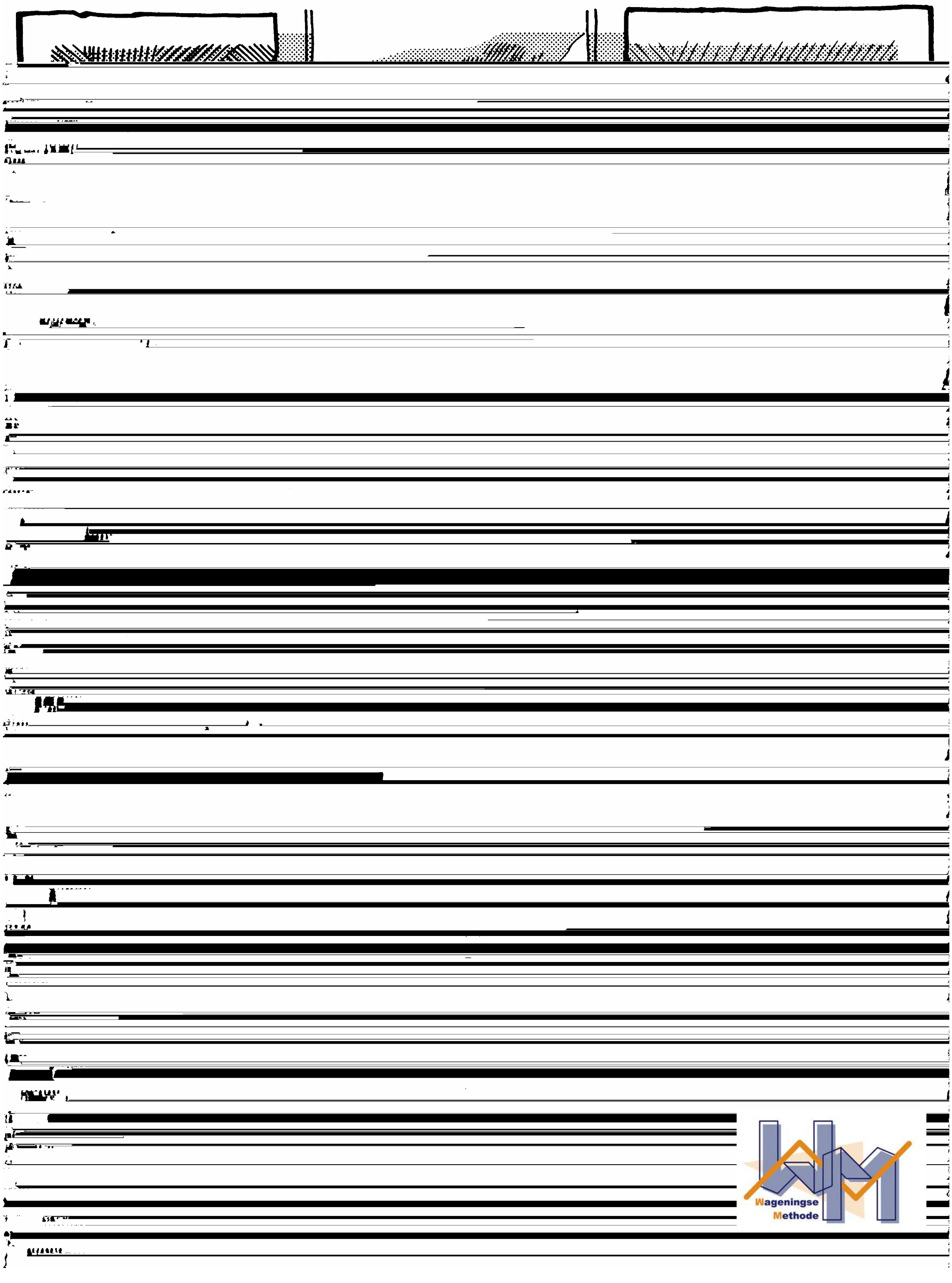
VWO Wiskunde D 2015

1 Combinatoriek en Rekenregels



1 Combinatoriek en rekenregels

Inhoudsopgave

1	Wegendiagrammen en bomen	1
2	Geordende grepen	7
3	Roosters	12
4	Ongeordende grepen	16
5	Het vaasmodel	21
6	Combinatorische vraagstukken	28
7	Extra opgaven	32
8	Rekenregels	35
	Antwoorden	40

Bij opgaven gemarkeerd met dit symbool hoort een computerprogramma

Bij opgaven gemarkeerd met dit symbool hoort een werkblad

Opgaven gemarkeerd met dit symbool kunnen worden overgeslagen

Colofon

© 2015 Stichting De Wageningse Methode

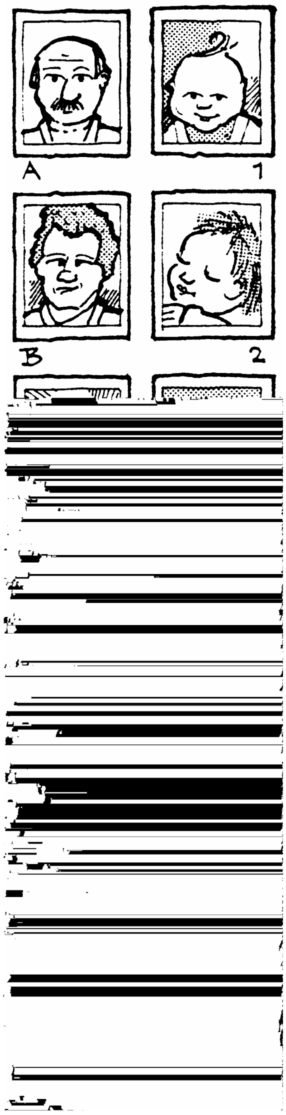
Auteurs Leon van den Broek†, Ton Geurtz, Maris van Haandel,
Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen

Illustraties Wilson Design, Uden

Homepage www.wageningse-methode.nl

1 Wegendiagrammen en bomen

1 In de linkerkolom zie je zes portretten. Daarnaast, maar misschien in andere volgorde, tekeningen van dezelfde mensen als baby.
De vraag is nu: welke tweetallen horen bij elkaar?
Een mogelijk antwoord is: 4, 3, 2, 6, 5, 1. Daarmee geef je aan dat 4 hoort bij *A*, 3 bij *B*, 2 bij *C*, enzovoort.
De vraag naar de juiste volgorde is erg moeilijk te beantwoorden, want de portretjes zijn nogal onduidelijk. Je kunt net zo goed gokken.



a. Bedenk een manier waarop je volgens het toeval zo'n rijtje van de cijfers 1 tot en met 6 kunt maken.

In de tabel hieronder zijn al twee mogelijkheden ingevuld.

						goed
5	6	2	3	4	1	2
3	1	6	5	2	4	1

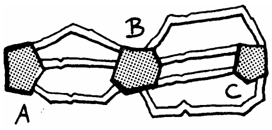
Neem aan dat de juiste volgorde 6, 5, 4, 3, 2, 1 is. Bij de eerste mogelijkheid zijn er dus twee foto's goed geraden, bij de tweede mogelijkheid een.
b. Maak, op de manier die je zelf bedacht hebt, ook zes van die rijtjes. Schrijf bij elk rijtje het aantal goed.

Download software_kans_en_simulatie van de website van de Wageningse Methode. Met het programma *portretten raden* kun je willekeurig veel rijtjes genereren.
http://www.wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d

aantal goed	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	367	365	187	60	20	0	1
aantal goed	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	369	363	197	57	14	0	0

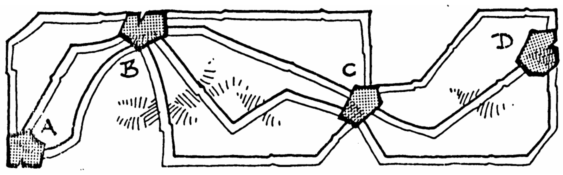
Hierboven zie je tweemaal het resultaat van 1000 simulaties met dat programma.
c. Laat het programma zelf ook een aantal keer draaien. Krijg je opmerkelijke verschillen?

De twee afgedrukte uitvoeren wijzen erop dat de kans op "zes goed" klein is.
d. Hoe groot denk je dat die kans is op grond van de 2000 simulaties?
e. Heb je enig idee hoe groot die kans *precies* is?
f. Is het toeval dat in beide simulaties *vijf goed* geen enkele keer voorkomt?

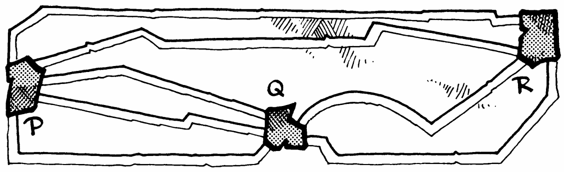


2 In het wegendiagram hiernaast kun je van *A*, via *B*, naar *C* lopen.
a. Stel dat je van *A* naar *B* voor de bovenste weg kiest. Op hoeveel manieren kun je de route dan nog vervolgen naar *C*?
b. Dezelfde vraag als in **a**, maar nu als je van *A* naar *B* voor de middelste weg kiest? En als je van *A* naar *B* voor de onderste weg kiest?
c. Hoeveel routes zijn er in totaal van *A*, via *B*, naar *C*?

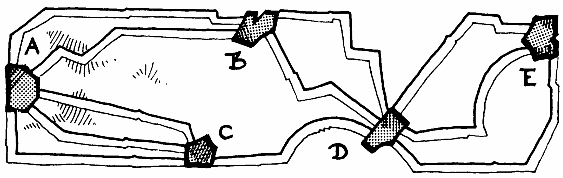
3 **a.** Hoeveel routes zijn er in het wegendiagram hieronder van *A* (via *B* en *C*) naar *D*?
b. En hoeveel routes zijn er van *A* naar *D* en dan weer terug naar *A*?

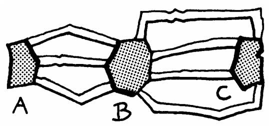


c. Op het kaartje hieronder zie je dat je van *P* rechtstreeks naar *R* kunt, maar je kunt ook via *Q*.
Hoeveel routes zijn er in totaal van *P* naar *R*?



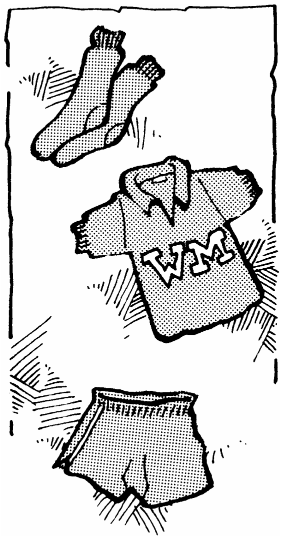
d. Hoeveel verschillende routes zijn er in het wegendiagram hieronder van *A* naar *E*?





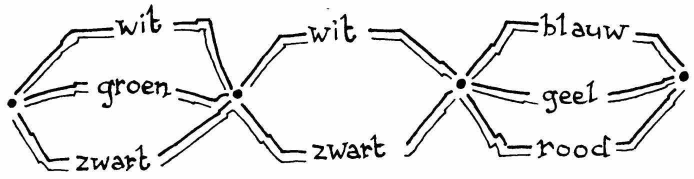
Het vermenigvuldigprincipe
Het aantal routes van *A* via *B* naar *C* vind je door het aantal wegen van *A* naar *B* te vermenigvuldigen met het aantal wegen van *B* naar *C*.

Zie software_telproblemen, *Vermenigvuldigprincipe*
http://www.wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d



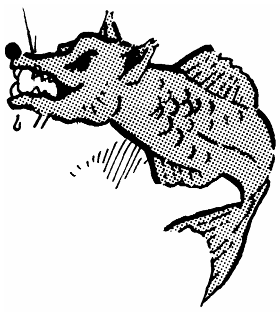
4 Voor het aankleden van een nieuw voetbalteam kan er gekozen worden uit: wit, groen of zwart voor de kousen; wit of zwart voor de broek en blauw, geel of rood voor het shirt.

a. Hieronder zie je een wegendiagram. Neem het over in je schrift en kleur daarin de route die hoort bij het tenue witte kousen, witte broek en rood shirt.



Elk tenue dat je kunt samenstellen, correspondeert met een route in het wegendiagram. Het aantal tenues is dus gelijk aan het aantal routes in het wegendiagram.

b. Hoeveel tenues zijn er mogelijk?

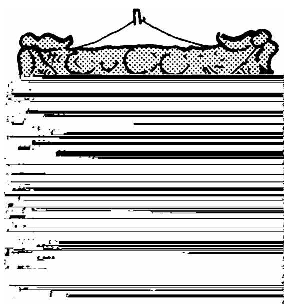


5 In een restaurant kun je een driegangen-keuzemenu bestellen. Voor het voorgerecht kun je kiezen uit: mosterdsoep, boerensalade, gevulde tomaat, zalmcocktail en asperges in roomsaus. Voor het hoofdgerecht kun je kiezen uit: gebakken lever, biefstuk van de haas, zeewolf en entrecote. Voor het nagerecht kun je kiezen uit: ijs met warme kersen, vruchtencocktail, tiramisu en cappuccino.

a. Teken een bijbehorend wegendiagram.

b. Hoeveel verschillende menu's kun je samenstellen?

c. Uit hoeveel menu's kun je nog kiezen als je besluit voor het hoofdgerecht zeewolf te nemen?



6 Adriaan maakt een schilderij door een vierkant wit linnen doek in vier stukken te verdelen en elk van deze stukken een kleur te geven. Hij heeft de kleuren rood, geel en blauw.

a. Teken een bijbehorend wegendiagram.

b. Hoeveel verschillende schilderijen zijn er mogelijk?

c. Bij hoeveel schilderijen is het stuk rechtsboven rood?

d. Hoeveel schilderijen kan Adriaan maken als er ook stukken wit gelaten mogen worden?

7 Fineke twijfelt weer eens over wat ze aan zal trekken: een rok met bloes of een jurk. In haar kleerkast heeft ze hangen 2 rokken, 4 bloezen en 3 jurken.

a. Teken een bijbehorend wegendiagram.

b. Op hoeveel manieren kan Fineke zich kleden?

8 Anne gaat haar vakkenpakket vol maken. Zij twijfelt nog tussen aardrijkskunde en geschiedenis; tussen Frans en Duits en tussen natuurkunde en scheikunde.

a. Teken hierbij een wegendiagram.

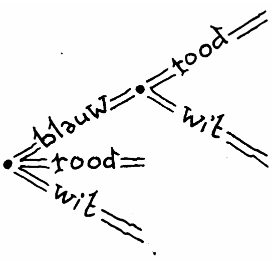
b. Hoeveel keuzemogelijkheden heeft Anne nog?

9 De Russische en de Nederlandse vlag bestaan beide uit drie horizontale banen, waarvan er één blauw is, één rood is en één wit is. We bekijken alle mogelijke vlaggen met drie horizontale banen: één blauwe, één rode en één witte.

a. Probeer een bijbehorend wegendiagram te tekenen.

Het is onmogelijk hierbij een wegendiagram te tekenen: de keuzes die je voor de tweede baan kunt maken hangen af van de keuze die je voor de eerste baan gemaakt hebt.

