De Wageningse Methode
5&6 VWO wiskunde B
Uitgebreide antwoorden Hoofdstuk 2
Regels voor differentiëren

Paragraaf 1 Opnieuw sinus en cosinus

1 **a.** -2π, 0, 2π ; $-1\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$; $-\pi$, π ; $-\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$

b. $(\cos 2, \sin 2) \approx (-0{,}42\ ;\ 0{,}91)$, met de GR
Op dezelfde hoogte: $\pi - 2$, $-\pi - 2$, $-2\pi + 2$.
Op dezelfde breedte: -2 , $2 - 2\pi$, $-2 + 2\pi$.
Dit kun je afleiden uit de symmetrie van de eenheidscirkel, maar het kan ook (wat lomper) zo:
Op dezelfde hoogte:
$\sin t = \sin 2 \Leftrightarrow t = 2 + k \cdot 2\pi$ of $t = \pi - 2 + k \cdot 2\pi$;
de waarden van t tussen -2π en 2π vind je door voor $k = -1$ of 0 te nemen.
Op dezelfde breedte;
$\cos t = \cos 2 \Leftrightarrow t = 2 + k \cdot 2\pi$ of $t = -2 + k \cdot 2\pi$;
de waarden van t tussen -2π en 2π vind je door voor $k = -1$ of 0 te nemen in $t = 2 + k \cdot 2\pi$ en
voor $k = 0$ of 1 te nemen in $t = -2 + k \cdot 2\pi$.

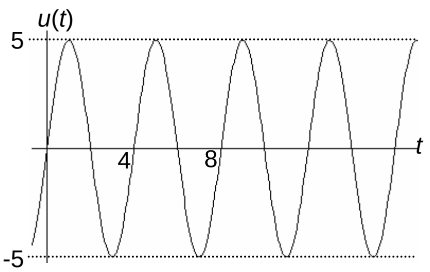
c. $-1\frac{3}{4}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $1\frac{1}{4}\pi$ uit de eenheidscirkel of:
$\sin t = \cos t \Leftrightarrow \sin t = \sin(\frac{1}{2}\pi - t) \Leftrightarrow$
$t = \frac{1}{2}\pi - t + k \cdot 2\pi$ of $t = \pi - (\frac{1}{2}\pi - t) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$ k) $+ k \cdot 2 \Leftrightarrow$ k) $+$ t $+$

g. Door 4 eenheden naar links te schuiven (of 8 eenheden naar rechts). $k(t)=2+2\sin\frac{2\pi}{12}(t+4)$

8 $|\omega|\cdot p=2\pi$

9 **a.** -1
b. 2
c. $2\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$ is de helft van de periode, dus die is 3
d. periode $=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{3}$; de straal is de amplitude, dus 2 ; de hoogte van het middelpunt is de evenwichtswaarde, dus -1
e. Omdat de beweging daar stijgend door het evenwicht gaat.
f. $f(t)=-1+2\sin\frac{2\pi}{3}t$
g. De grafiek van g loopt 1 sec achter op die van f, dus $g(t)=-1+2\sin\frac{2\pi}{3}(t-1)$
h. Die beweging loopt 33 periodes achter op die bij g.

10 **a.**



b. $u(t)=5\sin\frac{1}{2}\pi t$
c. $5\sin\frac{1}{2}\pi t=1 \Leftrightarrow \sin\frac{1}{2}\pi t=0{,}2$
$\sin^{-1}(0.2)=0.2013\ldots$, dus één van de oplossingen is $0.2013\ldots/\frac{1}{2}\pi=0{,}1281\ldots$
De tweede oplossing vind je bijvoorbeeld met de symmetrie van de grafiek : $2-0{,}128=1{,}872$

11 $y=1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi x$; $y=-\sin\frac{1}{2}\pi x$

12 **a.** Bijvoorbeeld met de x-as: $y=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow$
$\dfrac{x}{2}=1$ of $\dfrac{x}{2}=-1$, dus $x=2$ of $x=-2$, dus de snijpunten met de x-as: (2,0) en (-2,0) ;
met de y-as: (0,3) en (0,-3) ;
$(1\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5})$ en $(1\frac{1}{5},-2\frac{2}{5})$; $(1\frac{3}{5},1\frac{4}{5})$ en $(-1\frac{3}{5},1\frac{4}{5})$.
b. (x,y) op $F \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y^2=9-2\frac{1}{4}x^2$
d. Horizontaal met factor 2 en verticaal met factor 3
e. $(2a,3b)$
f. $\left(\dfrac{2a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3b}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$

