vwo 4 wiskunde B deel 1

de Wageningse Methode

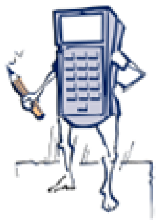
Copyright	© 2015 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs	Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage	www.wageningse-methode.nl
ISBN	01234567890-0-0
Illustraties	Wilson Design Uden
Distributie	Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit boek bevat het eerste deel van de leerstof voor het vak wiskunde B van het vwo. In hoofdstuk 1 worden rekenregels uit de onderbouw herhaald en uitgebreid. Hoofdstuk 2 gaat over berekeningen in driehoeken; je leert de stelling van Pythagoras, de sinus- en cosinusregel gebruiken. In hoofdstuk 3 wordt het arsenaal aan functies uitgebreid met gebroken en inverse functies. Ook komen limieten en perforaties aan de orde. Sommige hoofdstukken sluiten af met een paragraaf waarin je rekentechnieken die in het hoofdstuk voorkomen uitdiept en/of oefent.

In de bovenbouw maak je gebruik maken van een grafische rekenmachine. Als je een nieuwe optie van je grafische rekenmachine kunt gebruiken, is dit gemarkeerd door nevenstaand mannetje. Aangezien er verschillende merken en modellen grafische rekenmachines zijn, vind je in dit boek geen “knoppencursus”. Op de website van de Wageningse Methode staat meer informatie over het gebruik en de belangrijkste opties van de grafische rekenmachine. Maar je mag natuurlijk ook je docent om hulp vragen.



In dit boek worden iconen gebruikt. Hieronder wordt beschreven hoe de iconen worden gebruikt.

Theorie
De theorie staat in rode letters. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt.

Historie
Historische feiten en wetenswaardigheden staan in een kader.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg heb je een computer nodig.

Echt, moet kunnen
Deze opgaven moet je zonder veel moeite op kunnen lossen.

Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.

Met dank aan . . .

Dit boek bevat het eerste deel van de leerstof voor het vak wiskunde B van het vwo. In hoofdstuk 1 worden rekenregels uit de onderbouw herhaald en uitgebreid. Hoofdstuk 2 gaat over berekeningen in driehoeken; je leert de stelling van Pythagoras, de sinus- en cosinusregel gebruiken. In hoofdstuk 3 wordt het arsenaal aan functies uitgebreid met gebroken en inverse functies. Ook komen limieten en perforaties aan de orde. Sommige hoofdstukken sluiten af met een paragraaf waarin je rekentechnieken die in het hoofdstuk voorkomen uitdiept en/of oefent.

Tot slot . . .

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

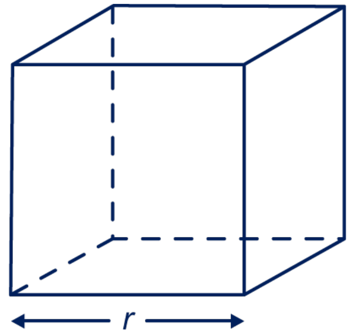
Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

3.1 Machtige verbanden

1 De totale oppervlakte (van de 6 grensvlakken) van een kubus noemen we O en de inhoud V. Er is een getal c zó, dat $V^2 = c \cdot O^3$.

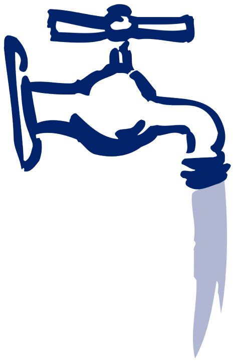
a Laat dat zien en bepaal c exact.



Er is een getal k zó, dat $V = k \cdot O\sqrt{O}$.

b Bereken k exact, vereenvoudig de wortel.

2 De hoeveelheid water H (in liter) die er uit een buis stroomt, hangt af van zijn diameter d (in dm) en de snelheid v (in m/s) waarmee dat water stroomt.



a Als de diameter van een buis 1 dm is en de hoeveelheid water die per seconde wordt afgevoerd 80 liter is, hoe snel stroomt het water dan uit de buis (in m/s)?

Neem aan: het water stroomt met een constante snelheid v m/s.

b Laat zien dat $v = \frac{0{,}4H}{\pi d^2}$.

Om een bouwput droog te houden, moet er per seconde 100 liter water worden afgevoerd.
De uitstroomsnelheid hangt af de diameter van de buis.
Er geldt: $v = a \cdot d^b$, voor zekere getallen a en b.

c Geef a en b exact en benader a ook in twee decimalen.

3 Hoe zwaarder een zoogdier, hoe zwaarder zijn hersenen. Een formule voor het verband tussen het hersengewicht H in gram en het lichaamsgewicht L in kg is: $H = 12 \cdot L^{\frac{2}{3}}$.

a Bereken het hersengewicht van een hond van 30 kg.

Sommige dieren hebben een groter hersengewicht dan ze volgens de formule zouden moeten hebben, andere dieren hebben een lager hersengewicht. Het EQ van een dier (Encefalisatie-Quotiënt) is de verhouding van zijn werkelijk hersengewicht en het hersengewicht H dat het volgens de formule zou moeten hebben. Een dier met een hoog EQ heeft dus relatief veel hersenen.
Een tapir heeft een EQ van $0{,}5$, een hond van $1{,}0$ en een chimpansee van $2{,}6$. Een aapje van 1000 gram zou volgens de formule een hersengewicht van 12 gram moeten hebben. Is het werkelijk hersengewicht 48 gram, dan is het EQ van het aapje $4{,}0$.

Een onderzoeker maakt melding van een witte dolfijn met een lichaamsgewicht van 521 kilogram en een hersengewicht van 2355 gram.

b Bereken het EQ van die dolfijn.

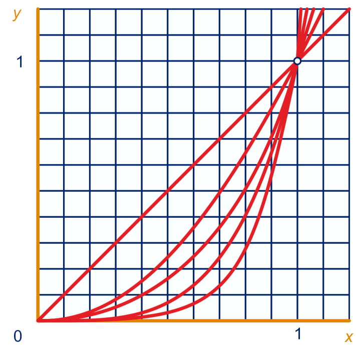
In de drie voorgaande opgaven hebben we voorbeelden gezien van zogenaamde machtsfuncties.

Een **machtsfunctie** is een functie van de vorm $y = a \cdot x^b$, voor zekere waarden van a en b.
Tenzij anders vermeld, nemen we voor het domein van deze functie de positieve getallen (en 0 als $b \geq 0$).

Waarom nemen we 0 niet in het domein als $b < 0$?

4

In het plaatje en op het werkblad staan de machtsfuncties voor $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$ en $\alpha = 5$.



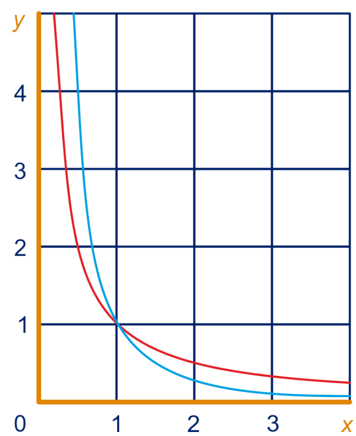
a Wat zijn de twee gemeenschappelijke punten van de grafieken van machtsfuncties?
Kun je dat met behulp van de formule $y = x^\alpha$ verklaren?

b Kleur op het werkblad de grafiek van $y = x^2$ groen en de grafiek van $y = x^4$ paars.

c Kun je uitleggen waarom de grafiek van $y = x^2$ boven die van $y = x^4$ ligt als $0 < x < 1$?

5

Hiernaast staan de grafieken bij de verbanden $y = x^{-1}$ en $y = x^{-2}$. Het snijpunt van de twee grafieken is $(1,1)$.
P is een punt op de grafiek van $y = x^{-1}$ en Q een punt op de grafiek van $y = x^{-2}$ met dezelfde eerste coördinaat.



a Bereken exact de eerste coördinaat van P als dit punt $\frac{5}{36}$ boven Q ligt.

b Bereken langs algebraïsche weg de eerste coördinaat van P als dit punt 3 onder Q ligt in twee decimalen.

c Wat is de tweede coördinaat van P als de tweede coördinaat van Q groter is dan 10.000?

d Wat is de tweede coördinaat van P als de tweede coördinaat van Q kleiner is dan $0{,}0001$?