Bij dit vlaggenprobleem kun je wel *een boom* tekenen. Hiernaast zie je het begin van zo'n boom.



b. Neem de boom over in je schrift en maak hem af.

c. Welk eindpunt van de boom hoort bij de Nederlandse vlag?

d. Hoeveel eindpunten heeft de boom? Hoeveel vlaggen zijn er dus mogelijk?

De vlag van Mauritius - een eiland in de Indische Oceaan - bestaat uit vier horizontale banen: een blauwe, een gele, een groene en een rode. Er zijn veel vlaggen mogelijk met vier horizontale banen, waarvan er één blauw, één geel, één groen en één rood is.

e. Teken een bijbehorende boom.

f. Hoeveel eindpunten heeft de boom?

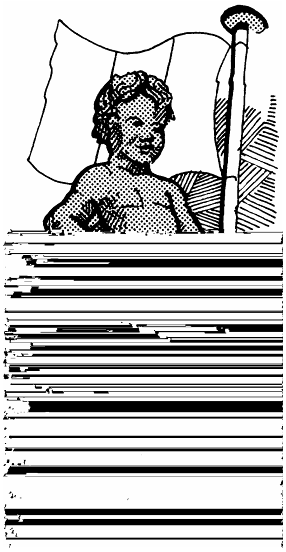
g. Hoeveel vlaggen zijn er met de bovenste baan rood? En hoeveel vlaggen zijn er met de derde baan rood?

h. Hoeveel vlaggen zijn er met de bovenste baan rood en de onderste blauw?

Het is een heel karwei om de boom uit **e** te tekenen. Je kunt de boom ook in woorden beschrijven: het is een 4-3-2-1-boom (aan de wortel splitst hij zich in 4 takken; die takken splitsen zich weer in 3 takken; deze splitsen zich vervolgens weer in 2 takken en deze laatste takken vervolgen met 1 tak.

Bekijk eens vlaggen met vijf horizontale banen: één blauwe, één gele, één groene, één rode en één zwarte. Ga na dat hier een 5-4-3-2-1-boom bij hoort.

i. Hoeveel van die vlaggen zijn er?



10 We gaan vlaggen maken met drie verticale banen. We hebben de kleuren blauw, geel, rood en zwart.
a. Hoeveel vlaggen zijn er mogelijk als elke baan een andere kleur moet hebben? Beschrijf de bijbehorende boom.
b. Hoeveel vlaggen zijn er mogelijk als elke kleur meerdere keren gebruikt mag worden? Beschrijf de bijbehorende boom of het bijbehorende wegendiagram.

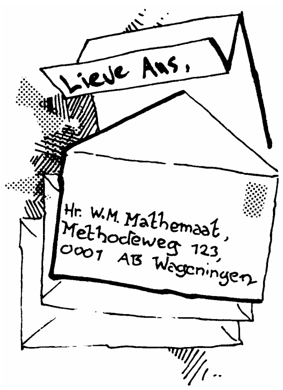
We maken nu vlaggen als volgt: elk van de vier kleuren mag meerdere keren gebruikt worden; maar opeenvolgende banen mogen niet gelijk van kleur zijn.
c. Beschrijf de bijbehorende boom. Hoeveel van zulke vlaggen zijn er mogelijk?

11 Met de cijfers 0, 1, 2, 3, 4 kun je rijtjes maken. Bijvoorbeeld 130334; dit is een rijtje van lengte 6.
a. Hoeveel rijtjes van lengte 6 kun je maken? Beschrijf de bijbehorende boom of wegendiagram.
b. Hoeveel rijtjes van lengte 5 kun je maken waarbij je elk cijfer één keer gebruikt? Beschrijf de bijbehorende boom.
c. Hoeveel rijtjes van lengte 3 kun je maken waarbij je elk cijfer hooguit één keer gebruikt? Beschrijf de bijbehorende boom of het bijbehorende wegendiagram.
d. Hoeveel rijtjes van lengte 8 zijn er die beginnen met een 0 en eindigen op een 4? Beschrijf de bijbehorende boom.
e. Kun je zonder te rekenen verklaren waarom er net zo veel rijtjes van lengte 6 zijn als rijtjes van lengte 8 die beginnen met een 0 en eindigen op een 4?

12 Je vriend heeft een telefoonnummer dat bestaat uit de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9. De volgorde van deze cijfers ben je vergeten.
a. Hoeveel van die telefoonnummers zijn er mogelijk?
b. Hoeveel van die nummers zijn er nog mogelijk als je je herinnert dat het telefoonnummer begint met 35?
c. Hoeveel telefoonnummers zijn er met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8, denk je?
Tip. Bij elk telefoonnummer met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8 kun je twee telefoonnummers maken met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9 op de volgende manier. Bij 131578 horen 931578 en 139578 (vervang de eerste 1 door een 9 of vervang de tweede 1 door een 9).
d. Welke twee telefoonnummers met 1, 3, 5, 7, 8 en 9 horen op deze manier bij het nummer 351178?
e. Welk nummer met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8 hoort bij het nummer 158793?

f. Er is nog een nummer met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9 dat hoort bij het nummer dat je bij **e** hebt opgeschreven. Welk nummer is dat?

We hebben op deze manier een koppeling gemaakt tussen de telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7, en 8 en de telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9.
Bij elk telefoonnummer van de eerste soort horen twee nummers van de tweede soort.
Er zijn dus half zo veel nummers van de eerste soort als van de tweede soort. Het aantal nummers van de eerste soort is dus $720 : 2 = 360$.
g. Verzin zelf een koppeling tussen telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5 en 7 en telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9. Welke telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9 horen volgens jouw koppeling bij het nummer 135117?
h. Hoeveel telefoonnummers zijn er met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5 en 7?
i. Probeer eens uit te zoeken, weer met behulp van een koppeling, hoeveel telefoonnummers er zijn met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 7. Leg uit hoe je koppeling werkt (dat kan door een of twee voorbeelden te geven).

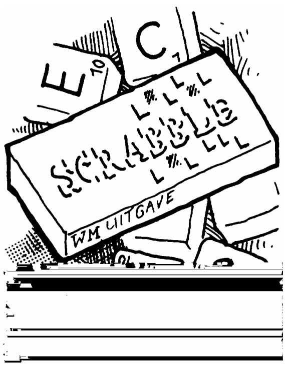


13 Je hebt drie brieven (*a*, *b* en *c*) geschreven aan vrienden en hun adressen op drie enveloppen (*A*, *B* en *C*) gezet. Zonder ergens op te letten stop je in elk van de enveloppen één brief.
a. Op hoeveel manieren kunnen de brieven over de enveloppen verdeeld worden? Teken een boom of schrijf alle mogelijkheden systematisch op.
b. Bij hoeveel van de mogelijke manieren komt geen enkele brief in de juiste envelop?
Bij hoeveel manieren komt er precies één brief in de juiste envelop, bij hoeveel manieren precies twee en bij hoeveel precies drie?

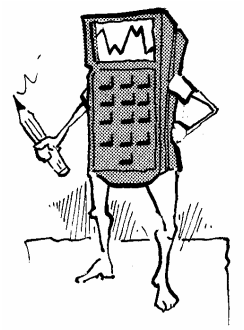
2 Geordende grepen

1 In een bak zitten zeven ballen met daarop de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7. We gaan op twee manieren rijtjes van lengte 3 maken.
Manier 1 (*trekken zonder terugleggen*): Pak een bal uit de bak en schrijf het cijfer van de bal op. Laat de bal uit de bak. Pak uit de bak met de overige zes ballen opnieuw een bal. Schrijf het cijfer van die bal achter het cijfer van de eerste bal. Laat ook de tweede bal uit de bak. Pak tenslotte uit de overgebleven vijf ballen een derde bal en noteer het cijfer achter het tweede cijfer. Zo ontstaat een rijtje van drie cijfers.
Manier 2 (*trekken met terugleggen*): Zelfde als manier 1, maar nu leg je steeds een getrokken bal weer terug in de bak. Op deze manier krijg je ook rijtjes van drie cijfers.
a. Hoeveel verschillende rijtjes kun je krijgen op manier 1? Wat voor soort boom hoort daarbij?
b. Hoeveel verschillende rijtjes kun je krijgen op manier 2? Wat voor soort wegendiagram hoort daarbij?

Rijtjes die je krijgt op manier 1 heten **geordende grepen van 3 uit 7 zonder herhaling**, of **permutaties van 3 uit 7**. Daarvan zijn er $7 \cdot 6 \cdot 5$.
Rijtjes die je krijgt op manier 2 heten **geordende grepen van 3 uit 7 met herhaling**. Daarvan zijn er $7 \cdot 7 \cdot 7$.



2 Zoals je weet bestaat ons alfabet uit 26 letters.
a. Hoeveel verschillende permutaties van 4 letters zijn er? Wat voor soort boom hoort daarbij?
b. Hoeveel verschillende geordende grepen van 4 letters met herhaling zijn er? Wat voor soort wegendiagram hoort daarbij?
c. Bij de geordende grepen van 4 letters met herhaling zitten ook alle permutaties van 4 letters. Welk deel van die geordende grepen met herhaling zijn permutaties?
d. Hoeveel geordende grepen van 4 letters zijn er waarbij niet alle vier de letters verschillend zijn?
e. *Hoe* bereken je het aantal permutaties van 13 uit 26? En *hoe* het aantal geordende grepen met herhaling van 13 uit 26?



Het aantal geordende grepen van 13 uit 26 met herhaling is op je GR eenvoudig te berekenen: 26^{13}.
Het aantal permutaties van 13 uit 26 kost wat meer moeite: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14$.
Gelukkig zit er een optie op je rekenmachine waarmee je het aantal permutaties snel kunt berekenen: *nPr.*
De optie *nPr* vind je in het menu PRB. PRB is een afkorting van het Engelse woord *probability*, dat *waarschijnlijkheid* betekent.
Het gaat als volgt: 26 , MATH , PRB , 2: *nPr* , 13 , ENTER.

3 **a.** Bereken op je GR het aantal permutaties van 13 uit 26.
b. Bereken met je GR het aantal permutaties van 20 uit 26. Bereken ook het aantal permutaties van 26 uit 26.
c. Typ in op je GR: 26 *nPr* 30 en druk op ENTER.
Waarom geeft de GR hier het antwoord 0, denk je?

Het aantal permutaties van 26 uit 26 neemt een speciale plaats in: dat is het aantal manieren waarop je de letters van het alfabet kunt rangschikken (op een rij zetten). De alfabetische volgorde is één van die rangschikkingen. In totaal zijn er $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschillende rangschikkingen.
Voor het product van de getallen 1 tot en met 26 bestaat een afkorting: 26! (spreek uit 26 **faculteit**). Op je GR vind je de optie ! in het PRB menu.

4 **a.** Bereken het aantal rangschikkingen van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Doe dat op twee manieren: met de optie ! en met de optie *nPr*.

Je hebt het aantal rangschikkingen van 9 objecten berekend.
b. Bereken op je GR het aantal rangschikkingen van 20 objecten.
c. Probeer op je GR ook het aantal rangschikkingen van 100 objecten te berekenen.
Zoek uit wat het grootste aantal objecten is waarvoor je op je GR het aantal rangschikkingen kunt berekenen.
d. Op hoeveel manieren kun je 1 object rangschikken, vind je? Wat vind je GR daarvan?

Het is een beetje raar om te spreken over het aantal manieren waarop je nul objecten kunt rangschikken. Toch kun je op je GR 0! berekenen: uitkomst 1.
Je kunt dat zien als een afspraak.

Afspraak: $0! = 1$.

5 **a.** In de vorige opgave heb je berekend dat $9! = 362880$. Hoe kun je hieruit $10!$ berekenen?
b. Bekijk de tabel van $X!$ op je GR 15 ! op te zoeken. Hoe groot is $15!$ (de exacte waarde geven)?
c. $16!$ wordt door de GR niet meer exact gegeven. Geef de exacte waarde van $16!$

6 **a.** Bereken op twee manieren het aantal permutaties van 4 uit 9: met de optie *nPr* en ook door gewoon het product van 4 getallen te nemen.
b. Laat zien dat het aantal permutaties van 4 uit 9 gelijk is aan $\frac{9!}{5!}$

Tip: schrijf $9!$ en $5!$ eerst als product van respectievelijk 9 en 5 getallen.

c. Schrijf het aantal permutaties van 13 uit 26 ook als quotiënt van twee faculteiten. Doe hetzelfde voor het aantal permutaties van 20 uit 26. Controleer je antwoorden door het quotiënt uit te rekenen op je GR.
d. k is een getal tussen 1 en 26. Leg uit dat het aantal permutaties van k uit 26 gelijk is aan $\frac{26!}{(26-k)!}$.
e. Het aantal permutaties van 26 uit 26 zou je, volgens de formule uit **d**, ook als quotiënt van twee faculteiten kunnen schrijven. Doe dat.
Laat zien, zonder GR, dat de uitkomst van dit quotiënt gelijk is aan $26!$ (denk aan de afspraak over $0!$).

Het aantal permutaties van k uit n kun je op meerdere manieren noteren:
$n\text{P}k$,
$\frac{n!}{(n-k)!}$,
$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-(k-2))\cdot(n-(k-1))$.

7 Noteer het aantal permutaties van 3 uit 7 op bovenstaande drie manieren.

8 Anneke heeft op maandag de eerste zeven uur les, zonder tussenuur. Ze heeft die dag de vakken DU, GS, LO, MU, NA, NE en WI.
a. Hoeveel verschillende roosters zijn er voor Anneke die dag mogelijk?

b. Hoeveel roosters zijn er nog mogelijk, als je weet dat NE eerder dan GS komt?

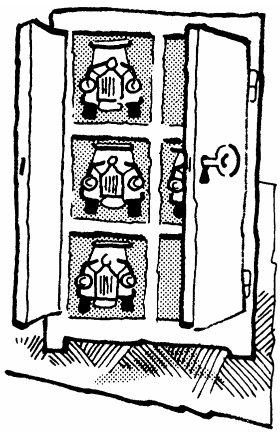
c. Hoeveel roosters zijn er mogelijk als je weet dat NE en WI vóór de kleine pauze komen, GS en LO tussen de twee pauzes in, en DU, MU en NA na de grote pauze?

9 Tijdens een fancy-fair in een dorpje in Noord-Brabant zijn er honderd loten verkocht, genummerd 1 tot en met 100. Bij de loterij kun je een eerste, een tweede, een derde en een vierde prijs winnen. Een trekkingslijst bestaat uit vier nummers: het nummer van de eerste prijs, dat van de tweede, van de derde en van de vierde prijs.

a. Hoeveel verschillende trekkingslijsten zijn er mogelijk?

b. Hoeveel verschillende trekkingslijsten zijn er mogelijk met alle vier de nummers oneven?

c. Hoeveel verschillende trekkingslijsten zijn er mogelijk, waarbij precies één van de vier nummers oneven is?



