) en y op de verticale as ($0 \leq y \leq 90$).

b Bereken de x-coördinaat van het snijpunt door de vergelijking $4x + 35 = 8x + 5$ op te lossen.
Hoe groot is de y-coördinaat van het snijpunt?

Herhaling klas 1

15 **a** Bereken (de eerste is al als voorbeeld gedaan, x is een variabele).

$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$

$\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$

$\frac{3}{5} - \frac{2}{3}$

$5 \cdot \frac{13}{5}$

$5 \cdot \frac{x}{5}$

$3 \cdot \frac{2}{3}x$

$\frac{5}{7}x \cdot 7$

b Neem over in je schrift en vul in.

$\,.\,.\,.\,.\,. \cdot \frac{3}{7} = 3$

$9 \cdot \,.\,.\,.\,.\,. = 4$

$\,.\,.\,.\,.\,. \cdot \frac{6}{x} = 6$

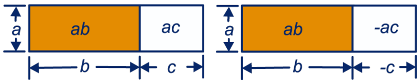
$5 \cdot \,.\,.\,.\,.\,. = x$

$\frac{5}{x+2} \cdot \,.\,.\,.\,.\,. = 5$

Volgens de **distributiewetten** geldt:

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$



16 Schrijf zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

$3(4 - 6x)$

$-4(2x - 5)$

$\frac{2}{3}(6 - 15x)$

$-4 + 7x - 6 - 4x + 2$

$3(-4x - 8) - 10 + 5(2x - 3)$

17 Neem over in je schrift en vul in.

$3y - 36 + \,.\,.\,.\,.\,. = 3y$

$-5t + \,.\,.\,.\,.\,. - 17 = -17$

$-3 + \,.\,.\,.\,.\,. + 2x = 0$

18 Los op en controleer je antwoord.

$3y + 2 = y - 24$

$2t - 1 = 7 - t$

$3(x + 6) = x - 20$

$2(y - 5) = 3(y - 6)$

$3(x + 4) = 4(x + 3)$

$3(1 + f) = f - 2$

Systematisch oplossen

We gaan nu vergelijkingen oplossen die ingewikkelder zijn omdat er breuken in voorkomen.
Hierbij is flink wat gerekend met breuken. Het kan allemaal eenvoudiger als je meteen de breuken wegwerkt. Dat doe je door te vermenigvuldigen met de noemers! Als volgt:
Om de noemers weg te werken hebben we vermenigvuldigd met 3 en daarna nog eens met 2. Dat had ook in één keer gekund door te vermenigvuldigen met 6.

19 We gaan de vergelijking $4 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x + 3$ oplossen.

a Met welk getal moet je vermenigvuldigen om in één klap de breuken weg te krijgen?

b Los de vergelijking op. Controleer ook je antwoord.

20 Los de volgende vergelijkingen op. Controleer ook je antwoord. Bedenk goed met welk getal je moet vermenigvuldigen om in één klap alle breuken weg te krijgen.

$\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{5}x - 1$ $\qquad \frac{f}{3} = 4 - f$

$-\frac{5}{8}x - 2\frac{2}{3} = \frac{1}{2}x + 6\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{t-6}{t} = 3$

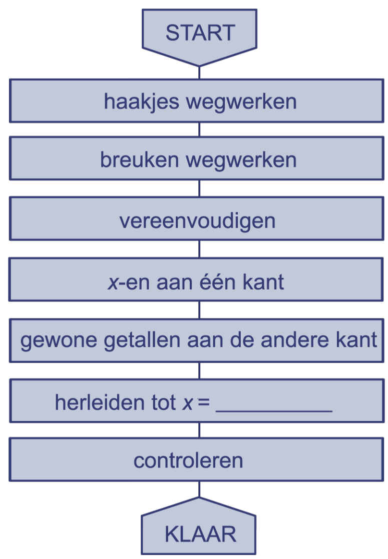
$0{,}3y - 1 = 3 - 0{,}1y$ $\qquad \frac{5}{p+1} = 4$

20 Los de volgende vergelijkingen op. Controleer ook je antwoord.

$\frac{5}{x} + 2 = -\frac{5}{2x} + 5$ $\qquad \frac{3x-8}{7} = \frac{2}{7}x - 1$

$\frac{-7}{2x+1} = -2\frac{4}{5}$ $\qquad \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{5}{x}$

In de volgende vergelijkingen komen haakjes en breuken voor. Je kunt dat soort vergelijkingen oplossen door het volgende schema te volgen.



