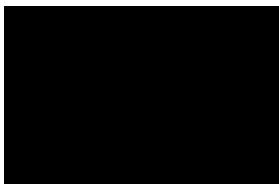
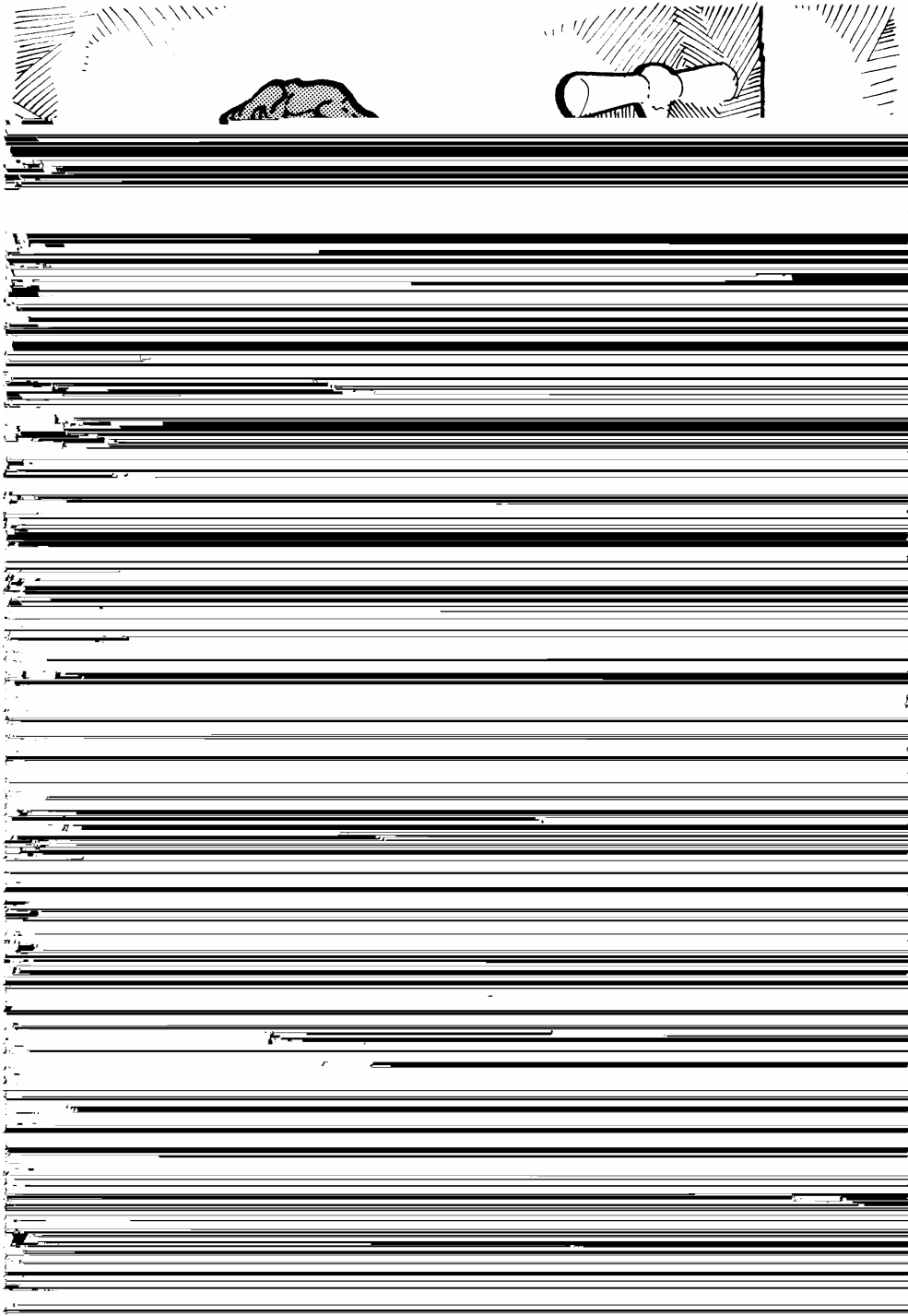
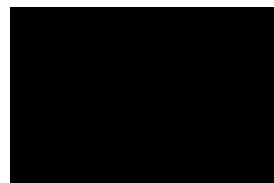

Rekenen 2



*Dit hoofdstuk is bedoeld als aanvulling op het reguliere
lesmateriaal voor 4VWO wiskunde B*



Inhoudsopgave

Rekenen 2

1	Breuken	1
2	Wortels	8
3	Rekenen in de meetkunde	14

Colofon

© 2008 Stichting De Wageningse Methode

Homepage www.wageningse-methode.nl

Niets uit deze uitgave mag verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt worden door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook, zonder voorafgaande toestemming van de houder van het copyright.

Het is aan te bevelen in geen enkele opgave het rekenmachientje te gebruiken.

1 Breuken

Je herinnert je de volgende sommetjes van de basisschool nog wel:

$$3 \cdot \underline{\quad} = 12; \quad 7 \cdot \underline{\quad} = 140 \quad \text{enzovoort.}$$

De getallen die ingevuld moeten worden, kun je ook schrijven als:

$$12:3; \quad 140:7 \quad \text{enzovoort}$$

of als

$$12/3, \quad 140/3 \quad \text{enzovoort}$$

of als

$$\frac{12}{3}, \quad \frac{140}{7} \quad \text{enzovoort.}$$

De getallen die je in moet vullen, hoeven niet geheel te zijn, bijvoorbeeld $13/3$.