13 **a.** $(2\cos t, 3\sin t)$
c. De snelheidsvector is $(-2\sin t, 3\cos t)$; zijn grootte is:
$\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}=\sqrt{4\sin^2 t+9(1-\sin^2 t)}$.
d. v is minimaal 2 als $\sin^2 t=1$, dat is in het hoogste punt (0,3) en in het laagste punt (0,-3) van de ellips.
v is maximaal 3 als $\sin^2 t=0$, dat is in de snijpunten met de x-as.

14 **a.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$
b. $x=1\frac{1}{2}$ en $y=2\frac{1}{2}\sqrt{3}$ invullen in de vergelijking uit a.
c. Pythagoras: $\sin^2+\cos^2=1$

15 **b.** 0
De keerpunten zijn (GR): (1,0) en (-1,0). Deze worden bereikt op de tijdstippen $t=k\cdot\pi$, met k geheel.
De snelheidsvector is $(-\sin t, 2\sin t\cos t)$. Deze is (0,0) als $t=k\cdot\pi$.
c. De algemene vergelijking van een parabool met top (a,b) is $y=p(x-a)^2+b$.
Hier geldt dus: $y=px^2+1$. Het punt (1,0) moet op de parabool liggen, dus $0=p\,1^2+1$, dus $p=-1$, dus een vergelijking is: $y=1-x^2$
d. Dan moet $\sin^2 t=1-\cos^2 t$ en dat is de stelling van Pythagoras.
e. $x=\cos t$ en $-1\le\cos t\le 1$, dus je krijgt $y=1-x^2$ op het x-interval [-1,1].

16 **a.** (1,1)
c. $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
d. $x^2+y^2=2$
e. $(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2=$
$\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t+2\cos t\sin t+\sin^2 t$
$=2\cos^2 t+2\sin^2 t=2\cdot(\cos^2 t+\sin^2 t)=2\cdot 1=2$
f. $m=n=0$, $r=\sqrt{2}$, $\omega=1$, $t_0=-\frac{1}{4}\pi$
g. $\sqrt{2}\cos(t+\frac{1}{4}\pi)=\sqrt{2}(\cos t\cdot\cos\frac{1}{4}\pi-\sin t\cdot\sin\frac{1}{4}\pi)=$
$\sqrt{2}(\cos t\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sin t\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2})=\cos t-\sin t$ en
$\sqrt{2}\sin(t+\frac{1}{4}\pi)=\sqrt{2}(\sin t\cdot\cos\frac{1}{4}\pi+\cos t\cdot\sin\frac{1}{4}\pi)=$
$\sqrt{2}(\sin t\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}+\cos t\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2})=\sin t+\cos t$

17 **a.** $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2=1$ dus $4x^2+y^2=1$
b. $4\sin^2 t\cos^2 t+(\cos^2 t-\sin^2 t)^2=$
$4\sin^2 t\cos^2 t+\cos^4 t-2\sin^2 t\cos^2 t+\sin^4 t=$
$\cos^4 t+2\sin^2 t\cos^2 t+\sin^4 t=(\sin^2 t+\cos^2 t)^2=1^2=1$

18 **b.** Je moet laten zien dat $1+\sin 2t=(\cos t+\sin t)^2$
oftewel $1+\sin 2t=\cos^2 t+2\sin t\cos t+\sin^2 t$ (haakjes)
oftewel $1+\sin 2t=1+2\sin t\cos t$ (Pythagoras)
Dit volgt uit de verdubbelingsformule
$\sin 2t=2\sin t\cos t$.

c. De lengte is $\int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt =$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin(2t)+4\cos^2(2t)}\,dt$ **.**

Dit bereken je met de GR. Het resultaat is: 10,248…

19 b. Dan moeten x en y extreem (maximaal of minimaal) zijn. t = 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, $1\frac{1}{2}\pi$, 2π

(-1,1) wordt bereikt op de tijdstippen $t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$, met k geheel en (1,0) op de tijdstippen $t=k\cdot\pi$.

c. De snelheidsvector is $(-2\sin 2t\,, 2\sin t\cos t)$ en die is 0 op de in **b** genoemde tijdstippen.

d. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

We moeten aantonen dat $\sin^2 t=-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}$ oftewel $\cos 2t=1-2\sin^2 t$ en dit is een verdubbelingsformule.