Voorbeeld

Controleren:

$\frac{1}{3}(x - 4) + 3x = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - 4\right) + 3 \cdot -\frac{1}{2} = -3$

$2\left(x + \frac{1}{2}\right) - 3 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - 3 = -3$

Conclusie: als $x = -\frac{1}{2}$, dan is het linkerlid gelijk aan het rechterlid.

21 Los de volgende vergelijkingen op.

$2\left(x + \frac{1}{5}\right) + x = 6 - x$ $\qquad 2(x + 4) + 3(x - 5) = -17$

$5 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}(x + 2)$ $\qquad \frac{5}{7}(x - 5) = \frac{2}{3}(2x + 27) - 81$

$\frac{12-x}{x} = -3$

22 Janneke wil de vergelijking $\frac{2}{3}(x+5) = \frac{1}{2}(9-x)+7$ oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken. Ze vermenigvuldigt beide kanten van de vergelijking met 6. De vergelijking wordt dan volgens haar: $4(6x+30) = 3(54-6x)+42$.

a Los die vergelijking op.

b Controleer het antwoord in de vergelijking $\frac{2}{3}(x+5) = \frac{1}{2}(9-x)+7$.

Zoals je ziet klopt je antwoord niet in de oorspronkelijke vergelijking die Janneke wilde oplossen.

c Wat heeft Janneke verkeerd gedaan?

14.6 Vergelijkingen opstellen

23 Een koe weegt 500 pond plus de helft van haar eigen gewicht.
Wat weegt de koe?
Noem het gewicht van de koe x.
Stel een vergelijking op voor x en los die op.

In opgaven zoals de vorige wordt er een verhaaltje verteld over een onbekend getal. Je moet op grond van dat verhaaltje een vergelijking opstellen. Vroeger (en nu ook nog wel) begon men met de zin "Stel dat getal is x; dan geldt: ... ". Daarom stelde Simon Stevin voor in plaats van het vreemde woord "algebra" voortaan "stelkunde" te gebuiken. Dat voorstel is in Nederland niet overgenomen.
Stevin heeft wel vaker voorgesteld vreemde woorden te vervangen door zuiver Nederlandse woorden, want - zo redeneerde hij - dan kan het volk beter begrijpen wat er bedoeld wordt. Zo danken we aan hem het woord "wiskunde" (in plaats van "mathematica"), het woord "meetkunde" (in plaats van "geometrie"), het woord "driehoek" (in plaats van "triangel") en het woord "omtrek" (in plaats van "perimeter"). Als je hier meer over wilt weten, ga dan op internet naar: stevin.

24 Een man at zestig druiven in drie dagen. Elke dag at hij er acht meer dan de dag ervoor. Hoeveel druiven at de man de eerste dag?
Noem het aantal druiven dat hij de eerste dag at d.

a Hoeveel druiven at de man de tweede dag (uitgedrukt in d)? En de derde dag?
b Stel een vergelijking op voor d en los die op.
c Hoeveel druiven at de man op dag één? En op dag twee? En op dag drie?

25 Twee appels kosten net zo veel als één kiwi. Zes kiwi's en acht appels kosten samen € 5,–. Wat kost een appel en wat kost een kiwi?
Noem de prijs van een appel a.

a Wat is dan de prijs van een kiwi (uitgedrukt in a)?
b Stel een vergelijking op voor a en los die op.
c Wat kost een appel? En een kiwi?

26 Over drie jaar is Anne twee keer zo oud als ze vijf jaar geleden was.
Noem de leeftijd van Anne op dit moment x.

a Hoe oud is Anne dan over drie jaar? En hoe oud was ze vijf jaar geleden?
b Stel een vergelijking op voor x en los die op.

24 De heer Frank gaat een muurtje bouwen. Zijn buurjongens Henk en Fred helpen met stenen sjouwen. ’s Morgens sjouwt Henk drie keer zoveel stenen als Fred. ’s Middags sjouwt Henk nog 58 stenen en Fred nog 12. Samen hebben ze op die dag 410 stenen versjouwd.
Het aantal stenen dat Fred ’s morgens versjouwd heeft noemen we x.
Stel een vergelijking op voor x en bereken hieruit hoeveel stenen Fred in totaal versjouwd heeft.