10 De nummerborden in Nederland van auto's tussen 1980 en 1999 zijn van de vorm LL-LL-CC (eerst twee letters, dan weer twee letters en daarna twee cijfers). De letters A, C, E, I, M, O, Q, U en W worden niet gebruikt. Verder kunnen alle letters voorkomen. Voor de cijfers wordt gebruik gemaakt van 0 tot en met 9.

Twee voorbeelden: NL-BB-87 en YK-XV-33.

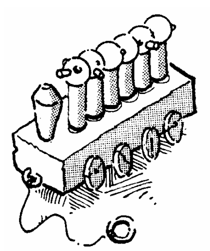
a. Hoeveel verschillende nummerborden van dit type zijn er?

b. Het nummerbord van een bedrijfswagen begint met een B of een V. Hoeveel verschillende nummerborden voor bedrijfswagens zijn er?

c. Hoeveel verschillende nummerborden zijn er waarbij alle vier de letters en beide cijfers verschillend zijn?

d. Op een parkeerplaats staan 25 auto's. Bij hoeveel van die auto's verwacht je dat alle vier de letters en beide cijfers verschillend zijn?

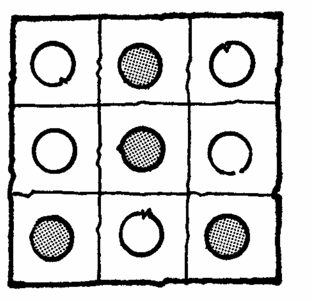
e. Hoeveel verschillende nummerborden zijn er die beginnen met BB en eindigen op 00?



11 Anneke heeft een treintje met zes plaatsen. De reizigers zijn poppetjes. Er mogen, net als in het echt, ook plaatsen onbezet blijven. Zelfs de hele trein kan leeg blijven. Maar vol is vol: er kunnen niet meer dan zes passagiers mee. Bepaal in elk van de volgende gevallen op hoeveel manieren Anneke de trein van reizigers kan voorzien.

a. Anneke heeft zes verschillend gekleurde poppen, die allemaal meereizen.

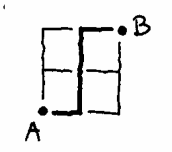
b. Anneke heeft zes dezelfde poppen (waar dus helemaal geen verschil tussen is).
c. Anneke laat één blauwe en één rode pop meereizen.
d. Anneke laat twee rode poppen meereizen.
e. Anneke heeft blauwe en rode poppen. Er moeten meer rode dan blauwe poppen meereizen en het treintje is helemaal vol.



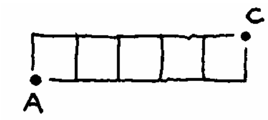
12 Op een bord met negen velden worden vijf witte en vier donkere schijven geplaatst. Een voorbeeld zie je hiernaast.
a. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

In het voorbeeld staan er twee witte schijven op de eerste rij.
b. Hoeveel mogelijkheden zijn er als er op de eerste rij twee witte schijven staan?

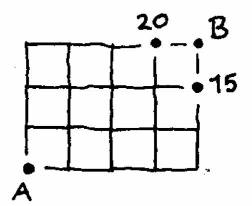
3 Roosters



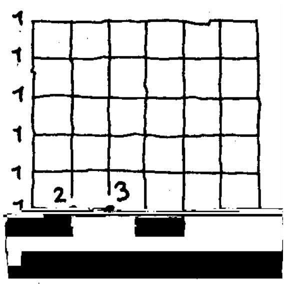
1 Hiernaast staat een rooster. Punt *B* ligt twee hokjes rechts van *A* en ook twee hokjes boven *A*. In het rooster is een route aangegeven van *A* naar *B* over de lijnen van het rooster. Het is een zogenaamde *kortste route*; dat wil zeggen een route zonder omwegen.
a. Teken de overige kortste routes van *A* naar *B*; maak voor elke kortste route een apart plaatje.
Hoeveel kortste routes van *A* naar *B* zijn er?



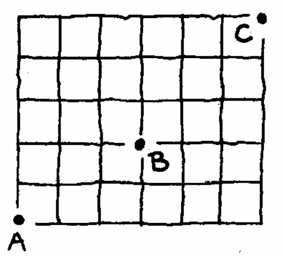
Hiernaast staat een rooster met twee punten *A* en *C*. Punt *C* ligt vijf hokjes rechts van *A* en één hokje boven *A*.
b. Teken alle kortste routes van *A* naar *C*.
Hoeveel kortste routes zijn er van *A* naar *C*?



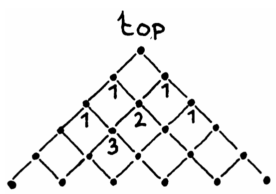
2 Punt *B* ligt vier hokjes rechts van *A* en drie hokjes boven *A*. Anneke heeft geteld dat er 20 kortste routes zijn van *A* naar het punt links van *B*; ze heeft ook geteld dat er 15 kortste routes zijn van *A* naar het punt onder *B*. Die aantallen staan bij de betreffende kruispunten.
a. Weet je nu ook hoeveel kortste routes er zijn van *A* naar *B*?



Je hebt nu het principe ontdekt waarmee je aantallen kortste routes in een rooster kunt uitrekenen.
Duidelijk is dat er maar 1 kortste route is van *A* naar de punten rechts van *A* en naar de punten boven *A*. Dat is al aangegeven. Hier vanuit gaande kun je het principe toepassen. De "2" krijg je als 1+1 en de "3" als 2+1.
b. Schrijf bij elk kruispunt hoeveel kortste routes er zijn van *A* naar dat kruispunt.



In het rooster hiernaast zijn de punten *A*, *B* en *C* aangegeven.
c. Hoeveel kortste routes zijn er van *A* naar *B*? En hoeveel kortste routes zijn er van *B* naar *C*?
d. Hoeveel kortste routes zijn er van *A*, via *B*, naar *C*?



3 Hiernaast staat weer een rooster. Het is een achtste slag gedraaid. Bij een aantal kruispunten staat het aantal kortste routes van de top naar dat kruispunt.
Schrijf bij de overige kruispunten ook het aantal kortste routes van de top naar dat kruispunt.

Het rooster uit opgave **3** kun je nog veel verder voortgezet denken. De getallen die op de kruispunten komen te staan vormen samen **de driehoek van Pascal**. Die staat hieronder. De 1 aan de top van de driehoek is misschien een beetje vreemd ... .

De driehoek van Pascal

1

1 1

1 2 1

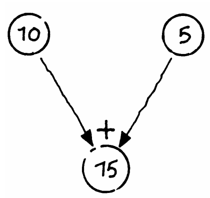
1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1



Links en rechts staan 1'en. De andere getallen in de driehoek ontstaan door de twee getallen die direct linksboven en rechtsboven dat getal staan op te tellen.
De bovenste rij van de driehoek van Pascal wordt de nulde rij genoemd; de rij daaronder de eerste rij, enzovoort.

Blaise Pascal (1623 - 1662)

Het getallenpatroon is genoemd naar de Franse filosoof en wiskundige Blaise Pascal. Het werd onder zijn naam (postuum) gepubliceerd in 1665.

4 De driehoek van Pascal stopt niet bij de zevende rij.
a. Geef de achtste rij van de driehoek van Pascal.
b. Wat is het grootste getal in de 9^e rij van de driehoek van Pascal? Hoe vaak komt dat getal voor in de 9^e rij?
c. Wat is het grootste getal in de 10^e rij?

In de 10^e rij van de driehoek van Pascal staan 11 getallen; op de 0^e en de 10^e plaats staat het getal 1.

plaats	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1										1

d. Welk getal staat er op plaats 4 in de 10^e rij? Je moet daarvoor eerst een deel van de 9^e rij berekenen.

5 In opgave **2** heb je berekend hoeveel kortste routes er zijn in een rooster van (0,0) naar (4,3). Als het goed is, kwam je aan 35. Elke kortste route bestaat uit 7 stappen (een stap is 1 naar boven of 1 naar rechts). Van die 7 stappen moet je er 3 naar boven doen (en 4 naar rechts). Het aantal kortste routes vind je in de driehoek van Pascal in de 7^e rij op plaats 3; omdat je van de 7 stappen er 3 naar boven gaat.
Je kunt het getal ook vinden op plaats 4; je gaat immers 4 stappen naar rechts.
a. In welke rij en op welke plaatsen kun je het aantal kortste routes van (0,0) naar (5,2) vinden? Hoeveel van die routes zijn er?
b. Hoeveel kortste routes zijn er van (0,0) naar (6,4)?

Als je met behulp van de driehoek van Pascal het aantal kortste routes van (0,0) naar (14,6) wilt bepalen, moet je de driehoek aanvullen tot en met de 20^e rij. Dat is een heel karwei. Dit getal kun je gelukkig ook eenvoudig op je GR berekenen met de optie *nCr* in het menu PRB onder de MATH-knop.

6 **a.** Bereken op de GR het aantal routes van (0,0) naar (14,6). Als volgt: 20, MATH, PRB, 3: *nCr*, 6, ENTER.

De 20 staat voor het totaal aantal stappen van (0,0) naar (14,6) en de 6 staat voor het aantal stappen dat je naar boven gaat. Het aantal kortste routes wordt ook wel genoteerd met $\binom{20}{6}$.

b. Je kunt ook letten op het aantal stappen dat je naar rechts gaat; dat zijn er 14.
Bereken $\binom{20}{14}$ op je GR. Geldt $\binom{20}{14} = \binom{20}{6}$?

c. $\binom{20}{7}$ is het aantal kortste routes van het punt (0,0) naar het punt *B*. Wat zijn de coördinaten van *B*? Er zijn twee mogelijkheden; geef ze beide.

De getallen $\binom{n}{k}$ worden **combinatiegetallen** genoemd.

d. Met welk combinatiegetal kun je het aantal kortste routes van (0,0) naar (10,8) noteren? Er zijn twee mogelijkheden; geef ze beide.

e. Voor welk getal $n \neq 7$ geldt: $\binom{16}{n} = \binom{16}{7}$?

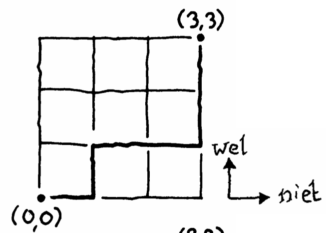
f. Welk combinatiegetal hoort bij het aantal kortste routes van (2,3) naar (8,6)? Bereken dit aantal op je GR.

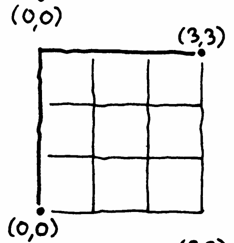
7 **a.** Hoeveel kortste routes zijn er van (0,0) naar (7,3)?
b. Hoeveel kortste routes zijn er van (7,3) naar (10,8)?
c. Hoeveel kortste routes zijn er van (0,0), via (7,3), naar (10,8)?
d. Hoeveel kortste routes zijn er van (0,0), via (7,3) naar (10,8) en dan vervolgens via (5,5) terug naar (0,0)?

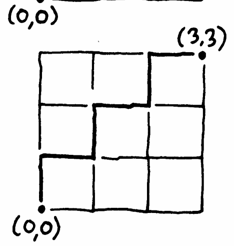
Roosters kun je goed gebruiken om lastige telproblemen op te lossen. Dat zullen we in de rest van dit hoofdstuk doen.

4 Ongeordende grepen

1 Mevrouw Koopman is 10 jaar lid van een boekenclub. De boekenclub is daar erg blij mee en als blijk van dank mag mevrouw Koopman drie klassieke CD's uitzoeken. Ze kan kiezen uit Bach, Chopin, Haydn, Mozart, Schubert en Vivaldi. Zo kan ze bijvoorbeeld kiezen voor Bach, Mozart, Vivaldi, of voor Chopin, Haydn, Schubert, of ...
a. Probeer alle mogelijke keuzes op te schrijven. Werk systematisch.







Bij het kiezen van 3 CD's uit de 6 moet je zes beslissingen nemen: voor elke CD moet je kiezen of je hem wel of niet neemt. Elke keuze betekent een stap in een rooster; kies je de CD wel, dan ga je naar boven, kies je de CD niet, dan ga je naar rechts.
Omdat je drie CD's wel kiest (en dus drie niet), kom je - startend in (0,0) - uit in het punt (3,3).

De route in het bovenste rooster hiernaast hoort bij de keuze Chopin, Schubert, Vivaldi.
b. Ga voor de routes in de andere twee roosters na bij welke keuze ze horen.
c. Teken in je schrift een rooster en geef daarin - in verschillende kleur - de routes aan die horen bij de keuzes:
Bach, Chopin, Mozart,
Mozart, Schubert, Vivaldi,
Chopin, Haydn, Schubert.

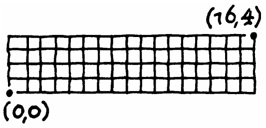
Bij elke keuze van 3 CD's uit de 6 hoort een kortste route in een rooster van (0,0) naar (3,3). En andersom hoort bij elke kortste route van (0,0) naar (3,3) een keuze van 3 CD's uit de 6.
d. Hoeveel kortste routes zijn er van (0,0) naar (3,3)? Hoeveel keuzes van 3 CD's uit de 6 zijn er dus? Klopt dat aantal met wat je gevonden hebt bij **a**?

2 Als je lid wordt van de boekenclub mag je voor € 10 drie boeken uitkiezen. Je hebt dan de keus uit twintig verschillende titels.
Bij een keuze van 3 uit de 20 hoort weer een route in een rooster. We beginnen de route weer in (0,0).
a. Uit hoeveel stappen bestaat zo'n route? Hoe vaak ga je naar boven? En hoe vaak naar rechts? In welk punt eindig je dus?
b. Hoeveel keuzes van 3 uit 20 zijn er? Schrijf je antwoord eerst als combinatiegetal dat je vervolgens uitrekent op je GR.

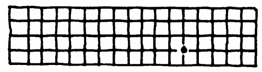
3 Bij een andere boekenclub kun je, als je lid wordt, vier boeken of CD's kiezen voor € 15. Je kunt kiezen uit 12 boeken en 8 CD's. Je mag zelf weten hoeveel boeken en hoeveel CD's je kiest (als het er samen maar 4 zijn).

a. Het totaal aantal keuzes dat je kunt maken is even groot als het aantal kortste routes in een rooster van (0,0) naar een punt B. Wat zijn de coördinaten van B?

b. Hoeveel keuzes zijn er in totaal mogelijk?



Elke keuze correspondeert met een 20-stapsroute van (0,0) naar (16,4).
De eerste 12 stappen in zo'n route gaan over de boeken: neem je het eerste boek, dan ga je in de eerste stap naar boven; anders ga je naar rechts. De tweede stap correspondeert met het tweede boek; enzovoort.
De volgende 8 stappen corresponderen met de CD's.



c. Teken in een rooster drie verschillende routes die horen bij een keuze van 1 boek en 3 CD's. Gebruik kleuren.

Stel dat je één boek kiest (en dus drie CD's).

d. Hoe vaak ga je dan in de eerste 12 stappen naar boven? En hoe vaak naar rechts?

e. In welk punt bevind je je na 12 stappen?