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{komt op hetzelfde neer als } a = b \cdot c.$$

$$\text{Dus: } b \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Dit geldt voor alle getallen a , b en c met $b \neq 0$.

Waarom heeft de uitdrukking $\frac{a}{b}$ geen zin als $b=0$?

1 Bereken (schrijf zo eenvoudig mogelijk):

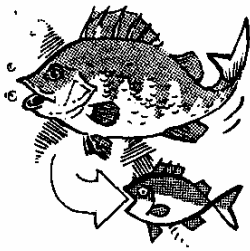
$$111 \cdot \frac{87}{111} \qquad 222 \cdot \frac{87}{111} \qquad 111 \cdot \frac{87}{222}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \qquad \frac{22}{303} \cdot \frac{505}{9} \cdot \frac{9}{55} \qquad \frac{a}{5} \cdot \frac{5}{2a}$$

$$a \cdot \frac{b}{a} \qquad ap \cdot \frac{b}{a} \qquad a^2 \cdot \frac{b}{a}$$

$$a \cdot \frac{b}{a^2} \qquad a \cdot \frac{b}{ap} \qquad a \cdot \frac{bp}{a}$$

Hierbij zijn a , b en p getallen met $a \neq 0$ en $p \neq 0$.



2 Vereenvoudig

$$\frac{3}{x+1} \cdot \frac{x+1}{7}$$

$$\frac{3}{x+1} \cdot \frac{2x+2}{7}$$

$$\frac{3}{5x+5} \cdot \frac{2x+2}{7}$$

$$\frac{3x-3}{5x+5} \cdot \frac{2x+2}{7x-7}$$

$$\frac{x^2}{33} \cdot \frac{22}{5x}$$

$$\frac{(x+1)^2}{33} \cdot \frac{22}{(x+1)^2}$$

3 Welke van de volgende formules zijn goed?

(Dat wil zeggen, zijn ze waar voor alle a en b waarvoor ze zin hebben?)

$$\frac{a-2}{a} = a$$

$$\frac{2-a}{2+a} = -1$$

$$\frac{2a}{2+a} = \frac{a}{1+a}$$

$$\frac{a}{2+a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2+a}{2+b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{2a+b}{a+\frac{1}{2}b} = 2$$

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}b} = \frac{3a}{2b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$$

$$\frac{a-3b}{b-2a} = \frac{3b-a}{2a-b}$$

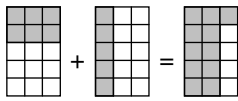
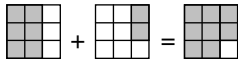
4 Verandert in het algemeen een breuk als

- je bij teller en noemer hetzelfde getal optelt?
- als je teller en noemer kwadrateert?
- als je van teller en noemer het tegengestelde neemt?
- als je van teller en noemer het omgekeerde neemt?
- als je teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt?



Voor alle getallen t , n en p met $n \neq 0$ en $t \neq 0$ geldt:

$$\frac{t}{n} = \frac{t \cdot p}{n \cdot p}$$



De som van twee breuken

De som van twee breuken kun je als één breuk schrijven door de noemers gelijknamig te maken.

Voorbeelden:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} = \frac{ab}{a^2} + \frac{b}{a^2} = \frac{ab+b}{a^2}$$

$$\frac{2}{a} + \frac{b}{3} = \frac{6}{3a} + \frac{ab}{3a} = \frac{6+ab}{3a}$$

- 5 Schrijf als één breuk met zo eenvoudig mogelijke noemer.

$$\frac{7}{9} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{11} - \frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{5}{12} + \frac{2}{15}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{t}$$

$$\frac{3}{t} + \frac{t}{3}$$

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3}$$

$$\frac{3}{t} + 2$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x}{x+1} - 1$$

$$x + \frac{3x}{x-3}$$

$$x - \frac{3x}{x-3}$$

$$\frac{5}{x+5} - \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{x}{(x+5)^2} - \frac{1}{x+5}$$

- 6 Los op:

$$\frac{4}{x+1} + \frac{4}{x-1} = 3$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = 2$$

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+3} = 1$$

$$x - \frac{x^2+1}{x} = 1$$



Vereenvoudigen

Nog twee voorbeelden

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 12}{\frac{3}{4} \cdot 12} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{2}{\frac{3}{x}} = \frac{2 \cdot x}{\frac{3}{x} \cdot x} = \frac{2x}{3}$$

7 Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{9}}$$

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{9}{16}}$$

$$\frac{\frac{6}{t}}{\frac{3}{t}}$$

$$\frac{\frac{6}{t}}{\frac{6}{n}}$$

$$\frac{\frac{t}{3}}{\frac{t}{t}}$$

$$\frac{\frac{t}{t}}{\frac{t}{3}}$$

$$\frac{\frac{6}{t}}{t}$$

$$\frac{1}{\frac{t}{n}}$$

8 Maak de breuk rechts van het =-teken af.

$$\frac{\frac{1}{2} + a}{3 + b} = \frac{3 + \quad}{\quad}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + a}{\frac{1}{2} - a} = \frac{1 + \quad}{\quad}$$