25 Op het verjaardagsfeestje van Wendy zijn er voor ieder kind zes glaasjes fris. Onverwacht komen er ook nog drie nichtjes binnen. Nu zijn er nog vijf glaasjes fris voor ieder kind.
Hoeveel kinderen waren er op het feestje voordat de nichtjes binnenkwamen?
Noem het aantal kinderen, voordat de nichtjes kwamen, k.
Stel een vergelijking op en bereken hoeveel kinderen er op het feestje waren voordat de nichtjes binnenkwamen.
Kangoeroe 2002

26 Een olievat bevat 30 liter meer als het voor 30% leeg is dan wanneer het voor 30% vol is.
Hoeveel liter bevat het vat wanneer het vol is?
Noem het aantal liter in het vat l.
Stel een vergelijking op en bereken hoeveel liter er in het vat kan.
Kangoeroe 2003

27 Karel neemt een getal in gedachten. Hij vermindert dit getal met 3. Dan vermenigvuldigt hij de uitkomst met 4. Daarna telt hij 5 op bij de nieuwe uitkomst. De laatste uitkomst is tweemaal zo groot als het getal waarmee hij begon. Noem het getal dat Karel in gedachten heeft genomen x.
Stel een vergelijking op voor x en los die op.

28 Ian Watkins, een Australische boer, heeft op zijn farm alleen kippen en schapen. In totaal telt hij 49 dieren en 140 poten. Noem het aantal kippen k.

a Hoeveel schapen heeft hij? Druk je antwoord uit in k.
b Hoeveel poten telt hij? Druk je antwoord uit in k.
c Hoeveel kippen en hoeveel schapen heeft de boer? Stel een vergelijking op voor k en los deze vergelijking op.

29 Truus doet bij de melkboer boodschappen voor zichzelf en haar buurvrouw Henny. Voor zichzelf koopt ze 5 pakken melk en 3 pakken yoghurt. Voor Henny koopt ze 7 pakken melk en 5 pakken yoghurt. Ze heeft aan de melkboer gevraagd om op te schrijven hoeveel ze zelf moet betalen en hoeveel Henny. Als Truus bij Henny komt om af te rekenen, blijkt de melkboer er een raadsel van te hebben gemaakt. Op het briefje staat het volgende.
Een pak yoghurt kost 20 cent meer dan een pak melk. De 12 pakken melk en de 8 pakken yoghurt kosten samen € 14,–.

De prijs van een pak melk noemen we m (cent).

a Hoeveel kosten de 12 pakken melk en hoeveel de 8 pakken yoghurt? Werk in centen. Druk je antwoorden uit in m.

b Stel een vergelijking op voor m en los die op. Hoeveel moet Truus betalen en hoeveel moet Henny betalen?

28 Als Jan 3 km dichter bij school zou wonen, zou hij half zo ver van school wonen als wanneer hij 5 km verder van school zou wonen.
Noem de afstand die Jan van school woont x (km).
Stel een vergelijking op voor x en los die op.

29 Willem fietst gewoonlijk in 40 minuten van huis naar school. Als Willem 5 km per uur harder fietst, dan is hij 10 minuten eerder op school.
Noem de snelheid (in km/uur) waarmee Willem gewoonlijk fietst v.

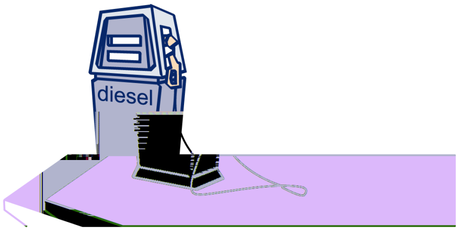
a Druk de afstand van huis naar school op twee manieren uit in v. Bedenk dat: $\text{afstand} = \text{snelheid} \times \text{tijd}$.

b Stel een vergelijking op en bereken daarmee de snelheid waarmee Willem gewoonlijk naar school fietst.

c Hoe ver woont Willem van school?

30 Janneke koopt in de supermarkt 6 zakken chips, 8 flessen cola en 4 pakken koekjes. In totaal moest ze € 17,30 betalen. Een fles cola kost 30 cent meer dan een zak chips en een pak koekjes 40 cent minder dan een fles cola.
Noem de prijs van een zak chips c.
Stel een vergelijking op voor c en bereken hoe duur een zak chips, een fles cola en een pak koekjes zijn.