Elke route in het rooster die hoort bij een keuze van 1 boek en 3 CD's gaat via het punt (11,1).

f. Hoeveel routes zijn er van (0,0), via (11,1) naar (16,4)? Hoeveel keuzes kun je dus maken als je 1 boek neemt en 3 CD's?

g. Via welk punt loopt een route die hoort bij een keuze van 3 boeken en 1 CD? Hoeveel van die keuzes zijn er?

h. Hoeveel keuzes zijn er als je 2 boeken kiest en 2 CD's?

i. Hoeveel keuzes zijn er als je alleen boeken kiest?

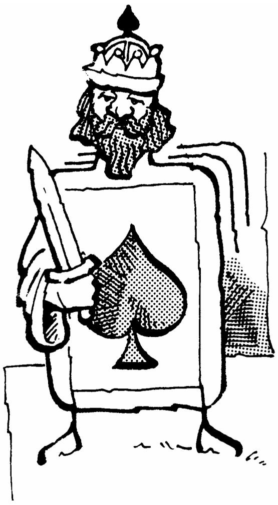
j. Hoeveel keuzes zijn er als je alleen CD's kiest?

k. Tel je antwoorden uit **f** tot en met **j** bij elkaar op. Klopt je antwoord met dat van **b**?

4 Bij het kaartspel toepen gebruik je niet alle kaarten; van elke kleur (schoppen, harten, ruiten en klaveren) gebruik je acht kaarten: 7, 8, 9, 10, B, V, H, A. In totaal gebruik je dus 32 kaarten.
Aan het begin van het spel wordt er gedeeld: iedere speler krijgt 4 kaarten.

a. Egon speelt mee en krijgt dus 4 kaarten.
Hoeveel verschillende combinaties van 4 kaarten kan Egon krijgen?

Elke combinatie die Egon kan krijgen, correspondeert met een 32-stapsroute in een rooster van (0,0) naar (28,4).



De eerste stap laten we corresponderen met ♠7, de tweede stap met ♠8, de achtste stap met ♠A, dan komen de harten, dan de ruiten en de klaveren; alle kleuren in dezelfde volgorde.

b. Teken in een rooster de route die hoort bij ♠8, ♥B, ♦9 en ♦10.

c. Via welke twee punten in het rooster loopt een route die hoort bij een combinatie van 4 kaarten die alleen uit harten bestaat? Hoeveel combinaties van 4 kaarten zijn er mogelijk die uit alleen harten bestaan?

d. Via welke twee punten in het rooster loopt een route die hoort bij een combinatie van 2 schoppen en 2 harten? Hoeveel van die combinaties zijn er?

e. Via welke drie punten in het rooster loopt een route die hoort bij een combinatie van 1 schoppen, 1 harten, 1 ruiten en 1 klaveren? Hoeveel van die combinaties zijn er?

f. Via welk punt in het rooster loopt een route die hoort bij een combinatie waarbij er alleen schoppen en harten zijn (het mogen ook alle vier schoppen of alle vier harten zijn)? Hoeveel van die combinaties zijn er?

g. Hoeveel combinaties zijn er mogelijk als er alleen schoppen en ruiten bij zijn (alle vier schoppen of alle vier ruiten mag ook)?

Tip. Het antwoord is niet zo eenvoudig uit het rooster af te leiden. Maar je kunt het rooster aanpassen: laat de eerste 16 stappen corresponderen met de schoppenkaarten en de ruitenkaarten en de volgende 16 stappen met de harten- en de klaverenkaarten.

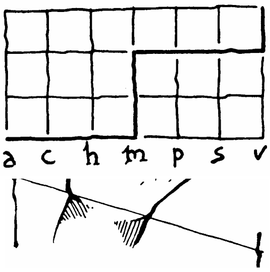
h. Hoeveel combinaties zijn er mogelijk met twee 9's en twee 10'en? Pas de stappen in het rooster op een geschikte manier aan!

5 In een ijssalon wordt Italiaans ijs verkocht. Je kunt er kiezen uit zeven verschillende smaken: aardbei, citroen, hazelnoot, mokka, pistache, stracciatella en vanille. Anne besluit een ijsje met drie bolletjes te nemen.

a. Uit hoeveel verschillende ijsjes kan Anne kiezen als de drie bolletjes verschillende smaken hebben?

b. Egon neemt ook een ijsje met drie bolletjes met verschillende smaken. Hij houdt niet van pistache, dus dat neemt hij niet. Verder wil hij er per se hazelnoot bij hebben. Uit hoeveel verschillende ijsjes kan Egon kiezen?

Natuurlijk kun je ook besluiten een smaak meerdere keren te nemen. We gaan uitzoeken hoeveel ijsjes van drie bolletjes er zijn, als elke smaak meerdere keren gekozen kan worden. Ook dit probleem kun je goed met een rooster aanpakken. De routes in het rooster corresponderen nu op een andere manier met de mogelijke ijsjes van drie bolletjes: elke verticale baan in het rooster correspondeert met één van de 7 smaken.



In het rooster hiernaast is de route aangegeven die correspondeert met 2 bolletjes mokka en 1 bolletje vanille.
c. Teken in een rooster de route die hoort bij 3 bolletjes pistache. Geef met een andere kleur de route aan die correspondeert met 1 bolletje citroen, 1 bolletje mokka en 1 bolletje stracciatella.
d. Hoeveel verschillende ijsjes van drie bolletjes zijn er mogelijk als elke smaak meerdere keren mag voorkomen?
e. Hoeveel verschillende ijsjes van drie bolletjes zijn er mogelijk als je minstens één bolletje hazelnoot wilt en geen enkel bolletje pistache? (Pas eventueel de volgorde van de smaken in het rooster aan.)

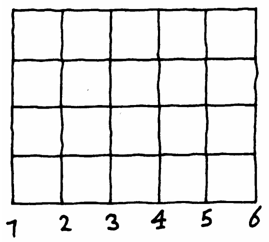
Een combinatie van 3 bolletjes uit 7 waarbij elke smaak maar één keer mag voorkomen, wordt een **ongeordende greep van 3 uit 7 zonder herhaling** of een **combinatie van 3 uit 7** genoemd.
Een combinatie van 3 bolletjes uit 7 waarbij elke smaak meerdere keren mag voorkomen, wordt een **ongeordende greep van 3 uit 7 met herhaling** genoemd.

6 **a.** Teken een rooster, zoals in de vorige opgave, waarin je alle ongeordende grepen met herhaling van 4 bolletjes uit de 7 smaken kunt aangeven.
b. Hoeveel ongeordende grepen van 4 uit 7 met herhaling zijn er?

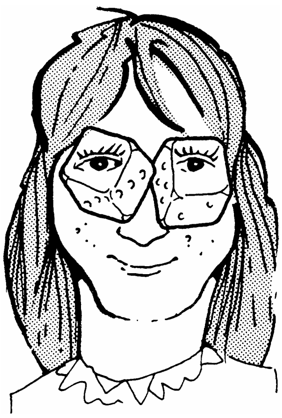
In een megabeker kun je tien bolletjes ijs krijgen.
c. Hoeveel verschillende megabekers zijn er? Met andere woorden: hoeveel combinaties van 10 uit 7 met herhaling zijn er?
d. Op hoeveel manieren kun je de megabeker vullen als van elke smaak minstens één bolletje aanwezig moet zijn? (Probeer dit *niet* uit het rooster van onderdeel **c** te halen.)

7 Iemand heeft vier munten in zijn hand. Jij moet raden welke munten het zijn. Mogelijk zijn munten van 1 cent, 2 cent, 5 cent, 10 cent, 20 cent. Zo kun je bijvoorbeeld raden: 2 munten van 1 cent, 1 munt van 2 cent en 1 munt van 10 cent.
a. Teken een rooster waarin je alle mogelijkheden met een route kunt aangeven. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b. We kijken naar routes die horen bij de mogelijkheden waarbij er geen munten van 1 of 2 cent zijn.
Teken drie van dit soort routes.
Hoeveel mogelijkheden zijn er nog als er geen munten van 1 of 2 cent bij zijn?
c. Hoeveel mogelijkheden zijn er als je weet dat er minstens twee munten van 10 cent bij zijn (verander eventueel de volgorde van de munten in je rooster)?
d. Hoeveel mogelijkheden zijn er als je weet dat er precies twee munten van 10 cent bij zijn?
e. Hoeveel mogelijkheden zijn er als elke munt hooguit één keer mag voorkomen?

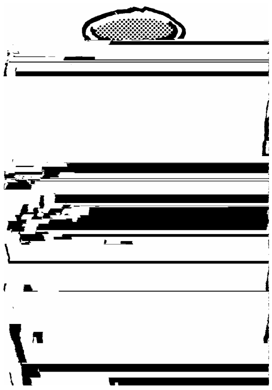


8 Als je met vier dobbelstenen werpt, is 3, 4, 4, 6 een mogelijke worp (dit is: één keer 3 ogen, twee keer 4 ogen en één keer 6 ogen). Hiernaast zie je een rooster waarin je alle mogelijke worpen systematisch kunt aangeven.
a. Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk?
b. Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk waarbij het laagste aantal ogen 3 is (3 mag hierbij meer dan één keer voorkomen)? Laat in een rooster zien hoe het beginstuk van een route die bij zo'n uitkomst hoort eruit ziet.
c. Hoeveel worpen zijn er mogelijk waarbij alleen even aantallen ogen voorkomen (de even aantallen zijn 2, 4 en 6)?



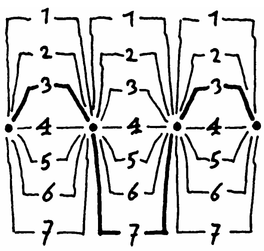
9 Maak een voorbeeldopgave met uitwerking waarin je laat zien hoe je het aantal ongeordende grepen met en zonder herhaling berekent.

5 Het vaasmodel



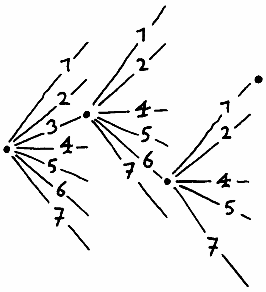
In de vorige paragrafen heb je kennis gemaakt met geordende en ongeordende grepen. In deze paragraaf maken we een model bij deze grepen: ***het vaasmodel****. Dit model kan je helpen te herkennen of je te maken hebt met een ongeordende greep (al dan niet met herhaling) of een geordende greep. Tevens helpt het model je een juiste boom of rooster bij het probleem te vinden.*

In een vaas zitten zeven briefjes met daarop de nummers 1, 2, 3, 4, 5 en 6 en 7. Je kunt nu op de volgende vier manieren drie briefjes uit de vaas trekken.



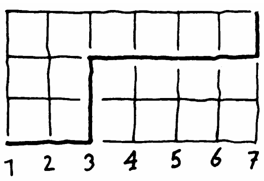
- Trekken met terugleggen, waarbij je let op de volgorde waarin de briefjes getrokken worden. Je hebt dan te maken met een **geordende greep met herhaling**.

Om het aantal grepen te bepalen kun je een **wegendiagram** tekenen. Elke (driewegs)route van links naar rechts correspondeert met een geordende greep met herhaling. De aangegeven route hoort bij de geordende greep 3-7-3.



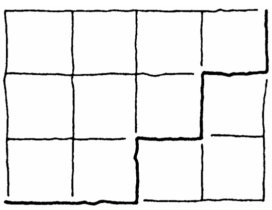
- Trekken zonder terugleggen, waarbij je let op de volgorde. Je hebt dan te maken met een **permutatie** (een geordende greep zonder herhaling).

Om het aantal permutaties te bepalen kun je een **boom** tekenen. Elk eindpunt van de boom correspondeert met een permutatie. Het aangegeven eindpunt hoort bij de permutatie 3-6-1.



- Trekken met terugleggen, waarbij je niet let op de volgorde. Je hebt dan te maken met een **ongeordende greep met herhaling**.

Om het aantal grepen te bepalen kun je een **rooster** tekenen. Elke kortste route in het rooster van linksonder naar rechtsboven correspondeert met een ongeordende greep met herhaling. De aangegeven route hoort bij de greep 3, 3, 7.



- Trekken zonder terugleggen, waarbij je niet let op de volgorde. Je hebt dan te maken met een **combinatie** (een ongeordende greep zonder herhaling).

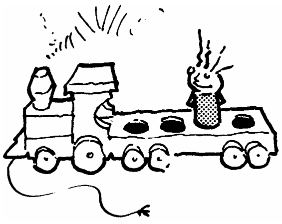
Om het aantal combinaties te berekenen kun je een **rooster** tekenen. Elke kortste route van linksonder naar rechtsboven correspondeert met een combinatie. De route hiernaast hoort bij de combinatie 3, 5, 7.

1 Bij het probleem van mevrouw Koopmans die bij haar boekenclub drie CD's uit de zes mag kiezen (opgave **1** van de vorige paragraaf), kun je een vaasmodel maken.
a. Hoeveel briefjes stop je in de vaas? Wat staat er op die briefjes? Hoeveel briefjes trek je uit de vaas? En op welke manier trek je (met of zonder terugleggen, let je op de volgorde of niet)?
b. Hoort er een boom, een wegendiagram of een rooster bij dit probleem? Wat voor soort?

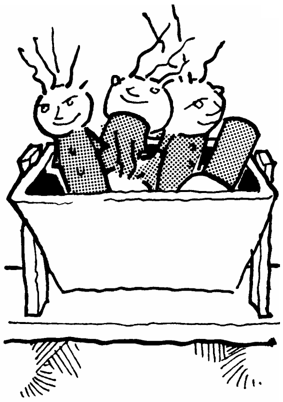
2 Maak voor de onderdelen **a**, **b**, **c**, **d** en **e** van opgave **7** van de vorige paragraaf een vaasmodel.
Zeg steeds
- wat er in de vaas zit,
- hoeveel keer je trekt,
- of je met of zonder terugleggen trekt,
- of je al dan niet let op de volgorde.

3 Bij het gooien met vier dobbelstenen in opgave **8** van de vorige paragraaf kun je ook een vaasmodel maken. In de vaas zitten de nummers 1 tot en met 6. Elke worp met vier dobbelstenen komt overeen met vier keer trekken uit de vaas, met terugleggen waarbij je niet let op de volgorde.
a. Hoeveel verschillende trekkingen zijn er mogelijk? Wat voor rooster hoort daarbij?
b. Krijg je hetzelfde rooster als bij opgave **8**?
c. Hoeveel verschillende worpen met vier dobbelstenen zijn er mogelijk waarbij alle vier de ogen verschillend zijn? Bedenk eerst welk vaasmodel hierbij hoort.

4 Op hoeveel manieren kun je twintig suikerklontjes over vier personen verdelen? Ook hierbij kun je een vaasmodel maken. In de vaas stop je de personen 1, 2, 3 en 4. Vervolgens trek je 20 keer uit de vaas, met terugleggen, terwijl je niet let op de volgorde. Stel dat je vier keer 1 hebt getrokken, zes keer 2, zeven keer 3 en drie keer 4. Dan krijgt persoon 1 vier klontjes, persoon 2 krijgt er zes, persoon 3 krijgt er zeven en persoon 4 krijgt er drie.
Bereken op hoeveel manieren de twintig suikerklontjes over de vier personen verdeeld kunnen worden.