20 a. Er geldt: $x=\frac{1}{2}\sin 2t$ en $y=\cos 2t$.

De beweging $(\sin 2t\,, \cos 2t)$ over de eenheidscirkel wordt dus verticaal ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Dit geeft een ellips.

b. $(\cos 2t\,, -2\sin 2t)$

Paragraaf 2 Lissajousfiguren

1 c. 2π , π

d. Een hoogste punt krijg je als $\sin 2t$ maximaal, dus 1 is $\Leftrightarrow 2t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\pi$. $x(\frac{1}{4}\pi)=\sqrt{2}$ en $x(1\frac{1}{4}\pi)=-\sqrt{2}$, dus $(\sqrt{2}\,,1)$ en $(-\sqrt{2}\,,1)$ zijn de hoogste punten.

Een laagste punt krijg je als $\sin 2t=-1 \Leftrightarrow$
$2t=-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}\pi+k\cdot\pi$.

De laagste punten zijn: $(-\sqrt{2}\,,-1)$ en $(\sqrt{2}\,,-1)$.

e. $(-2\sin t\,, 2\cos 2t)$.

f. In de hoogste en de laagste punten is de y-component van de snelheidsvector 0.

g. Uiterst links als $2\cos t=-2 \Leftrightarrow t=\pi$. Dit geeft het punt (-2,0). Uiterst rechts als $2\cos t=2 \Leftrightarrow t=$ 0 of 2π. Dit geeft het punt (2,0).

De x-component van de snelheidsvector is 0.

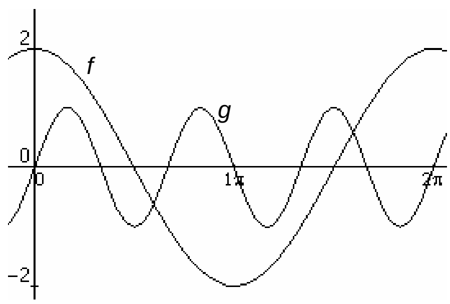
h. Dan geldt: $\cos t=0$ en $\sin 2t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\pi$ of $t=1\frac{1}{2}\pi$. De snelheidsvector heeft dan lengte $2\sqrt{2}$.

De snelheid is dan maximaal omdat de x- en de y-component van de snelheidsvector dan tegelijkertijd maximaal of minimaal zijn.

2 a. Amplitude van $f=2$; amplitude van $g=1$

b. Zie volgende kolom.

c. $f(t)=2\cos t$ (of $2\sin(t-1\frac{1}{2}\pi)$); $g(t)=\sin 3t$



3 a. $(x',y')=(8t-2t^3\,, 3t^2-3)$

b. Dat is in de hoogste en laagste punten van de baan.

$3t^2-3=0 \Leftrightarrow t=1,\ t=-1$; $t=1$ geeft het punt $(3\frac{1}{2},-2)$ en $t=-1$ geeft het punt $(3\frac{1}{2},2)$.

c. Dat is in de meest linkse en rechtse punten van de baan.

$8t-2t^3=0 \Leftrightarrow -2t(t^2-4)=0 \Leftrightarrow t=0,\ -2,\ 2$.

$t=-2$ geeft (8,-2) ; $t=0$ geeft (0,0) en $t=2$ geeft: (8,2).

d. $x(-t)=4(-t)^2-\frac{1}{2}(-t)^4=4t^2-\frac{1}{2}t^4=x(t)$

enzovoort.

De baan is symmetrisch in de x-as.

e. Met de x-as: (0,0) , $(7\frac{1}{2},0)$;

met de y-as: $(0,10\sqrt{2})$, $(0,10\sqrt{2})$.

4 a. $x=0 \Leftrightarrow t=0$ of $t=2$. De snijpunten met de y-as zijn (0,0) en (0,8).