31 Ben gaat een nieuwe auto kopen. Hij heeft gekozen voor de Ford Escort, die zowel met een benzine- als met een dieselmotor geleverd kan worden. Vanwege zijn beroep rijdt Ben veel en hij vraagt zich dan ook af of hij een diesel aan zal schaffen. De brandstofprijs per gereden kilometer is voor diesel € 0,11 en voor benzine € 0,15. Daartegenover staat dat de dieselauto aan belasting



en verzekering per jaar € 3520,– kost en de benzineauto maar € 2240,–.

We vragen ons af hoeveel kilometer per jaar Ben minstens moet rijden, om met een dieselauto goedkoper uit te zijn.

Het aantal kilometers dat Ben per jaar rijdt, is k.

a Bereken k in het geval dat de kosten per jaar voor de dieselauto en de benzineauto even hoog zijn. Hoe hoog zijn de kosten in dat geval voor beide auto's?

b Hoeveel km per jaar moet Ben rijden om met een dieselauto goedkoper uit te zijn?

32

Negentig leerlingen kopen elk een rekenmachine. Een deel van de leerlingen koopt er een van het merk Casio; deze kosten € 8,– per stuk. De rest koopt er een van het merk Texas. Deze kosten € 10,– per stuk.

Stel dat 20 leerlingen een Casio kopen.

a Hoeveel leerlingen kopen er dan een Texas?

b Hoeveel moet er dan in totaal betaald worden voor de 90 rekenmachines?

c Neem de tabel over en vul hem verder in.

aantal Casio	20	40	60	80
aantal Texas				
totaalprijs				

Voor de negentig machines wordt in totaal € 782,– betaald. We willen weten hoeveel leerlingen een Casio hebben besteld en hoeveel leerlingen een Texas.

Het aantal leerlingen dat een rekenmachine van merk Casio koopt noemen we x.

d Hoeveel leerlingen hebben er dan een Texas besteld (uitgedrukt in x)?

e Hoeveel is er in totaal voor de Casio's betaald (uitgedrukt in x)? En hoeveel is er voor de Texassen betaald (ook uitgedrukt in x)?

f Stel een vergelijking op voor x en los die op. Controleer je antwoord.

g Hoeveel machines worden er van elk van de twee merken gekocht?

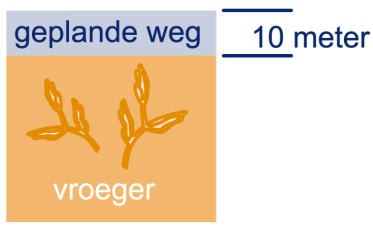
33 Boer Berends heeft een vierkante akker. Langs die akker komt een weg. Daarom moet hij aan de noordkant een strook van 10 meter breed afstaan.

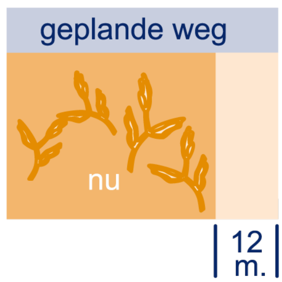
Van de gemeente krijgt hij er aan de oostkant een andere strook voor in de plaats. Die strook heeft een breedte van 12 meter.

De oppervlakte van de strook die Berends moet afstaan is net zo groot als de oppervlakte van de strook die hij terugkrijgt.

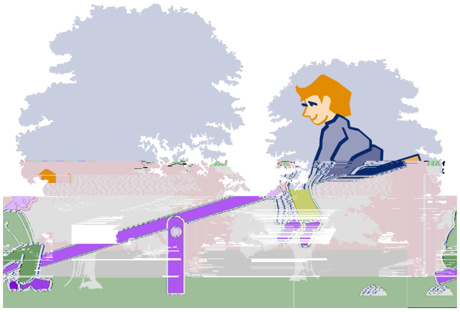
Uit deze gegevens kunnen we de afmetingen van de vierkante akker van Berends berekenen. De breedte van de vierkante akker noemen we x.

Stel een vergelijking op voor x en los hem op.