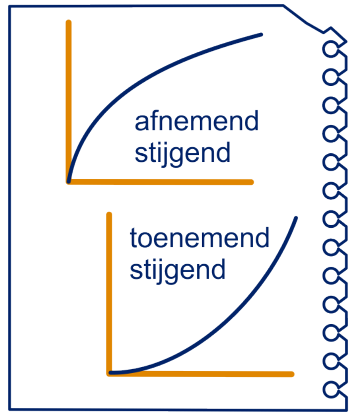
Als $y = x^{-1}$ of $y = x^{-2}$ wordt y naarmate x dichter bij 0 komt zo groot als je maar wil.
Naarmate x groter wordt, komen de grafieken van $y = x^{-1}$ en $y = x^{-2}$ zo dicht bij de x-as als je maar wil.
De x-as en de y-as zijn **asymptoten** van de verbanden $y = x^{-1}$ en $y = x^{-2}$. We komen hierop terug.

6 Alle machtsfuncties $y = x^a$ met $a > 0$ zijn stijgend, ook als de exponent a een breuk is.

a Onderzoek op de GR of met GeoGebra of de grafiek van $y = x^{1,6}$ onder of boven de grafiek van $y = x^{1,7}$ ligt.

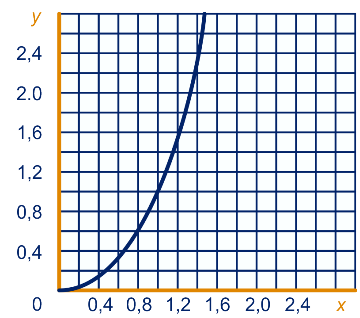
b Onderzoek of de grafiek van $y = x^{0,6}$ onder of boven de grafiek van $y = x^{0,7}$ ligt.

c Voor welke waarden van a heeft de functie $y = x^a$ toenemende stijging en voor welke a afnemende stijging?



De grafiek van $y = a \cdot x^b$, met $a > 0$ is **afnemend stijgend** als $0 < b < 1$ en **toenemend stijgend** als $b > 1$.

7 In het plaatje staat de grafiek van een machtsfunctie $y = x^{\alpha}$. Zoek uit hoe groot α ongeveer is. Beschrijf je werkwijze.



8 Bekijk het verband $y = x^2$, met $x > 0$.

a Vul de tabel in.

x	7	10		
y			7	a

Conclusie:

als $x^2 = a$, dan $x = \sqrt{a}$ ofwel $x = a^{\frac{1}{2}}$.

b Laat met een rekenregel voor machten zien dat $x = a^{\frac{1}{2}}$ oplossing is van de vergelijking $x^2 = a$.

c Bereken met de rekenmachine $5^{3\frac{1}{2}}$. Neem vervolgens de uitkomst tot de macht $\frac{2}{7}$.

Een mooie uitkomst!

Dit kan ook zonder rekenmachine.

Laat dat met de rekenregels voor machten zien.

d Waarom is $5^{3\frac{1}{2}}$ oplossing van de vergelijking $x^{\frac{2}{7}} = 5$?

Laat dit met een rekenregel voor machten zien.

e Welk getal is oplossing van $5^{-3\frac{1}{2}}$?

In de voorgaande opgave heb je voorbeelden gezien van de volgende regel.

Als $x^b = a$ dan $x = a^{\frac{1}{b}}$.

Hierbij worden x en a positief verondersteld en $b \neq 0$.

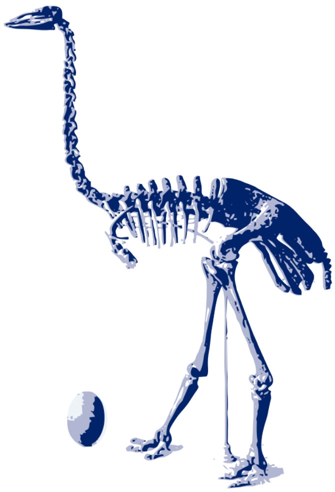
9

a Laat bovenstaande zien met de rekenregels voor machten. In het bewijs maakt het ook niet uit of b negatief is.

b Waarom heeft de vergelijking $x^b = a$ maar één oplossing?

10

Hoe groter de vogelsoort, hoe groter de eieren. Na een onderzoek van 800 vogelsoorten kwam de ornitholoog Rahn tot een formule die het verband legt tussen het gewicht van een ei en het gewicht van de moedervogel: $E = 0{,}3 \cdot G^{\frac{3}{4}}$. Hierin is E het eigewicht en G het lichaamsgewicht, beide in grammen.



Een grauwe gans weegt $2{,}5$ kilogram.

a Hoe zwaar zijn de eieren van de grauwe gans volgens de formule?

Van de prehistorische vogel Aepoyornis die op Madagascar leefde heeft men een fossiel ei gevonden. Men schat dat het ei 10 kg heeft gewogen

b Hoe zwaar is de Aepoyomis volgens de formule geweest?

c Geef een formule voor G, uitgedrukt in E.

Vergelijkingen oplossen

Voorbeeld

Bereken in drie decimalen het positieve getal x waarvoor geldt: $10x = \sqrt[3]{x}$.

Oplossing

$$10x = \sqrt[3]{x}$$

$\sqrt[3]{\ldots} = (\ldots)^{\frac{1}{3}}$

$$10x = x^{\frac{1}{3}}$$

delen door $x^{\frac{1}{3}}$

$$10x^{\frac{2}{3}} = 1$$

delen door 10

$$x^{\frac{2}{3}} = 0{,}1$$

als $x^b = a$ dan $x = a^{\frac{1}{b}}$

$$x = 0{,}1^{\frac{3}{2}}$$

Dus $x = 0{,}032$.

11

Zoek exact het positieve getal waarvoor geldt:

a $x^2\sqrt{x} = 10$

b $\sqrt[4]{x^3} = 10$

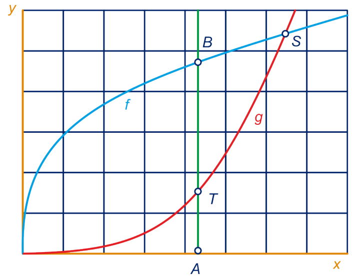
c $\sqrt{x} = 10\sqrt[3]{x}$

d $x^2\sqrt{2x} = x^4$

e $\sqrt{(2x)^3} = x^4$

f $x^2\sqrt{x} - 10x\sqrt{x} + 9\sqrt{x} = 0$

12



Hiernaast staan de grafieken van de functies f en g met $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^3$.

Behalve in $O(0,0)$ snijden de grafieken elkaar nog in S.

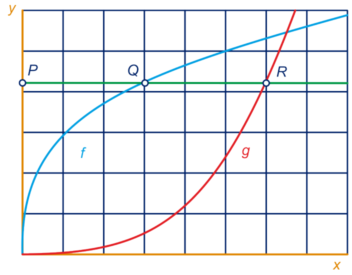
a Bereken de coördinaten van S exact.

Een lijn evenwijdig aan de y-as snijdt de x-as in A, de grafiek van f in B en de grafiek van g in T.
Er geldt: $BT = 2 \cdot AT$.

b Bereken de lengte van lijnstuk AB exact.

Hint 1.

13



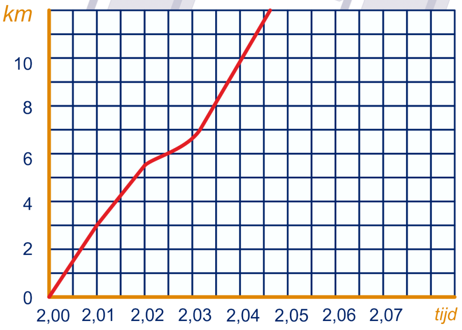
De functies f en g zijn hetzelfde als in de vorige opgave. Een horizontale lijn snijdt de y-as is P, de grafiek van f in Q en de grafiek van g in R, zó, dat Q het midden van PR is.
Bereken langs algebraïsche weg de lengte van lijnstuk PR in twee decimalen.

Hint 2.

Schuiven

14

Een wegpiraat wordt achtervolgd door de verkeerspolitie. We volgen de wilde rit vanaf 2.00 uur. De tijd-afstand-grafiek voor de komende minuten staat getekend.



a Met welke snelheid (in km/uur) reed de wegpiraat om 2.00 uur? Hoe heb je dat antwoord gevonden?

b Na hoeveel km zit er een scherpe bocht in de weg?

