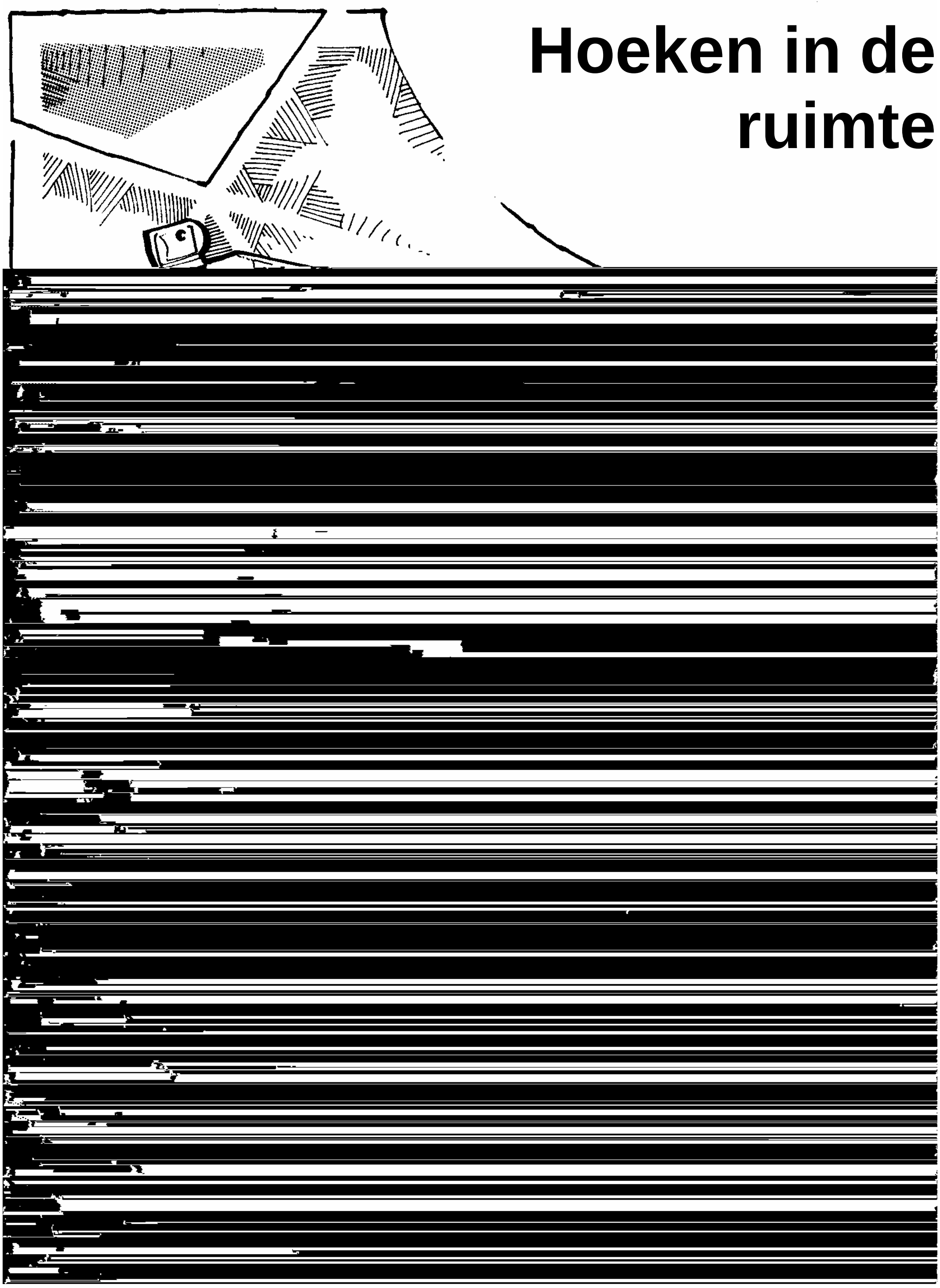
Hoeken in de ruimte



Havo wiskunde D

Inhoudsopgave
Hoeken in de ruimte

1	De stand van zaken	1
2	Hoeken	5
3	Het inproduct nader bekeken	14
4	Vergelijkingen van vlakken	17
5	Projecties	23
	Antwoorden	31

Dit is een vervolg op *Vectoren en meetkunde voor havo wiskunde D*

verbeterd experimentele uitgave, juli 2008

Colofon

Auteurs: Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

Illustraties: Wilson Design, Uden

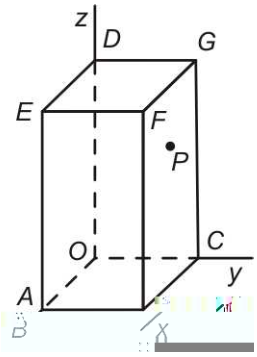
Distributie: Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

ISBN: isbn

Homepage: www.wageningse-methode.nl

De stand van zaken

In deze paragraaf komen we terug op onderwerpen uit de vorige meetkunde hoofdstukken.



* **1** Het blok hiernaast is 4 hoog, 2 breed en 3 diep. Er is een *x*-, *y*- en *z*-as gekozen, zie plaatje.

a. Geef de kentallen van $\overrightarrow{AG}$.

b. Bereken $|\overrightarrow{AG}|$.

Het punt *P* ligt in het grensvlak *BCGF* van het blok. De lijn door *P* evenwijdig aan lijn *AG* snijdt de voorkant van het blok in *Q*.

c. Teken *Q* nauwkeurig op het werkblad.

Tip. Breng een vlak aan door *P* waarvan je de snijlijn met het voorvlak van het blok kunt tekenen.

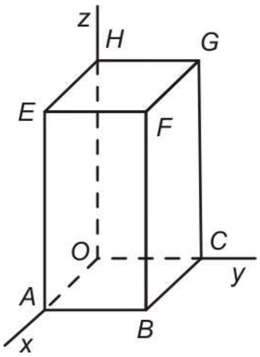
Veronderstel dat *P* het punt (2,2,3) is.

d. Geef een pv van de lijn door *P* evenwijdig aan *AG*.

e. Bereken de coördinaten van *Q*.

f. Teken het snijpunt *S* van lijn *DP* met het *Oxy*-vlak.

g. Bereken de coördinaten van *S*.



* **2** Het assenstelsel is zó gekozen dat $A = (3,0,0)$, $C = (0,2,0)$ en $H = (0,0,4)$.

V is het vlak met vergelijking $x + 2z = 6$.

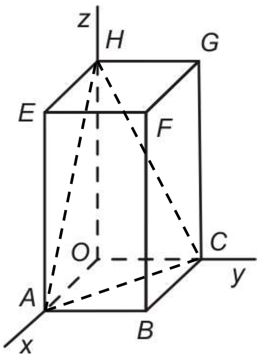
Het snijpunt van *V* met ribbe *FB* is $(3,2,1\frac{1}{2})$, immers $(3,2,1\frac{1}{2})$ voldoet aan de vergelijking van *V* en heeft eerste coördinaat 3 en tweede coördinaat 2, dus ligt op lijn *FB*.

a. Bepaal ook coördinaten van de andere snijpunten van *V* met ribben van het blok.

b. Arceer op het werkblad het deel van *V* dat binnen het blok zit.

c. Hoe kun je aan de vergelijking van *V* zien dat *V* evenwijdig met de *y*-as is?

d. Geef een vergelijking van het diagonaalvlak *ACGE* van het blok.



De snijpunten van vlak *ACH* met de coördinaat-assen zijn: (3,0,0), (0,2,0) en (0,0,4).

Een vergelijking van vlak *ACD* is: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$,

anders geschreven: $4x + 6y + 3z = 12$. Een vector die loodrecht op vlak *ACD* staat is (4,6,3). We noemen dat een normaalvector van vlak *ACD*.

Herhaling

Als $ax + by + cz = d$ een vergelijking van een vlak *V* is, dan is (a,b,c) een normaalvector van *V*, dat wil zeggen (a,b,c) is een vector die loodrecht op *V* staat.

W is het vlak met vergelijking $x+2y+2z=4$.
e. Bereken de coördinaten van de snijpunten van W met de coördinaat-assen.
f. Arceer op het werkblad het deel van W dat binnen het blok ligt.
g. Geef een pv van de lijn door O loodrecht op W en bereken de coördinaten van het snijpunt S van die lijn met W.

De afstand van O tot W is de lengte van het kortste van alle verbindingslijnstukken van O met punten van W. Het kortste verbindingslijnstuk vanuit O staat loodrecht op W. Dat is dus lijnstuk SO.
h. Bereken de afstand van O tot W.

Voorbeeld
Hoe bereken je de coördinaten van het snijpunt van een lijn en een vlak?
V is het vlak met vergelijking $x+2y+3z=12$ en k de lijn door (1,2,3) en (4,5,6).
Een pv van lijn AB is: $(x,y,z)=(3,4,5)+t(1,1,1)$. Het snijpunt is dus van de vorm: $(3+t,4+t,5+t)$.
$(3+t,4+t,5+t)$ ligt in V als het aan de vergelijking $x+2y+3z=12$ voldoet, dus als $3+t+2(4+t)+3(5+t)=12$, dus als $t=-2\frac{1}{3}$, dus het snijpunt is: $(\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3})$.

De vectoren $\vec{v}=(a,b,c)$ en $\vec{w}=(p,q,r)$ staan loodrecht op elkaar dan en alleen dan als: $ap+bq+cr=0$. Dit hebben we gezien in *Vectoren en meetkunde.*
Het getal $ap+bq+cr$ zegt dus iets over de hoek tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$. Verderop zullen we zien dat je met dit getal de hoek tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ kunt berekenen.
We noemen $ap+bq+cr$ het inproduct van de vectoren $\vec{v}=(a,b,c)$ en $\vec{w}=(p,q,r)$ en schrijven het op als: $\vec{v}\cdot\vec{w}$.
Dus $\vec{v}\cdot\vec{w}=ap+bq+cr$.

Afspraak
$\vec{v}\cdot\vec{w}$ is onze notatie voor het **inproduct** van $\vec{v}$ en $\vec{w}$.
Als $\vec{v}=(a,b,c)$ en $\vec{w}=(p,q,r)$, dan is
$\vec{v}\cdot\vec{w}=ap+bq+cr$.

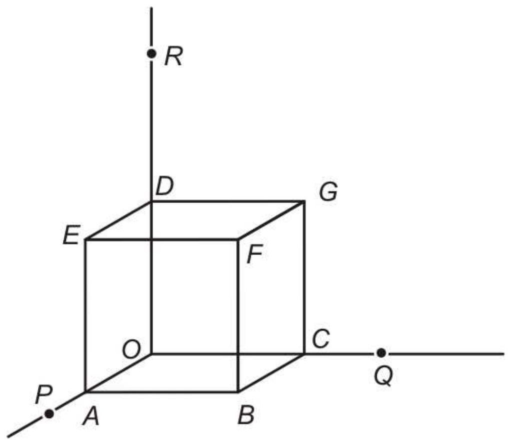
Er geldt:
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}$ en $\vec{w}$ loodrecht op elkaar.
(We gaan er vanuit dat $\vec{v}$ en $\vec{w}$ niet beide de nulvector zijn.)

* **3** We nemen weer het blok uit de vorige twee opgaven. Een vergelijking van vlak *ACD* is: $4x+6y+3z=12$, zie opgave **2**. Dus een normaalvector van vlak *ACD* is: (4,6,3).
a. Controleer met het inproduct dat (4,6,3) loodrecht op $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{CD}$ staat.

U is het vlak door *P* evenwijdig aan vlak *ACD*.
b. Arceer het deel van *U* dat binnen het blok ligt.