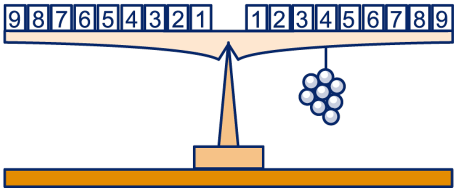


34 In de catalogus van Eibe lezen we het volgende.
"Deze ontwikkeling van Eibe biedt de oplossing voor een probleem waar reeds heel wat ouders mee af te rekenen hebben gehad. Dankzij de verstelbare zit op één zijde van de wipbalk kunnen personen met een verschillend gewicht nu toch samen op de wip.
De wipbalken zijn vervaardigd uit gelaagd hout. De verticale paaltjes uit kernvrij massief hout werden voorzien van de typische Eibe-rondkop."



Stel dat Anne samen met Egon op de wip gaat. Anne weegt 25 kg en zit op 2 meter van het draaipunt. Egon weegt 50 kg. Egon moet dichter bij het draaipunt gaan zitten om het wippen goed te laten verlopen.
Heb je enig idee hoe dicht?

35 Bekijk de getekende balans. Bij de balans horen gewichtjes die allemaal even zwaar zijn. De gewichtjes kun je op verschillende plaatsen aan de balans hangen. Op plaats 4 hangen 8 gewichtjes.



a Naar welke kant slaat de balans door als je aan de linkerarm 6 gewichtjes op plaats 4 hangt?
b En als je 8 gewichtjes op plaats 6 hangt?

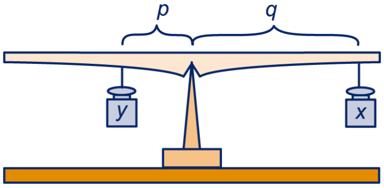
Anne heeft ontdekt dat de balans in evenwicht is als je aan de linkerkant 4 gewichtjes op plaats 8 hangt.
In de tabel zie je in welke andere gevallen je ook evenwicht krijgt.

plaats	8	4	2	1
aantal gewichtjes	4	8	16	32

Let eens op het product:
plaats × aantal gewichtjes.
c Welke uitkomst krijg je steeds?

Als een balans in evenwicht is, dan is het product plaats × aantal gewichtjes links en rechts gelijk.

36 De balans in figuur 1 is in evenwicht.
a Welke gelijkheid geldt voor p, q, x en y?

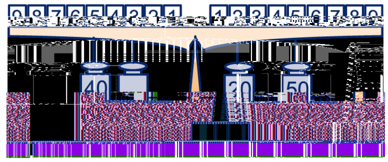


figuur 1

14.7 Balansen

De balans in figuur 2 is in evenwicht.

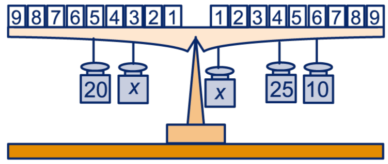
b Wat is het onbekende gewicht.



figuur 2

De balans in figuur 3 is in evenwicht.

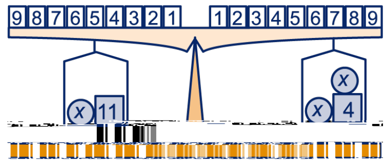
c Stel een vergelijking op en bereken hieruit het onbekende gewicht x.



figuur 3

De balans in figuur 4 is in evenwicht.

d Stel een vergelijking op en bereken hieruit het onbekende gewicht x.



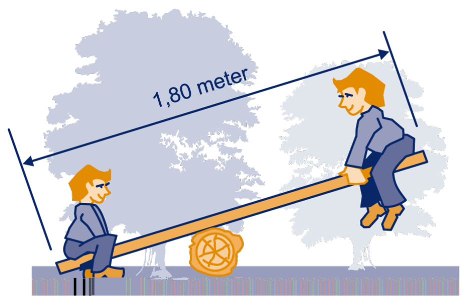
figuur 4

37 De tweeling Bob en Dirk gaan met Ad en Carola naar de speeltuin. Ze gaan met z'n vieren op één wip.
Ad en Carola zitten elk op een uiteinde, 2 meter van het draaipunt. Bob zit aan de kant van Ad, op 1 meter van het draaipunt. Dirk zit aan de kant van Carola, op $1\frac{1}{2}$ meter van het draaipunt.
Zo kunnen ze goed wippen.
Ad weegt 45 kg en Carola weegt $39\frac{1}{2}$ kg. Bob en Dirk zijn even zwaar; hoe zwaar weten we niet.
Noem het gewicht van Bob x.

a Maak een balansplaatje van de wip. Verwerk daarin de bovenstaande gegevens.

b Stel een vergelijking op en bereken het gewicht van Bob.