5 Marco heeft een treintje waar plaats is voor vier poppetjes. De poppetjes zitten netjes achter elkaar. Marco heeft poppetjes in vijf kleuren: blauw, geel, oranje, paars en rood. Van elke kleur heeft hij er meer dan genoeg.
Geef bij elk van de volgende onderdelen het bijbehorende vaasmodel.
a. Op hoeveel manieren kan Marco zijn treintje vullen met vier poppetjes?
b. Op hoeveel manieren kan Marco zijn treintje “vullen” als er ook plaatsen leeg mogen blijven (helemaal leeg is ook een “vulling”)?
c. Op hoeveel manieren kan Marco zijn treintje vullen met vier poppetjes als hij alleen blauwe en rode poppetjes gebruikt (alleen rode of alleen blauwe poppen mag ook)?
d. Op hoeveel manieren kan Marco zijn treintje vullen met vier poppetjes als hij wil dat alle poppetjes verschillend van kleur zijn?



Estera speelt mee met Marco. Ze heeft een kiepwagon. Zij vult haar kiepwagon door er vier poppetjes in te stoppen. Geef bij elk van de volgende onderdelen weer het bijbehorende vaasmodel.
e. Op hoeveel manieren kan Estera haar kiepwagon vullen?
f. Bij hoeveel van die manieren zitten er geen paarse poppetjes in de wagon?
g. Hoeveel vullingen van de wagon zijn er waarbij er precies twee gele poppetjes aanwezig zijn?
h. Hoeveel vullingen zijn er mogelijk waarbij alle poppetjes verschillend van kleur zijn?

6 We bekijken rijtjes met nullen en enen van lengte 8. Bijvoorbeeld 11010011.
a. Hoeveel van die rijtjes zijn er (alleen nullen of alleen enen mag ook)? Welk vaasmodel hoort hierbij?
b. Hoeveel van die rijtjes zijn er met precies één een? Schrijf al die rijtjes op.
c. Heb je enig idee hoeveel rijtjes er zijn met precies twee enen?

Het valt niet mee om alle rijtjes op te schrijven die precies twee enen bevatten: het zijn er 28. We kunnen hier wel een vaasmodel bij maken. In de vaas zitten de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 (deze getallen staan voor de acht plaatsen in de rij). Uit de vaas trek je, zonder terugleggen en zonder op de volgorde te letten, twee getallen. Deze twee getallen geven de plaatsen aan waar de twee enen komen. Trek je bijvoorbeeld 3 en 7, dan hoort daar het rijtje 00100010 bij.

d. Welk rijtje hoort bij de trekking 1 en 8? En welke trekking hoort bij het rijtje 00110000?
e. Hoeveel verschillende trekkingen zijn er mogelijk? Hoeveel rijtjes van lengte 8 met precies twee enen zijn er?

Je zou uit de vaas ook zes nummers kunnen trekken: die geven dan de plaats van de zes nullen aan.
f. Hoeveel van die trekkingen zijn er mogelijk? Klopt dat met je antwoord op **c**?
g. Hoeveel rijtjes van lengte 8 zijn er met precies drie enen? En met vijf enen?
h. Hoeveel rijtjes van lengte 10 zijn er met drie enen en zeven nullen? Welk vaasmodel hoort hierbij?

7 We maken nu rijtjes van lengte 8 bestaande uit nullen, enen en tweeën.
a. Hoeveel van die rijtjes zijn er in totaal mogelijk?
b. Hoeveel van die rijtjes bevatten geen nullen?

We gaan berekenen hoeveel rijtjes er zijn met twee nullen, vijf enen en één twee.
In de vaas zitten weer de plaatsen 1 tot en met 8. Eerst trekken we uit de vaas twee getallen die de plaatsen voor de twee nullen aangeven. Vervolgens trekken we uit de vaas - waar dan nog zes plaatsen in zitten - vijf getallen die de plaatsen voor de vijf enen aangeven. Het getal dat overblijft geeft de plaats voor de twee aan.
c. Stel dat je eerst de nummers 3 en 6 trekt en vervolgens de nummers 1, 2, 5, 7 en 8. Welk rijtje krijg je dan?
d. Op hoeveel manieren kun je de twee plaatsen voor de nullen trekken? Op hoeveel manieren kun je vervolgens de vijf plaatsen voor de enen trekken? Hoeveel rijtjes zijn er dus in totaal met twee nullen, vijf enen en één twee?
e. Je kunt ook eerst de plaats voor de twee trekken en daarna de twee plaatsen voor de nullen. Op hoeveel rijtjes kom je dan in totaal uit?
f. Bereken op nog een derde manier het aantal rijtjes met twee nullen, vijf enen en één twee.
g. Bereken het aantal rijtjes van lengte 10 met één nul, twee enen, drie tweeën en vier drieën.

8 Gebruik bij de volgende onderdelen de methode van de vorige opgave.
a. Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9?
b. Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8?

c. Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5, en 7?
d. Hoeveel telefoonnummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 7?
e. Kijk nog eens terug naar opgave **12** van de eerste paragraaf. Vind je dezelfde antwoorden?

Er zijn $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1}$ rijtjes van lengte 7 met twee 0'en, drie 1'en, één 2 en één 3.

Opmerking: Als je eerst de drie 1'en aanwijst, dan de 2 en dan de twee 0'en, vind je voor dit aantal: $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}$. In vwo5 komen we erop terug dat deze verschillende berekeningen dezelfde uitkomst geven.

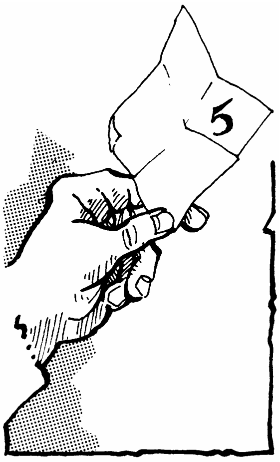
9 In een bak zitten de letters a, b, c, d, e, f en g.
a. Hoeveel verschillende geordende grepen van 3 kun je nemen uit de bak?
b. Hoeveel verschillende ongeordende grepen van 3 kun je nemen uit de bak?
c. Hoeveel geordende grepen zijn er waar alleen de letters a, b en c in voorkomen? Schrijf ze allemaal op.

Bij de ongeordende greep a, b, c kun je zes geordende grepen maken. Algemener: bij elke ongeordende greep van 3 horen zes geordende grepen van 3. Er zijn dus zes keer zoveel geordende grepen van 3 uit 7 als ongeordende grepen van 3 uit 7.
d. Ga na of dit in overeenstemming is met je antwoorden bij **a** en **b**.

Op je GR kun je niet rechtstreeks het aantal geordende grepen van 60 uit 100 berekenen. Typ maar eens in:
100 *nPr* 60 ...
e. Bereken op je GR hoeveel verschillende ongeordende grepen er zijn van 60 uit 100.
f. Hoeveel geordende grepen van 60 uit 100 horen er bij één ongeordende greep van 60 uit 100?
g. Ga na dat er ongeveer $1{,}144 \cdot 10^{110}$ geordende grepen zijn van 60 uit 100.

10 In een vaas zitten de getallen 1, 2 en 3.
a. Hoeveel geordende grepen van 4 met herhaling kun je nemen uit deze vaas?
b. Hoeveel ongeordende grepen van 4 met herhaling kun je nemen uit de vaas?

Bij de ongeordende greep 1, 1, 1, 2 horen vier geordende grepen: 1112, 1121, 1211 en 2111.
c. Hoeveel geordende grepen horen er bij de ongeordende greep 1, 1, 2, 3?
d. Schrijf alle ongeordende grepen op en schrijf erachter hoeveel geordende grepen bij elk van de ongeordende grepen horen. Klopt het totaal met het antwoord van **a**?



11 In een vaas zitten de nummers 1, 2, 3, 4, 5 en 6.
We nemen - met teruglegging - drie nummers uit de vaas, waarbij we letten op de volgorde. Ofwel: we nemen een geordende greep met herhaling van 3 uit 6.
a. Wat is de kans dat het eerste nummer 1 is, het tweede 3 en het derde 6?
b. Wat is de kans dat alle drie de nummers 5 zijn?
c. Alle geordende grepen van 3 uit 6 met herhaling hebben gelijke kans.
Hoeveel geordende grepen van 3 uit 6 met herhaling zijn er in totaal? Hoe kun je hieruit de kans op een willekeurige greep bepalen?

We nemen weer - met teruglegging - drie nummers uit de vaas, maar nu letten we niet op de volgorde.
d. Hoeveel trekkingen zijn er nu in totaal mogelijk?
e. Welke trekking heeft meer kans:
- drie 6'en of
- één 1, één 2 en één 3?

Hoeveel keer zoveel kans?
Tip. Bepaal hoeveel geordende grepen er horen bij de ongeordende greep van drie 6'en.
Bepaal hoeveel geordende grepen er horen er bij de ongeordende greep van één 1, één 2 en één 3.

12 Uit vaas van de vorige opgave trekken we nu - zonder teruglegging - drie nummers. We letten op de volgorde.
a. Wat is de kans dat het eerste nummer een 1 is, het tweede 3 en het derde 5?
b. Alle permutaties van 3 uit 6 hebben gelijke kans.
Hoeveel permutaties zijn er van 3 uit 6? Hoe groot is die kans op een willekeurige permutatie dus?
Klopt dat met **a**?

We trekken weer - zonder teruglegging - drie ballen uit de vaas, maar nu letten we niet op de volgorde.
c. Welke combinatie heeft meer kans volgens jou:
- 1, 3, 5 of
- 1, 2, 6?

d. Ook alle combinaties van 3 uit 6 hebben gelijke kans.

Hoeveel combinaties van 3 uit 6 zijn er in totaal? Hoe groot is de kans op een willekeurige combinatie dus?

Alle permutaties van *k* uit *n* hebben gelijke kans:

- met herhaling is die kans $\frac{1}{n^k}$, *(opgave 12a,b)*
- zonder herhaling is die kans $\frac{1}{nPk}$. *(opgave 11a,b,c)*

Ook alle combinaties van k uit n hebben gelijke kans, namelijk $\frac{1}{nCk}$. *(opgave 12c,d)*

Ongeordende grepen met herhaling van *k* uit *n* hebben niet allemaal gelijke kans.
De kans op een ongeordende greep met herhaling kun je goed berekenen met behulp van geordende grepen. *(opgave 11d,e,f)*

worp	aantal geordende grepen
1, 1, 6	3
1, 2, 5	6

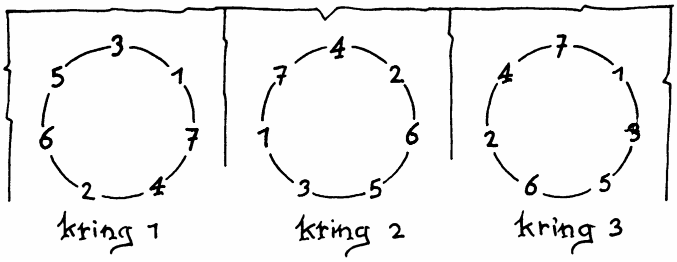
13 We werpen met drie dobbelstenen. We letten op de som van de drie aantallen ogen. Gooi je twee 1'en en één 6 dan is de som 8.
a. Schrijf alle worpen op waarbij de som 8 is. Een van die worpen is dus 1, 1, 6. Schrijf ongeordende grepen op. Vermeld bij elke ongeordende greep hoeveel geordende grepen erbij horen.
b. Hoeveel geordende grepen hebben som 8? Wat is dus de kans dat de som van de ogen 8 is?
c. Bereken zo ook de kans dat de som van de ogen 9 is.

Zie ook het computerprogramma *Kop of munt* van de Wageningse Methode, software – Kans&Simulatie.

6 Combinatorische vraagstukken

In deze paragraaf vind je allerlei vraagstukken waarbij je voor de oplossing creatief gebruik moet maken van alles wat je in de voorgaande paragrafen hebt geleerd. Je zult van de meeste vragen niet een-twee-drie de oplossing zien. Bij die vragen wordt een tip gegeven.

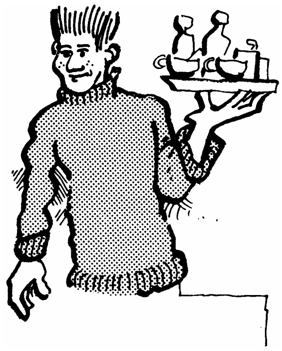
1 De cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 kun je in een kring plaatsen. Hieronder zie je drie manieren waarop dat kan.



Kring 1 en kring 2 zijn hetzelfde: kring 2 kun je krijgen door kring 1 te draaien.
Kring 1 en kring 3 lijken ook veel op elkaar: in beide kringen heeft elk getal dezelfde twee buren. Toch zijn ze verschillend: in kring 1 staat 7 rechts van 1 en in kring 3 staat 7 juist links van 1.
Eigenlijk staan hierboven dus maar twee verschillende kringen.
a. Hoeveel verschillende kringen zijn er in totaal mogelijk?
Tip. Omdat de kring door draaiing niet verandert, kun je er vanuit gaan dat de 1 bovenaan staat. Op hoeveel manieren kun je de overige cijfers dan nog plaatsen?
c. We bekijken dezelfde kring; met zeven plaatsen dus. Nu plaatsen we de getallen 1, 2, 3, 4, 5 en 6 in de kring. Er blijft dus één plaats open. Hoeveel verschillende kringen zijn er op deze manier mogelijk?
d. Hoeveel verschillende kringen zijn er mogelijk als we de getallen 1, 2, 3, 4 en 5 er in plaatsen? Er blijven dan dus twee plaatsen open.

2 Anne heeft morgen zes lessen. Het eerste uur heeft ze les en ook het achtste uur; ze heeft dus twee tussenuren. Ze heeft de vakken: Nederlands, Duits, Frans, geschiedenis, wiskunde en scheikunde.
a. Hoeveel verschillende roosters zijn er die dag voor Anne mogelijk?
Tip. Plaats eerst de tussenuren. En daarna de lessen op de overige zes plaatsen.

3 We werpen met vier dobbelstenen. We kunnen dan bijvoorbeeld twee 1'en, een 3 en een 4 gooien.
a. Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk?
Tip. In opgave **8** van paragraaf **4** heb je net zo'n vraag gehad. Kijk daar nog eens naar.
b. Wat is de kans dat de som van de ogen gelijk is aan 8?
Tip. In opgave **13** van paragraaf **5** heb je net zo'n vraag gehad. Kijk daar nog eens naar.

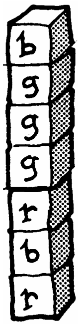


4 Op een cocktailparty kun je cocktails drinken. Cocktails zijn mixen van verschillende dranken. Er zijn zes verschillende dranken aanwezig: cognac, jus d'orange, rum, tonic, vieux en wodka. Allerlei mixen worden geschonken. De enige beperking is dat je minstens twee dranken moet mixen (anders is het ook geen cocktail!). Zo kun je een jus-tonic nemen, of een cognac-jus-rum-wodka.
a. Hoeveel cocktails zijn er mogelijk met twee dranken? En met drie? En met vier, vijf en zes?
b. Hoeveel cocktails zijn er in totaal mogelijk?