9 Schrijf als **enkelvoudige breuk**, dat wil zeggen zonder breuk in teller en noemer.

$$\frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}}{1 - \frac{1}{200}}$$

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{ab}}$$

$$\frac{11}{11 + \frac{11}{12}}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{a+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{a}}{a+1}$$

$$\frac{a+1}{\frac{1}{a}}$$

10 Welke van de volgende formules zijn goed?

$$\frac{a}{a+b} = 1 + \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$$

$$\frac{a+b}{a+d} = \frac{b}{d}$$



Vereenvoudigen

Voorbeeld

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2}$$

11 Vereenvoudig door teller en noemer eerst te ontbinden.

$$\frac{9 - x^2}{x^2 - x - 6}$$

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 8x^2}{x^3 + x^2 - 12x}$$

$$\frac{2x + 6}{\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}}$$

$$\frac{4x + 8}{x^2 - 4}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\frac{-2x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\frac{x^{10} - 1}{x^5 - 1}$$

Op de GR zit de toets x^{-1} . Een andere schrijfwijze van x^{-1} is $\frac{1}{x}$. We noemen x^{-1} het **omgekeerde** van x . Er

geldt: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Als $x = \frac{t}{n}$ dan is $x^{-1} = \frac{n}{t}$.

In het volgende is $x = \frac{t}{n}$.

Er geldt:

$$a : x = \frac{a}{\frac{t}{n}} = \frac{a \cdot n}{\frac{t}{n} \cdot n} = \frac{a \cdot n}{t} = a \cdot \frac{n}{t} = a \cdot x^{-1}.$$

Conclusie (dit heb je misschien op de basisschool al gehad)

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

12 Bereken en schrijf zo eenvoudig mogelijk.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$$

$$0,27 : 0,03$$

$$\frac{a}{x} : \frac{1}{x}$$

$$\frac{a}{x} : a$$

$$\frac{a}{x} : \frac{x}{a}$$

$$\frac{a}{x} : \left(\frac{b}{x} : \frac{a}{x} \right)$$

$$\left(\frac{a}{x} : \frac{b}{x} \right) : \frac{a}{x}$$

$$\frac{x^2 : a^2}{x : a}$$

$$(x-1) : \frac{1}{x}$$

$$x-1 : \frac{1}{x}$$

$$x : \frac{1}{x-1}$$

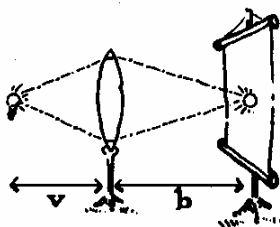
13 Los de volgende vergelijkingen in x op.

$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{10}x = -1$$

$$0,11x = 1,21$$

$$1\frac{1}{4}x = \frac{3}{8}$$



14 Vowerp en beeld

Een lampje is opgesteld voor een lens. Achter de lens bevindt zich een scherm waarop het beeld van het lampje wordt opgevangen. Als het lampje verplaatst wordt, moet je het scherm meebewegen om een scherp beeld te houden. De afstand lampje-lens noemen we v . (de voorwerpsafstand), de afstand scherm-lens noemen we b , (de beeldsafstand), beide in dm.

Voor onze lens geldt: $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = 1$.

a. Geef een formule voor b uitgedrukt in v . Schrijf het antwoord als één zo eenvoudig mogelijke breuk.

De vergroting V van de lens is $\frac{b}{v}$.

b. Geef een formule voor V uitgedrukt in v . Schrijf het antwoord als één zo eenvoudig mogelijke breuk.

c. Voor welke v is $V=2$?

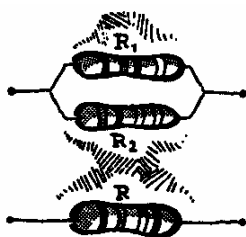
We bewegen het lampje 1 dm verder van de lens af.

d. Beweegt het beeld dan naar de lens toe of er van af?

Hoe kun je dat aan de formule $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = 1$ zien?

Het aantal dm dat het beeld zich verplaatst naar de lens, noemen we A .

e. Geef een formule voor A uitgedrukt in v . Schrijf het antwoord als één zo eenvoudig mogelijke breuk.



15 Een schakeling

Uit de wet van Ohm volgt dat een parallelschakeling met twee weerstanden R_1 en R_2 kan worden vervangen door

één weerstand R , waarbij: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

(Dat wil zeggen dat als je over de schakeling en over de weerstand R hetzelfde spanningsverschil zet, er bij beide schakelingen dezelfde stroom zal lopen.)

In de parallelschakeling hiernaast is R_1 een weerstand van 10 Ω en R_2 een schuifweerstand die kan variëren van 0 tot 10 Ω .

a. Wat gebeurt er met R als R_2 groter wordt?

b. Welke waarden kan R aannemen?

De schuifweerstand is gezet op x .

c. Druk R uit in x .

De schuifweerstand wordt 1 groter, dus R_2 wordt $x + 1$.

d. Druk het aantal dat R groter wordt uit in x .

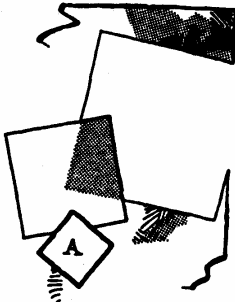
16 a. Ga na dat $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ enzovoort.