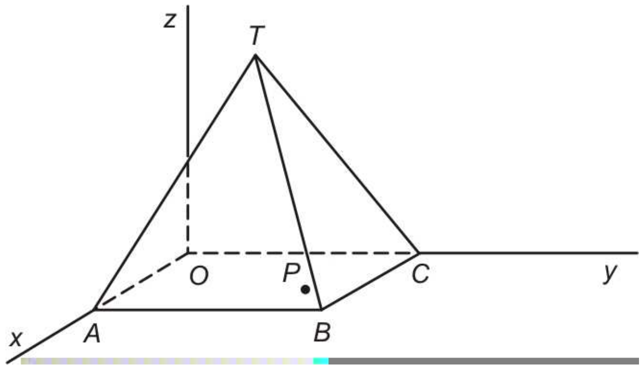
Omdat *U* en vlak *ACD* evenwijdig zijn, is een vergelijking van *U* van de vorm: $4x+6y+3z=d$ voor zeker getal *d*.
c. Bereken het getal *d*.

* **4** *OABC.DEFG* is een kubus met *A*(6,0,0), *C*(0,6,0) en *D*(0,0,6). De punten *P*(9,0,0), *Q*(0,9,0) en *R*(0,0,12) liggen op de coördinaat-assen.

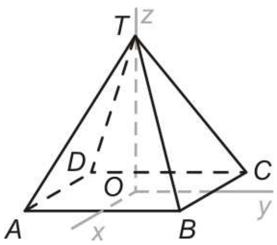


a. Geef een vergelijking van vlak *PQR*.
b. Teken op het werkblad de doorsnede van vlak *PQR* met de kubus.
c. Bereken de coördinaten van de snijpunten van vlak *PQR* met zes van de ribben van de kubus.
d. Teken het snijpunt van lijn *BD* met vlak *PQR* en bereken de coördinaten van dat snijpunt via een pv van lijn *BD* en een vergelijking van vlak *PQR*.

*** 5** *T.OABC* is een regelmatige vierzijdige piramide met *A*(6,0,0), *C*(0,6,0) en *T*(3,3,6).



a. Teken op het werkblad het snijpunt van vlak *TBC* met de *z*-as.
b. Geef een vergelijking van vlak *TBC*.
c. Bereken de coördinaten van het snijpunt van vlak *TBC* met de *z*-as.



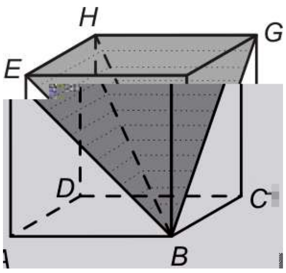
*** 6** *T.ABCD* is een regelmatige vierzijdige piramide. De coördinaten van *A*, *B*, *C*, *D* en *T* zijn achereenvolgens: (3,-3,0), (3,3,0), (-3,3,0), (-3,-3,0) en (0,0,6).
We zagen een "punt" van de piramide af bij *B*; het zaagvlak heeft vergelijking $x+y=3$
a. Kleur het zaagvlak op het werkblad.

We zagen soortgelijke punten bij *A*, *C* en *D* af.
b. Geef van elk zaagvlak een vergelijking.
c. Teken een bovenaanzicht van het overblijvende stuk van de piramide.

2 Hoeken

1 De kilgoot

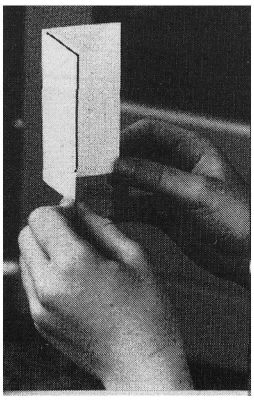
Hierboven zie je een foto van een huis met aangebouwde vleugel. De dakvlakken van het huis en van de vleugel hebben een hellingshoek van 45°. De nok van het garagedak staat loodrecht op die van het huis. Waar het dak van de vleugel overgaat in het dak van het huis is een goot gemaakt, een zogenaamde kilgoot.



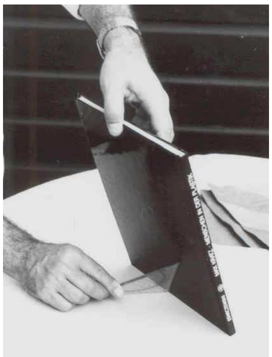
a. Wat denk je, is de hellingshoek van de kilgoot ook 45°, is hij kleiner of is hij groter?

De kilgoot is een gevouwen rechthoekige plaat. De vouwhoek is de hoek van de twee dakvlakken.
b. Wat denk je, is de vouw 90°, is hij kleiner of is hij groter?

We kunnen de vragen in **a.** en **b.** vertalen naar een situatie in een kubus *ABCD.EFGH*. De dakvlakken zijn de vlakken *BEH* en *BHG*. De kilgoot is de snijlijn van die vlakken.
c. Bereken de hellingshoek van de kilgoot in graden nauwkeurig.Het berekenen van de vouwhoek komt later wel.



2 a. Vouw een rechthoekig vel papier dubbel (de vouw evenwijdig aan een bladrand) en open de vouw weer gedeeltelijk: je hebt twee vlakken met de vouw als snijlijn.Kun je de hoek van beide vlakdelen aanwijzen?
In welke richting moet je kijken om de hoek goed te zien?
b. Vouw een vel papier, maar nu zo', dat de vouw niet evenwijdig met de bladrand is. Open de vouw gedeeltelijk. Kun je nu de hoek van beide vlakdelen aanwijzen? In welke richting moet je kijken om de hoek goed te zien?

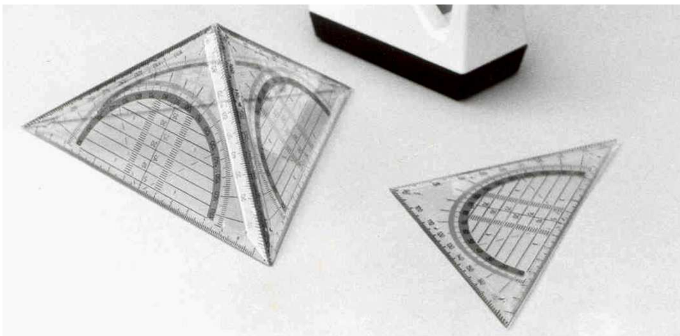


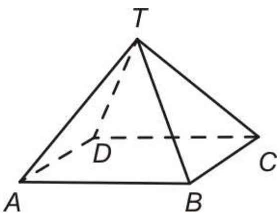
3 **a.** Houd een boek schuin op tafel. Je geodriehoek past met de rechte hoek in de hoek tussen het boek en de tafel, dus met de ene zijde op tafel en de andere zijde tegen het boek. Hoe je het boek ook laat hellen, het past altijd.

b. We gaan de geodriehoek nu met een van de hoeken van 45° proberen te passen in de hoek die het boek metde tafel maakt. Kan dat ook altijd? Je kunt dus altijd wel een lijn in het ene vlak en een lijn inhet andere vlak vinden die een hoek van 45° met elkaar maken. En die een hoek van 90° met elkaar maken. De hoek van twee vlakken vind je dus niet door in beide vlakken een willekeurige lijn te nemen en de hoek tussen die lijnen te bekijken.

4 Plak met plakband drie geodriehoeken met de korte zijden aan elkaar, zodat ze een driezijdige piramide vormen (het grondvlak is de tafel).

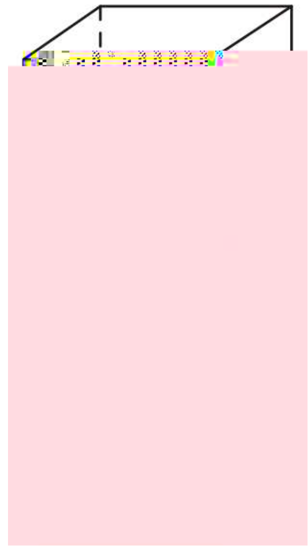
Hoe groot is, denk je, de hoek tussen twee geodriehoeken? Als je het antwoord niet zeker weet, leg de constructie dan maar eens met één van de geodriehoeken op de tafel.





* **5** *ABCD.T* is een piramide waarvan alle ribben lengte 6 hebben.

In welke richting moet je kijken om de hoek van vlak *ADT* met het grondvlak goed te kunnen zien?
Teken die hoek op het werkblad.
Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

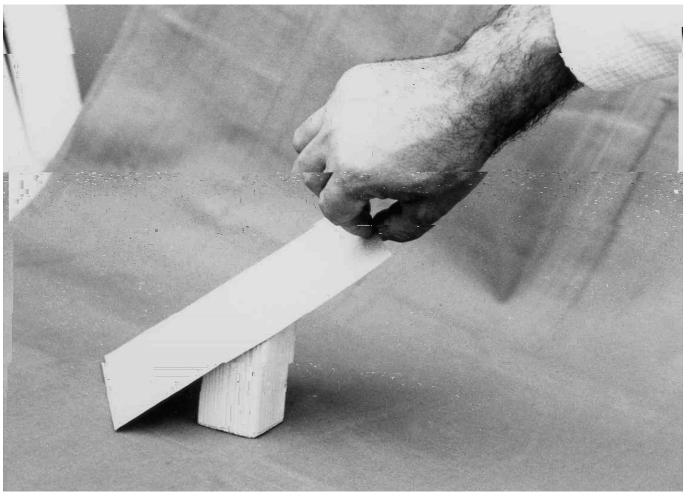


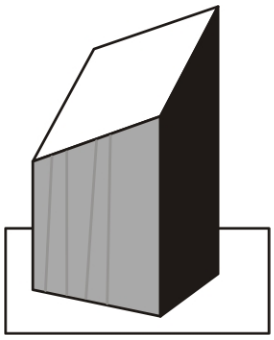
* **6** Een recht blok met een grondvlak van 2 bij 2 is schuin afgezaagd. Het zaagvlak snijdt de verticale ribben op hoogte 2, 3, 4 en 3. We bekijken de hellingshoek van het zaagvlak ten opzicht van het grondvlak van het blok.

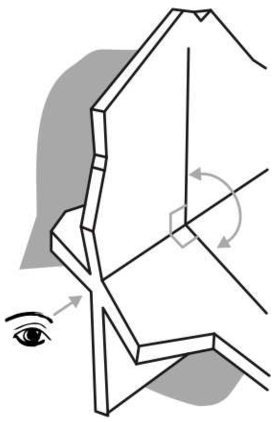
a. Teken die hoek op het werkblad.

b. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

De hoek kun je ook goed als volgt zichtbaar maken. Zet het afgezaagde blok (met het grondvlak) op de tafel en houd een rechthoekig stuk karton op het schuine zaagvlak zó, dat een rand van het karton op de tafel rust. De hoek die het karton met de tafel maakt is de hellingshoek.



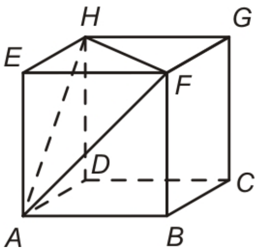




De hoek die twee snijdende vlakken *V* en *W* met elkaar maken is de hoek die je ziet als je in de richting van de snijlijnkijkt. Deze hoek noemen we ook wel de **standhoek** van *V* en *W*. De standhoek staat loodrecht op de snijlijn. Je kunt die hoek berekenen in een aanzicht in de richting van de snijlijn.

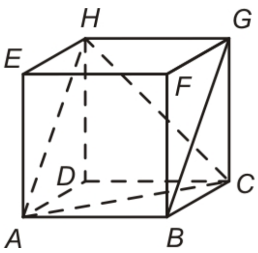
7 *V* en *W* zijn twee vlakken die elkaar snijden onder een hoek van 45°.
a. Waar of niet waar? Geef commentaar op elk van de volgende beweringen.
• Er is een lijn in *V* en een lijn in *W* die elkaar snijden onder een hoek van 77°.
• Er is een lijn in *V* en een lijn in *W* die elkaar snijden onder een hoek van 45°.
• Er is een lijn in *V* en een lijn in *W* die elkaar snijden onder een hoek van 27°.

b. *l* is een lijn in *V* en *m* een lijn in *W*. Hoe groot kan de hoek tussen *l* en *m* zijn?