5 We bekijken de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Deze cijfers kun je op verschillende manieren splitsen in twee groepen. Bijvoorbeeld in {1, 3} en {2, 4, 5, 6}. Je hebt de cijfers dan gesplitst in een groep van 2 en een groep van 4.
a. Op hoeveel manieren kun je de cijfers splitsen in een groep van 2 en een groep van 4?
Op hoeveel manieren kun je de cijfers splitsen in een groep van 1 en een groep van 5?
b. Op hoeveel manieren kun je de cijfers splitsen in twee groepen van 3? Pas op: 20 is niet het goede antwoord.
c. Op hoeveel manieren in totaal kun je de cijfers splitsen in twee groepen?

6 Een coupe ijs bestaat uit drie bolletjes. Je kunt kiezen uit zes smaken: vanille, aardbeien, mokka, pistache, stracciatella en citroen. Je mag ook smaken vaker nemen.
a. Hoeveel verschillende coupes zijn er mogelijk?
b. Hoeveel verschillende coupes zijn er mogelijk met drie verschillende smaken?
c. Hoeveel coupes zijn er mogelijk met precies twee verschillende smaken?
Tip. Eén smaak komt twee keer voor en een smaak komt één keer voor. Er moeten dus twee smaken worden aangewezen uit de zes.

7 Carolientje heeft een heleboel vierkante legoblokken in drie kleuren: blauw, geel en rood. Ze bouwt torentjes van zeven blokken hoog.



a. Hoeveel torentjes kan Carolientje in totaal maken?

b. Hoeveel verschillende torentjes zijn er waarbij alle drie de kleuren voor komen?

Tip. Maak een lijst van alle mogelijkheden waarbij alle drie de kleuren voorkomen, zoals 1-1-5 (twee kleuren komen 1 keer voor en een kleur komt 5 keer voor). Bepaal dan voor elk van die mogelijkheden hoeveel verschillende torentjes er zijn.

c. Hoeveel torentjes zijn er waarbij precies twee kleuren voorkomen?

d. Hoeveel torentjes zijn er met één kleur.

e. Kloppen de vier antwoorden met elkaar?

8 Anne heeft in een voorraadbus twee soorten theezakjes: bosvruchtenthee en perzikthee. Van beide soorten heeft ze vijf zakjes. Elke dag pakt ze een nieuw zakje zodat de bus na tien dagen leeg zal zijn. Een mogelijke “route” is bbpbppppbb (b = bosvruchtenthee, p = perzikthee).

a. Hoeveel routes zijn er waarbij er nog (precies) twee zakjes perzikthee over zijn op het moment dat het laatste zakje bosvruchtenthee gepakt wordt?

Tip. De bedoelde rijtjes, eindigen met bpp.
Hoeveel b’s en hoeveel p’s zitten er bij de zeven plaatsen die hieraan voorafgaan?

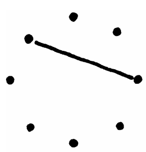
Als er van beide smaken evenveel zakjes zijn kiest Anne willekeurig een zakje. Anders neemt ze díe smaak waarvan ze nog de meeste zakjes heeft. Bijgevolg zijn niet alle routes meer mogelijk.

b. Hoeveel routes zijn er nog wel mogelijk?

Tip. Hoeveel keuzes heeft ze bij het eerste zakje? En bij het tweede? En bij het derde?

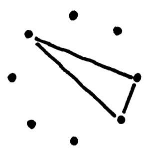
9 **Verbindingslijntjes**

Hiernaast zie je acht stippen. Tussen twee stippen is een verbindingslijnstuk getekend.

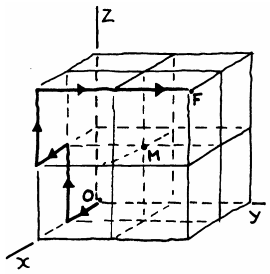


a. Hoeveel verbindingslijnstukken zijn er in totaal tussen deze acht punten?

Hiernaast zie je dezelfde acht stippen. Nu is er een verbindingsdriehoek getekend.



b. Hoeveel verschillende verbindingsdriehoeken zijn er in totaal te maken?



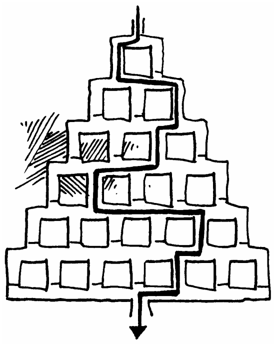
10 Kortste routes in de ruimte

We bekijken kortste routes vanuit $O = (0,0,0)$ over roosterlijnen naar $F = (2,2,2)$. Hiernaast zie je een plaatje waarin zo'n kortste route is aangegeven.

a. Hoeveel kortste routes zijn er in totaal van *O* naar *F*?

Tip. Zo'n route bestaat uit 6 stappen; daarvan ga je er twee in de *x*-richting; twee in de *y*-richting en twee in de *z*-richting. Je kunt zo'n route dus coderen met een rijtje van lengte 6 met 2 *x*'en, 2 *y*'en en 2 *z*'en.

b. Hoeveel kortste routes zijn er van *O*, via $M = (1,1,1)$ naar *F*?



11 Bij onderzoek naar intelligentie van ratten wordt soms gebruik gemaakt van een gangenstelsel: een zogenaamd T-labyrint. Hieronder zie je zo'n T-labyrint.

In elk van de verticaal getekende gangen zit een klapdeurtje, dat slechts in één richting kan worden gepasseerd. Dat verhindert dat een rat terug naar boven kan lopen. Een rat kan langs een groot aantal routes van de ingang naar de uitgang lopen. Hierboven is zo'n route getekend.

a. Hoeveel routes zijn er van de ingang naar de uitgang? (Twee routes worden als gelijk beschouwd als dezelfde serie klapdeurtjes wordt gepasseerd.)

b. Hoeveel *kortste* routes zijn er van de ingang naar de uitgang?

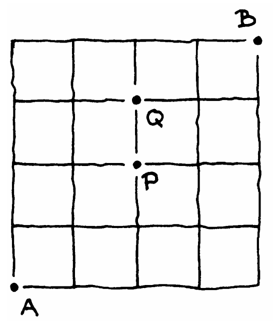
7 Extra opgaven

1 Bij een proefwerk krijg je een blaadje met twaalf vragen. Je mag zelf weten welke vragen je maakt, als je er maar precies tien maakt.
Hoeveel verschillende proefwerken kun je op deze manier maken?
Uit het televisieprogramma *Schoolstrijd* op 23 januari 1998

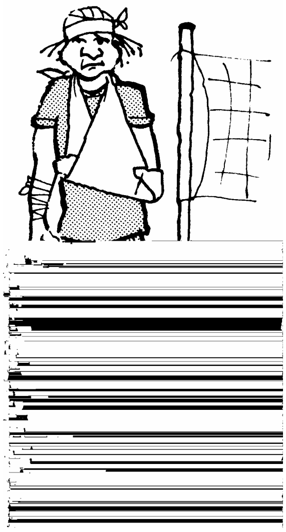
2 De firma Neeplus verkoopt zakjes die elk precies tien gomballen bevatten. Er zijn blauwe, groene en rode gomballen en elk zakje bevat tenminste één gombal van elke kleur.
Hoeveel verschillende zakjes kunnen er voorkomen?

Een opgave uit de estafette van de *KUN-wiskundewedstrijd* 1997

3 Dolf bracht voor een groot warenhuis huis-aan-huis-folders rond. Maar hij is ontslagen: vandaag doet hij dit werk voor het laatst. Bij de Dennenstraat aangekomen besluit hij zijn laatste tien folders op een willekeurige manier over de brievenbussen te verdelen. In de Dennenstraat staan zes huizen.
a. Op hoeveel manieren kan hij de tien folders over de zes huizen verdelen?
b. Op hoeveel manieren kan hij de folders verdelen als hij bij elk huis minstens één folder bezorgt?
c. Op hoeveel manieren kan hij de folders verdelen als hij bij het vierde huis geen folders bezorgt en bij de rest van de huizen minstens één?



4 Hiernaast staat het wegennet van een moderne stad.
a. Hoeveel kortste wegen zijn er van A naar B?
b. Hoeveel kortste wegen zijn er van A naar B die *niet* langs P gaan?
c. Op een dag is de weg van P naar Q afgesloten. Hoeveel kortste wegen zijn er dan nog van A naar B mogelijk?



5 Op een sportdag wordt er voetbal, basketbal, volleybal en badminton gespeeld. Er doen vier teams van elk 12 spelers mee: team *A*, *B*, *C* en *D*. Het voetbal wordt gespeeld met het hele team van 12 spelers. Voor het basketbal zijn 8 spelers nodig, voor het volleybal 6.

Eerst wordt er gevoetbald door de vier teams. Door loting wordt bepaald welk team tegen welk team speelt.
a. Wat is de kans dat team *A* tegen team *B* speelt (en dus team *C* tegen team *D*)?

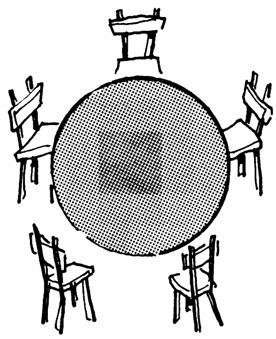
Vervolgens wordt er gebasketbald. Uit elk team worden acht spelers gekozen die gaan basketballen. De overige vier spelers gaan badminton spelen.
b. Op hoeveel manieren kan team *A* worden opgedeeld in een basketbalteam (van 8) en een badmintonteam (van 4)?

Tenslotte wordt er volleybal gespeeld. Hiervoor wordt team *A* gesplitst in twee teams van 6.
c. Op hoeveel manieren kan dat?

6 Een pincode bestaat uit 4 cijfers. Het cijfer 0 komt ook voor. Voorbeelden: 2013, 0017 en 9319.
a. Hoeveel verschillende pincodes zijn er?
b. Hoeveel verschillende pincodes zijn er met vier verschillende cijfers?

Bart is zijn pincode vergeten. Hij weet nog wel dat er twee 1’en in stonden, één 3 en één 9. De volgorde weet hij niet meer. Hij wil toch geld opnemen en toetst dus een willekeurige pincode in met twee 1’en, een 3 en een 9.
c. Wat is de kans dat hij de juiste pincode intoetst?
d. Hoeveel pincodes zijn er waar geen nullen in voorkomen?
e. Hoeveel pincodes zijn er met alleen nullen en enen (beide cijfers moeten minstens één keer voorkomen)?
f. Hoeveel pincodes zijn er met precies twee verschillende cijfers?
g. In Nederland zijn zo’n 20 miljoen bankpasjes met pincodes in omloop.
Hoeveel mensen verwacht je dat dezelfde pincode hebben als jij? (Heb jij geen pincode, denk dan aan de pincode van je vader of moeder.)

7 Anne heeft tien blokken: vier blauwe, drie gele, twee rode en één witte.
a. Hoeveel verschillende torentjes van tien hoog kan ze daarvan bouwen?
b. Hoeveel torentjes van negen hoog kan ze daarmee bouwen?
c. Hoeveel torentjes van vijf hoog kan ze daarmee bouwen als alle vier de kleuren aanwezig moeten zijn?
d. Hoeveel torentjes van zes hoog kan ze daarmee bouwen als alle kleuren aanwezig moeten zijn?



8 Anne, Bert, Carole, Dirk en Ellen gaan vaak met z'n vijven stappen. Ze bezoeken dan een café waar een ronde tafel staat waar plaats is voor precies vijf personen.
a. Op hoeveel manieren kunnen ze rond die tafel gaan zitten? We letten er alleen op hoe ze ten opzichte van elkaar zitten: de stoelen zijn allemaal hetzelfde.

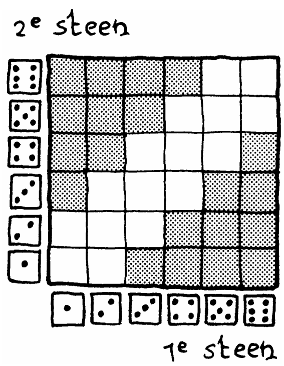
Anne wil niet naast Bert zitten.
b. Op hoeveel manieren kunnen ze nu nog rond de tafel gaan zitten?

Op een avond zijn Anne en Bert ziek. De anderen besluiten met zijn drieën te gaan stappen. Op een gegeven moment komen ze stomdronken het café binnen en nemen allemaal plaats op een stoel rond de tafel met vijf plaatsen. Er blijven dus twee plaatsen leeg.
c. Op hoeveel manieren kunnen ze nu gaan zitten?

8 Rekenregels

Als je met twee dobbelstenen gooit, heb je 36 mogelijke **uitkomsten**. Die kun je bijvoorbeeld door paren getallen weergeven:
(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).

Een **gebeurtenis** bestaat uit een deel van de uitkomsten.
Zo bestaat de gebeurtenis *het verschil van de aantallen ogen is minstens 2* uit het deel:
(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4).



Je kunt in ons voorbeeld de uitkomsten ook overzichtelijk in een rooster weergeven, zoals we al vaker gedaan hebben. De gebeurtenis *het verschil van de aantallen ogen is minstens 2* is het deel van de uitkomsten dat grijs gemaakt is.

De verzameling uitkomsten geven we vaak aan met *U* en een gebeurtenis met een andere hoofdletter, *het verschil van de aantallen ogen is minstens 2* zou je bijvoorbeeld met *V* aan kunnen geven.
We gebruiken de volgende notaties.
$\#V$: het aantal uitkomsten waaruit een gebeurtenis *V* bestaat.
$P(V)$: de kans op gebeurtenis *V.*
De volgende regel geldt: $P(V) = \dfrac{\#V}{\#U}$.
(We gaan er natuurlijk vanuit dat elke uitkomst even waarschijnlijk is.)

In het voorbeeld: $\#U = 36$ en $\#V = 20$, dus $P(V) = \frac{20}{36}$.

1 We gooien twee keer met een dobbelsteen.
A de gebeurtenis *de som der ogen is 10* en *B de som der ogen is 11.*
a. Geef $P(A)$, $P(B)$ en $P(A \text{ of } B)$.

NB Met *A* of *B* bedoelen we *A* en/of *B.*

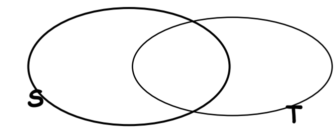
b. Ga na of geldt: $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$.

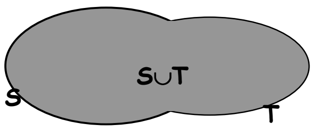
E is de gebeurtenis: de eerste keer wordt zes gegooid. *F* is de gebeurtenis: de tweede keer wordt zes gegooid.
c. Geef $P(E)$, $P(F)$ en $P(E \text{ of } F)$.
d. Ga na of geldt: $P(\text{E of } F) = P(E) + P(F)$.
e. Wat kun je over twee gebeurtenissen *S* en *T* opmerken als geldt: $P(\text{S of } T) = P(S) + P(T)$.