Bekijk de formule $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}$.

b. Voor welke x heeft de formule geen betekenis?

c. Bewijs dat formule juist is voor alle getallen x waarvoor hij betekenis heeft.

2 Wortels



- 1 De oppervlakte van een vierkant hangt af van de grootte van zijn zijde. De zijde van een vierkant met oppervlakte

A is \sqrt{A} .

a. Vul in:

als de oppervlakte 9 keer zo groot wordt, wordt de zijde zo groot. In formule: $\sqrt{9A} = _ \cdot A$.

b. Vul in:

als de oppervlakte $\frac{1}{4}$ keer zo groot wordt, wordt de zijde zo groot.

In formule: $\sqrt{\frac{1}{4}A} = _ \cdot A$.

c. Vul in:

als de oppervlakte 2 keer zo groot wordt, wordt de zijde zo groot.

Geef deze bewering ook in formulevorm.



Factoren voor het wortelteken brengen

Voorbeelden

$$\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{700} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{7} = 10\sqrt{7}$$

- 2 Schrijf zo ook met een zo klein mogelijk geheel getal onder het $\sqrt{\quad}$ -teken.

$$\sqrt{75}$$

$$\sqrt{80}$$

$$\sqrt{90}$$

$$\sqrt{0,05}$$

$$\sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}}$$

- 3 a. Leg uit dat $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. Behandel zo ook: $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{5}}$ en $\sqrt{\frac{1}{n}}$.

c. Leg uit dat geldt: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

d. Behandel zo ook: $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt{\frac{5}{7}}$ en $\sqrt{\frac{p}{q}}$.

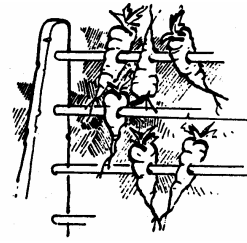
De variabelen n , p en q zijn positief geheel.



Een wortel in de noemer

Voorbeeld

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$



Het kan ook zo:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

van de noemer een kwadraat maken

- 4 Schrijf zonder wortel in de noemer, met een zo klein mogelijk getal onder het $\sqrt{\quad}$ -teken.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

a en b zijn positieve gehele getallen.



Als wortel van één getal schrijven

Voorbeeld

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$$

- 5 Schrijf als wortel van één getal.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2}\sqrt{8} & \frac{1}{2}\sqrt{10} & 0,1\sqrt{8} & 0,1\sqrt{10} \\ 3\sqrt{8} & 3\sqrt{10} & \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} & \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \end{array}$$

- 6 Toon aan

a. $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{7}} = 3$

b. $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{2}$ Tip. Kwadrateer!

Peter kwadrateert $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$ en vindt 2.

c. Ga na dat Peter dat goed gedaan heeft.

Peter concludeert nu dat $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{2}$.

d. Wat is hierop je commentaar?

7 Vereenvoudig:

$$\sqrt{63} + \sqrt{28} \qquad \sqrt{10} + \sqrt{2\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{63} - \sqrt{28} \qquad \sqrt{10} - \sqrt{2\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{63} \cdot \sqrt{28} \qquad \sqrt{10} \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{63} : \sqrt{28} \qquad \sqrt{10} : \sqrt{2\frac{1}{2}}$$

8 Schrijf zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \qquad (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$(\sqrt{11} - \sqrt{10})^2 \qquad (\sqrt{11} - \sqrt{10})(\sqrt{11} + \sqrt{10})$$

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 \qquad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$(2\sqrt{10})^2 \qquad (\sqrt{9} + \sqrt{\frac{1}{9}})^2$$

$$(\sqrt{12} + \sqrt{8})^2 \qquad (\sqrt{10} + \sqrt{\frac{1}{10}})^2$$

$$(\sqrt{13} + \sqrt{7})^2 \qquad (\sqrt{11} + \sqrt{\frac{1}{11}})^2$$

$$(\sqrt{14} + \sqrt{6})^2 \qquad (\sqrt{12} + \sqrt{\frac{1}{12}})^2$$

$$(\sqrt{10+n} + \sqrt{10-n})^2 \qquad (\sqrt{10+n} + \sqrt{\frac{1}{10+n}})^2$$

9 Schrijf zo eenvoudig mogelijk, zonder wortel in de noemer ($x > 0$).

$$\frac{9}{\sqrt{9}} \qquad \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x}} \qquad \frac{x}{2\sqrt{x}} \qquad \frac{2x}{\sqrt{2x}}$$

$$\frac{2x+4}{\sqrt{2x+4}} \qquad \frac{x}{\sqrt{2x}} \qquad \frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{x^2+x}{\sqrt{x}} \qquad \frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \qquad \frac{x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x\sqrt{x}$$

10 Schrijf zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

$$(x + \sqrt{x})^2$$

$$(x\sqrt{x})^2$$

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})^2$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

11 a. Reken na dat $\sqrt{8+2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1$.

Kun je nu ook $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$ vereenvoudigen?

En $\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}}$?

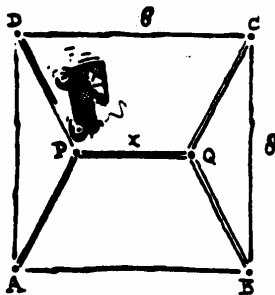
b. Reken na dat $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{2\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

Kun je nu ook $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ vereenvoudigen?