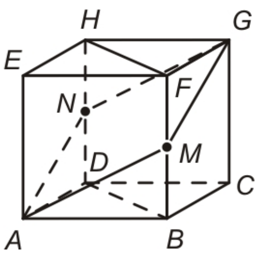


* **8** *ABCD.EFGH* is een kubus. De snijlijn van de vlakken *ACH* en *ABGH* is lijn *AH*.

a. Kleur op het werkblad de standhoek van de vlakken *ACH* en *ABGH*.
b. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

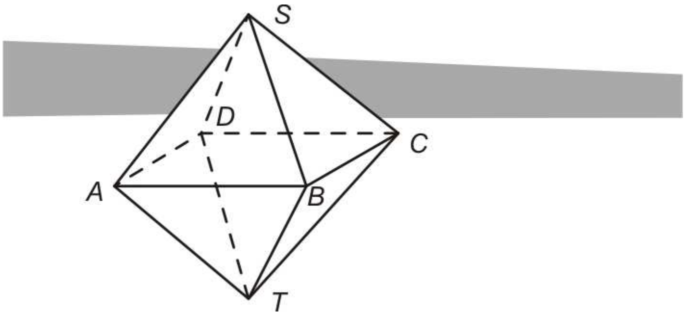


*** 9** *ABCD.EFGH* is een kubus.
a. Kleur op het werkblad de standhoek van vlak *AFH* en het grondvlak.
Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

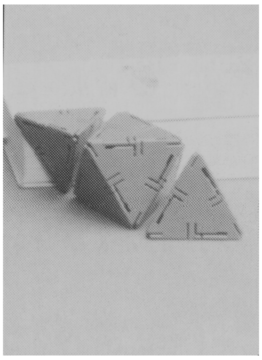


N is het midden van *HD*, *M* van *FB*.
b. Kleur de standhoek van de vlakken *AMGN* en *BDHF*.
Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

* **10** *ABCD.ST* is een regelmatig achtvlak.

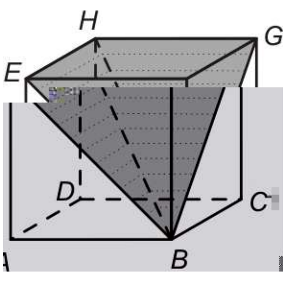


a. Kleur op het werkblad de standhoek tussen de grensvlakken *TAD* en *TBC*. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.
b. Kleur op het werkblad de standhoek van de grensvlakken *TAD* en *TDC*.
Bereken die hoek in graden nauwkeurig.



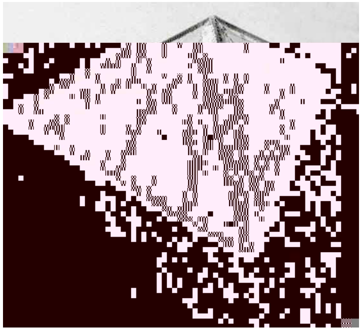
11 a. Bereken de hoek tussen twee grensvlakken van een regelmatig viervlak.
Met twee regelmatige viervlakken en een achtvlak met dezelfde ribbe kun je een scheef blok bouwen.
b. Wat zegt dit over je antwoorden op **10b.** en **11a.**?

Opmerking
Voor de hoek tussen twee vlakken maken we een soortgelijke afspraak als bij de hoek van twee snijdende lijnen.Met die hoek bedoelen we de scherpe (eventueel rechte) hoek. In opgave **10b.** heb je als antwoord 109° gegeven. Het gaat hier ook niet om de hoek van twee (onbegrensde)vlakken, maar om de hoek tussen twee begrensde vlakdelen en die kan (net zoals de hoek tussen twee lijnstukken in bijvoorbeeld een driehoek) stomp zijn.



* **12 De vouw in de kilgoot**
We komen terug op opgave **1** en berekenen de hoek van de vlakdelen *BEH* en *BHG* in kubus *ABCD.EFGH*. Het punt *P* ligt op diagonaal *BH* zó, dat *EP* loodrecht op *BH* staat. Zeg dat de ribben van de kubus lengte 6 hebben.
a. Bereken dan *BP*.
Wat is dus de verhouding *BP* : *HP* ?
Teken *P* op het werkblad; je mag meten.
b. Bereken hoek *EPG*.

13 De drie geodriehoeken



We bekijken het bouwsel van opgave **4** nog eens. Het gaat dus over een driezijdige piramide waarvan de opstaande grensvlakken drie geodriehoeken zijn. De lange zijde van een geodriehoek is 16 cm. We hebben in opgave **4** gezien dat de hoek van twee opstaande grensvlakken 90° is.

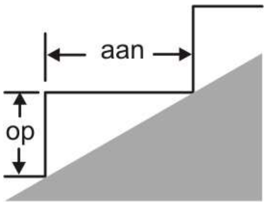
a. Bereken de inhoud van de piramide; neem een geodriehoek als “grondvlak”.

b. Bereken met behulp van **a.** hoever de top van de piramide boven de tafel komt.

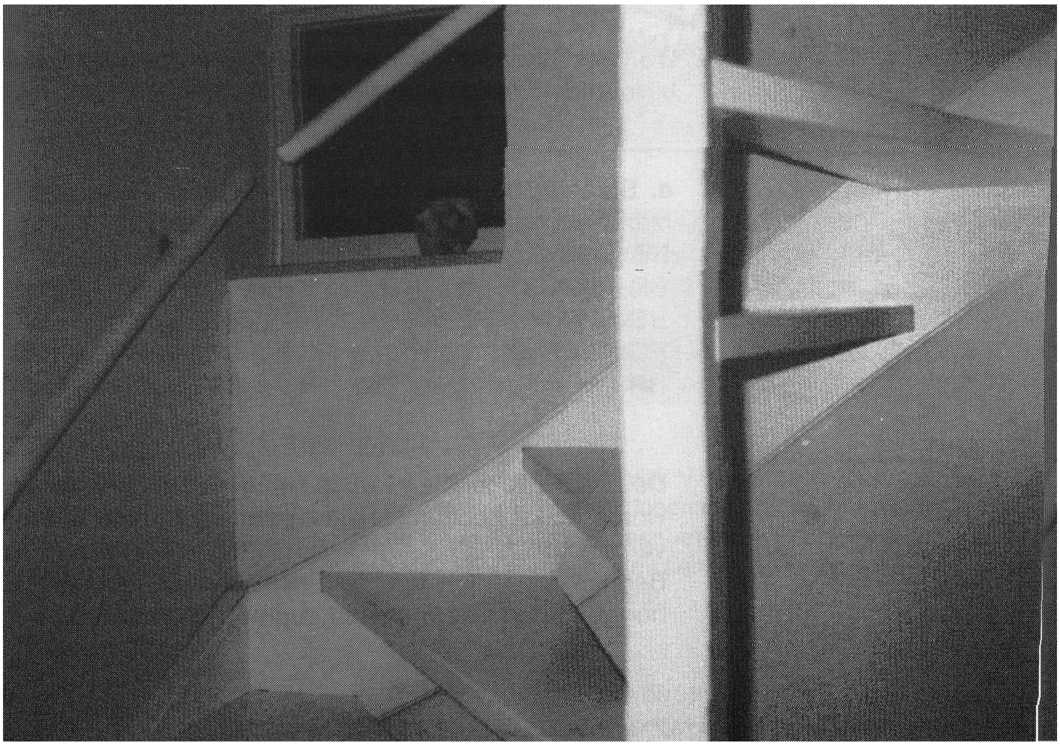
c. Bereken de hoek die een geodriehoek met het vlak van de tafel maakt.

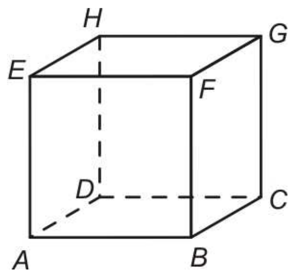
d. Bereken de hoek die een opstaande ribbe met het vlak van de tafel maakt.

14 Knik in de trapleuning



Een trap waarvan de aantrede twee keer zo groot is alsde optrede, maakt een hoek van 90°. De leuning loopt even steil als de trap.Bereken de knik in de leuning in graden nauwkeurig. Je kunt de situatie vertalen naar kubus *ABCD.EFGH*: *M* is het midden van *DH*, het eerste stuk van de leuning is *AM*....





15 *ABCD.EFGH* is een kubus.

a. Bereken de volgende hoeken:
- de hoek tussen lijn *BG* en lijn *BC*,
- de hoek tussen lijn *BG* en lijn *BE*,
- de hoek tussen lijn *AG* en lijn *AF*,
- de hoek tussen lijn *AG* en lijn *DF*.

b. Zeg bij elk van deze vier hoeken in welke richting je moet kijken om de hoek goed te zien.

Bij elk van deze hoeken hebben we te maken met de hoek tussen twee snijdende lijnen. In het vervolg willen we kunnen spreken over de hoek tussen *elk* tweetal lijnen, dus ook over de hoek tussen de lijnen *BE* en *CH* of tussen *BE* en *DH*.

c. Hoe groot is de hoek tussen de twee parallelle lijnen *BE* en *CH*, vind jij?

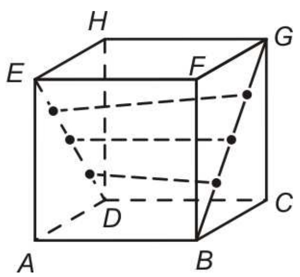
De lijnen *BE* en *DH* kruisen elkaar.

d. Onder welke hoek, vind jij?

> Onder de hoek tussen twee lijnen zullen we verstaan de hoek die je krijgt door een van de lijnen te verschuiven totdat hij de andere snijdt.

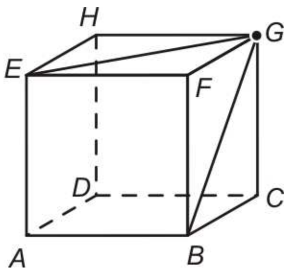
De hoek tussen de lijnen *BE* en *DH* is de hoek tussen bijvoorbeeld de lijnen *BE* en *AE*.

e. Bereken de hoek tussen de volgende lijnen in graden nauwkeurig:
- *BE* en *DH*,
- *BE* en *DG*,
- *BE* en *AH*,
- *BC* en *EF*,
- *HB* en *AC.*



16 De zijvlaksdiagonalen van de kubus met ribbe 4 hiernaast worden door horizontale lijnstukken op hoogte 1, 2 en 3 verbonden.

Bereken de hoek die de lijnstukken op hoogte 1 en hoogte 3 met elkaar maken in graden nauwkeurig.



17 *ABCD*.EFGH is een kubus.

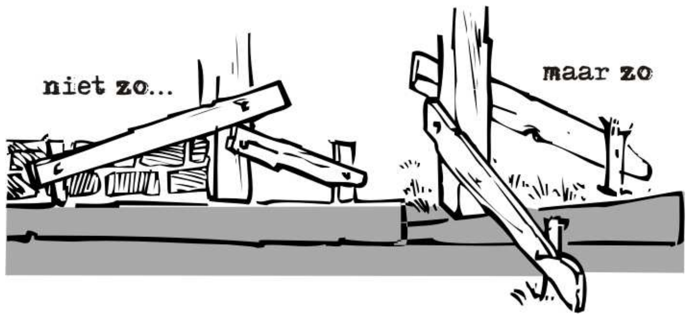
We bekijken alle lijnen door *G*, die een hoek van 45° met ribbe *FG* maken.

a. Teken de snijpunten van deze lijnen met vlak *ABFE*. (Twee van die punten zijn *E* en *B*.)

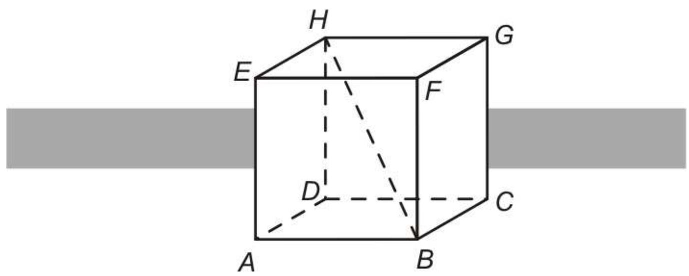
b. Bepaal de ligging van de lijnen door *G* die een hoek van 90° met lijn *FG* maken.