$y=0 \Leftrightarrow t=0$ of $t=-2$. De snijpunten met de x-as zijn (0,0) en (8,0).

b. De snelheidsvector is $(2t-2, 2t+2)$.

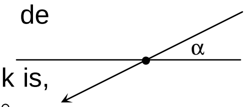
In het laagste punt is y minimaal $\Rightarrow$
$y'(t)=0 \Leftrightarrow t=-1$, dus (3,-1) is het laagste punt.

In het meest linkse punt is x minimaal $\Rightarrow x'(t)=0$ $\Leftrightarrow t=1$, dus (-1,3) is het meest linkse punt.

c. Als (x,y) op de baan, dan ook (y,x), ze worden op tegengestelde tijdstippen bereikt want
$(x(-t),\ y(-t))=(y(t),\ x(t))$. Dus de baan is symmetrisch in de lijn $y=x$.

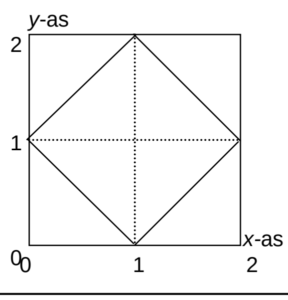
d. Als (x,y) voldoet, dan ook (y,x) want: $x+y=y+x$ en $(x-y)^2=(y-x)^2$.

e. Dat gebeurt op $t=-2$, de snelheidsvector is dan (-6,-2). Als α de hellingshoek is, dan is $\tan\alpha=\frac{-2}{-6}$, dus $\alpha\approx 18°$.



f. $v=\sqrt{8t^2+8}$; v is minimaal als $t=0$. Op $t=0$ is de buiging het sterkst.

5 a.



6 **a.** 5 keer ; zie b.

b.

7 **a.** Hoogste punt als *y* maximaal $\Rightarrow$ $\sin 2t = 1$ $\Leftrightarrow$ $t = \frac{1}{4}\pi$ of $t = 1\frac{1}{4}\pi$.

Dit geeft de punten $(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,,1)$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,,1)$.

Laagste punt als *y* minimaal $\Rightarrow$ $\sin 2t = -1$ $\Leftrightarrow$ $t = \frac{3}{4}\pi$ of $t = 1\frac{3}{4}\pi$.

Dit geeft de punten $(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,,-1)$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,,-1)$.

b. Dan $\sin 2t = 0$ $\Leftrightarrow$ $t = 0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ 1\frac{1}{2}\pi,\ 2\pi$. Dit geeft de punten (0,0), (1,0), (0,0), (-1,0) en (0,0).

c. Dan moet $\sin^2 2t = 1 - (1 - 2\sin^2 t)^2$ $\Leftrightarrow$ (verdubbelingsformule 17) $\Leftrightarrow$ $\sin^2 2t = (1 - \cos^2 2t))$ $\Leftrightarrow$ $\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$ en dit is formule 9 (Pythagoras).

y^2 is maximaal 1 als $(1 - 2x^2) = 0$, dus als $x = \pm\frac{1}{2}$

$\cos a + \cos(b-\pi) = 2\cos(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(a-b)) \cdot \cos(-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(a+b))$ dus: $\cos a - \cos b = 2\sin -\frac{1}{2}(a-b) \cdot \sin\frac{1}{2}(a+b)$. Want:
$\cos(b-\pi) = -\cos b$, volgt uit 2 en 4,
$\cos(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(a-b)) = -\sin\frac{1}{2}(a-b)$ volgt uit 8 en 1.
$\cos(-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(a+b)) = \sin\frac{1}{2}(a+b)$ volgt uit 2 en 8.

6 $\sin x + \sin(x+\frac{1}{4}\pi) = 2\cos\frac{1}{2}(x - x - \frac{1}{4}\pi) \cdot \sin\frac{1}{2}(2x + \frac{1}{4}\pi) = 2\cos -\frac{1}{8}\pi \cdot \sin(x + \frac{1}{8}\pi)$
en $\cos -\frac{1}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi = \sin\frac{3}{8}\pi$ volgens 2 en 8.

7 $\sin a = 2\sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}a$
en dit volgt uit verdubbelingsformule 16.