En $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$?

c. Vul passende gehele getallen in:

$$\sqrt{\quad} \sqrt{\quad} \sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$$



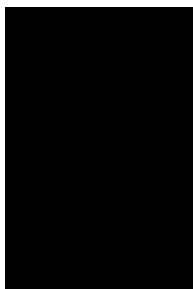
- 14 Schrijf als één zo eenvoudig mogelijke enkelvoudige breuk.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2x+2}$$

$$\frac{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}{x-2}$$



Voorbeeld

Schrijf zonder wortel in de noemer:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$$

- 15 Schrijf zonder wortel in de noemer.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}$$

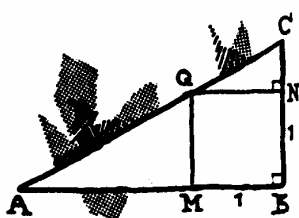
- 16 Bekijk de formule: $(x^2+1)\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$.

- a. Laat dat deze formule geldt voor elke $x \neq 0$.

Bekijk de formule:

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \sqrt{(x+1)^2 + \left(\frac{1}{x}+1\right)^2}$$

- b. Toon aan dat die voor positieve getallen x geldt. Laat met een tegenvoorbeeld zien dat die niet voor negatieve getallen x geldt.



In de rechthoekige driehoek ABC hiernaast, ligt M op AB , N op BC en Q op AC zó, dat $BM=BN=1$ en $BNQM$ een rechthoek is. De lengte van AM noemen we x .

- c. Toon aan dat $CN = \frac{1}{x}$. Tip. Gebruik gelijkvormigheid.

Door AC op twee manieren in x uit te drukken, kun je de formule boven aan de bladzijde meetkundig bewijzen.

- d. Doe dat.

17 Bekijk de volgende formules:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad \text{en} \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

a. Toon aan dat die voor positieve getallen x gelden. Laat met een tegenvoorbeeld zien dat die niet voor negatieve getallen x gelden.

Bekijk nog eens de driehoek van de vorige opgave. Hoek CAB noemen we α .

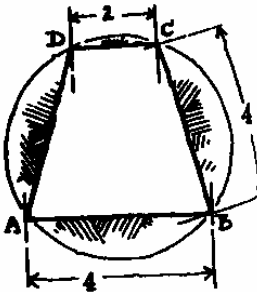
Door in drie verschillende driehoeken te kijken, kun je $\cos \alpha$ op drie manieren in x uitdrukken.

b. Laat op die manier meetkundig zien dat de formules juist zijn voor positieve x .

18 Nederlandse wiskunde olympiade, 1991

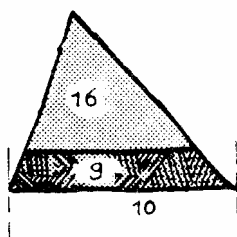
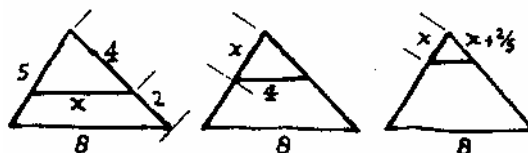
Van trapezium $ABCD$ is gegeven: $DA = AB = BC = 4$ en $CD = 2$.

Bereken de oppervlakte van de cirkel door de punten A , B , C en D .

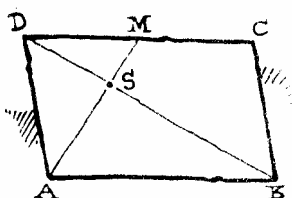


3 Rekenen in de meetkunde

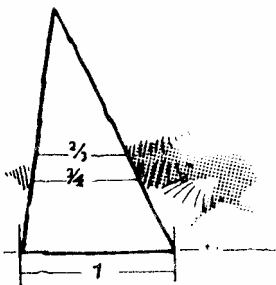
- 1 We trekken in een driehoek met zijden 5, 6 en 8 een lijnstuk evenwijdig aan een van de zijden. Bereken x in elk van de gevallen.



- 2 Een driehoek wordt door een lijnstuk evenwijdig aan de basis verdeeld in twee stukken. De oppervlakte van elk van de stukken is gegeven. De basis van de driehoek is gegeven. Bereken de lengte van het lijnstuk.

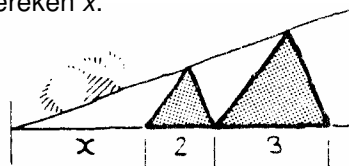


- 3 ABCD is een parallellogram. M is het midden van CD. S is het snijpunt van AM en BD. Gegeven is dat $AM=6$ en $BD=10$.
 a. Bereken AS, BS, MS en DS.
 b. Bereken de verhouding van oppervlakten van de vier stukken waarin het parallellogram is verdeeld.

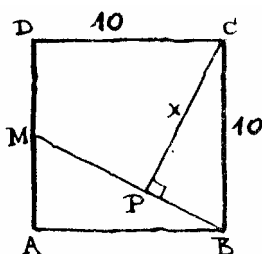


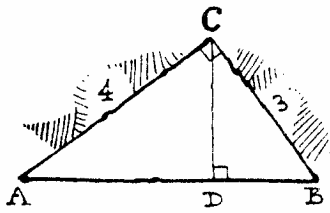
- 4 In een driehoek zijn twee lijnstukken evenwijdig aan de basis getekend. De lijnstukken hebben lengte $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$. De basis heeft lengte 1. Bereken de verhouding van de drie stukken waarin de opstaande zijden worden verdeeld.