In *Vectoren en meetkunde* hebben we gezien dat een vector loodrecht op een vlak staat als hij loodrecht op twee onafhankelijke (echt verschillende) richtingen van een vlak staat.

Als een metselaar een muur gaat metselen, zet hij eerst wat palen recht omhoog: hij stelt profielen. Zo'n profiel staat pas recht als het vanuit twee richtingen gezien recht staat. Dan staat het vanuit elke richting gezien recht.

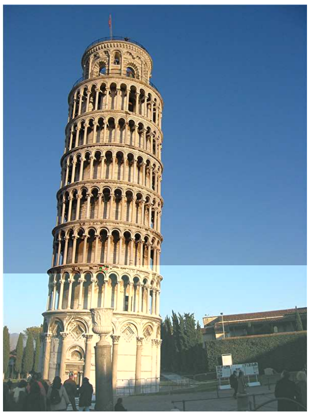


18 *ABCD.EFGH* is een kubus.



a. Toon aan dat lijn *HB* loodrecht op lijn *AC* staat en ook op lijn *AF*. Dat kan bijvoorbeeld met het inproduct.

b. Waaruit volgt nu dat de lijn *HB* loodrecht op vlak *ACF* staat?



* **19 De toren van Pisa**

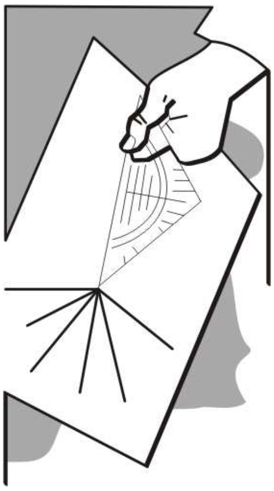
Op het werkblad staat een bovenaanzicht van een plein met een scheve toren. Anneke loopt in een kring om de toren.

a. Kleur de plaatsen op haar rondwandeling van waaruit ze niet ziet dat de toren scheef staat.

b. Kleur ook de plaatsen van waaruit ze goed ziet hoe scheef de toren staat.

De toren van Pisa staat 4 meter uit het lood. Hij is 54 m hoog (verticaal gemeten).

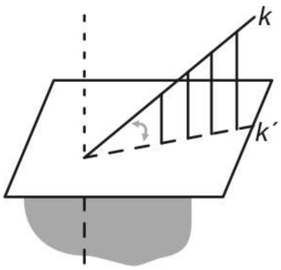
c. Hoeveel graden staat hij uit het lood? Hoe groot is de hoek die de toren met de begane grond maakt?



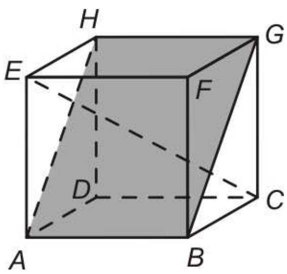
20 Leg een stuk papier op tafel. Zet de geodriehoek met de lange zijde op het papier, loodrecht op de tafel. Zo maken de korte zijden van de geodriehoek een hoek van 45° met het stuk papier. We bekijken alle mogelijke lijnen op het papier die door een van de hoekpunten van de geodriehoek gaan.

Waar of niet waar? Geef commentaar op de volgende beweringen.

- Er is een lijn op papier die een hoek van 77° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.
- Er is een lijn op papier die een hoek van 45° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.
- Er is een lijn op papier die een hoek van 27° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.



De lijn k snijdt het vlak V. De loodrechte projectie van k op V noemen we k'. Onder de hoek die k maakt met V zullen we verstaan de hoek tussen k en k'. Dat is de kleinste hoek die k maakt met lijnen die in V



* **21** *ABCD.EFGH* is een kubus.

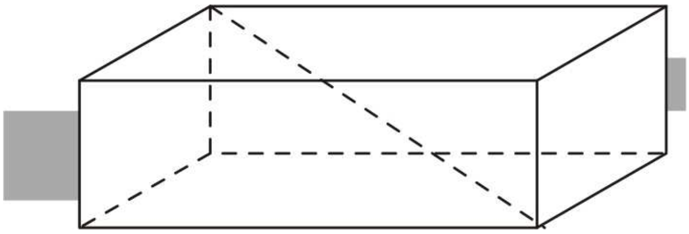
a. Teken op het werkblad de hoek die zijvlaksdiagonaal EG maakt met diagonaalvlak *ABGH*. Bereken die hoek in graden nauwkeurig. In welke richting moet je kijken om die hoek goed te zien?

b. Teken op het werkblad de hoek die lichaamsdiagonaal *EC* met *ABGH* maakt. Bereken die hoek in graden nauwkeurig. In welke richting moet je kijken om die hoek goed te zien?

3 Het inproduct nader bekeken

Een nuttig instrument om hoeken te berekenen is het inproduct. Daarover gaat deze paragraaf.

1

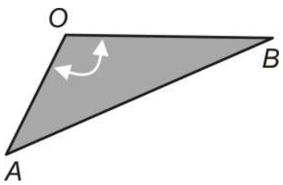


a. Hoe lang is een lichaamsdiagonaal van een recht blok van 1 bij 2 bij 3?
b. Dezelfde vraag voor een blok van *a* bij *b* bij *c*.

De lengte van vector $\vec{v} = (a,b,c)$ is $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Notatie: $|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

c. Hoe lang is vector (6,-6,7)?

In de opgave hierna laten we met de cosinusregel zien dat het volgende waar is.



Voor twee vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ die een hoek α met elkaar maken geldt:
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \alpha$

2 Neem aan: $\overrightarrow{OA} = (a,b,c)$ en $\overrightarrow{OB} = (p,q,r)$.

a. Geef de kentallen van $\overrightarrow{AB}$.

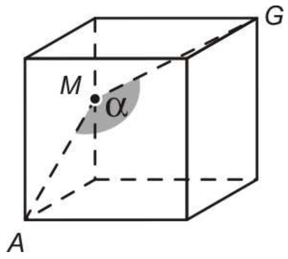
Er geldt (cosinusregel):
$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \alpha$
b. Laat zien dat dit leidt tot:
$(p-a)^2 + (q-b)^2 + (r-c)^2 =$
$a^2 + b^2 + c^2 + p^2 + q^2 + r^2 - 2|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \alpha$.

c. Als je de haakjes in $(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2$ wegwerkt en links en rechts van het $=$-teken gelijke termen weglaat krijg je:

$-2(ap+bq+cr) = -2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha$

Ga dat na.

Hiermee heb je bewezen: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha$



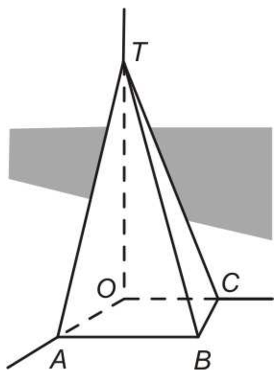
Voorbeeld

We berekenen de grootte van de knik in de trapleuning (zie opgave **14** van de vorige paragraaf) met het inproduct. We kiezen een assenstelsel zo dat $A=(2,0,0)$, $M=(0,0,1)$ en $G=(0,2,2)$. Dan $\overrightarrow{MA}=(2,0,-1)$ en $\overrightarrow{MG}=(0,2,1)$. De knik in de leuning is de hoek α tussen deze vectoren.

Dus invullen in $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MG}=\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MG}\right|\cdot\cos\alpha$ geeft:

$(2,0,-1)\cdot(0,2,1) = \sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\cos\alpha$,

dus $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$, dus $\alpha\approx 102°$.



3 *T.OABC* is een piramide met $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,4,0)$en $T(0,0,10)$.

a. Bereken de volgende hoeken met het inproduct in graden nauwkeurig: $\angle ABC$, $\angle BTC$, de hoek tussen de lijnen *BT* en *OC*.

b. Bereken hoeveel graden (in één decimaal nauwkeurig) lijn *TB* uit het lood staat ten opzichte van vlak *ABC*.

We kunnen hoeken uitrekenen zonder tekening te maken.

4 Gegeven zijn de punten $A(1,2,3)$, $B(7,-2,1)$ en $C(8,1,5)$.

a. Bereken $\angle ACB$ in graden nauwkeurig.

Tip. Dat is de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$.

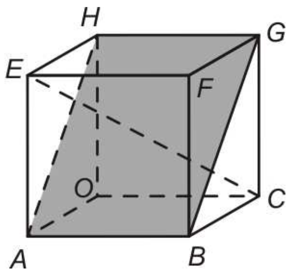
b. Bereken $\angle CAB$ in graden nauwkeurig.

Als het inproduct van twee vectoren 0 is, staan ze loodrecht op elkaar.

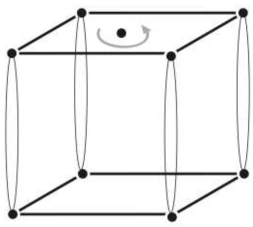
c. Wat kun je zeggen over de hoek tussen twee vectoren als het inproduct negatief is? En wat als het inproduct positief is?

Voor twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ beide niet de 0-vector geldt:
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow$ de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{w}$ is recht,
$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \Leftrightarrow$ de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{w}$ is scherp,
$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \Leftrightarrow$ de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{w}$ is stomp.

Dat is een gevolg van het volgende:
$\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi$ is recht,
$\cos\varphi > 0 \Leftrightarrow \varphi$ is scherp,
$\cos\varphi < 0 \Leftrightarrow \varphi$ is stomp.



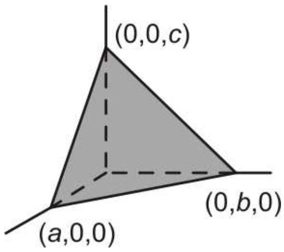
* **5** Gegeven kubus *OABC.EFGH* met *A*(4,0,0), *C*(0,4,0) en *H*(0,0,4).
a. Bepaal een vector die loodrecht op vlak *ABGH* staat.
b. Teken op het werkblad de projectie van *E* en *C* op vlak *ABGH.*
c. Bereken de hoek tussen het diagonaalvlak *ABGH* en de lichaamsdiagonaal *EC* in graden nauwkeurig. Gebruik het inproduct.



6 *ABCO* is een vierkant met *A*(4,0,0), *B*(4,4,0), *C*(0,4,0) en *O*(0,0,0). Recht boven *ABCO* ligt op hoogte 4 het vierkant *EFGH* (dus *ABCO.EFGH* is een kubus). De punten die recht boven elkaar liggen zijn verbonden door strak gespannen elastiekjes. Het vierkant *EFGH* wordt om zijn middelpunt (2,2,4) één-achtste slag gedraaid.
a. Bereken de coördinaten van de nieuwe plaatsen van *E*, *F*, *G* en *H*.

De elastiekjes die eerst in het lood stonden (ten opzichte van het *Oxy*-vlak) staan nu uit het lood.
b. Bereken met het inproduct hoeveel graden.

4 Vergelijkingen van vlakken



Het volgende is bekend.

- Een vlak dat de coördinaatassen snijdt in (a,0,0), (0,b,0) en (0,0,c), heeft als vergelijking:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. (Hierbij moet $a\neq 0$, $b\neq 0$ en $c\neq 0$.)

- Een vlak dat de x-as en y-as snijdt in (a,0,0) en (0,b,0) en evenwijdig is met de z-as, heeft als vergelijking:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Het is niet altijd eenvoudig om de snijpunten van een vlak met de coördinaatassen te bepalen. Daarom bekijken we in de volgende opgaven een andere manier om een vergelijking van een vlak te vinden.

1 Gegeven zijn de punten A(6,0,0), B(0,4,0) en C(0,0,-4)

a. Ga na dat A, B en C in het vlak met vergelijking $2x+3y-3z=12$ liggen.

Dus (2,3,-3) is een normaalvector van vlak ABC.

b. Ga na dat (2,3,-3) $\cdot$ $\overrightarrow{AB}$ = 0 en ook (2,3,-3) $\cdot$ $\overrightarrow{AC}$ = 0.