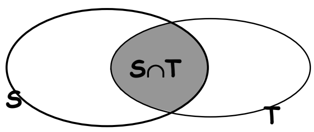
Twee gebeurtenissen *S* en *T* sluiten elkaar uit als er geen uitkomsten zijn die zowel tot *S* als tot *T* behoren.

2 Van een groep mensen leest 30% de *Volkskrant*, 20% de *NRC* en 57% geen van beide. Uit de de groep wordt één persoon gekozen.
V is de gebeurtenis: die persoon leest de Volkskrant en *N* is de gebeurtenis: die persoon leest de NRC.

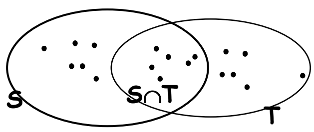
a. Sluiten *N* en *V* elkaar uit? Hoe zie je dat aan de percentages?
b. Hoeveel procent van deze mensen leest beide kranten?
c. Geef $P(V)$, $P(N)$, $P(V \text{ en } N)$, $P(V \text{ of } N)$.
d. Wat is het verband tussen de vier getallen die je in **c** berekend hebt?







3 *S* en *T* zijn gebeurtenissen.
In boekje **22-Verzamelingen** hebben we de notaties voor doorsnede en vereniging gebruikt.
De verzameling gebeurtenissen die tot *S* of *T* (of beide) behoren, noteren we met $S \cup T$.
De verzameling gebeurtenissen die zowel tot *S* als tot *T* behoren, noteren we met $S \cap T$.



Wat is het verband tussen de aantallen $\#S$, $\#T$, $\#S \cup T$, $\#S \cap T$?

Somregel
S en T zijn gebeurtenissen.
Dan: $P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$.
In het bijzonder:
$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$ als S en T elkaar uitsluiten.

Uit Wikipedia (12-09-2007)
Als we willekeurig een mens op aarde aanwijzen, zal de kans dat het een vrouw blijkt te zijn gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$. Vertelt iemand ons dat de aangewezen persoon uit Afrika komt, dan nog zal het in de helft van de gevallen een vrouw blijken te zijn, d.w.z. ook dan zal de kans op een vrouw $\frac{1}{2}$ zijn. Anders wordt het voor de kans op een donkere huidskleur. Mogelijk is die kans ca 0,1 - 0,2. Weten we echter dat de gekozen persoon uit Afrika komt, dan zal de kans op een donkere huidskleur praktisch 1 bedragen. Het optreden van de gebeurtenis A(frika) verandert niets aan de kans op de gebeurtenis V(rouw), maar wel aan de kans op de gebeurtenis D(onkere huidskleur). We noemen daarom de gebeurtenissen A en V (onderling) onafhankelijk. De gebeurtenissen A en D daarentegen heten (onderling) afhankelijk. Een formele definitie wordt meestal in termen van het gelijktijdig optreden van beide gebeurtenissen gegeven, waaruit de bovengenoemde eigenschap volgt.

4 Een voorbeeld met dobbelstenen
Ad gooit twee keer met een dobbelsteen. Hij verklapt je dat de som van het aantal gegooide ogen even is.
a. Wat is dan de kans dat de som van het aantal ogen minstens 8 is?

A is de gebeurtenis: de som van het aantal ogen is even.
B is de gebeurtenis: de som van het aantal ogen is minstens 8.
De kans die je in **a** hebt berekend noemen we een **voorwaardelijke** kans: de kans dat *de som van het aantal ogen minstens 8 is* **onder de voorwaarde** dat *de som van het aantal ogen even is*.

C is de gebeurtenis: de eerste keer wordt meer dan 4 gegooid.
b. Bereken de kans op A onder de voorwaarde C.
c. Bereken de kans op B onder de voorwaarde C

Notatie
Met $A|B$ bedoelen we A onder voorwaarde B.

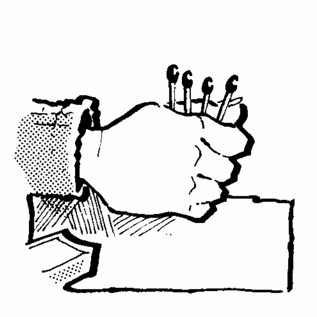
Als je het goed hebt gedaan heb je in opgave **4c** de volgende regel gebruikt:

$P(B \mid C) = \dfrac{\#B \cap C}{\#C}$.

d. Hoe volgt hieruit: $P(B \mid C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)}$?

A en B zijn gebeurtenissen, dan: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

5 Op weg naar school passeert Anne twee verkeerslichten. Die werken onafhankelijk van elkaar. Voor het eerste licht moet ze met 30% kans wachten, voor het tweede met 20% kans. Op school vertelt ze dat voor één van de lichten heeft moeten wachten.
Wat is de kans dat dat voor het eerste licht was?



6 **Is lucifer trekken eerlijk?**
Bij lucifertrekken tussen bijvoorbeeld vier spelers, houdt één van hen vier lucifers in de hand waarvan er één korter is dan de andere drie. Maar dat kun je niet zien als je naar de vier stukjes kijkt die zichtbaar zijn. om beurten trekken de drie anderen een lucifer tot de kortere lucifer getrokken is. Die speler is dan de klos. Als de kortere lucifer niet getrokken wordt, verliest de speler die de lucifers vasthield.
a. Wat is de kans dat de eerste speler de kortere lucifer trekt?
b. Wat is de kans dat de derde speler de kortere lucifer trekt?
c. Is het spel eerlijk?

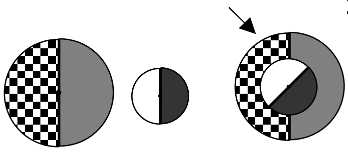
7 In een vaas zitten twee rode en drie witte ballen. Arno trekt twee keer een bal uit de vaas zonder terugleggen.
S is de gebeurtenis: de eerste bal is rood,
T is de gebeurtenis: de tweede bal is rood.
a. Laat zien dat $P(T) = \frac{2}{5}$.
b. Geef $P(S \cap T)$.
c. Bereken $P(T|S)$.

8 Arno herhaalt het experiment, met dit verschil dat hij nu met terugleggen trekt.
S is de gebeurtenis: de eerste bal is rood,
T is de gebeurtenis: de tweede bal is rood.
a. Bereken $P(S)$, $P(T)$, $P(S \cap T)$.

Definitie
S en T zijn onafhankelijk als $P(T|S) = P(T)$.
Dit komt op hetzelfde neer als:
S en T zijn onafhankelijk als $P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T)$.

In opgave **7** vind je $P(T|S) \neq P(T)$,
in opgave **8** $P(T|S) = P(T)$.
Vergelijk dit met het verhaal uit Wikipedia.
In opgave **7** verandert de kans op T als je die onder de voorwaarde S bekijkt omdat S en T in die opgave afhankelijk zijn.
In opgave **8** verandert die kans niet, omdat S en T daar onafhankelijk zijn.

9 Laat zien dat $P(T|S) = P(T)$ op hetzelfde neerkomt als $P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T)$.



10 Twee ronde kartonnetjes worden op elkaar geplakt. De schijf die je zo krijgt wordt gedraaid en op een willekeurig moment gestopt. Er wordt genoteerd wat de pijl aanwijst. Dat kan zijn Z (zwart), W (wit), G (grijs) of B (blokjes).
In het plaatje wordt B en W aangewezen. De kans daarop is $\frac{3}{8}$.
a. Bereken: $P(B|Z)$, $P(G|Z)$ en $P(W|Z)$.
b. Zijn Z en B afhankelijk?
c. Kun je de twee kartonnetjes zó op elkaar plakken dat Z en B onafhankelijk zijn?

11 Ad gooit twee keer met een dobbelsteen.
A is de gebeurtenis: met de eerste steen wordt hoger dan 4 gegooid.
B is de gebeurtenis: de som van de ogen is lager dan 6.
C is de gebeurtenis: de som van de ogen is even.
Zijn A en B onafhankelijk?
En B en C?
En A en C?

Antwoorden

Paragraaf 1 Wegendiagrammen en bomen

1 **d.** $\frac{1}{2000}$

e. $\frac{1}{720}$

f. Nee, 5 goed is onmogelijk; zijn er vijf goed dan is automatisch ook de zesde goed.

2 **a.** 4

b. 4 ; 4

c. 12

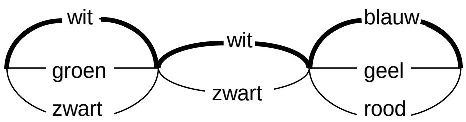
3 **a.** $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

b. $36 \cdot 36 = 1296$

c. $2 + 3 \cdot 2 = 8$

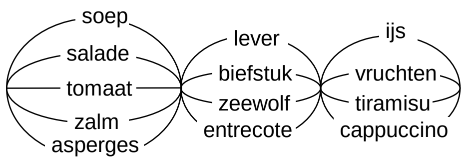
d. $(2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot 3 = 21$

4 **a.**



b. 18

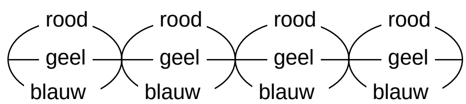
5 **a.**



b. 80

c. 20

6 **a.**

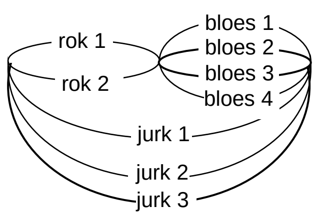


b. 81

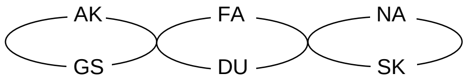
c. 27

d. 256

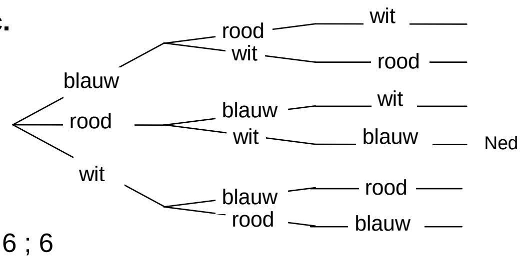
7 **a.**



b. $2 \cdot 4 + 3 = 11$

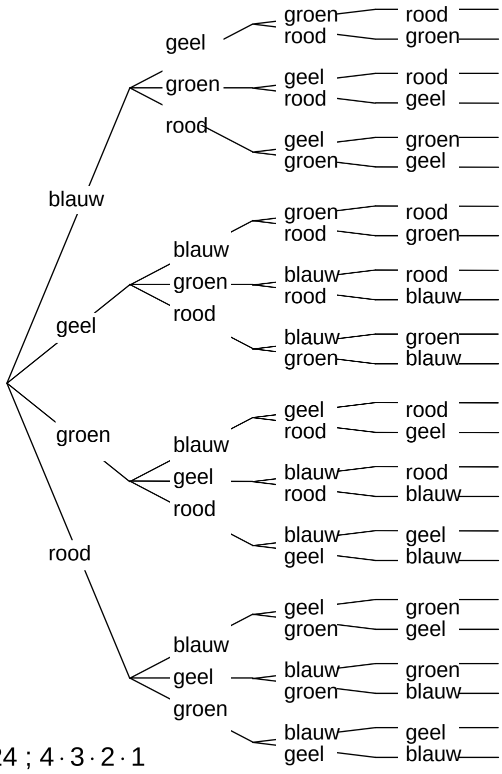
8 **a.** 

b. 8

9 **b,c.** 

d. 6 ; 6

e.



f. 24 ; $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

g. 6 ; 6

h. 2

i. 120

10 **a.** 24 ; 4-3-2-boom

b. 64 ; 4-4-4-wegendiagram

c. 4-3-3-boom ; 36 vlaggen

11 **a.** 15625 ; 5-5-5-5-5-5-wegendiagram

b. 120 ; 5-4-3-2-1-boom

c. 60 ; 5-4-3-boom

d. 15625 ; (1-)5-5-5-5-5-5(-1)-wegendiagram

e. Van een rijtje uit **d** kun je een rijtje uit **a** maken door het voorste en achterste getal weg te laten; andersom maak je van en rijtje uit **a** een rijtje uit **d** door er een 0 voor te zetten en een 4 erachter.

12 a. 720

b. 24

d. 359178 en 351978

e. 158713

f. 958713

g. Vervang twee van de drie enen door een 8 en een 9;

135117 → 835917 eerste 1 vervangen door een 8
835197

935817 tweede 1 vervangen door een 8
135897

935187 derde 1 vervangen door een 8
135987

h. Er zijn $720 : 6 = 120$ nummers mogelijk.

i. Door één 1 door een 8 te vervangen en één 3 door een 9 krijg je een koppeling met nummers uit **a**.

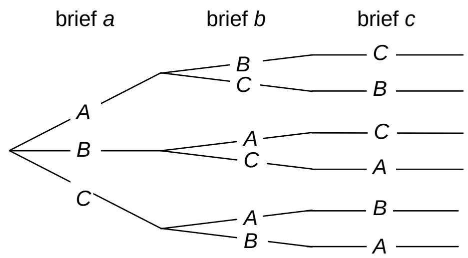
113357 → 819357
813957
189357
183957

Makkelijker is het om een koppeling te maken tussen deze nummers en nummers uit **c**: vervang één van de twee 3-en door een 8;

113357 → 118357
113857

Er zijn 180 nummers mogelijk.

13 a.



Op 6 manieren.

b. 2 ; 3 ; 0 ; 1

Paragraaf 2 Geordende grepen

1 a. $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$; een boom met 7, 6 en 5 splitsingen.

b. $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$; een wegendiagram met 7,7 en 7 splitsingen.

2 **a.** 358800 ; 26-25-24-23-boom
b. 456976 ; 26-26-26-26-wegendiagram
c. 78,5%
d. 98176
e. $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot ... \cdot 14$; 26^{13}

3 **a.** $6{,}48 \cdot 10^{16}$
b. $5{,}60 \cdot 10^{23}$; $4{,}03 \cdot 10^{26}$
c. Je kunt geen permutatie van 30 uit 26 nemen; het is zonder terugleggen.

4 **a.** 362880
b. $2{,}43 \cdot 10^{18}$
c. Dat lukt niet, want 100 is te groot. Maximaal 69.
d. 1 ; 1

5 **a.** $10 \cdot 362880 = 3628800$
b. 1307674368000
20921189894000

6 **a.** $9P4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$
b. $\frac{9!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$
c. $\frac{26!}{13!}$; $\frac{26!}{6!}$
e. $\frac{26!}{0!} = \frac{26!}{1} = 26!$

7 $7P3$; $\frac{7!}{4!}$; $7 \cdot 6 \cdot 5$

8 **a.** $7! = 5040$
b. $5040 : 2 = 2520$
c. $2! \cdot 2! \cdot 3! = 24$

9 **a.** $100P4 = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 94109400$
b. $50P4 = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = 5527200$
c. Dat kan op vier manieren: oeee, eoee, eeoe, eeeo ; $4 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 23520000$ trekkingslijsten

10 **a.** $17^2 \cdot 17^2 \cdot 10^2 = 8352100$
b. $2 \cdot 17 \cdot 17^2 \cdot 10^2 = 982600$
c. $17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 10 \cdot 9 = 5140800$
d. 61,6% heeft alles verschillend ; 61,6% van 25 = 15
e. $17^2 = 289$

11 **a.** $6! = 720$
b. $2^6 = 64$
c, $6 \cdot 5 = 30$

d. $\binom{6}{2} = 15$

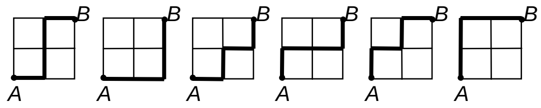
e. $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$

12 a. $\binom{9}{4} = 126$

b. $3 \cdot \binom{6}{3} = 60$

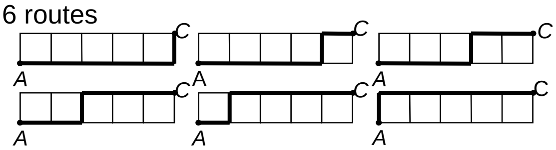
Paragraaf 3 Roosters

1 a.