Een politieauto achtervolgt de wegpiraat. De plek die de piraat om 2.00 uur passeert, wordt door de politie een halve minuut later gepasseerd. Beide auto's zijn volledig aan elkaar gewaagd; ze rijden op elke plek van de weg even snel. Zo nemen ze de bocht ook met dezelfde snelheid. De politieauto bereikt dus elke plek van de route een halve minuut later dan de piraat.

c Teken op het werkblad nauwkeurig de grafiek voor de politieauto.

d Hoeveel kilometer (ongeveer) ligt de politieauto achter op de wegpiraat om 2.00 uur?

e Lees uit de grafiek af wanneer de politieauto de piraat het dichtst genaderd is.
Hoeveel meter achterstand heeft hij dan nog?

De grafiek voor de politieauto is een kopie van de grafiek voor de wegpiraat.

f Zeg precies hoe de grafiek voor de politieauto ontstaat uit de grafiek voor de piraat.

We rekenen de afstand in km vanaf de plek die de piraat om 2.00 uur passeert. De afstand van de wegpiraat om t minuten over twee noemen we $Pi(t)$.

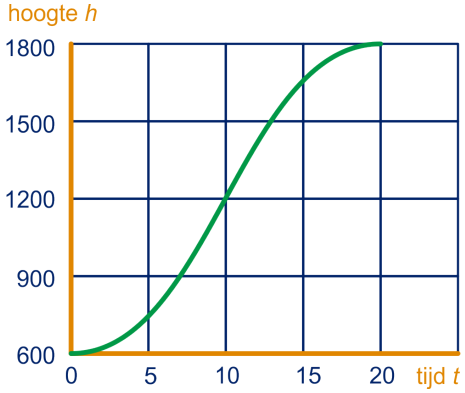
g Lees uit de grafiek af hoe groot $Pi(1)$ en $Pi(3\frac{1}{2})$ zijn.
En omgekeerd: voor welke t geldt $Pi(t) = 9$?

De afstand van de politieauto om t minuten over twee noemen we $Po(t)$.

h Hoe groot zijn $Po(1\frac{1}{2})$ en $Po(4)$?
En omgekeerd: voor welke t geldt $Po(t) = 9$?

i Vul in: $Po(t) = Pi(...)$.

15 Een stoeltjeslift brengt wandelaars in 20 minuten van 600 tot 1800 meter hoog. De lift beweegt gelijkmatig, zonder stoppen. Op tijdstip 0 stapt Hans in. Zijn hoogte op tijdstip t noemen we $h(t)$. We rekenen de tijd in minuten en de hoogte in meter. Hieronder is de grafiek getekend.



Wim gaat 5 minuten later omhoog. Zijn hoogte op tijdstip t noemen $w(t)$ met $5 \leq t \leq 25$.

a Neem over en vul in:
$w(5) = h(...)$ $\qquad$ $w(7) = h(...)$ $\qquad$ $w(t) = h(...)$

b Teken de grafiek van w. Hoe ontstaat die uit de grafiek van h?

10 minuten voor Hans was Ans ingestapt. Haar hoogte op tijdstip t noemen $a(t)$ met $-10 \leq t \leq 10$.

c Vul in: $a(t) = h(...)$.

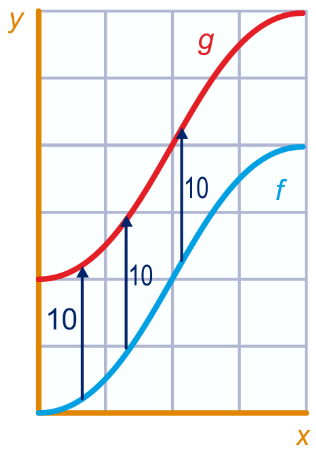
d Hoe ontstaat de grafiek van a uit die van h?

Gegeven een functie f.

- De grafiek van de functie f wordt 3 eenheden naar rechts geschoven. Je krijgt de grafiek van een functie g.
  Er geldt: $g(x) = f(x - 3)$.
- De grafiek van de functie f wordt 4 eenheden naar links geschoven. Je krijgt de grafiek van een functie h.
  Er geldt: $h(x) = f(x + 4)$.

16 Voer in GeoGebra een functie f in, bijvoorbeeld $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Kijk wat er gebeurt als je in de invoerregel invult: $f(x - 3)$.
En ook $f(x + 4)$.

17 Hiernaast zijn de grafieken van twee functies f en g getekend.
Door de grafiek van f 10 eenheden omhoog te schuiven krijg je de grafiek van g.
Hoe krijg je de formule van $g(x)$ uit die van $f(x)$?
In GeoGebra of met de GR kun je je antwoord controleren.

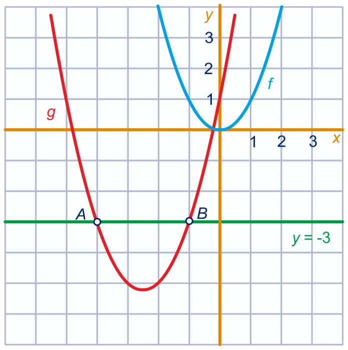


18 Gegeven de functie f met $f(x) = x^2$. De grafiek van f is, zoals bekend een dalparabool met top $(0,0)$.
De grafiek van de functie g ontstaat door die van f 3 eenheden naar rechts en 4 eenheden naar boven te schuiven.

a Welk punt is de top van grafiek van g?

b Wat is de formule van $g(x)$?

19 Gegeven de functie f met $f(x) = x^2$. De grafiek van f wordt verschoven. Het resultaat is de grafiek van een functie die we g noemen.
De lijn $y = \text{-}3$ snijdt de grafiek van g in A en B zó, dat $AB = 3$.
Verder is de eerste coördinaat van $A = \text{-}4$.
Bereken de coördinaten van de top van g exact.



Rekken

20 We bekijken opnieuw het traject dat in opgave 14 met hoge snelheid werd afgelegd. Normaal gaat dat natuurlijk veel kalmer. Vooral op zondag, als mensen er in hun vrije tijd op uit trekken. Dan wordt het traject half zo snel gereden. Zo ook door mijnheer Paaltjes. Hij komt om 2.00 uur op de plek waar de piraat van de vorige opgave ook om 2.00 uur was.

a Hoe laat bevindt Paaltjes zich halverwege de bocht?

b Teken op het werkblad de grafiek van de rit van mijnheer Paaltjes.

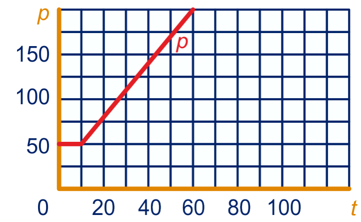
c Zeg precies hoe de grafiek van Paaltjes ontstaat uit de grafiek van de piraat.

De afstand van Paaltjes om t minuten over twee noemen we $Pa(t)$.

d Hoe groot zijn $Pa(2)$ en $Pa(5)$?
En omgekeerd: voor welke t geldt $Pa(t) = 9$?

e Vul in: $Pa(t) = Pi(...)$.

21



In stad P is het parkeertarief voor t minuten parkeren $p(t)$ eurocent. Hiernaast staat de grafiek van p.

In stad Q is het veel voordeliger parkeren. Voor hetzelfde geld parkeer je daar drie keer zo lang. Het parkeertarief voor t minuten parkeren in Q is $q(t)$ eurocent.

a Neem over en vul in:
$q(30) = p(...)$ $\qquad q(84) = p(...)$ $\qquad q(t) = p(...)$

b Neem de grafiek van p over op roosterpapier en teken er de grafiek van q bij.

De grafiek van de functie q ontstaat door de punten van de grafiek van p met 3 te vermenigvuldigen ten opzichte van de verticale as, dus door de afstand tot de verticale as met de factor 3 te vergroten.
We zeggen kortweg: **horizontaal met 3 vermenigvuldigen**.
We spreken in plaats van vermenigvuldigen ook van rekken.

In stad R is het parkeren 2 keer zo duur als in stad P. Het parkeertarief daar voor t minuten parkeren is $r(t)$ eurocent.

c Neem over en vul in: $r(t) = ... \cdot p(t)$.

d Teken de grafiek van r in het rooster van onderdeel b.