Voorbeeld

V is het vlak door A(2,3,1), B(4,3,2) en C(0,0,3). We zoeken een normaalvector $\vec{n}$ van V.

Onafhankelijke richtingen in V zijn: $\overrightarrow{AB}$ = (2,0,1) en $\overrightarrow{AC}$ = (-2,-3,2). Voor elk getal b staat de vector (1,b,-2) loodrecht op $\overrightarrow{AB}$ = (2,0,1). We zoeken een getal b zo dat (1,b,-2) ook loodrecht staat op $\overrightarrow{AC}$ =(-2,-3,2).

Dan moet (1,b,-2) $\cdot$ (-2,-3,2) = 0 zijn. Hieruit volgt: $-2-3b-4=0$, dus $b=-2$. Dus is $\vec{n}$ = (1,-2,-2) normaalvector van V.

Een vergelijking van V is dus van de vorm: $x-2y-2z=d$ voor een of ander getal d dat je kunt vinden door de coördinaten van een punt van V , bijvoorbeeld A in de vergelijking in te vullen. Dit geeft $d=-6$. Een vergelijking van V is dan $x-2y-2z=-6$.

2 Stel van de volgende vlakken een vergelijking op:

- het vlak door de punten (1,2,3), (1,4,5) en (2,6,0),
- het vlak door de punten (1,2,3), (2,4,5) en (2,4,0),
- het vlak door de punten (1,2,3), (2,4,5) en (-4,1,3),
- het vlak door de punten (1,2,3), (4,2,3) en (2,6,0).

Om een normaalvector te vinden gebruiken we een richting van het vlak die een component 0 heeft. Soms kost het moeite zo'n richting te vinden, maar dat kan altijd.

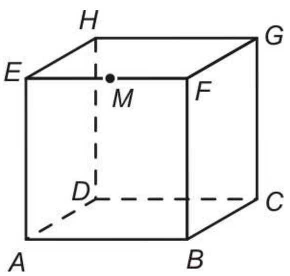
Voorbeeld
Laat *V* het vlak door *A*(1,2,3), *B*(3,1,4) en *C*(0,4,5) zijn. Richtingen in *V* zijn: $\overrightarrow{AB} = (2,-1,1)$ en $\overrightarrow{AC}$ (-1,2,2). Bij deze twee maken we een nieuwe richting van vlak *V*:
$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} =$ (0,3,5). Voor elk getal *a* staat (a,5,-3) loodrecht op (0,3,5). We zoeken een getal *a* zo dat
(*a*,5,-3) ook loodrecht staat op (2,-1,1). Dan moet het inproduct $(a,5,-3)\cdot(2,-1,1) = 0$ zijn, dus $2a - 5 - 3 = 0$, dus $a = 4$. Een vergelijking van *V* is: $4x + 5y - 3z = d$. Het punt (1,2,3) ligt in *V*, dit geeft $d = 5$. Een vergelijking van *V* is dus: $4x + 5y - 3z = 5$

3 Stel van de volgende vlakken een vergelijking op:
- het vlak door de punten (1,2,3), (2,1,-3) en (7,0,5),
- het vlak door (3,0,0), (0,-2,1) en (5,2,2).
- het vlak door (1,2,3), (1,0,0) en (4,1,1).

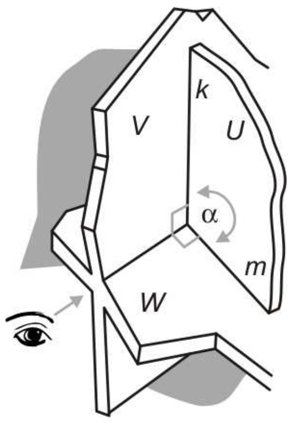
Een **normaal** van een vlak is een lijn die loodrecht op dat vlak staat.

In het niet gekozen ontwerp voor het architectuurinstituut van Rem Koolhaas is de schoorsteen een normaal van het dakvlak.

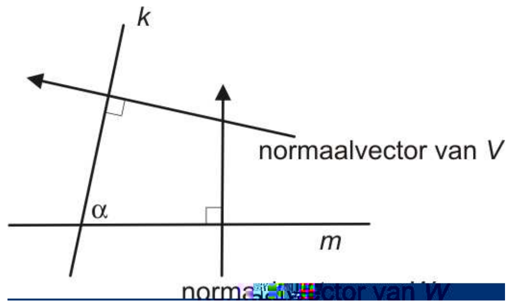
In het volgende bepalen we de hoek tussen twee vlakken met behulp van normalen van die vlakken.



* **4** *ABCD*.*EFGH* is een kubus. *M* is het midden van ribbe *EF*.
a. Teken de standhoek van de vlakken *ADM* en *ADE*.
b. Teken een normaal van vlak *ADM* en ook een normaal van vlak *ADE*. Toon aan dat de hoek van de normalen even groot is als de standhoek.

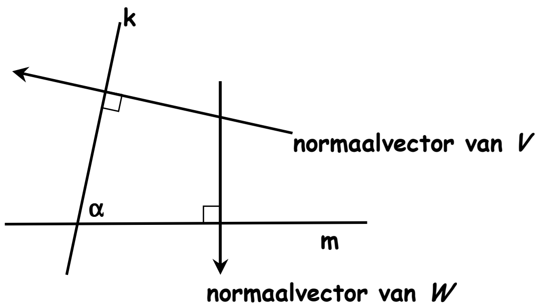


Wat je in opgave **4** gezien hebt geldt algemeen.
Zoals we al eerder gezien hebben is de hoek α tussen twee vlakken *V* en *W* de hoek die je ziet als je langs de snijlijn van de twee vlakken kijkt.
Neem nu een vlak *U* loodrecht op de snijlijn van *V* en *W*. De snijlijn van *U* en *V* noemen we *k* en de snijlijn van *U* en *W* noemen we *m*. Dan is de hoek tussen *V* en *W* dezelfde als de hoek tussen *k* en *m*. Hieronder is de situatie getekend in vlak *U*.

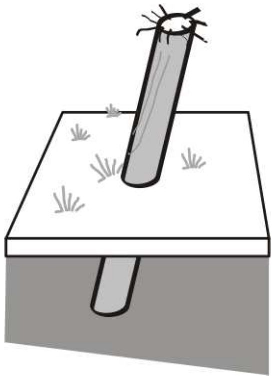


5 **a.** Toon aan dat α even groot is als de hoek tussen de normaalvectoren van *V* en *W*.

Het kan natuurlijk zijn dat de normaalvectoren van *V* en *W* die je gekozen hebt een stompe hoek met elkaar maken, zoals in de volgende tekening te zien is.



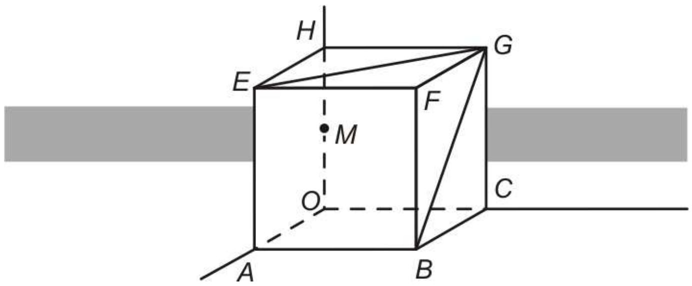
In dit geval is de hoek tussen de normaalvectoren van *V* en *W* die je gekozen hebt gelijk aan $180° - \alpha$.
b. Toon dat aan.



6 Een rechte paal is (voor een stuk) in de (horizontale) grond geslagen. Hij staat 5° uit het lood.
a. Hoe groot is de hoek die de paal met de grond maakt?
b. Een lijn is 11° uit het lood. Wat is de hellingshoek van de lijn, dat is de hoek die de lijn maakt met een horizontaal vlak?

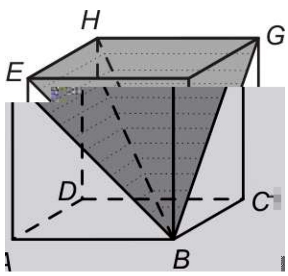
De hoek tussen twee vlakken is de hoek tussen hun normalen. De hoek tussen een lijn en een vlak is $90° - \alpha$, als α de hoek tussen die lijn en een normaal van het vlak is.

7 *ABCO.EFGH* is de kubus met $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$, $H(0,0,6)$. M is het midden van OH.
Een vergelijking van vlak *ACM* is $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1$
ofwel: $x+y+2z=6$.

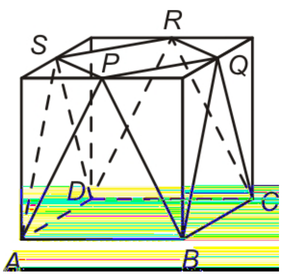


a. Geef een normaalvector van vlak *ACM*.
b. Geef een richtingsvector van de lijn *MG*.
c. Bereken met behulp van het inproduct de hoek tussen deze normaal- en richtingsvector.
d. Hoe groot is dus de hoek die de lijn *MG* maakt met vlak *ACM* ?

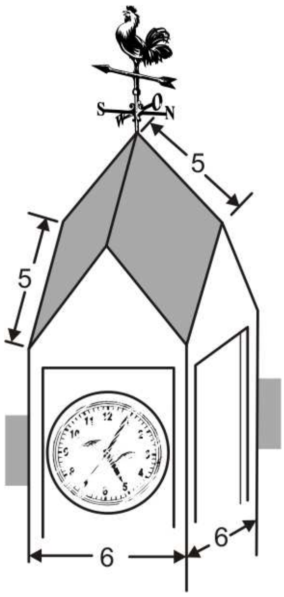
8 Dezelfde situatie als in de vorige opgave
a. Geef een normaalvector van vlak *AHF*.
b. Bereken met behulp van het inproduct de hoek tussen de normalen van de vlakken *AHF* en *ACM*.
c. Hoe groot is dus de hoek tussen de vlakken *AHF* en *ACM*?



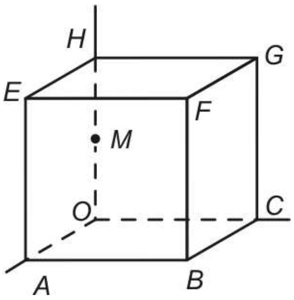
9 **Nogmaals de vouw in de kilgoot**
Van een huis staan twee gevelsloodrecht op elkaar. De dakvlakken boven deze gevels hebben beide een hellingshoek van 45°.
Bereken met behulp van normaalvectoren de hoek tussen de twee dakvlakken in graden nauwkeurig.
Let op: de dakvlakken maken een stompe hoek met elkaar.



10 Ter gelegenheid van moederdag 1992, kon je bij *Albert Heijn* een kartonnen vaasje krijgen, dat ongeveer de vorm had van het lichaam *ABCD.PQRS* hiernaast. *ABCD.EFGH* is een kubus. *P*, *Q*, *R* en *S* zijn de middens van de ribben in het bovenvlak.
a. Bereken de hoek die grensvlak *PQB* met het grondvlak maakt (in graden nauwkeurig).
b. Bereken de hoek die twee aangrenzende driehoeken met elkaar maken (in graden nauwkeurig). Gebruik normaalvectoren. Kies daartoe een assenstelsel zó, dat *D*(0,0,0), *A*(4,0,0), *C*(0,4,0) en *H*(0,0,4).
c. Hoe ziet de doorsnede van de vaas met een horizontaal vlak eruit?
d. Bereken op welke hoogte de horizontale doorsnede een regelmatige achthoek is.