- 5 De twee driehoeken in de figuur hieronder zijn gelijkvormig. Verder zie plaatje. Bereken x .



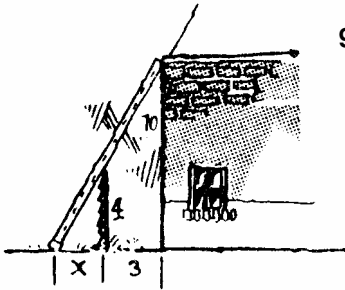
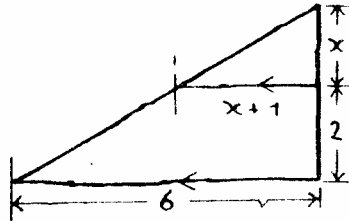
- 6 In vierkant ABCD is M het midden van AD en staat CP loodrecht op BM. Bereken de lengte van CP.



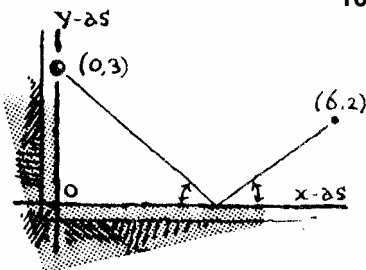


- 7 Driehoek ABC is rechthoekig. CD is de hoogtelijn op de schuine zijde.
 a. Bewijs dat de driehoeken ADC , CDB en ABC gelijkvormig zijn.
 b. Bereken de stukken waarin D de schuine zijde verdeelt.

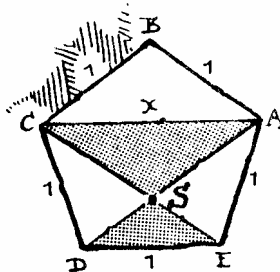
- 8 Bereken x in de figuur hieronder.



- 9 Op 3 meter afstand van een huis staat een viermeter hoge schutting. Een ladder staat tegen de gevel en steunt precies op de schutting. Bereken hoe ver de voet van de ladder voor de schutting staat als hij 10 meter hoog reikt.



- 10 We biljarten zonder effect via de x -as van $(0,3)$ naar $(6,2)$. De bal vertrekt van de band onder dezelfde hoek als hij er aankomt. In welk punt moeten we de x -as raken?



- 11 $ABCDE$ is een regelmatige vijfhoek met zijden van lengte 1. De diagonalen AD en CE snijden elkaar in S .
 a. Laat zien dat de driehoeken ACS en DES gelijkvormig zijn.

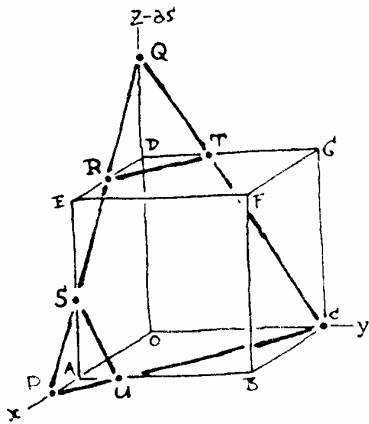
De lengte van AC noemen we x .

b. Laat zien dat $x^2 - x = 1$.

c. Bereken de exacte waarde van x .

De verhouding van de stukken waarin de diagonalen elkaar verdelen stond al bij de oude Grieken in de belangstelling. Het is de zogenaamde *gouden verhouding*.

$$\frac{\text{diagonaal}}{\text{grote stuk}} = \frac{\text{grote stuk}}{\text{kleine stuk}}$$

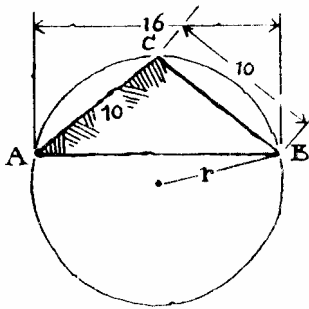


- 12 $OABC \cdot EFGH$ is een kubus met $O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,6)$. Op de x -as ligt $P(8,0,0)$ en op de z -as $Q(0,0,9)$. Driehoek PQC snijdt vier ribben van de kubus. De snijpunten noemen we R , S , T en U , zie plaatje.

- Bereken de coördinaten van de snijpunten.
- Welk deel van de oppervlakte van driehoek PQC ligt binnen de kubus?

Q beweegt over de z -as. Hierdoor verandert de lengte van lijnstuk TR .

- Bereken de z -coördinaat van Q als $T = (0,5,6)$.
- Wat is de maximale lengte van lijnstuk RT en bij welke z -coördinaat van Q wordt die bereikt?



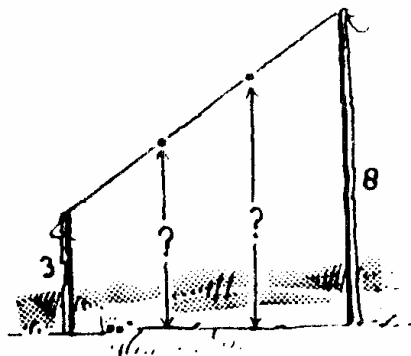
- 13 Van driehoek ABC hiernaast is gegeven $AB=16$ en $AC=BC=10$.