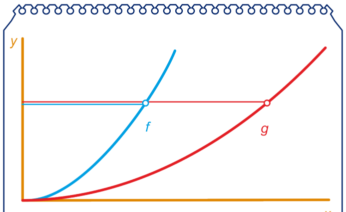
De grafiek van r ontstaat uit die van p door de punten van de grafiek van p ten opzichte van de horizontale as met 2 te vermenigvuldigen, dus door de afstand tot de horizontale as met de factor 2 te vergroten.
We zeggen kortweg: **verticaal met 2 vermenigvuldigen**.

22

Neem een functie f, bijvoorbeeld met $f(x) = \sqrt{x}$.
Teken met GeoGebra de grafieken van de functies g, h, j, k, m en n met:

$g(x) = f(x-2)$ $\qquad h(x) = f(x+2)$
$j(x) = f(-\frac{1}{2}x)$ $\qquad k(x) = f(-2x)$
$m(x) = f(x) + 3$ $\qquad n(x) = -2 \cdot f(x)$

Kijk hoe de grafiek van f verschoven of gerekt wordt.



De grafiek van g ontstaat uit die van f door horizontaal met 2 te vermenigvuldigen.
$g(x) = f(0{,}5x)$

Gegeven een functie f.

- Neem aan: $g(x) = f(ax)$ met $a \neq 0$.
  De grafiek van g krijg je dan door de grafiek van f **horizontaal** met $\frac{1}{a}$ te **vermenigvuldigen**.
- Neem aan: $g(x) = a \cdot f(x)$.
  De grafiek van g krijg je dan door de grafiek van f **verticaal** met a te **vermenigvuldigen**.
- Neem aan: $g(x) = f(x + a)$ met $a > 0$.
  Je krijgt de grafiek van g door de grafiek van f a eenheden naar **links te schuiven**.
  Neem aan: $g(x) = f(x - a)$ met$a > 0$.
  Je krijgt de grafiek van g door de grafiek van f a eenheden naar **rechts te schuiven**.
- Neem aan: $g(x) = f(x) + a$ met $a > 0$. Je krijgt de grafiek van g door de grafiek van f a eenheden naar **boven te schuiven**.
  Neem aan: $g(x) = f(x) - a$ met $a > 0$. Je krijgt de grafiek van g door de grafiek van f a eenheden naar **beneden te schuiven**.

Toepassen

23

Gegeven de drie functies f, g en h met $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{2x+1}$ en $h(x) = \sqrt{2x+2}$.

a Teken de grafieken van de drie functies met GeoGebra.

b Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f door schuiven en rekken?

c Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van f door schuiven en rekken?

Voorbeeld

We bekijken nogmaals de functies uit opgave 23. We laten zien hoe de grafieken van de functies g en h door schuiven en rekken ontstaan uit de grafiek van de wortelfunctie.

Voor g:

$$f : x \rightarrow \sqrt{x}$$

x vervangen door $x + 1$, dus 1 eenheid naar links schuiven

$$x \rightarrow \sqrt{x+1}$$

x vervangen door $2x$, dus horizontaal vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$

$$x \rightarrow \sqrt{2x+1} = g(x)$$

Voor h:

$f: x \rightarrow \sqrt{x}$

x vervangen door $2x$, dus horizontaal vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$

$x \rightarrow \sqrt{2x}$

x vervangen door $x+1$, dus 1 eenheid naar links schuiven

$x \rightarrow \sqrt{2(x+1)} = \sqrt{2x+2} = h(x)$

Als je horizontaal schuiven en rekken verwisselt, krijg je een ander resultaat. Dat zie je aan de twee voorbeelden hierboven.
De volgorde speelt hier een rol!

De grafiek van h kun je ook als volgt krijgen.

$f: x \rightarrow \sqrt{x}$

x vervangen door $x+2$, dus 2 eenheden naar links schuiven

$x \rightarrow \sqrt{x+2}$

x vervangen door $2x$, dus horizontaal vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$

$x \rightarrow \sqrt{2x+2} = h(x)$

24 Gegeven de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 2\sqrt{x+1}$.

a Teken de grafieken van de functies met GeoGebra.

De grafiek van g ontstaat uit die van f door schuiven en rekken.

b Hoe?

c Maakt het uit als je het schuiven en rekken in omgekeerde volgorde uitvoert?

25 $f: x \rightarrow x^3$

De grafiek van g ontstaat uit die van f door horizontaal met 2 te vermenigvuldigen.
Je kunt de grafiek van g ook uit die van f door krijgen door een verticale vermenigvuldiging.
Welke?

26 $f: x \rightarrow x + \sqrt{x-2}$

Je kunt de grafiek van f krijgen door die van $y = x + \sqrt{x}$ eerst horizontaal en dan verticaal te verschuiven.

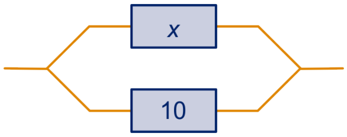
a Hoe? Licht je antwoord toe.

Je kunt de grafiek van f ook krijgen door die van $y = x + \sqrt{x}$ eerst verticaal en dan horizontaal te verschuiven.

b Hoe? Licht je antwoord toe.

27 Gegeven is de functie $y = \frac{1}{4}x^3$. De grafiek van deze functie wordt 2 naar rechts verschoven en vervolgens gespiegeld in de y-as.
Geef een formule voor de functie die bij de ontstane grafiek hoort.

Gebroken lineaire functies



28 Twee weerstanden, een van $10\,\Omega$ en een variabele (schuifweerstand) van $x\,\Omega$ zijn parallel geschakeld. De vervangingsweerstand van de schakeling noemen we R.
Zoals bekend geldt: $\frac{1}{R} = \frac{1}{10} + \frac{1}{x}$.

a Bereken x als $R = 8$.

b Wat kun je over R zeggen als x erg klein is?
En als x erg groot is?

De formule $\frac{1}{R} = \frac{1}{10} + \frac{1}{x}$ kun je schrijven als: $R = \frac{10x}{x+10}$.

c Laat dat zien.

d Teken de grafiek van R als functie van x in Geogebra of op de GR.

e Vanaf welke x ligt R minder dan $0{,}000001$ van 10 af?
Bereken je antwoord exact.

De functie $y = \frac{10x}{x+10}$ is een voorbeeld van gebroken lineaire functie, dat wil zeggen: de formule is een "breuk" (een quotiënt) waarbij de teller en de noemer *lineaire* (eerstegraads-)functies zijn.

Een **gebroken lineaire functie** is van de vorm: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ voor zeker getallen a, b, c en d.

29 Wat moet je voor de getallen a, b, c en d in $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nemen om de functie $y = \frac{10x}{x+10}$ te krijgen?

30 Twee zusjes, Minie en Maxie, schelen nagenoeg 6 jaar in leeftijd. Nu is Minie 1 jaar en Maxie 7 jaar. We bekijken steeds de verhouding Maxies leeftijd : Minies leeftijd. Nu is die verhouding dus 7.

a Wat is die verhouding over 1 jaar? En over 2 jaar? En over 5 jaar?

b Wat is die verhouding over x jaar?

c Bereken exact wanneer de verhouding $1\frac{1}{2}$ is. En wanneer die $1{,}1$ is.

d Teken de grafiek van de functie $y = \frac{x+7}{x+1}$ voor $x > 0$.

e Wat merk je op over de verhouding van de leeftijden als de zusjes "het eeuwige leven" zouden hebben?

f Wat moet je voor de getallen a, b, c en d in $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nemen om de functie $y = \frac{x+7}{x+1}$ te krijgen?

Asymptoten

31

a Wat is het omgekeerde van 4, van $0{,}2$, van -1, van -8 en van $-\frac{3}{5}$?

b Welk getal heeft geen omgekeerde?
Wat is dus het domein van de functie $y = \frac{1}{x}$?

c Welk getal treedt niet op als omgekeerde van een getal?
Wat is dus het bereik van $y = \frac{1}{x}$?

Neem voor x achtereenvolgens $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ en $\frac{1}{10.000}$.

d Wat is y bij deze invoer?

Neem voor x achtereenvolgens $-\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{100}$, $-\frac{1}{1000}$ en $-\frac{1}{10.000}$.

e Wat is y bij deze invoer?