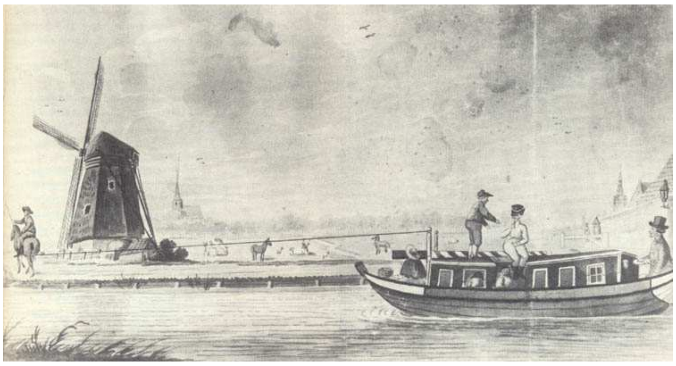
11 We bekijken een toren met als dakvlakken vier ruiten. We nemen aan dat de ruiten zijde 5 hebben en dat de toren 6 bij 6 is. We kiezen een *Oxyz*-assenstelsel zodat de onderste vier punten van het dak coördinaten (0,0,0), (6,0,0), (6,6,0) en (0,6,0) hebben en de top een positieve *z*-coördinaat heeft.
a. Bereken de coördinaten van de top en van de andere vier hoekpunten van het dak.
b. Bereken de hoek van een dakvlak en de aangrenzende gevel in graden nauwkeurig.
c. Bereken de hoek van twee aan elkaar grenzende dakvlakken in graden nauwkeurig.



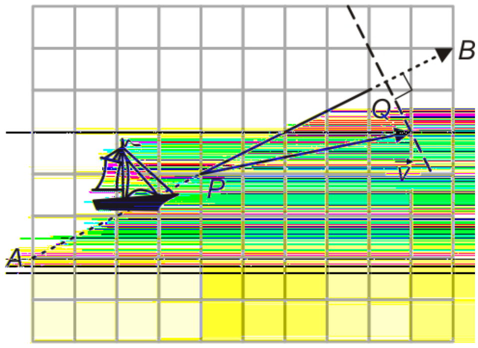
12 *ABCO.EFGH* is een kubus. *M* is het midden van ribbe *OH*.

a. Bereken de hoek tussen vlak *AMC* en vlak *OBFH*.
b. Bereken de hoek tussen lijn *OH* en vlak *AMC*.
c. Bereken de hoek tussen lijn *EC* en vlak *AMC*.
d.

5 Projecties



Trekschuit Den Haag - Delft
Aquarel zonder naam, Atlas van Stolk, 19e eeuw.



Een schuit beweegt in de richting $\vec{r} = (2,1)$ van A naar B. Het wordt voortgetrokken door een paard.
De trekkracht van het paard wordt gegeven door de vector $\vec{v} = (5,1)$, zie het plaatje hierboven. Voor de voortbeweging van de schuit is alleen de grootte van de projectie van $\vec{v}$ op de richting waarin het schip beweegt van belang. In het plaatje is dat de lengte van lijnstuk PQ.
De hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{r}$ noemen we φ.

Er geldt: $|\vec{v}| \cdot |\vec{r}| \cos\varphi = \vec{v} \cdot \vec{r}$, dus $|\vec{v}| \cos\varphi = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|}$

Maar $|\vec{v}| \cos\varphi$ is juist de grootte van de projectie van $\vec{v}$ op lijn AB. Dus met $\dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|}$ bereken je de grootte van de projectie van $\vec{v}$ op lijn AB.

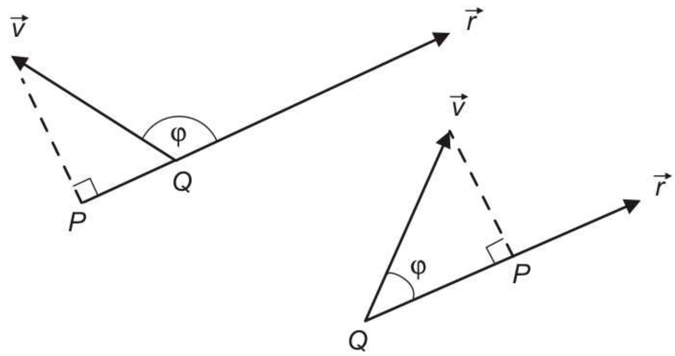
1 **a.** Reken na dat de grootte van de projectie van (5,1) in de richting (1,2) gelijk is aan $\frac{7}{\sqrt{5}}$.

b. Teken op roosterpapier de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{r}$ en bereken de groottte van de projectie van $\vec{v}$ in de richting $\vec{r}$ in de volgende gevallen.

$\vec{v} = (5,-3)$ en $\vec{r} = (1,1)$;
$\vec{v} = (5,-3)$ en $\vec{r} = (3,4)$;
$\vec{v} = (5,-3)$ en $\vec{r} = (3,5)$.

c. Teken $\vec{v} = (1,-3)$ en $\vec{r} = (3,4)$ op roosterpapier en bereken $\frac{|\vec{v} \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|}$.

Je vindt een negatief getal.



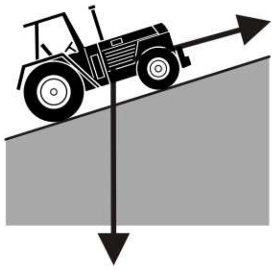
Dat komt omdat de hoek φ tussen $\vec{v}$ en $\vec{r}$ in dit geval groter dan 90° is.

d. Wat is in dit geval de grootte van de projectie van $\vec{v}$ in de richting $\vec{r}$?

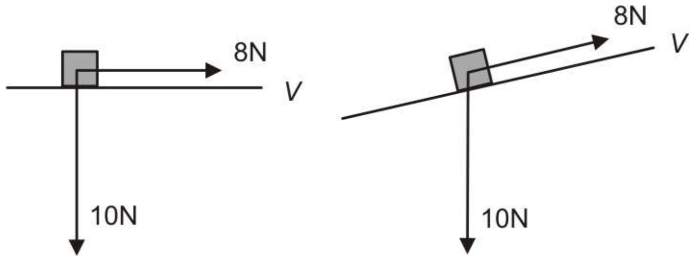
De grootte van de projectie van $\vec{v}$ in de richting $\vec{r}$ is:

$$\frac{|\vec{v} \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

In de plaatjes hierboven is de lengte van lijnstuk *PQ* de de grootte van de projectie van $\vec{v}$ in de richting $\vec{r}$.



2 Een voorwerp met een gewicht van 10N kan wrijvingsloos bewegen over een vlak *V*. Er wordt met een kracht van 8N aan getrokken. Als *V* scheef gehouden wordt, krijgt de trekkracht ‘tegenwerking’ van de zwaartekracht. Op een gegeven moment zal het voorwerp langs *V* omlaag glijden.



We brengen het gebruikelijke assenstelsel aan: de positieve *x*-as naar rechts en de positieve *y*-as naar boven.

a. Neem aan dat *V* helling 2 heeft.
Bereken de grootte van de projectie van de kracht van 10N in de richting van vlak *V*. Glijdt het voorwerp naar beneden?
Tip. De richting van *V* is: (1,2) en de kracht van 10N wordt gegeven door (0,10).

b. Neem nu aan dat *V* helling 1 heeft.
Maak een berekening zoals in **a** om te bepalen of het voorwerp naar beneden glijdt.

We gaan de *kritische waarde* van de helling bepalen, het hellingsgetal van *V* waarbij het voorwerp op het punt staat naar beneden te glijden. Noem die helling *a*.

c. Stel een vergelijking voor *a* op en bereken hieruit *a*.

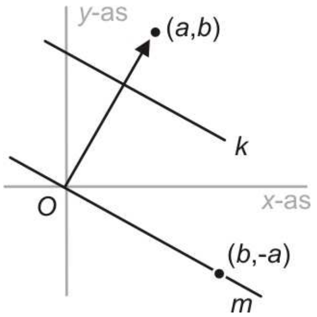
De formule om de grootte van de projectie van $\vec{v}$ in de richting $\vec{r}$ te bepalen werkt natuurlijk ook drie-dimensionaal.

3 Bereken de groottte van de projectie van $\vec{v}$ in de richting $\vec{r}$ in de volgende gevallen.
$\vec{v} = (5,-3,-3)$ en $\vec{r} = (1,2,2)$;
$\vec{v} = (5,-3,1)$ en $\vec{r} = (4,4,-7)$;
$\vec{v} = (5,-3,-1)$ en $\vec{r} = (3,1,12)$.

De afstand van een punt tot een lijn

4 Gegeven zijn de punten *A*(0,4) en *B*(8,0).
a. Geef een pv van lijn *AB*.

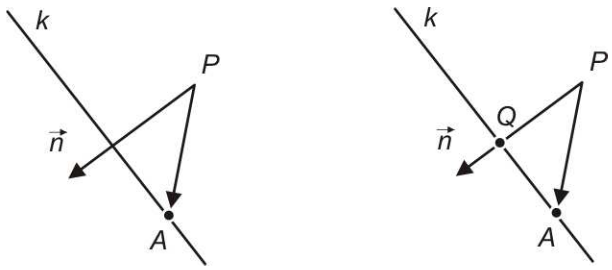
b. Geef een vergelijking van lijn *AB.*
Schrijf die vergelijking in de vorm $ax + bx = c$.
c. Ga na dat de vector (a,b) loodrecht op de richtingsvector van lijn *AB* staat, die je in **a** gebruikt hebt. Gebruik het inproduct.



Als een lijn vergelijking $ax + bx = c$ heeft, dan is (a,b) een normaalvector. De redenering hierbij gaat als volgt.
De lijn k met vergelijking $ax + bx = c$ is evenwijdig met de lijn m met vergelijking $ax + bx = 0$.
m gaat door de oorsprong O(0,0) en door (b,-a), vul maar in. Dus is de vector (b,-a) richtingsvector van lijn m. De vector (a,b) is dan een normaalvector van m en dus ook van k, want het inproduct van (a,b) en (b,-a) is 0.

Als lijn k vergelijking $ax + bx = c$ heeft, dan is (a,b) normaalvector van k.

Om de afstand van een punt P tot een lijn k te bepalen, kun je als volgt te werk gaan.



Zoek een normaalvector $\vec{n}$ van k. Zoek een willekeurig punt A van k. De afstand P tot k is de grootte van de projectie van $\overrightarrow{PA}$ in de richting van $\vec{n}$.

Voorbeeld
k is de lijn met vergelijking $3x + 4y = 12$ en P het punt (1,5).
Een normaalvector van k is (3,4).
Een punt van lijn k is bijvoorbeeld: A(0,3).
$\overrightarrow{PA} = (-1,-2)$.
De projectie van $\overrightarrow{PA}$ in de richting van (3,4) is:
$$\frac{|(-1,-2)\cdot(3,4)|}{|(3,4)|} = \frac{11}{5} = 2\tfrac{1}{5}.$$
De afstand is van P tot lijn k is dus: $2\frac{1}{5}$.

5 Gegeven zijn het punt $P(1,2)$ en de lijn k: $3x+6y=10$.
a. Geef een punt en een normaalvector van k.
b. Bepaal op de manier van het voorbeeld de afstand van k tot P.
c. Bepaal ook de afstand van P tot k in de volgende gevallen.
- P is het punt (-1,-4) en k de lijn $x+y=10$.
- P is het punt (-1,4) en k de lijn $x-y=10$.
- P is het punt (-1,4) en k de lijn door $A(1,0)$ en $B(4,4)$.

6 Een formule voor de afstand van een punt tot een lijn
Veronderstel k heeft vergelijking: $ax+by=c$ en P is het punt (p,q) en $A(s,t)$ is een punt op k.
a. Geef $\overrightarrow{PA}$, uitgedrukt in de coördinaten van P en A.

De afstand van P tot k is: $\dfrac{|a\cdot(p-s)+b\cdot(q-t)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
b. Ga dat na.

$a\cdot(p-s)+b\cdot(q-t)=ap+bq-(as+bt)$
c. Waarom geldt: $as+bt=c$?

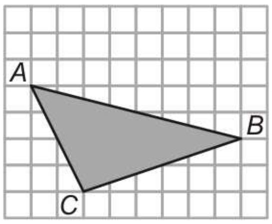
Dus de afstand van P tot k is: $\dfrac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

k heeft vergelijking: $ax+by=c$ en P is het punt (p,q),
dan is de afstand van P tot k: $\dfrac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

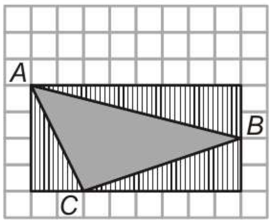
In woorden: herleid de vergelijking van k op 0 en vul de coördinaten van P in de vergelijking in.
Neem de absulte waarde van dat getal en deel door de lengte van de normaalvector die je voor de vergelijking van k gerbuikt hebt. Het resultaat is de de afstand van P tot k.