8 **a.** $\cos a$, want $\sin 7$ is een constante, heeft dus afgeleide 0.
b. $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot -\sin\frac{1}{2}(a-7)\sin\frac{1}{2}(a+7) + 2\cos\frac{1}{2}(a-7)\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(a+7)$
c. Dit volgt ook uit formule 12 met $\alpha = \frac{1}{2}(a+7)$ en $\beta = \frac{1}{2}(a-7)$.

9 **a.** Periode $f = \frac{2\pi}{9}$, dus de frequentie $f = \frac{9}{2\pi}$.
Periode $g = \frac{2\pi}{10}$, dus de frequentie $g = \frac{10}{2\pi}$.
Het frequentieverschil is $\frac{1}{2\pi}$.
b. 9, 10
c. $\frac{1}{18}\pi - \frac{1}{20}\pi = \frac{1}{180}\pi$
d. 2π
e. $r(t) = 2\cos\frac{1}{2}t \cdot \sin 9\frac{1}{2}t$ (Simpson)
f. Omdat $-1 \le \sin 9\frac{1}{2}t \le 1$
g. In de raakpunten is de helling niet 0, in de toppen wel.
h. $\cos\frac{1}{2}t = 0$ of $\sin 9\frac{1}{2}t = 0 \Leftrightarrow t = \pi$ of $9\frac{1}{2}t = k\cdot\pi$, met k geheel $\Leftrightarrow t = \pi$ of $t = k\cdot\frac{2}{19}\pi$, met k = 0, 1, 2, ..., 19.

10 **a.** $f(x) = 2\cos 2x \cdot \cos 3x$ (Simpson)
b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$ of $\cos 3x = 0$. De kleinste positieve x waarvoor $\cos 2x = 0$ is $\frac{1}{4}\pi$ en de kleinste positieve x waarvoor $\cos 3x = 0$ is $\frac{1}{6}\pi$; de afstand is dus $\frac{1}{12}\pi$.

11 **b.** $f(t) = 2\cdot\cos t\cdot\sin 2t$ (Simpson), dus $f(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0$ of $\sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, -\pi, 0, \pi$.
c. $f'(t) = \cos t + 3\cos 3t$, dus $f'(\pm\frac{1}{2}\pi) = 0$ en $f(\pm\frac{1}{2}\pi) = 0$, dus de grafiek van f raakt de t-as in $(\pm\frac{1}{2}\pi, 0)$.

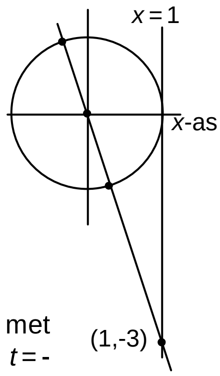
12 **b.** $\sin\pi(x-t) + \sin\pi(x+t) = 2\cos\pi t\cdot\sin\pi x$ volgens de tweede formule van Simpson.
c. amplitude $0{,}1\sqrt{3}$, periode 2
d. $\sin\pi x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1, 2, 3, 4$
e. $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ uitwijking is $0{,}2\cos\pi t$, dus amplitude = 0,2, periode = 2, frequentie = $\frac{1}{2}$
f. $2\sin\pi x = 1$of $2\sin\pi x = -1 \Leftrightarrow \sin\pi x = \frac{1}{2}$ of $\sin\pi x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2k + \frac{1}{6}$, $x = 2k + \frac{5}{6}$ of $x = 2k - \frac{1}{6}$, $x = 2k - \frac{5}{6}$ met k geheel.

13 **a.** $\sin x + \sin 3x = 2\cos x\cdot\sin 2x$ (Simpson)
$\sin 2x + \sin 4x = 2\cos x\cdot\sin 3x$ (Simpson), dus $f(x) = 2\cos x\cdot(\sin 2x + \sin 3x) = 2\cos x\cdot 2\cos\frac{1}{2}x\cdot\sin 2\frac{1}{2}x$
b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ of $\cos\frac{1}{2}x = 0$ of $\sin 2\frac{1}{2}x = 0$. De eerste zes positieve waarden van x zijn dus: $\frac{1}{2}\pi$, π , $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$, $1\frac{1}{5}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$

Paragraaf 4 Tangens

1 **a.** A is het punt (1,0).
De helling van lijn $OP = \frac{y_Q}{OA} = \frac{y_Q}{1} = \tan t$.
b. Als $t = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$, met k geheel, want dan snijdt lijn OP de lijn $x = 1$ niet meer.
c. De helling van lijn $OP = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\sin t}{\cos t}$.