37 Willem en Maarten hebben een plank gevonden. Ze willen er mee wippen over een omgevallen boom. Willem en Maarten zijn niet even zwaar en de kunst is om de plank zo neer te leggen dat ze goed kunnen wippen als ze allebei op het einde van de plank gaan zitten.
Willem weegt 35 kg en Maarten weegt 25 kg.
De plank is 1,80 meter lang.
Stel een vergelijking op en bereken waar de boom de plank moet ondersteunen.



14.8 Eindpunt

weegschaalmethode
Om het onbekende gewicht op een weegschaal te vinden, doe je steeds twee dingen:

- je haalt van beide schalen hetzelfde gewicht af (of doet het erbij),
- je neemt van beide schalen hetzelfde deel.

Zonder weegschaal komt dat hier op neer:

- je trekt van beide leden hetzelfde getal af (of telt het erbij op),
- je deelt beide leden door hetzelfde getal (of vermenigvuldigt ze ermee).

systematisch oplossen
Elke vergelijking kun je oplossen volgens het volgende schema.

Voorbeeld

$\frac{1}{3}(2x-5)+\frac{3}{4}=x-1$

$\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}+\frac{3}{4}=x-1$

$8x-20+9=12x-12$

$8x-11=12x-12$

$1=4x$

$\frac{1}{4}=x$

Controle:

$\frac{1}{3}(2x-5)+\frac{3}{4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-5\right)+\frac{3}{4}=-1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$

$x-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

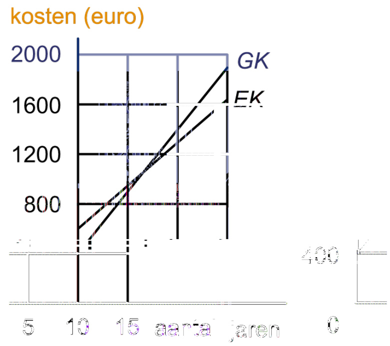
Conclusie: als $x=\frac{1}{4}$ zijn linker- en rechterlid gelijk.

vergelijkingen opstellen en grafieken
Een energiezuinige koelkast EK kost € 710,– en verbruikt € 60,– aan stroom per jaar. Een goedkope koelkast GK kost € 390,– en verbruikt € 100,– aan stroom per jaar.

Als je de gebruikskosten wilt vergelijken met grafieken, is het handig om de volgende tabel te maken.

aantal jaren	0	5	10	15
kosten EK	710	1010	1310	1610
kosten GK	390	890	1390	1890

Bij de tabel horen twee grafieken.
Denk aan de namen bij de assen en dat elk stapje op de horizontale as hetzelfde is. Dit geldt ook voor de verticale as.



Stel dat we het aantal jaren a noemen. Dan zijn de kosten na a jaar voor EK gelijk aan $710 + 60a$ en voor GK gelijk aan $390 + 100a$.
Met een vergelijking kunnen we nu het aantal jaren uitrekenen waarbij de kosten voor EK en GK gelijk zijn.
Die vergelijking is: $710 + 60a = 390 + 100a$.
De oplossing is $a = 8$, dus na 8 jaar.

Je kunt het antwoord controleren door de kosten van EK en GK na 8 jaar uit te rekenen.
Kosten EK na 8 jaar = $710 + 8 \cdot 60 =$ € 1190,–.
Kosten GK na 8 jaar = $390 + 8 \cdot 100 =$ € 1190,–.
Je ziet dat de kosten na 8 jaar inderdaad gelijk zijn.

vergelijkingen opstellen
Ton is één jaar jonger dan Janneke en elf jaar ouder dan Gerd. Samen zijn ze 92 jaar. Hoe oud is ieder?

Noem de leeftijd van Ton x. Dan is Janneke $x + 1$ jaar en Gerd $x - 11$ jaar.
Een vergelijking voor x is dan $x + (x + 1) + (x - 11) = 92$.
De oplossing is $x = 34$.
Dus Ton is 34, Janneke is 35 en Gerd is 23 jaar oud.

balansen
Als een balans in evenwicht is, dan is het product plaats × aantal gewichtjes links en rechts gelijk.
De balans hiernaast is in evenwicht.