Voorbeeld
P is het punt (-1,4) en k de lijn met vergelijking $x-y=10$.
De vergelijking op 0 herleid is: $x-y-10=0$.
P invullen geeft: $-1-4-10=-15$. De lengte van de gebruikte normaalvector is: $\sqrt{2}$.
De afstand van P tot k is dus: $\dfrac{15}{\sqrt{2}}$.

7 Bepaal de afstand van P tot k als:
- P is (1,2) en k heeft vergelijking $3x + 4y = 16$
- P is (0,1) en k is de lijn door (1,2) en (4,-3)
- P is (0,1) en k is de lijn door (1,2) en (4,2)
- P is (-3,1) en k is de lijn met pv $(x,y) = (2,2) + t(5,3)$



8 In het rooster hiernaast zijn getekend de punten $A(1,5)$, $B(9,3)$ en $C(3,1)$.
We gaan de oppervlakte van driehoek ABC uitrekenen.
a. Geef een vergelijking van lijn AB.
b. Bereken de afstand van C tot lijn AB.
c. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC met behulp van **a** en **b**.



Je kunt de oppervlakte van de driehoek natuurlijk ook uitrekenen door hokjes te tellen. Bekijk het plaatje hiernaast. De oppervlakte van de gestreepte driehoeken kun je gemakkelijk uitrekenen. Samen met driehoek ABC vormen ze een rechthoek waarvan je de oppervlakte ook gemakkelijk kunt berekenen. Dan heb je de oppervlakte van driehoek ABC ook.
d. Voer deze berekening uit.

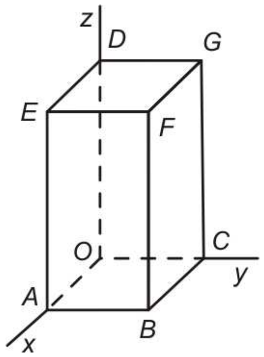
In de ruimte leidt de berekening van de grootte van de projectie van '$\vec{v}$ in de richting $\vec{r}$' tot een soortgelijke formule.

Vlak V heeft vergelijking: $ax + by + cz = d$ en P is het punt (p,q,r),
dan is de afstand van P tot V: $\dfrac{|ap + bq + cr - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Voorbeeld
V is het vlak door de punten $A(7,0,0)$, $B(0,7,0)$ en $C(0,0,4)$ en P is het punt (8,9,10).
We berekenen de afstand van P tot V.
Een vergelijking van V is: $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{z}{4} = 1$. Die kun je ook schrijven als: $4x + 4y + 7z - 28 = 0$.
De afstand van P tot V is dus:

$$\frac{|4 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 7 \cdot 10 - 28|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{110}{9} = 12\tfrac{2}{9}.$$

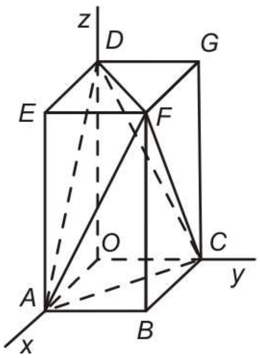
9 Bereken de afstand van:
a. $O(0,0,0)$ tot het vlak met vergelijking $x+2y+3z=10$,
b. $A(1,2,3)$ tot het vlak met vergelijking $x+2y-2z=12$,
c. $A(1,2,3)$ tot het vlak door de punten (2,2,-3), (0,6,0) en (6,3,0).



10 Het blok hiernaast is 4 hoog, 2 breed en 3 diep. Er is een *x*-, *y*- en *z*-as gekozen, zie plaatje.
a. Geef een vergelijking van vlak *ACD*.
b. Bereken de afstand van *O* tot vlak *ACD*.

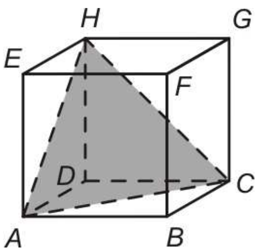
De inhoud van piramide *OACD* is: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 2=4$.
c. Leg dat uit.

De oppervlakte van driehoek *ACD* kun je berekenen met behulp van het antwoord op **b** en de inhoud van de piramide.
d. Hoe? Wat vind je voor de oppervlakte van driehoek *ACD*?



11 We werken met hetzelfde blok als in de vorige opgave.
We berekenen de inhoud van piramide *ACDF*. Dat kan bijvoorbeeld door de *ACD* als grondvlak te nemen. De hoogte van de piramide is dan de afstand van *F* tot vlak *ACD*. De oppervlakte van driehoek *ACD* heb je al berekend.
a. Bereken de afstand van *F* tot vlak *ACD*.
b. Bereken de inhoud van de piramide *ACDF*.

Je kunt de de inhoud van piramide *ACDF* ook berekenen door van de inhoud van het blok de inhoud van vier piramides af te trekken. De vier piramides hebben alle dezelfde inhoud.
c. Voer die berekening uit.



* **12** Hiernaast staat kubus $ABCD\cdot EFGH$. *V* is vlak *ACH* en *W* is het vlak door het midden van de kubus.
a. Teken op het werkblad de snijpunten van *W* met de ribben van de kubus.

De kubus wordt doorgesneden volgens de vlakken *V* en *W*.
Neem aan dat de ribben van de kubus 12 zijn. We willen weten hoe ‘dik’ het stuk van de kubus tussen de vlakken *V* en *W* is. We brengen een assenstelsel aan zó, dat *V* vergelijking $x+y+z=12$ heeft.
b. Geef een vergelijking van *W*.

c. Bereken de dikte van het stuk van de kubus tussen de vlakken V en W .

d. Bereken inhoud van het stuk van de kubus tussen de vlakken V en W .

13 k is de lijn door de punten (1,-1,2) en (3,3,3). V is het vlak met vergelijking $x+2y-2z=12$.

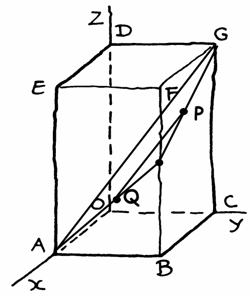
a. Geef een pv van k.

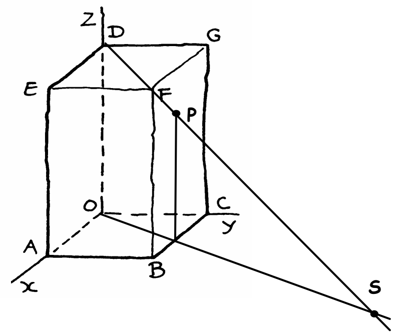
b. Bereken de punten van k die afstand 3 tot V hebben.

Antwoorden

Paragraaf 1 De stand van zaken

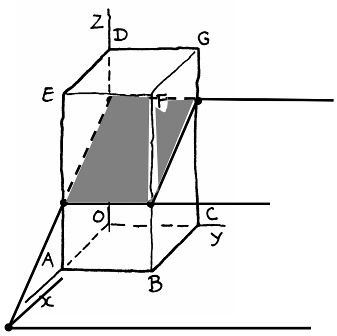
1 **a.** (-3,2,4)
b. $\sqrt{29}$
c. hulpvlak: het vlak door *P*, *A* en *G*
f. hulpvlak: het vlak door *P*, *O* en *D*



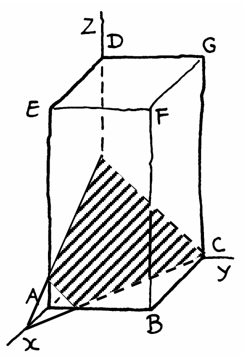


d. $(x,y,z) = (2,2,3) + t\,(-3,2,4) = (2-3t, 2+2t, 3+4t)$.
e. De *x*-coördinaat van $Q = 3$, dus $t = -\frac{1}{3}$, dus $Q(3,1\frac{1}{3},1\frac{2}{3})$.
g. lijn *DP*: $(x,y,z) = (0,0,4) + t\,(2,2,-1) = (2t,2t,4-t)$. De z-coördinaat van *S* is 0, dus $t = 4$: geeft $S = (8,8,0)$.

2 **a.** $(0,0,3)$, $(3,0,1\frac{1}{2})$, $(0,2,1\frac{1}{2})$
b. Snijdt de *x*-as in (6,0,0) en de *z*-as in (0,0,3)



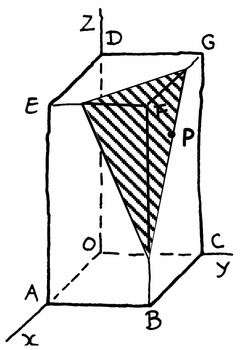
c. De variabele *y* komt niet in de vergelijking voor.
d. $2x + 3y = 6$
e. (4,0,0), (0,2,0) en (0,0,2)
f.



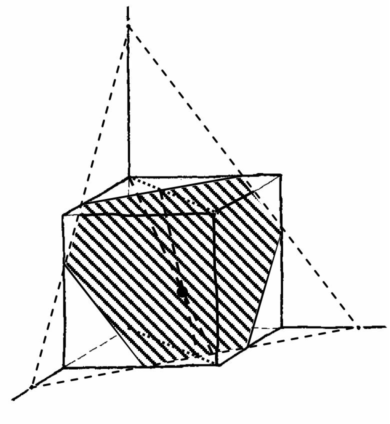
g. $(x,y,z) = t\,(1,2,2) = (t,2t,2t)$
$(t,2t,2t)$ in $W \Leftrightarrow t + 2\cdot 2t + 2\cdot 2t = 4$
$\Leftrightarrow t = \frac{4}{9}$, dus $S = (\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9})$.
h. $1\frac{1}{3}$

$\overrightarrow{AC} = (\text{-}3,2,0)$ en $(\text{-}3,2,0) \cdot (4,6,3) = 0$
$\overrightarrow{CD} = (0,\text{-}2,4)$ en $(0,\text{-}2,4) \cdot (4,6,3) = 0$

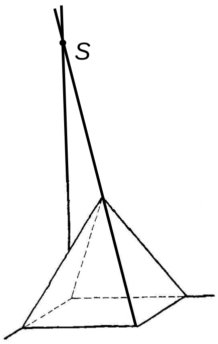
b. *U* snijdt het blok volgens een driehoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met *AC*, *CD* en *AD*.
c. 29 (vul de coördinaten van *P* in)



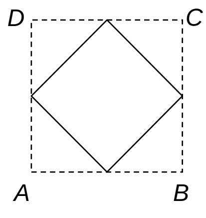
4 **a.** $4x + 4y + 3z = 36$
b, d.
c. (6,3,0), (3,6,0), (0,6,4), (6,0,4), $(0,4\frac{1}{2},6)$, $(4\frac{1}{2},0,6)$
d. $(3\frac{3}{5}, 3\frac{3}{5}, 2\frac{2}{5})$

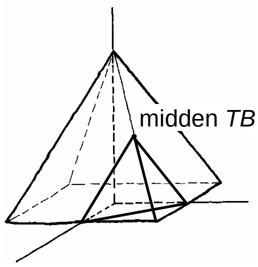


5 **a.**
b. $2y + z = 12$
c. (0,0,12)



6 **a.** Bij *A*: $x - y = 3$, bij *C*: $x - y = \text{-}3$, bij *D*: $x + y = \text{-}3$
b.