2 **a.** Teken op de lijn $x = 1$ het punt met y-coördinaat -3. De lijn door de oorsprong en dit punt snijdt de cirkel in de gevraagde punten.
inv tan $-3 \approx -1{,}25$,
De punten zijn $(\cos t, \sin t)$ met $t \approx -1{,}25$ en $t \approx -1{,}25 + \pi$, dus (0,32 , -0,95) , (-0,32 , 0,95)
b. De tijdstippen $t = -1{,}25 + k\cdot\pi$, met k geheel tussen -7 en 7, dus t = -4,39, -1,25, 1,89, 5,03



3 **a.** $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{\sin\frac{1}{6}\pi}{\cos\frac{1}{6}\pi} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ enzovoort,
1, $\sqrt{3}$
b. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$

4 **a.** Zie het plaatje bij opgave 1: A is het punt (1,0) en B de projectie van P op de y-as. Dan $\Delta BPO \sim \Delta AOQ$, dus:
$\frac{OP}{BP} = \frac{OQ}{AO} \Leftrightarrow \frac{1}{|\cos t|} = \frac{OQ}{1}$.
Omdat het over de lengte van OQ gaat, en die is positief of nul.
b. Stelling van Pythagoras in driehoek AQO
c. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow$ (delen door $\cos^2 t$)
$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$

5 **b.** Als $t < \frac{1}{2}\pi$ en t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, dan wordt de richtingscoëfficiënt van lijn OP willekeurig groot; als $t > \frac{1}{2}\pi$ en t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, dan wordt de richtingscoëfficiënt van lijn OP willekeurig klein (negatief). Vandaar een verticale asymptoot $x = \frac{1}{2}\pi$. Zo ook $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ met k geheel.

c. Als t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, nadert de noemer $\cos t$ tot 0 en de teller $\sin t$ tot 1 .

6 **a.** $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

b. Tangens is periodiek met periode π.

7 **a.** $\tan a - \tan b =$

$$\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

volgens formule 15.

b. Neem $a = x + \Delta x$ en $b = x$ in a, dan krijg je:

$\tan(x+\Delta x) - \tan x = \dfrac{\sin(\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)\cdot \cos x}$, dus:

$\dfrac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x} = \dfrac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}$.

Als $\Delta x \to 0$, dan $\dfrac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \to 1$, dus $\dfrac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x} \to \dfrac{1}{\cos x \cdot \cos x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8 $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9 **a.** Bijvoorbeeld met de kettingregel:
$x \to \tan x = a \to a^2 = y$,
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{da}\cdot\dfrac{da}{dx} = 2a \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$
Het kan ook met de productregel:
$y = \tan x \cdot \tan x$,
Dan $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x + \tan x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$ en je vindt hetzelfde.

b. Met de kettingregel: $x \to \tan x = a \to \sqrt{a}$
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{da}\cdot\dfrac{da}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2\sqrt{\tan x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

c. Bijvoorbeeld met de quotiëntregel:
$y' = \dfrac{0 - \frac{1}{\cos^2 x}\cdot 1}{\tan^2 x} = -\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{\tan^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

d. $y = \dfrac{1}{\tan x} + 1$, dus je krijgt hetzelfde als in **c**.

10 **a.** $\tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1$ of $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = -\frac{1}{4}\pi$, De snijpunten zijn dus $(\frac{1}{4}\pi,1)$ en $(-\frac{1}{4}\pi,1)$.

b. $F'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$, zie opgave 4b.

c. Oppervlakte $= \frac{1}{2}\pi - (F(\frac{1}{4}\pi) - F(-\frac{1}{4}\pi)) = \pi - 2$

11 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$ en $f''(x) = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ met k geheel.