- Bereken de oppervlakte van driehoek ABC .
- Bereken de straal van de omschreven cirkel van driehoek ABC .

Tip. Stel een vergelijking op met behulp van de stelling van Pythagoras.

- 14 De twee verticale palen van lengte 3 en 8 meter in het plaatje hieronder staan op een horizontaal terrein. Tussen de palen loopt een strak gespannen draad. De draad is verdeeld in drie even lange stukken.

- Hoe hoog liggen de verdeelpunten boven het terrein?
- Dezelfde vraag als de palen a en b meter lang zijn (met $a < b$). Vereenvoudig je antwoord.



5 Antwoorden

Paragraaf 1 Breuken

1 87 174 $43\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$
 b bp ab
 $\frac{b}{a}$ $\frac{b}{p}$ bp

2 $\frac{3}{7}$ $\frac{6}{7}$
 $\frac{6}{35}$ $\frac{6}{35}$
 $\frac{2x}{15}$ $\frac{2}{3}$

3 fout fout
fout fout
fout goed
goed fout
goed goed

- 4 • ja
• ja
• nee
• ja
• nee

5 $\frac{4}{9}$ $\frac{1}{99}$
 $\frac{13}{20}$ $\frac{31}{32}$
 $\frac{5}{t}$ $\frac{t^2 + 9}{3t}$
 $\frac{5t}{6}$ $\frac{2t + 3}{t}$
 $\frac{2x}{x^2 - 1}$ $\frac{-2}{x^2 - 1}$
 $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ $\frac{-1}{x + 1}$
 $\frac{x^2}{x - 3}$ $\frac{x^2 - 6x}{x - 3}$
 $\frac{2x}{(x + 5)(x + 3)}$ $\frac{-5}{(x + 5)^2}$

b. $V = \frac{1}{v-1}$

c. $1\frac{1}{2}$

d. Naar de lens toe. Als v groter wordt, dan wordt $\frac{1}{v}$ kleiner, dus $\frac{1}{b}$ groter, dus b kleiner.

e. $\frac{1}{v(v-1)}$

15 a. $\frac{1}{R_2}$ wordt dan kleiner, dus $\frac{1}{R}$ ook, dus R wordt groter.

b. Als R_2 heel groot is, dan is $\frac{1}{R_2}$ bijna 0, dus dan $R \approx$

10. Als R_2 bijna 0 is, dan is $\frac{1}{R_2}$ erg groot, dus dan $R \approx R_2$, dus R neemt waarden tussen 0 en 10 aan.

c. $R = \frac{10x}{x+10}$

d. $\frac{10}{(x+10)(x+11)}$

16 b. $x=0$ en $x=1$

Paragraaf 2 Wortels

1 a. 3, 3,

b. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

c. $\sqrt{2}, \sqrt{2A} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{A}$

2 $5\sqrt{3}$ $4\sqrt{5}$ $3\sqrt{10}$
 $\frac{1}{10}\sqrt{5}$ $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

3 a. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{n}\sqrt{n}$

c. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

d. $\frac{1}{5}\sqrt{15}, \frac{1}{7}\sqrt{35}, \frac{1}{q}\sqrt{pq}$

$$4 \quad \frac{1}{5}\sqrt{30} \quad \frac{1}{2}\sqrt{6} \quad \sqrt{2} \quad \frac{1}{b}\sqrt{ab}$$

$$5 \quad \begin{array}{cccc} \sqrt{2} & \sqrt{2\frac{1}{2}} & \sqrt{0,08} & \sqrt{0,1} \\ \sqrt{72} & \sqrt{90} & \sqrt{16} & \sqrt{20} \end{array}$$

$$6 \text{ a. } \sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{(4-\sqrt{7} \cdot (4+\sqrt{7}))} = \sqrt{16-7} = 3$$

$$\text{b. } \left(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} \right)^2 =$$

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} \right)^2 - 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}} + \left(\sqrt{4-\sqrt{7}} \right)^2 =$$

$$4 + \sqrt{7} + 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}} + 4 - \sqrt{7} = 8 - 6 = 2.$$

c. Zie b.

d. $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} = -\sqrt{2}$, want $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$ is negatief.

$$7 \quad \begin{array}{ccc} 5\sqrt{7} & & 1\frac{1}{2}\sqrt{10} \\ \sqrt{7} & & \frac{1}{2}\sqrt{10} \\ 42 & & 5 \\ \frac{3}{2} & & 2 \end{array}$$

$$8 \quad \begin{array}{ccc} 5-2\sqrt{6} & & 1 \\ 21-2\sqrt{110} & & 1 \\ 2n+1-2\sqrt{n(n+1)} & & 1 \\ 40 & & 11\frac{1}{9} \\ 20+4\sqrt{6} & & 12\frac{1}{10} \\ 20+2\sqrt{91} & & 13\frac{1}{11} \\ 20+4\sqrt{21} & & 14\frac{1}{12} \\ 20+2\sqrt{100-n^2} & & 12+n+\frac{1}{10+n} \end{array}$$

$$9 \quad \begin{array}{ccc} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{x} \\ 2\sqrt{x} & \frac{1}{2}\sqrt{x} & \sqrt{2x} \\ \sqrt{2x+4} & \frac{1}{2}\sqrt{2x} & x\sqrt{x} \\ x\sqrt{x} + \sqrt{x} & x\sqrt{x} + 1 & x\sqrt{x} \end{array}$$

$$10 \quad \begin{array}{ll} x^2 + x + 2x\sqrt{x} & x^3 \\ 2x + 2\sqrt{x^2 - 1} & x + 2 + \frac{1}{x} \end{array}$$

11 a. Kwadrateren geeft: $8 + 2\sqrt{7} = 7 + 2\sqrt{7} + 1$ en dat klopt.