Delen door een positief getal dicht bij 0 komt neer op het vermenigvuldigen met een positief getal, ver rechtss op de getallenlijn.
Delen door een negatief getal dicht bij 0 komt neer op het vermenigvuldigen met een negatief getal, ver links op de getallenlijn.
We schrijven $\lim\limits_{x \downarrow 0} y = \infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 0} y = -\infty$.
Het wiskundig symbool ∞ staat voor oneindig.
$\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ betekent: kies een groot getal g; dan is er een getal k dicht bij 0 zó dat y groter dan g is als $0 < x < k$.
$\lim\limits_{x \downarrow 0} \ldots$ spreek je uit als de limiet van $\ldots$ als x van de rechterkant naar 0 nadert.
$\lim\limits_{x \uparrow 0} \ldots$ spreek je uit als de limiet van $\ldots$ als x van de linkerkant naar 0 nadert.

Neem voor x achtereenvolgens 100, 1000 en 10.000.

f Wat is y bij deze invoer?

Neem voor x achtereenvolgens -100, -1000 en -10.000.

g Wat is y bij deze invoer?

We schrijven $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

De grafiek van $y = \frac{1}{x}$ is de (standaard)**hyperbool**.

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$:
  de x-as is **horizontale asymptoot** van de grafiek.
- $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$:
  de y-as is **verticale asymptoot** van de grafiek.

32 Je rekenmachine heeft een aparte knop voor het omgekeerde: de knop x^{-1} of $\frac{1}{x}$.

a Bereken met de deze knop de uitvoer bij invoer $0{,}625$.
Hoe kun je met je rekenmachine bij deze uitvoer de invoer $0{,}625$ terug vinden?

Bij een zekere invoer geeft de knop x^{-1} als uitvoer $1{,}28$.

b Wat was die invoer?

Kennelijk heeft de functie $y = \frac{1}{x}$ een bijzondere eigenschap.

c Breng die eigenschap onder woorden.
Weet jij nog een andere functie met die eigenschap (je rekenmachine heeft daar ook een knop voor)?

Kijk nog eens naar opgave 28.
Als x heel groot wordt, komt R steeds dichter bij 10.
We schrijven $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x}{x+10} = 10$ (spreek uit: de limiet van $\frac{10x}{x+10}$ nadert 10 als x nadert naar oneindig).
"Als x erg groot wordt, dan nadert R naar 10" wil het volgende zeggen. Kies een getal dicht bij 10 (zo dicht als je maar wil, bijvoorbeeld $10{,}000001$). Vanaf een bepaalde waarde van x ligt R dichter bij 10 dan het getal dat jij gekozen hebt.

In opgave 30 heb je opgemerkt dat de verhouding van de leeftijden 1 is als de zusjes "het eeuwige leven" zouden hebben. Het antwoord van opgave 30e kun je nu schrijven als:
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+7}{x+1} = 1$.

Hyperbolen

33 Gegeven is de gebroken lineaire functie f met $f(x) = \frac{3x+4}{2x}$.

a Wat moet je voor de getallen a, b, c en d in $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nemen om de functie f te krijgen?

b Laat zien dat $f(x) = 1\frac{1}{2} + \frac{2}{x}$.

c Teken de grafiek van f.

d De grafiek heeft een horizontale en een verticale asymptoot. Welke lijnen zijn dat?

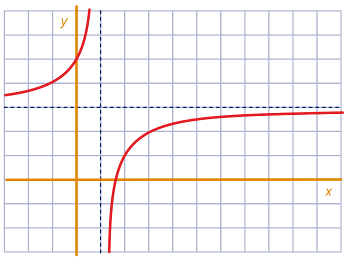
De grafiek van f ontstaat uit de standaardhyperbool door schuiven en rekken.

e Hoe?

De grafiek van een functie is een **hyperbool** als hij door schuiven en rekken uit de standaardhyperbool ontstaat.

34 Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{-2}{x-1} + 3$.
De grafiek van f ontstaat uit die van de standaardhyperbool door eerst verticaal met -2 te vermenigvuldigen. Vervolgens moet je twee keer schuiven.

a Hoe?
Kun je de volgorde van de twee verschuivingen verwisselen?



Hiernaast staat de grafiek van f; het is een hyperbool.
De asymptoten zijn gestippeld.

b Welke lijnen zijn de horizontale en verticale asymptoot van de hyperbool?

c Neem over en vul in:

$\lim_{x \downarrow 1} y = \ldots$ $\quad\quad$ $\lim_{x \to \infty} y = \ldots$

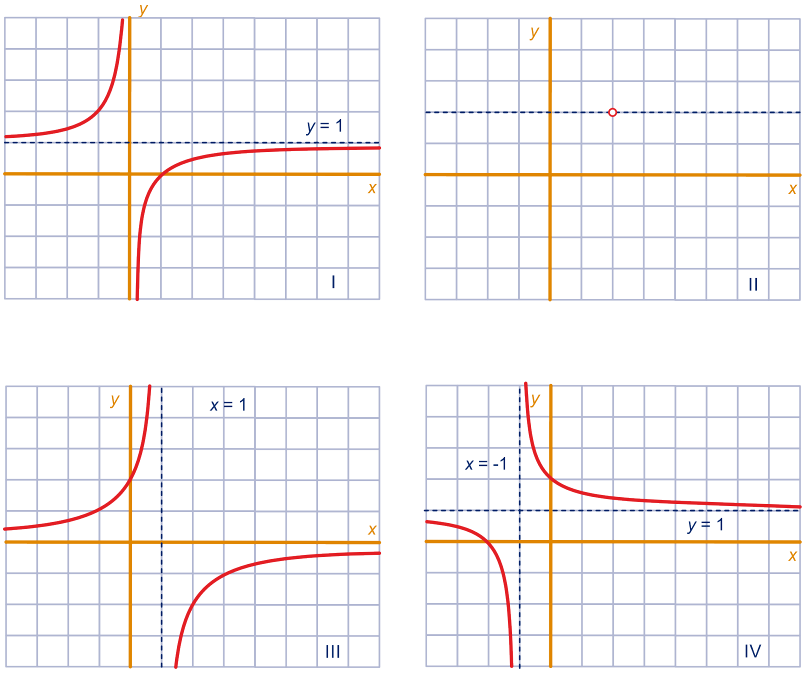
$\lim_{x \uparrow 1} y = \ldots$ $\quad\quad$ $\lim_{x \to -\infty} y = \ldots$

d Wat is het domein van f? En het bereik?

35 Vier functies f, g, h en k met: $f(x) = \frac{-2}{x-1}$, $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $h(x) = \frac{2x-6}{x-3}$ en $k(x) = \frac{x-1}{x}$.
De grafieken I, II, III en IV horen bij deze vier functies (zie volgende pagina).

a Zoek uit welke grafiek bij welke functie hoort, zonder GR of GeoGebra.

b Hoe kun je de verticale en horizontale asymptoten in I, III en IV terugvinden in de formules van f, g en k?



36 f is de functie met functievoorschrift $f(x) = \frac{4}{x+3}$.

a Welke getallen zitten in het domein en in het bereik van f?

b Wat zijn dus de asymptoten van de grafiek van f?

c Teken de grafiek van f.

d Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de lijn $y = x$.

e Voor welke getallen x geldt: $x < f(x)$?

Hint 3.

37 f is de functie met formule $f(x) = \frac{3x+6}{2x+4}$.

Deze formule is ook van de gedaante $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Je zou dus verwachten dat de grafiek een hyperbool is. Maar dat is niet zo.

a Teken de grafiek met GeoGebra of met de GR. Wat voor grafiek krijg je?

b Had je ook al aan de formule kunnen zien dat de grafiek er zo uit zou komen te zien?

Gezien het domein is de grafiek van f niet de hele lijn $y = 1\frac{1}{2}$.

c Wat is het verschil?

We zeggen dat de grafiek van f een **perforatie** heeft.

3.3 Gebroken functies

We bekijken de functie $f(x) = \frac{3x+6}{2x+4}$.
Merk op:

- $\frac{3x+6}{2x+4}$ is te vereenvoudigen tot $1\frac{1}{2}$,
- $\frac{3x+6}{2x+4}$ bestaat niet voor $x = \text{-}2$.