6 routes

b. 6 routes



2 a. 20 + 15 = 35

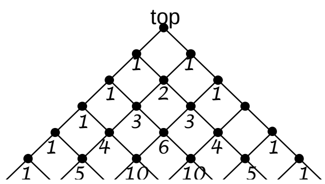
b.

1	7	28	84	210	462	924
1	6	21	56	126	252	462
1	5	15	35	70	126	210
1	4	10	20	35	56	84
1	3	6	10	15	21	28
1	2	3	4	5	6	7
	1	1	1	1	1	1

c. 10 ; 20

d. $10 \cdot 20 = 200$

3



4 a. 1 8 28 56 70 56 28 8 1

b. 56 + 70 = 126 ; twee keer

c. 126 + 126 = 252

d. 84 + 126 = 210

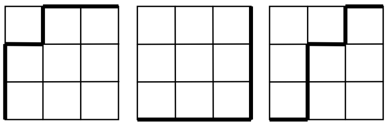
5 **a.** 7^e rij, 2^e of 5^e plaats : 21
b. 10^e rij, 4^e of 6^e plaats: 210

6 **a.** 38760
b. 38760 ; ja
c. (13,7) of (7,13)
d. $\binom{18}{8}$ of $\binom{18}{10}$
e. $n = 9$
f. $\binom{9}{3}$ (of $\binom{9}{6}$) = 84

7 **a.** $\binom{10}{3} = 120$
b. $\binom{8}{3} = 56$
c. 6720
d. 94832640

Paragraaf 4 Ongeordende grepen

1 **a.** BCH; BCM; BCS; BCV; BHM; BHS; BHV; BMS; BMV; BSV; CHM; CHS; CHV; CMS; CMV; CSV; HMS; HMV; HSV; MSV
b. Bach, Chopin, Haydn; Bach, Haydn, Schubert
c.



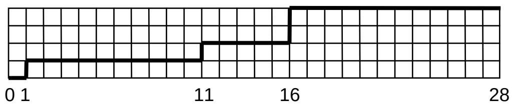
d. $\binom{6}{3} = 20$; dus 20 keuzes ; klopt

2 **a.** 20 ; 3 ; 17 ; (17,3)
b. $\binom{20}{3} = 1140$

3 **a.** (16,4)
b. $\binom{20}{4} = 4845$
d. 1 keer naar boven; 11 keer naar rechts
e. (11,1)
f. $\binom{12}{1} \cdot \binom{8}{3} = 12 \cdot 56 = 672$
g. (9,3) ; 1760
h. 1848
i. 495
j. 70

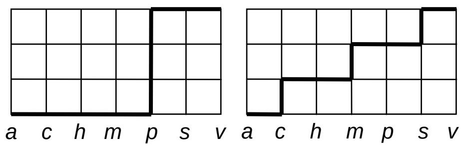
k. 672 + 1760 + 1848 + 495 + 70 = 4845 ; ja klopt

4 **a.** 35960
b.



c. (8,0) en (12,4) ; 70
d. (6,2) en (12,4) ; 784
e. (7,1), (14,2) en (21,3) ; 4096
f. (12,4) ; 1820
g. 1820
h. Laat de eerste vier stappen corresponderen met de 9's en de volgende vier stappen met de 10'en; de overige 24 stappen met de rest. De route gaat dan langs (2,2) en (4,4), dus 36 combinaties.

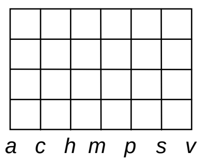
5 **a.** 35
b. 10
c.



d. $\binom{9}{3} = 84$

e. $\binom{7}{2} = 21$

6 **a.**

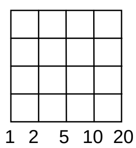


b. $\binom{10}{4} = 210$

c. $\binom{16}{10} = 8008$

d. $\binom{9}{3} = 84$

7 **a.**



$\binom{8}{4} = 70$

b. De eerste twee stappen in zo'n route gaan naar rechts

$\binom{6}{4} = 15$

c. $\binom{6}{2} = 15$

d. $\binom{5}{2} = 10$

e. Dat is het aantal combinaties van 4 uit 5: $\binom{5}{4} = 5$.

8 **a.** $\binom{9}{4} = 126$

b. $\binom{6}{3} = 20$; de eerste twee stappen in zo'n route zijn naar rechts en de derde naar boven.

c. $\binom{6}{4} = 15$

Paragraaf 5 Het vaasmodel

1 **a.** Je stopt 6 briefjes in de vaas met daarop de namen van de componisten; je neemt zonder terugleggen en zonder op de volgorde te letten 3 briefjes uit de vaas.
b. een 3 bij 3 rooster

2 **a.** In de vaas zitten de vijf munten; je trekt er met terugleggen en zonder op de volgorde te letten vier munten uit.
b. In de vaas zitten een kwartje, een gulden en een rijksdaalder; je trekt er met terugleggen en zonder op de volgorde te letten vier munten uit.
c. In de vaas zitten de vijf munten; je trekt er met terugleggen en zonder op de volgorde te letten twee uit (twee van de vier munten liggen al vast: dat zijn guldens).
d. In de vaas zitten vier munten (s, d, k, r); je trekt er met terugleggen en zonder op de volgorde te letten twee uit.
e. In de vaas zitten de vijf munten; je trekt er zonder terugleggen en zonder op de volgorde te letten vier uit.

3 **a.** $\binom{9}{4} = 126$; een 5 bij 4 rooster (5 breed; 4 hoog)
b. Ja
c. Dezelfde vaas als in **a**, maar nu wordt zonder terugleggen getrokken, zonder op de volgorde te letten;
$\binom{6}{4} = 15$

4 $\binom{23}{20} = 1771$

5 **a.** Vijf kleuren in de vaas; je trekt met terugleggen vier keer, waarbij je let op de volgorde; $5^4 = 625$ manieren.
b. Zes "kleuren" in de vaas (ook blanco); je trekt weer met terugleggen vier keer, waarbij je let op de volgorde; $6^4 = 1296$.
c. Twee kleuren in de vaas; je trekt weer met terugleggen vier keer waarbij je let op de volgorde; $2^4 = 16$.
d. Vijf kleuren in de vaas; nu trek je zonder terugleggen vier keer, waarbij je let op de volgorde; $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.
e. Vijf kleuren in de vaas; je trekt met terugleggen vier keer uit de vaas zonder op de volgorde te letten; $\binom{8}{4} = 70$.
f. Vier kleuren in de vaas (geen paars); je trekt met terugleggen en zonder op de volgorde te letten vier keer; $\binom{7}{4} = 35$.
g. Vier kleuren in de vaas (geen geel); je trekt met terugleggen twee keer zonder op de volgorde te letten; $\binom{5}{2} = 10$.
h. Vijf kleuren in de vaas; je trekt zonder terugleggen en zonder op de volgorde te letten vier keer; $\binom{5}{4} = 5$.

6 **a.** Vaas met 0 en 1 erin; je trekt met terugleggen acht keer uit de vaas waarbij je let op de volgorde; $2^8 = 256$.
b. 8 ; 10000000 ; 01000000 ; 00100000 ; 00010000 ; 00001000 ; 00000100 ; 00000010 ; 00000001
d. 10000001 ; 3 en 4
e. $\binom{8}{2} = 28$; 28
f. $\binom{8}{6} = 28$; klopt
g. $\binom{8}{3} = 56$; $\binom{8}{5} = 56$
h. $\binom{10}{3}$; vaas met de nummers 1 t/m 10 ; je trekt zonder terugleggen 3 keer uit de vaas, zonder op de volgorde te letten.

7 **a.** $3^8 = 6561$
b. $2^8 = 256$
c. 11021011
d. $\binom{8}{2} = 28$; $\binom{6}{1} = 6$; $28 \cdot 6 = 168$
e. $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2} = 8 \cdot 21 = 168$
f. $\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{2}$ of $\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{1}$ of $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{1}$ of $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{5}$

g. $\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{3} = 10\cdot 36\cdot 35 = 12600$

8 **a.** $\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1} = 720$

b. $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1} = 360$

c. $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1} = 120$

d. $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1} = 180$

9 **a.** $7P3 = 210$

b. $\binom{7}{3} = 35$

c. 6 ; *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*

d. $35\cdot 6 = 210$; klopt

e. $1{,}3746\cdot 10^{28}$

f. $60! = 8{,}3210\cdot 10^{81}$

g. $1{,}3746\cdot 10^{28}\cdot 8{,}3210\cdot 10^{81} = 1{,}3746\cdot 8{,}3210\cdot 10^{28}\cdot 10^{81}$
$= 11{,}4380\cdot 10^{109} \approx 1{,}144\cdot 10^{110}$

10 **a.** $3^4 = 81$

b. $\binom{6}{4} = 15$

c. 12

d.

1111: 1	2221: 4	1133: 6
2222: 1	2223: 4	2233: 6
3333: 1	3331: 4	1123: 12
1112: 4	3332: 4	2213: 12
1113: 4	1122: 6	3312: 12

totaal: 81 ; klopt

11 **a.** $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

b. $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

c. $6^3 = 216$; de kans is dus $\frac{1}{216}$

d. $\binom{8}{3} = 72$

e. Bij een ongeordende greep van drie zessen hoort één geordende greep. Bij één 1, één 2 en één 3 horen 6 geordende grepen, dus 6 keer zo veel kans.

12 **a.** $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{120}$

b. $6\cdot 5\cdot 4 = 120$, $\frac{1}{120}$, klopt

c. Evenveel kans

d. $\binom{6}{3} = 20$; $\frac{1}{20}$

13 a. 1, 1, 6: 3
1, 2, 5: 6
1, 3, 4: 6
2, 2, 4: 3
2, 3, 3: 3

b. 21 ; $\frac{21}{216} = \frac{7}{72}$

c.

1, 2, 6:	6	2, 2, 5:	3
1, 3, 5:	6	2, 3, 4:	6
1, 4, 4:	3	3, 3, 3:	1

kans = $\frac{25}{216}$

Paragraaf 6 Combinatorische vraagstukken

1 a. 720
b. 720
c. 360 (We vervangen de 6 en de 7 bij alle mogelijkheden van vraag **a** door een open plaats. Dan krijg je elke mogelijkheid uit **c** twee keer.)

2 10800

3 a. 126
b. $\frac{35}{1296}$

4 a. $\binom{6}{2}$; $\binom{6}{3}$; $\binom{6}{4}$; $\binom{6}{5}$; $\binom{6}{6}$
b. 57

5 a. 15 ; 6
b. 10
c. 10+15+6 = 31

6 a. 56
b. 20
c. 30

7 a. 2187
b. 1806
c. 378
d. 3
e. 1806 + 378 + 3 = 2187 ; klopt

8 a. 35 (Op de eerste zeven plaatsen komen 4 *p*'s en 3 *b*'s.)

b. 32 (bij het eerste zakje heeft ze 2 keuzes, bij het tweede 1, bij het derde 2,…)

9 **a.** 28
b. 56

10 **a.** 90
b. 36

11 **a.** 5040
b. 20

Paragraaf 7 Extra opgaven

1 $\binom{12}{2} = 66$

2 $\binom{9}{2} = 36$

3 **a.** $\binom{15}{10} = 3003$

b. $\binom{9}{4} = 126$

c. $\binom{9}{5} = 126$

4 **a.** $\binom{8}{4} = 70$

b. $70 - \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 34$

c. 52

5 **a.** $\frac{1}{3}$
b. $\binom{12}{4} = 495$

c. $\binom{12}{6} / 2 = 462$

6 **a.** $10^4 = 10000$
b. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
c. $\frac{1}{12}$
d. $9^4 = 6561$
e. 14
f. $\binom{10}{2} \cdot 14 = 630$

g. $\frac{20.000.000}{10.000} = 2000$

7 **a.** $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 12600$

b. Splits op in : 1 blauwe doet niet mee , 1 rode doet niet mee en 1 witte doet niet mee:

$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} = 12600$

Nog veel slimmer: je kunt een koppeling maken tussen torens van 10 en torens van 9: haal het bovenste blok eraf.

c. Blauw kan 2 keer voorkomen; geel kan 2 keer voorkomen of rood kan 2 keer voorkomen: $3 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 180$.

d. 3b1g1r1w: $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 120$

2b2g1r1w: $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 180$

2b1g2r1w: $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} = 180$

1b3g1r1w: $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 120$

1b2g2r1w: $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 180$

totaal 780

8 **a.** $4! = 24$

b. 12

c. 12

Paragraaf 8 Rekenregels

1 **a.** $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{5}{36}$

b. ja

c. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{11}{36}$

d. nee

e. *S* en *T* sluiten elkaar uit

2 **a.** nee, $100 - 30 - 20 \neq 57$

b. 7%

c. 0,3 ; 0,2 ; 0,07 ; 0,43

d. $0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}07 = 0{,}43$

3 $\#S + \#T - \#S \cap T = \#S \cap T$

4 **a.** $\frac{7}{18}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{2}$

d. teller en noemer delen door #*U*

5 $\frac{12}{17}$

6 **a.** $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{4}$ en als je dat niet gelooft: dit is de kans dat de eerste speler de korte lucifer niet trekt, de tweede de korte lucifer niet trekt en de derde wel, dus $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

c. Elke speler heeft kans $\frac{1}{4}$ omde korte lucifer te trekken.

7 **a.** $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$

b. $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

c. $\frac{1}{4}$

8 **a.** $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{25}$

b. $\frac{2}{5}$

9 Volgens de regel na opgave **4** geldt:

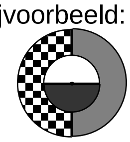
$$P(T \mid S)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}.$$

Als $P(T \mid S)=P(T)$, dan dus $P(T)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}$.

10 **a.** $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; 0

b. $P(B)=\frac{1}{2}$, dus $P(B|Z)\neq P(B)$, dus ja.

c. Zo bijvoorbeeld:



11 $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{5}{18}$, $P(C)=\frac{1}{2}$,

$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$, $P(B\cap C)=\frac{1}{9}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{6}$

dus: *A* en *B* afhankelijk, *B* en *C* afhankelijk en *A* en *C* onafhankelijk.