De vergelijking die er bij hoort is:
$2(3x + 4) = 3\left(4x + 1\frac{1}{3}\right)$
De oplossing is $x = \frac{2}{3}$.
Controle:
$2\left(3 \cdot \frac{2}{3} + 4\right) = 12$
$3\left(4 \cdot \frac{2}{3} + 1\frac{1}{3}\right) = 12$

1 Gerd weegt 25 kg minder dan Ton. Ton is 12 kg zwaarder dan Janneke. Met z'n drieën wegen we 308 kg.
Noem het gewicht van Janneke x.

a Druk het gewicht van Ton en Gerd uit in x. Schrijf je antwoorden zo eenvoudig mogelijk.

b Hoe zwaar is ieder? Stel hierbij een vergelijking op in x en los hem op.

2 Van driehoek PQR is hoek Q 12° meer dan hoek P. Hoek R is twee keer zo groot als hoek Q.
De grootte van hoek Q noemen we q.

a Druk hoek P en hoek R uit in q.

b Hoe groot zijn de hoeken van driehoek PQR? Stel een vergelijking op in q en los die op.

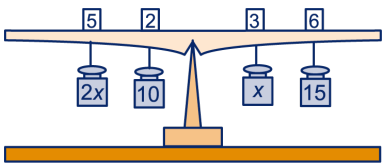
3 Janneke koopt voor het verjaardagsfeestje van Teun in de supermarkt zakjes snoep en drinken. Een fles drinken is twee keer zo duur als een zakje snoep. Acht zakjes snoep en vijf flessen drinken kosten €$9{,}72$.
Noem de prijs van een fles drinken d.
Stel een vergelijking op in d en bereken daarmee de prijs van een zakje snoep en een fles drinken.

4 Van een vierkant zijn de afmetingen $2x - 6$ cm en van een rechthoek zijn de afmetingen $x + 12$ bij $x - 9$ cm.
Bereken x als de omtrek van het vierkant 16 cm meer is dan de omtrek van de rechthoek. Wat zijn de afmetingen dan van het vierkant en van de rechthoek?
Stel hierbij een vergelijking op in x en los die op.
Maak eventueel een schets van de situatie.

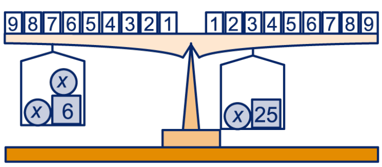
5 Tot mijn honderdste verjaardag heb ik nog een aantal jaren te leven. Mijn leeftijd nu is tweederde van dát aantal jaren.
Hoe oud ben ik nu?

Kangoeroe 2006

6 De getekende balansen zijn in evenwicht.



figuur 1



figuur 2

Stel voor beide een vergelijking op en bereken het onbekende gewicht x.

7

Los de volgende vergelijkingen op. Controleer ook je antwoord.

$10x - 1 = 4x + 2$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 3x - 5$

$8 - 5x = x - 22$ $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$

$3x - 7 = 6x + 8$ $0{,}1x - 3 = 1 + 0{,}3x$

$3(x - 2) = 5(x - 4)$ $\frac{5x}{3} = x + 1$

$11 - 2x = 3(1 - 2x)$ $\frac{x+1}{2} = 8 - 2x$

$2(3x - 1) = 4x + 3$ $\frac{6-3x}{x} = 3$

$x = 4(x - 1) + 4$ $\frac{6-2x}{2x+5} = \frac{2}{3}$

8

Dennis en Brenda spelen Mens-erger-je-niet. Omdat Dennis minder sterk speelt dan Brenda, hebben ze het volgende afgesproken.

- als Brenda een spelletje wint, krijgt ze 2 punten,
- als Dennis een spelletje wint, krijgt hij 3 punten,
- de verliezer krijgt geen punten.

Op een gegeven moment zijn er achttien spelletjes gespeeld. Brenda heeft er daarvan x gewonnen.

a Hoeveel punten heeft Brenda? En hoeveel punten heeft Dennis? (Druk je antwoord uit in x)

Brenda blijkt na de achttien spelletjes een voorsprong van 6 punten te hebben.

b Leid hieruit een vergelijking af voor x en los die op.

9

In de figuur zie je een grafiek van de rit van een Opel die op een snelweg om precies 12.00 uur het km-paaltje 30,0 passeert.