Dus de functie $f : x \rightarrow \frac{3x+6}{2x+4}$ heeft als grafiek de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}$ met uitzondering van het punt met eerste coördinaat -2. Het punt $(\text{-}2, 1\frac{1}{2})$ is een **perforatie** in de grafiek van f.

38 f is de functie met formule $f(x) = \frac{3x+6}{4}$.
Deze functie krijg je door in de algemene vorm van een gebroken lineaire functie $c = 0$ te nemen.
Leg uit dat de grafiek ook geen hyperbool is.

39 $y = \frac{ax+3}{x+1}$

a Onderzoek op de GR of met GeoGebra hoe de grafiek verandert, als je a verandert (maak een schuifknop). Je kunt ook de applet bekijken.

$y = \frac{2x+3}{x+d}$

b Onderzoek op de GR of met GeoGebra hoe de grafiek verandert, als je d verandert. Je kunt ook de applet bekijken.

40

a Bepaal (zonder GR) voor welke waarde van a de grafiek van de functie $y = \frac{2x+a}{3x-3}$ een perforatie heeft.
Licht je antwoord toe.

b Bepaal (zonder GR) voor welke waarde van a de grafiek van de functie $y = \frac{2x+4}{ax-3}$ een perforatie heeft.
Licht je antwoord toe.

c Bepaal (zonder GR) voor welke waarde van a de grafiek van de functie $y = \frac{ax+1}{x+a}$ een perforatie heeft.
Licht je antwoord toe.

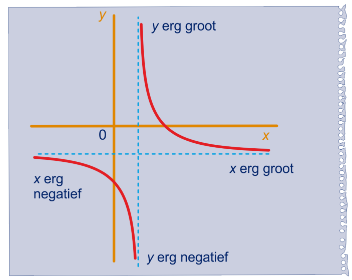
41 $y = \frac{3x+6}{2x+2}$

a Hoe groot is y ongeveer als $x = 1000$?
En hoe groot is y ongeveer als x een ander groot getal is?
Welke lijn is dus horizontale asymptoot van de grafiek?

b Hoe groot is y ongeveer als $x = \text{-}0{,}99$?
Wat weet je van y als x dicht bij -1 komt?
Welke lijn is dus verticale asymptoot van de grafiek?

Hoe bepaal je de asymptoten van $y = \frac{ax+b}{cx+d}$?

- De **horizontale asymptoot** vind je door voor x grote getallen in te vullen of kleine (erg negatieve) getallen. Als y dan erg dicht bij een bepaalde waarde komt, is er bij die waarde een horizontale asymptoot.
- De **verticale asymptoot** kan voorkomen bij die x waarvoor de noemer 0 is. Vul voor x waarden in die de noemer bijna 0 maken; wordt y dan erg groot of erg klein (negatief), dan is er een verticale asymptoot bij deze x.



42

Geef de asymptoten van de grafiek van de volgende functies. Controleer je antwoorden op de GR of met GeoGebra.

a $y = \frac{3x+2}{x+1}$

b $y = \frac{2x}{x+1}$

c $y = \frac{4x-3}{2x+1}$

d $y = \frac{4x-3}{2x}$

43

Gegeven de functie $f : x \to \frac{2x+3}{1-x}$.

a Wat is het domein van f?

b Wat is $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$?

En wat $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

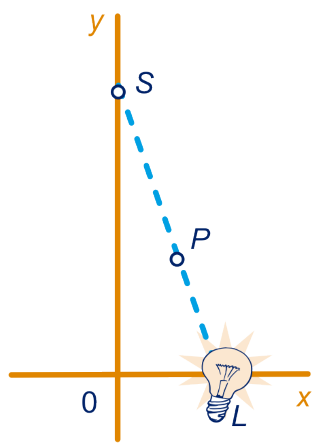
$f(x)$ is te schrijven in de vorm $a + \frac{b}{1-x}$.

c Wat zijn de getallen a en b? Bepaal die langs algebraïsche weg.

d Leg uit dat $a = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

44

Over de x-as beweegt een lampje L. We bekijken de schaduw S van punt $P(1,2)$ op de y-as.
De eerste coördinaat van L noemen we x en de tweede coördinaat van S noemen we y.
Er geldt: $y = \frac{2x}{x-1}$.



a Laat dat zien.

Hint 4.

Als $x < 1$ is er geen schaduw. In dat geval is y de tweede coördinaat van het snijpunt van lijn PL met de y-as.

b Laat dat zien als $x = -3$.

c Teken de grafiek van het verband $y = \frac{2x}{x-1}$.

d Wat zijn de asymptoten?

Opmerking

De grafiek van $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ is niet voor alle keuzen van a, b, c en d een hyperbool. In de opgave 37 en 38 heb je twee uitzonderingen gezien.

De grafiek van $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ is een hyperbool, behalve als $c = 0$ (dan is de grafiek eeen rechte lijn) of als $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (dan is de grafiek een horizontale lijn met een perforatie).

Inverse bewerkingen

45 Een auto rijdt met een snelheid van v km/u. Als de auto plotseling uit alle macht moet remmen (men spreekt dan van een noodstop), legt hij nog een aantal meters af voordat hij stil staat. Dat aantal meters is de remweg r.
Volgens een vuistregel geldt: $r = 0{,}0075v^2$.

a Bereken met welke snelheid de auto reed, als zijn remweg bij een noodstop 170 meter bedraagt.
b Geef een formule voor v, uitgedrukt in r.

46 In Angelsaksische landen wordt de temperatuur vaak gegeven in graden Fahrenheit. Wij doen dat in graden Celsius.
De temperatuur in graden Fahrenheit noemen we F; in graden Celsius noemen we hem C.
Er geldt: $F = 1\frac{4}{5}C + 32$.

a Bereken de temperatuur in graden Celsius als hij in graden Fahrenheit 100 bedraagt.
b Geef een formule voor C, uitgedrukt in F.

In opgave 45 reken je snelheid om in remweg en omgekeerd.

$v \rightarrow 0{,}0075v^2 = r$ en $r \rightarrow \sqrt{133\frac{1}{3}r} = v$
Deze twee functies hebben omgekeerde werking. We zeggen dat ze elkaars **inverse** zijn.
Een ander voorbeeld ben je tegengekomen in opgave 46: temperatuur in graden Celsius (°C) omrekenen in graden Fahrenheit (°F) en omgekeerd zijn inverse bewerkingen.
In hoofdstuk 1 is de inverse aan de orde geweest.

Voorbeeld

De inverse van $x \rightarrow$ **[MAAL 2]** $\rightarrow y = 2x$ is
$x \rightarrow$ **[DEEL DOOR 2]** $\rightarrow y = \frac{x}{2}$.

47 Geef zo ook de inverse van de volgende functies.
$x \rightarrow$ **[PLUS 2]** $\rightarrow y = x + 2$
$x \rightarrow$ **[TEGENGESTELDE]** $\rightarrow y = -x$
$x \rightarrow$ **[OMGEKEERDE]** $\rightarrow y = \frac{1}{x}, x \neq 0$
$x \rightarrow$ **[WORTEL]** $\rightarrow y = \sqrt{x}, x \geq 0$
$x \rightarrow$ **[TOT DE MACHT $\frac{3}{4}$]** $\rightarrow y = x^{\frac{3}{4}}, x \geq 0$

Elementaire inverse bewerkingen zijn
- een getal erbij optellen en dat getal ervan aftrekken,
- vermenigvuldigen met een getal en delen door dat getal,
- worteltrekken en kwadrateren,
- tot de macht c nemen en tot de macht $\frac{1}{c}$ nemen, $c \neq 0$.

3.4 Inverse functies

Opmerking
[KWADRAAT] heeft **[WORTEL]** alleen als inverse bewerking als je het domein beperkt tot getallen x met $x \geq 0$.

Vergelijkingen oplossen

Het oplossen van een vergelijking kun je vaak met behulp van inverse functies begrijpen.

Voorbeeld
Voor welke x geldt: $-(3\sqrt{x} - 5) = 4$?