Omdat $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$ en $\sqrt{7} + 1$ beide positief zijn, geldt:

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1.$$

$$(\sqrt{7} - 1)^2 = 8 - 2\sqrt{7}, \text{ dus } \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} - 1.$$

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1 - (\sqrt{7} - 1) = 2$$

b. Kwadrateren geeft:

$$\left(\sqrt{2\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2\frac{1}{2} + 2\sqrt{2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 3 + \sqrt{4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$3 + \sqrt{5}. \text{ Omdat } \sqrt{3 + \sqrt{5}} \text{ en } \sqrt{2\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ beide positief zijn,}$$

$$\text{geldt dus } \sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{2\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 = 3 - \sqrt{5} \text{ en } \left(\sqrt{2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3 - \sqrt{5}, \text{ en}$$

omdat zowel $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ als $\sqrt{2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ positief zijn, geldt:

$$\sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} =$$

$$\sqrt{2\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \left(\sqrt{2\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt{2\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

c.

$$\sqrt{12 + \sqrt{80}} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4\sqrt{5}} = 2\sqrt{3 + \sqrt{5}} = 2\left(\sqrt{2\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{10} + \sqrt{2}$$

12 25	geen oplossing
0, 1	0
0, $\frac{1}{4}$	0, 4
3	2
1	1, 9

13 a. $\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 32}$

b. $\frac{-8 + 8\sqrt{7}}{3}$

c. $2, 4\frac{2}{3}$

$$14 \quad \frac{1+\sqrt{x}}{x} \qquad \frac{1+x}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$15 \quad \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \qquad \frac{2-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}{a}}$$

$$16 \text{ a. } (x^2+1)\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 1+x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \text{ en}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{b. } \sqrt{(x+1)^2 + \left(\frac{1}{x}+1\right)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1}$$

En:

$$\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)^2 = x^2 + 1 + 2\sqrt{x^2+1}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + \frac{1}{x^2} + 1$$

$$= x^2 + 1 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} + 1 \text{ (de laatste gelijkheid volgt uit a.)}$$

Als je voor $x = -1$ neemt, dan is het linkerlid $2\sqrt{2}$ en het rechterlid 0.

c. De driehoeken AMQ en QNC zijn gelijkvormig, dus:

$$\frac{QM}{AM} = \frac{CN}{QN} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{CN}{1} = CN$$

d. $AB = x+1$ en $AC = 1 + \frac{1}{x}$. De stelling van Pythagoras

$$\text{in driehoek } ABC \text{ geeft: } AC = \sqrt{(x+1)^2 + \left(\frac{1}{x}+1\right)^2}.$$

Stelling van Pythagoras in driehoek AMQ geeft:

$$AQ = \sqrt{1+x^2}$$

Stelling van Pythagoras in driehoek CNQ geeft:

$$CQ = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Als je dit invult in $AQ + QC = AC$ krijg je de gelijkheid

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \sqrt{(x+1)^2 + \left(\frac{1}{x}+1\right)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \text{ en} \\
 &= \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \\
 &= \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}
 \end{aligned}$$

Bi

-
- 3 a.** $4, 6\frac{2}{3}, 2, 3\frac{1}{3}$
b. $1:2:4:5$
- 4** $8:1:3$
- 5** $\frac{x+2}{x} = \frac{x+5}{x+2}$ geeft $x=4$
- 6** $4\sqrt{5}$
- 7 a.** $\angle CAB + \angle ACD = 90^\circ$ en $\angle DCB + \angle ACD = 90^\circ$, dus $\angle DCB = \angle CAB$ enzovoort. De drie driehoeken hebben dezelfde hoeken.
b. $3\frac{1}{5}$ en $1\frac{4}{5}$
- 8** $1, 2$
- 9** 2 meter
- 10** $(3\frac{3}{5}, 0)$
- 11 a.** Vanwege symmetrie is AC evenwijdig met DE .
b. Evenzo is CS evenwijdig met AB , dus is $SCBA$ een parallellogram, dus $CS = 1$, dus $SE = x - 1$. Omdat ook $CS = x \cdot SE$ geldt: $x(x-1) = 1$.
c. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (want $x > 0$)
- 12 a.** $R(2\frac{2}{3}, 0, 6), S(4, 0, 2\frac{1}{4}), T(0, 4, 6), U(6, 0, \frac{1}{2})$
b. $\frac{119}{144}$ deel
c. $(0, 0, 30)$
d. $7\frac{1}{2}$ als $Q = (0, 0, 24)$
- 13 a.** 48
b. $8\frac{1}{3}$
- 14 a.** $4\frac{2}{3}, 6\frac{1}{3}$
b. $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$