$f(k\pi) = -k\pi$, de buigpunten zijn dus: $(k\pi, -k\pi)$; deze liggen op de lijn $y = -x$.

b. $F'(x) = -\dfrac{1}{\cos x} \cdot -\sin x = \tan x$

c. Oppervlakte =
$F(\frac{1}{4}\pi) - F(0) = \ln \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{32}\pi^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{32}\pi^2$

Rekentechniek

1 Van links naar rechts
min $-1\frac{1}{2}$ als $\sin x = 1$, dus als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$
max $2\frac{1}{2}$ als $\sin x = -1$, dus als $x = -\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

min 0 als $\cos x = -1$, dus als $x = \pi + k\cdot 2\pi$
max 4 als $\cos x = -1$, dus als $x = k\cdot 2\pi$

min -1 als $x = -1$
geen max

min -1 als $x = -1$, want $y = (x+1)^2 - 1$
geen max

min -1 als dus $x = \pi + k\cdot 2\pi$
max 3 als $\cos x = 1$, dus als $x = k\cdot 2\pi$

min -1 als $x = \pi + k\cdot 2\pi$ (zie voorgaande)
max 3 als $x = k\cdot 2\pi$

min $-1\frac{1}{2}$ als $\sin^2 2x = 1$, dus als $\sin 2x = 1$ of als $\sin 2x = -1$, dus $x = \frac{1}{4}\pi + k\cdot\frac{1}{2}\pi$
max $\frac{1}{2}$ als $\sin^2 2x = 0$, dus als als $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\cdot\frac{1}{2}\pi$

min 0 als $x = k\cdot\pi$
max 1 als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

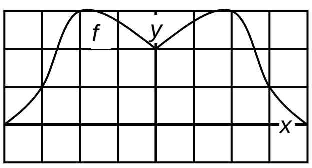
min e^{-1} als $\sin x = -1$, dus als $x = -\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$
max e als $\sin x = 1$, dus als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

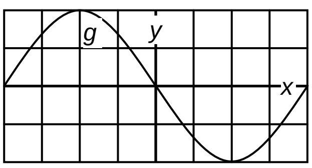
geen min
max 0 als $\sin x = 1$, dus als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

b. min -3 als $\cos x = 1$, dus als $x = k\cdot 2\pi$
max 5 als $\cos x = -1$, dus als $x = \pi + k\cdot 2\pi$

2 **a.** K: $x(-t) = -x(t)$ en $y(-t) = y(t)$; symmetrisch in de y-as
L: $x(-t) = x(t)$ en $y(-t) = -y(t)$; symmetrisch in de x-as
M: $x(-t) = -x(t)$ en $y(-t) = -y(t)$; puntsymmetrisch in $O(0,0)$
b. $x(\pi - t) = -x(t)$ en $y(\pi - t) = y(t)$; symmetrisch in de y-as

3 **a,b**

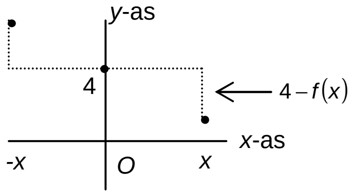




c. De grafiek van f is symmetrisch in de y-as, de grafiek van g is puntsymmetrisch in O.

4 **a.** $\sin(\frac{1}{4}\pi + x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{4}\pi + x)) = \cos(\frac{1}{4}\pi - x)$
$\cos(\frac{1}{4}\pi + x) = \sin(\frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{4}\pi + x)) = \sin(\frac{1}{4}\pi - x)$, klopt.
Symmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$
b. $y = \sin(\text{-}x) + \cos(\text{-}x) = \text{-}\sin x + \cos x$
c. $y = \text{-}\sin x - \cos x$
d. $g(x) = 4 - \sin x - \cos x$

5 **a.**



$f(\text{-}x) = 4 + 4 - f(x) = 8 - \dfrac{4}{x^2+1}$ $f(x) = 8 - \dfrac{4}{x^2+1}$

b. $g(x) = 1 - (1 - \sin(\pi - x)) = 2 - \sin x$
Je kunt eenzelfde soort platje maken.

6 $f(x) = \frac{1}{2}x + \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{\frac{1}{2}x\,e^x - \frac{1}{2}x + x}{e^x - 1} = \dfrac{\frac{1}{2}x\,e^x + \frac{1}{2}x}{e^x - 1}$

$f(\text{-}x) = \dfrac{\text{-}\frac{1}{2}x\,e^{\text{-}x} - \frac{1}{2}x}{e^{\text{-}x} - 1} \cdot \dfrac{e^x}{e^x} = \dfrac{\text{-}\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\,e^x}{1 - e^x} = f(x)$,
voor alle $x \neq 0$.