Deze vergelijking kun je zo zien:
x $\rightarrow$ **[WORTEL]** $\rightarrow$ **[MAAL 3]** $\rightarrow$ **[MIN 5]** $\rightarrow$ **[TEGENGESTELDE]** $\rightarrow 4$

Door de ketting van achter naar voren te doorlopen, met inverse functies, vind je het gezochte getal x:
x $\leftarrow$ **[KWADRAAT]** $\leftarrow$ **[DEEL DOOR 3]** $\leftarrow$ **[PLUS 5]** $\leftarrow$ **[TEGENGESTELDE]** $\leftarrow 4$

We hebben dat eerder zo opgeschreven.

$$\begin{aligned} -(3\sqrt{x} - 5) &= 4 && \text{tegengestelde nemen} \\ 3\sqrt{x} - 5 &= -4 && \text{plus 5} \\ 3\sqrt{x} &= 1 && \text{deel door 3} \\ \sqrt{x} &= \tfrac{1}{3} && \text{kwadrateer} \\ x &= \tfrac{1}{9} \end{aligned}$$

Een stap die je in het zoeken van x zet, kun je ook weer ongedaan maken. De vergelijking in de volgende stap heeft dezelfde oplossing, is **equivalent** met de voorgaande.
Om aan te geven dat twee vergelijkingen dezelfde oplossing hebben, zetten we er een dubbele pijl tussen.
Bovenstaande ziet er dan zó uit.
$-(3\sqrt{x} - 5) = 4 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 5 = -4 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$

48 Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $3(4 - x^2) = -12$

b $\sqrt{2 + \sqrt{2 + x}} = 3$

c $\frac{7}{2x-1} = 2$

Hint 5.

d $\frac{8}{1+\frac{6}{x}} = 2$

49 **a** Wat vind je van het volgende?

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= -\sqrt{3} && \text{kwadrateer} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

b En wat van dit?

$$\begin{aligned} x + 1 &= \sqrt{x+3} && \text{kwadrateer} \\ x^2 + 2x + 1 &= x + 3 && \text{op } 0 \text{ herleiden} \\ x^2 + x - 2 &= 0 && \text{ontbinden} \\ (x+2)(x-1) &= 0 \\ x &= -2 \text{ of } x = 1 \end{aligned}$$

c Los de volgende vergelijkingen in x op.
Controleer je oplossingen.
$x + \sqrt{x+2} = 10$

Hint 6.

$\sqrt{2\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x}$
$\sqrt{2 - \sqrt{x}} = \sqrt{x}$
$\sqrt{2 - \sqrt{x}} = -\sqrt{x}$
$\sqrt{6 - \sqrt{x}} = \sqrt{x}$

Opmerking
Als je linker- en rechterkant van een vergelijking kwadrateert, krijg je (misschien) een vergelijking die niet equivalent is met die waar je mee begon.

als $a = b$, dan $a^2 = b^2$,
Maar het omgekeerde:
als $a^2 = b^2$ dan $a = b$ is niet waar.
Waarom niet?

3.4 Inverse functies

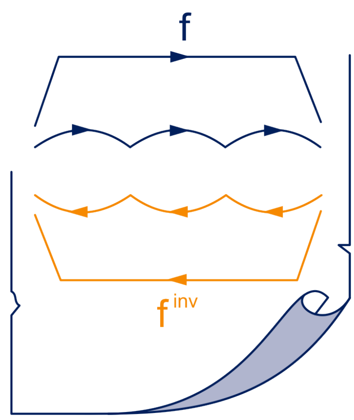
Voorbeeld

$x + 1 = \sqrt{x+3} \Rightarrow (x+1)^2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ of $x = 2$.

Uit $x + 1 = \sqrt{x+3}$ volgt wel: $(x+1)^2 = x + 3$, maar niet het omgekeerde. Daarom schrijven we hierboven een enkele pijl $\Rightarrow$ na het kwadrateren van beide kanten van de gelijkheid.
In zo'n geval moet je je oplossingen zeker controleren.

Inverse functie

In het volgende bekijken we eenvoudige bewerkingen zoals in opgave 47. Door deze na elkaar te schakelen, worden hiermee ingewikkeldere functies opgebouwd. Van deze functies vragen we de inverse.



50 Geef een formule voor de inverse functie van de volgende functies. Zie ook opgave 48.

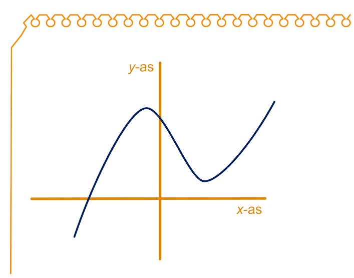
a $y = 3(4 - x^3)$

b $y = \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}$

c $y = \frac{7}{2x-1}$

d $y = \frac{8}{1+\frac{6}{x}}$

51 In paragraaf 2 van hoofdstuk 1 hebben we al gezien dat niet elke bewerking een inverse heeft, bijvoorbeeld **[KWADRAAT]** en **[ABS]**, zie de opmerkingen vóór opgave 15 en opgave 23.
Hiernaast staat de grafiek van een of andere functie f.



a Hoe zie je aan de grafiek dat f geen inverse functie heeft?

b Teken de grafieken van $y = 3(4 - x^3)$ en zijn inverse in één window op de GR, zie het eerste onderdeel van de vorige opgave.

De twee grafieken zijn elkaars spiegelbeeld in een zekere lijn.

c Wat is de vergelijking van de lijn?

De grafieken van twee functies die elkaars inverse zijn, liggen gespiegeld ten opzichte van de lijn $y = x$.

d Kun je dat uitleggen?

e Controleer de juistheid van de bewering in het vorige onderdeel voor de vijf elementaire functies uit opgave 47.

De functie g is de **inverse** van f als g de werking van f neutraliseert, dus als:
$x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow y = x$
Dus $g(f(x)) = x$ voor alle x uit het domein van f.
We noteren de inverse van f met f^{-1}.

Niet elke functie heeft een inverse, bijvoorbeeld de functie **[KWADRAAT]**.

52

a Wat is de inverse functie van de functie f met $f(x) = 2x + 3$?

Gegeven de functie f met $f(x) = ax + b$, voor zekere getallen a en b.

b Voor welke a en b heeft de functie f een inverse?

c Geef een formule voor de inverse van de functie f met $f(x) = ax + b$, voor zekere getallen a en b.

53

De functie $f : x \rightarrow x^2$ heeft geen inverse. Wel als je het domein beperkt tot de getallen x met $x \geq 0$.
Dan is de inverse functie $x \rightarrow \sqrt{x}$.
Ook als je het domein beperkt tot de getallen x met $x \leq 0$ heeft f een inverse.
Geef een formule voor die inverse.

54 f is de functie met $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

a Vul de tabel in:

x	1	-3	100	0,01	-0,01	-1000
$f(x)$						

b Teken de grafiek van f.

Neem voor x achtereenvolgens $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ en $\frac{1}{10.000}$.

c Wat is $f(x)$ bij deze invoer?

Er geldt: $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = 1$.

Neem voor x achtereenvolgens $-\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{100}$, $-\frac{1}{1000}$ en $-\frac{1}{10.000}$.

d Wat is $f(x)$ bij deze invoer?

e Wat is $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x)$?

55 **a** Welke waarden $\frac{x-1}{|x-1|}$ neemt x aan als $x > 1$?
En als $x < 1$?

f is de functie met $f(x) = \frac{x^2-x}{|x-1|}$.

b Wat is het domein van deze functie?

c Teken de grafiek van f met GeoGebra of de GR.

De grafiek bestaat uit delen van de lijnen $y = x$ en $y = -x$.

d Verklaar dit met de formule van $f(x)$.

Hint 7.

e Wat is $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x)$? En wat $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x)$?

Opmerking

Als $x > 1$, dan $|x-1| = x-1$,
als $x < 1$, dan $|x-1| = -(x-1)$.
Als $x > 1$, dan $\frac{x^2-x}{|x-1|} = \frac{x(x-1)}{|x-1|} = x$,
als $x < 1$, dan $\frac{x^2-x}{|x-1|} = \frac{-x(x-1)}{|x-1|} = -x$.

56 g is de functie met $g(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$.

a Wat is het domein van g?

De grafiek van g is een deel van de lijn $y = x$.

b Verklaar dat.

De grafiek van g uit opgave 56 heeft een **perforatie** $(1,1)$.
Hier geldt: $\lim\limits_{x \uparrow 1} g(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1} g(x) = 1$.
Omdat $\lim\limits_{x \uparrow 1} g(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1} g(x) = 1$, zeggen we $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$.