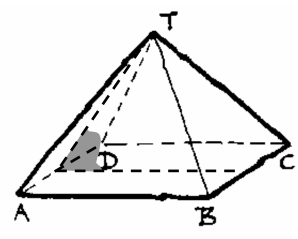
Paragraaf 2 Hoeken

1 **a.** kleiner
b. groter
c. 35°

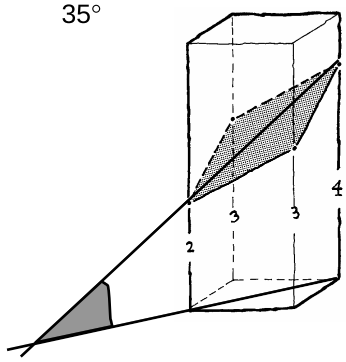
2 **a.** in de richting van de snijlijn
b. in de richting van de vouwlijn

3 **b.** ja

4 90°
5 in de richting van *AD*

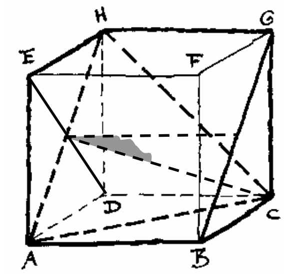


55°
6 35°

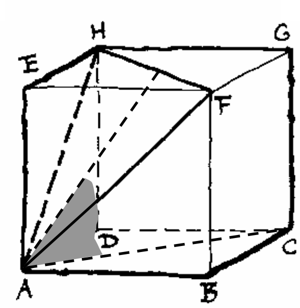


7 **a.** waar ; waar ; waar
b. tussen 0° en 90°

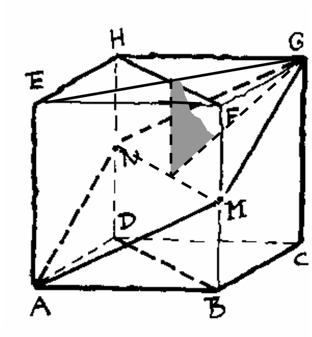
8 **a.**
b. 35°



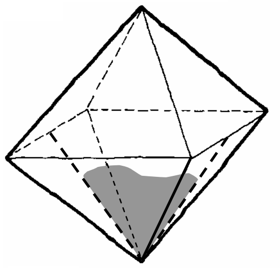
9 **a.** 55°



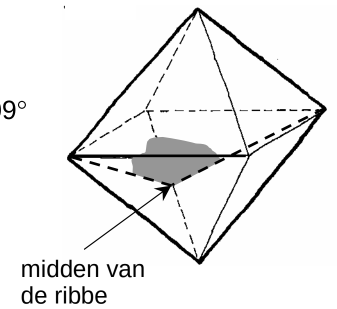
b. 55°



10 a. 71°



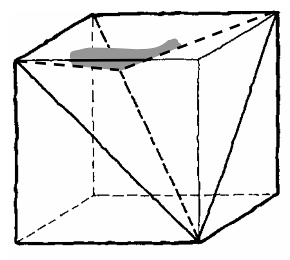
b. 109°



11 a. 71°

b. De hoek uit **11a** + de hoek uit **10b** = 180°.

12 a. $BP = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, $BP : HP = 2 : 1$



b. 120°

13 a. $170\frac{2}{3}\sqrt{2}$

b. $2\frac{2}{3}\sqrt{6}$

c. 55°

d. 35°

14 102°

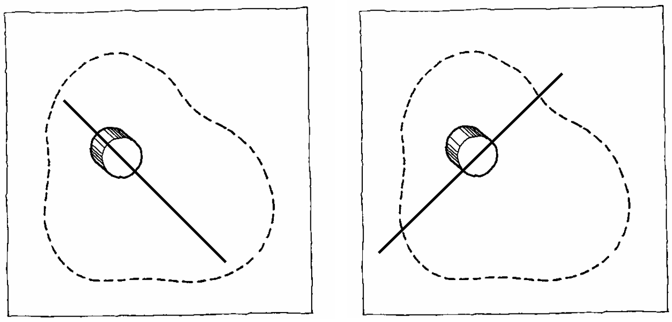
15 45° ; 60° ; 35° ; 71°

16 53°

17 a. cirkel in vlak *ABFE* met middelpunt *F* die gaat door *E*.
b. lijnen in vlak *DGCH* door *G*

18 a. Neem aan dat de kubus ribben van lengte 1 heeft. Dan is $\overrightarrow{HB} = (1,1,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$ en $\overrightarrow{AF} = (0,1,1)$.
Er geldt: $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ en $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$, dus $\overrightarrow{HB}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{HB}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{AF}$.
b. $\overrightarrow{HB}$ staat loodrecht op twee onafhankelijke richtingen van vlak *ACF*.

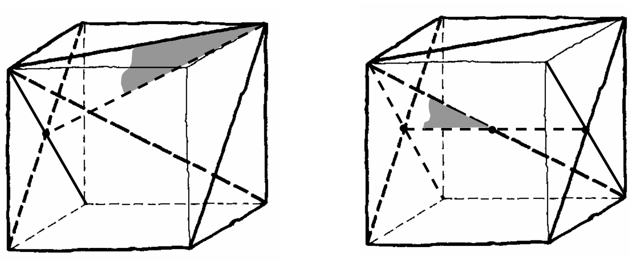
19 a,b



c. 4° ; 86°

20 waar ; waar ; niet waar

21 a. 30°, in de richting *HB*
b. 55°, in de richting *HA*



Paragraaf 3 Het inproduct nader bekeken

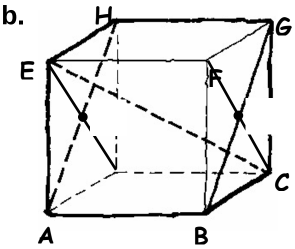
1 **a.** $\sqrt{14}$
b. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
c. 11

2 **a.** $(p-a, q-b, r-c)$

3 **a.** 72°, 29°, 63°
b. 40,3°

4 **a.** 71°
b. 40°
c. die is stomp; die is scherp

5 **a.** bijvoorbeeld $\overrightarrow{OE}$
b.



c. $\overrightarrow{CE} = (4,-4,4) \sim (1,-1,1)$ en $\overrightarrow{C'E'} = (0,-4,0) \sim (0,-1,0)$

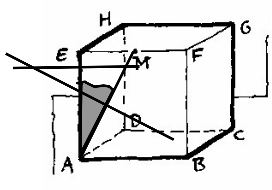
$\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, dus $\varphi \approx 55°$

6 **a.** $(2+2\sqrt{2}, 2, 4)$, $(2-\sqrt{2}, 2, 4)$, $(2, +2\sqrt{2}, 4)$,
$(2, 2-\sqrt{2}, 4)$
b. 28°

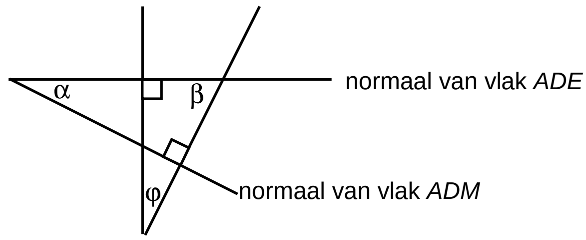
Paragraaf 4 Vergelijkingen van vlakken

2 $7x-y+z=8$; $2x-y=0$; $2x-10y+9z=9$; $3y+4z=18$
3 $7x+19y-2z=39$; $3x-4y+z=9$; $x-9y+6z=1$

4 **a.**



b.



$\alpha + \varphi = 90°$ en $\alpha + \beta = 90°$, zie plaatje, dus $\alpha = \varphi$.

6 **a.** 85°
b. 79°

7 **a.** $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow x + y + 2z = 6$, dus (1,1,2) is normaalvector.
b. (0,2,1)
c. 43° (als je andere vectoren hebt genomen, kun je ook 137° krijgen)
d. 43°

8 **a.** (1, -1, 1)
b. 62°
c. 62°

9 Een normaalvector linker dakvlak is (0,1,1) en een normaalvector rechter dakvlak is (1,0,1). De hoek tussen deze twee vectoren is 60°. De hoek tussen de dakvlakken is stomp, dus die hoek is 120°.

10 **a.** 71°
b. 132°
c. achthoek; $\frac{8}{2 + 2\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}$

11 **a.** (3,3,8), (3,0,4), (6,3,4), (3,6,4), (0,3,4)
b. 129°
c. 103°

12 **a.** 90°
b. 55°
c. 28°
d. 39°

Paragraaf 5 Projecties

1 **a.** $\dfrac{|(5,1)\cdot(1,2)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{2}{\sqrt{2}}$, $\frac{3}{5}$, 0

c. -1,8

d. 1,8

2 **a.** $\dfrac{|(0,10)\cdot(1,2)|}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}\ >8$, dus glijdt naar beneden

b. $5\sqrt{2}\ <8$, dus glijdt niet naar beneden

c. $\dfrac{|(0,10)\cdot(1,a)|}{\sqrt{1+a^2}}=8 \Leftrightarrow\ 10a=8\sqrt{a^2+1}$

Kwadrateren geeft: , dus $a=1\frac{1}{3}$

3 $2\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, 0

4 **a.** $(x,y)=(0,4)+(2,-1)$

b. $x+2y=8$

c. Inproduct is 0.

5 **a.** Punt van k: $A(3\frac{1}{3},0)$, normaalvector: (1,2).

$\overrightarrow{AP}=(-2\frac{1}{3},2)$, afstand is de lengte van de projectie van $\overrightarrow{AP}$ op (1,2), dus: $\dfrac{1\frac{2}{3}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{3}\sqrt{5}$

b. $\frac{15}{\sqrt{17}}$, $\frac{15}{\sqrt{17}}$, 4

6 **a.** $(s-p,t-q)$

c. Omdat A op k ligt.

7 • $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2-16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

• Een vergelijking van k is $y=-1\frac{2}{3}x+3\frac{2}{3}$ oftewel: $5x+3y=11$, de afstand is dus: $\dfrac{|5\cdot 0+3\cdot 1-11|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{4}{17}\sqrt{34}$

• k is de (horizontale) lijn $y=2$, de afstand is dus: 1

• k heeft vergelijking $3x-5y+4=0$ de afstand is dus:

$$\frac{|3\cdot -3-5\cdot 1+4|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{5}{17}\sqrt{34}$$

8 **a.** $x+4y-21=0$

b. $\frac{14}{\sqrt{17}}$

c. De lengte van lijnstuk $AB = 2\sqrt{17}$,
oppervlakte $= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \frac{14}{\sqrt{17}} = 14$

d. $4 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 14$

9 **a.** $\frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5}{7}\sqrt{14}$

b. $4\frac{1}{3}$

c. Vlak *ABC* heeft vergelijking $x+2y-2z=12$, dus zie **b**.

10 a. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x+6y+3z-12=0$

b. $\frac{12}{\sqrt{61}} = \frac{12}{61}\sqrt{61}$

c. Neem *OAC* als grondvlak, dan is de oppervlakte van het grondvlak $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$ en de hoogte 4.

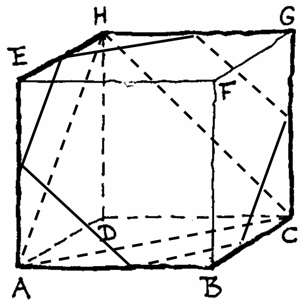
d. $\frac{1}{3} \cdot$ oppervlakte $ACD \cdot$ afstand van O tot vlak $ACD =$
inhoud piramide, dus oppervlakte $ACD = \dfrac{12}{\frac{12}{\sqrt{61}}} = \sqrt{61}$

11 a. $\frac{24}{\sqrt{61}} = \frac{24}{61}\sqrt{61}$

b. 8

c. 8

12 a. De snijpunten zijn middens van ribben.



b. $x+y+z=18$

c. Dat is hetzelfde als de afstand van het midden (6,6,6) van de kubus tot V, dus $\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

d. Dat is de helft van de inhoud van de kubus – de inhoud van piramide *ACDH*, dus $864-288=576$

13 a. $(x,y,z)=(1,-1,2)+t\cdot(2,4,1)=(1+2t,-1+4t,2+t)$

b. $\dfrac{|1+2t+2\cdot(-1+4t)-2\cdot(2+t)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{3}|-5+8t| = 3 \Leftrightarrow$

$-5+8t=9$ of $-5+8t=-9$, dit geeft de punten: $(4\frac{1}{2}, 6, 3\frac{3}{4})$ en $(0,-3,1\frac{1}{2})$.