7 **a.** $h(a - x) = h(a + x)$ voor alle x ,
of $h(2a - x) = h(x)$ voor alle x
b. Het gemiddelde van j en k is b, dus:
$\frac{1}{2}(j(x) + k(x)) = b$ voor alle x
Ook: $j(x) + b = b - k(x)$ voor alle x
c. $b - k(a + x) = k(a - x) - b$ voor alle x

8 Van links naar rechts:
- $t = \frac{1}{2}x$ invullen in $y = t + 2$ geeft: $y = \frac{1}{2}x + 2$
- $t = y - 2$ invullen in $x = t^2 + 2t$ geeft: $x = y^2 - 2y$
- $t = y - 2$ invullen in $x = t^3$ geeft: $x = (y - 2)^3$
- $x = \ln t^3 \Leftrightarrow t = e^{\frac{1}{3}x}$, voor $t = e^{\frac{1}{3}x}$ invullen in $y = t^2 + 2$ geeft: $y = e^{\frac{2}{3}x} + 2$
- $\sin t$ in $y = \sin t + 2$ vervangen door x geeft: $y = x + 2$
- $\sin t$ in $x = \sin^2 t$ vervangen door $y - 2$ geeft: $x = (y - 2)^2$
- $x^2 + y^2 = 1$
- $x + y^2 = 1$

9 **a.** Er geldt: $O^3 = 216\,R^6$ en $V^2 = R^6$, dus:
$O^3 = 216\,V^2$, dus $O = 6\sqrt[3]{V^2}$ en $V = \sqrt{\dfrac{O^3}{216}}$.
b. $B = \dfrac{30}{L}$ invullen in

$K = \dfrac{18547}{L} + 56{,}6L + \dfrac{5279}{B} + 90{,}8B$ geeft

$K = \dfrac{18547}{L} + 56{,}6L + \dfrac{5279}{30} \cdot L + \dfrac{90{,}8}{L} \cdot 30$

$= \dfrac{21271}{L} + 232{,}6L$.

c. A vervangen door $\frac{1}{3}q^2$ in $K = 0{,}1A + 150$
geeft: $K = \frac{1}{30}q^2 + 150$

10 **a.** Uit de stelling van Pythagoras volgt dat de hoogte van de lantaarn $= \sqrt{r^2 - 25}$, dus

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{r^2 - 25}}{r}$

b. $L = \dfrac{1}{r^2} \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\sqrt{r^2 - 25}}{r} = \dfrac{\sqrt{r^2 - 25}}{r^3}$, dus

$L^2 = \dfrac{r^2 - 25}{r^6} = \dfrac{r^2}{r^6} - \dfrac{25}{r^6} = \dfrac{1}{r^4} - \dfrac{25}{r^6}$

11 **a.** Noem ded lengte van het pad a, dan is de tijd over de heenweg $\dfrac{a}{4}$ en over de terugweg $\dfrac{a}{6}$, dus de tijd over een afstand van $2\,a$ is $\dfrac{a}{4} + \dfrac{a}{6} = \dfrac{5a}{12}$,

dus de gemiddelde snelheid is $2\,a$: $\dfrac{5a}{12} = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$ km/u
b. $t = t_1 + t_2$
c. $v_1 \cdot t_1 = A$, $v_2 \cdot t_2 = A$, $v \cdot t = 2\,A$
d. $\dfrac{A}{v_1} + \dfrac{A}{v_2} = \dfrac{2\,A}{v}$, beide leden van de vergelijking delen door A geeft het resultaat.
e. $v = \dfrac{2v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$

12 **a.** $i_1 = \dfrac{V}{R_1}$, $i_2 = \dfrac{V}{R_2}$, $i = \dfrac{V}{R}$, dus $i = i_1 + i_2$ geeft:

$\dfrac{V}{R_1} + \dfrac{V}{R_2} = \dfrac{V}{R}$, dus (delen door V): $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R}$.

b. $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

c. $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$