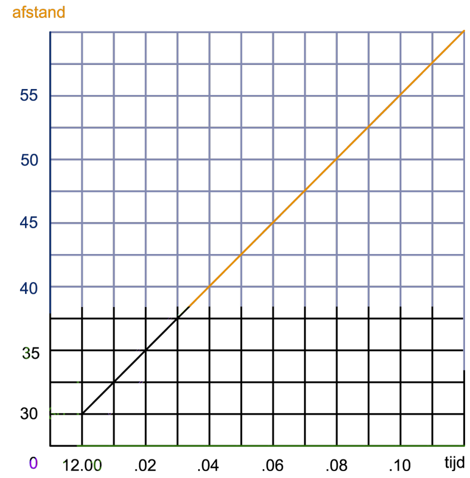
a Hoe hard rijdt de Opel (in km per uur)?

De veel te hard rijdende Opel wordt door de rijkspolitie opgemerkt en die zet de achtervolging in. Om 12.02 passeert de Porsche van de rijkspolitie het km-paaltje 30,0. Hij achtervolgt de Opel met een snelheid van 180 km per uur.

b Neem de tijd-afstandtabel over en vul hem in.

aantal minuten over twaalf	0	2	5	10	15
afstand Opel tot begin van de weg	30				
afstand Porsche tot begin van de weg		30			

c Neem de grafiek over en teken daarin de tijd-afstandgrafiek voor de Porsche.



d Wat is de afstand van de Opel tot het begin van de weg om t minuten over 12? En van de Porsche?

We willen weten op welk moment de Porsche de Opel inhaalt.

e Stel een vergelijking op waarmee je dit tijdstip kunt berekenen en los deze vergelijking op.

f Op hoeveel km vanaf het begin van de weg wordt de Opel ingehaald door de Porsche?

g Op welk tijdstip reed de Porsche twee kilometer achter de Opel? Stel een vergelijking op en los deze op.

h Bij welk kilometerpaaltje is de Opel dan? En bij welk de Porsche?

10

Een kaars brandt regelmatig. Na 42 minuten branden is hij nog 29 cm lang, na 75 minuten is hij nog 18 cm lang.

a Hoeveel cm wordt de kaars per minuut korter? Wat was de oorspronkelijke lengte van de kaars?

b Druk de lengte l (in cm) uit in het aantal minuten t dat de kaars gebrand heeft.

Tegelijk met deze kaars werd een andere, wat dunnere kaars aangestoken. Deze dunne kaars was oorspronkelijk 52 cm lang en hij wordt elke minuut een halve cm korter.

c Druk ook voor deze kaars zijn lengte uit in het aantal minuten t dat hij gebrand heeft.

d Teken voor beide kaarsen de tijd-lengte-grafiek.

e Bereken met behulp van een vergelijking na hoeveel minuten branden de twee kaarsen even lang zijn.

f Hoe lang zijn de kaarsen dan?

11

Erik heeft 7 jongens meer als klasgenoot dan meisjes. In zijn klas zijn er twee keer zoveel jongens als meisjes. In deze klas zit ook Janneke. We vragen ons af hoeveel meisjes zij heeft als klasgenoot.

Noem het aantal jongens j en het aantal meisjes m.

a Welke twee vergelijkingen tussen j en m volgen hieruit?

b Schrijf beide vergelijkingen in de gedaante $j = \ldots\ldots$

c Stel een vergelijking op en bereken hoeveel meisjes Janneke als klasgenoot heeft.

Kangoeroe 2001

12

Tim en Tom spelen een spelletje ping-pong. We bekijken de stand op een zeker moment. Als Tim twee punten meer zou hebben, dan zou hij twee keer zoveel punten hebben als Tom. Als Tim vier punten minder zou hebben, dan had Tom twee keer zoveel punten als Tim.
We vragen ons af hoeveel punten Tim heeft en hoeveel Tom.
Noem het aantal punten dat Tom heeft x en het aantal punten dat Tim heeft y.

a Welke twee vergelijkingen tussen x en y volgen hieruit?

b Schrijf beide vergelijkingen in de gedaante $x = \ldots\ldots$

c Stel een vergelijking op en bereken hoeveel punten Tim heeft.

d Hoeveel punten heeft Tom dan?

Kangoeroe 2004

16 Haakjes pilot

14 Vergelijkingen