In opgave 55 is $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) \neq \lim\limits_{x \downarrow 1} f(x)$.
Daarom bestaat $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ niet.

57

f is de functie met $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

a Wat is het domein van f?

b Teken de grafiek van f met GeoGebra of de GR.

De grafiek van f lijkt wel de lijn $y = x + 2$.

c Is dat zo?

d Wat is $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? Bepaal dit langs algebraïsche weg.

De functie $x \to \frac{x^2-4}{x-2}$ heeft perforatie $(2,4)$.

e Wat is $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ en wat $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

De grafiek van f heeft geen horizontale asymptoot.

58

Gegeven de functie $f : x \to \frac{x^2+x}{x^2-x}$.

a Wat is het domein van f?

b Teken de grafiek van f met GeoGebra of de GR.

De grafiek van f is op een perforatie na een hyperbool.

c Geef langs algebraïsche weg een formule bij de hyperbool in de vorm: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

d Wat is $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x)$ en $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x)$?

e Welk punt is perforatie van de grafiek van f?

f Wat kun je zeggen van $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

g Wat is $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

h Geef een vergelijking van elke asymptoot van f.

Zie opgave 57.

Dat $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ kunnen we kort als volgt verantwoorden.

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4.$

Zie opgave 58.

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x-1} = -1.$

59 Gegeven de functie $f : x \to \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$.

a Wat is het domein van f?

b Heeft de grafiek van f een perforatie?

c Wat is $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$, $\lim_{x \downarrow 1} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow 1} f(x)$?

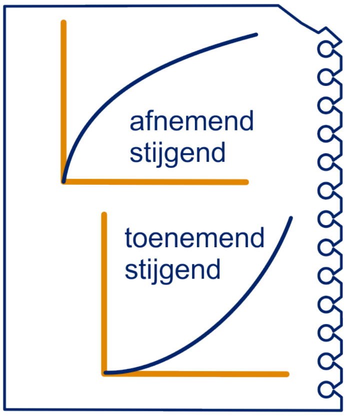
d Wat kun je zeggen van $\lim_{x \to 0} f(x)$ en $\lim_{x \to 1} f(x)$?

e Wat is $\lim_{x \to \infty} f(x)$ en $\lim_{x \to -\infty} f(x)$?

f Geef een vergelijking van elke asymptoot van f.

Machtige verbanden

Een **machtsfunctie** is een functie van de vorm $y = a \cdot x^b$, voor zekere waarden van a en b. Tenzij anders vermeld, nemen we voor het domein van deze functie de positieve getallen.
De grafiek van $y = a \cdot x^b$, met $a > 0$ is **afnemend stijgend** als $0 < b < 1$ en **toenemend stijgend** als $b > 1$.



Je kunt vergelijkingen met machtsfucties exact oplossen door het linkerlid en het rechterlid tot dezelfde macht te verheffen.
Immers: $x^b = a \Leftrightarrow (x^b)^{\frac{1}{b}} = a^{\frac{1}{b}}$
en hieruit volgt $x = a^{\frac{1}{b}}$ (x en a positief en $b \neq 0$).

Voorbeeld

Los exact op: $(\frac{1}{2}x)^{-3} = x^{1\frac{1}{2}}$. Schrijf je antwoord zonder gebroken en negatieve exponenten.

Oplossing

$$(\tfrac{1}{2}x)^{-3} = x^{1\frac{1}{2}}$$

Haakjes wegwerken

$$2^3 \cdot x^{-3} = x^{1\frac{1}{2}}$$

Deel door x^{-3}

$$2^3 = x^{4\frac{1}{2}}$$

Als $x^b = a$ dan $x = a^{\frac{1}{b}}$.

$$x = (2^3)^{\frac{2}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

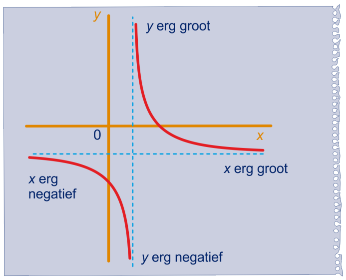
Functies in samenhang

Gegeven een functie f.

- Neem aan: $g(x) = f(ax)$ met $a \neq 0$.
  De grafiek van g krijg je dan door de grafiek van f horizontaal met $\frac{1}{a}$ te vermenigvuldigen.
- Neem aan: $g(x) = a \cdot f(x)$.
  De grafiek van g krijg je dan door de grafiek van f *verticaal* met a te vermenigvuldigen.
- Neem aan: $g(x) = f(x + a)$ met $a > 0$.
  Je krijgt de grafiek van g door de grafiek van f a eenheden naar *links* te schuiven.
  Neem aan: $g(x) = f(x - a)$ met $a > 0$.
  Je krijgt de grafiek van g door de grafiek van f a eenheden naar *rechts* te schuiven.
- Neem aan: $g(x) = f(x) + a$ met $a > 0$. Je krijgt de grafiek van g door de grafiek van f a eenheden naar *boven* te schuiven.

Neem aan: $g(x) = f(x) - a$ met $a > 0$. Je krijgt de grafiek van g door de grafiek van f a eenheden naar *beneden* te schuiven.

Gebroken functies
De standaardhyperbool is de grafiek van de functie $y = \frac{1}{x}$.
Deze grafiek heeft twee asymptoten: de x-as en de y-as.
De grafiek van een functie is een **hyperbool** als hij door schuiven en rekken uit de standaardhyperbool ontstaat.



Een **gebroken lineaire functie** is van de vorm: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ voor zeker getallen a, b, c en d. De grafiek van deze functie is een hyperbool (behalve als $c = 0$ of $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$). De asymptoten van $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ zoek je als volgt.

- De **horizontale asymptoot** vind je door voor x grote getallen in te vullen of kleine (erg negatieve) getallen. Als y dan erg dicht bij een bepaalde waarde komt, is er bij die waarde een horizontale asymptoot.
- De **verticale asymptoot** kan voorkomen bij die x waarvoor de noemer 0 is. Vul voor x waarden in die de noemer bijna 0 maken; wordt y dan erg groot of erg klein (negatief), dan is er een verticale asymptoot bij deze x.

Voorbeeld
De grafiek van de functie $f : x \rightarrow \frac{1-x}{2+x}$ is een hyperbool. Dit toon je als volgt aan.
Je kunt $\frac{1-x}{2+x}$ schrijven als $-1 + \frac{3}{2+x}$. Hiervoor geldt:

- $\lim\limits_{x \downarrow -2} f(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow -2} f(x) = -\infty$,
  dus $x = -2$ is de verticale asymptoot,
- $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$ en $\lim\limits_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$,
  dus $y = -1$ is de horizontale asymptoot.

Voorbeeld
De grafiek van de functie $f : x \rightarrow \frac{1}{-x+3}$ ontstaat uit de standaardhyperbool door:

- eerst te vermenigvuldigen en dan te verschuiven,

$y = \frac{1}{x}$

horizontaal (of verticaal) vermenigvuldigen met -1 (spiegelen in een van de assen)

$y = -\frac{1}{x}$

3 eenheden naar rechts schuiven

$y = -\frac{1}{x-3}$

- of eerst verschuiven en dan vermenigvuldigen,

$$y = \frac{1}{x}$$

3 eenheden naar rechts schuiven

$$y = \frac{1}{x-3}$$

verticaal vermenigvuldigen met -1 (spiegelen in de x-as)

$$y = -\frac{1}{x-3}$$

- of eerst verschuiven en dan vermenigvuldigen (anders).

$$y = \frac{1}{x}$$

3 eenheden naar links schuiven

$$y = \frac{1}{x+3}$$

horizontaal vermenigvuldigen met -1 (spiegelen in de y-as)

$$y = \frac{1}{-x+3} = -\frac{1}{x-3}$$

Limieten

Gegeven is de functie $f : x \to \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.
Het domein bestaat uit alle getallen x, behalve $x = 1$.
Omdat $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1$
bestaat, heeft de grafiek van f een perforatie $(1,-1)$.

Gegeven is de functie $g : x \to \frac{x^2-3x+2}{|x-1|}$
Het domein van g bestaat uit alle getallen x, behalve $x = 1$.
Er geldt:

- $\lim_{x \downarrow 1} g(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \downarrow 1} (x - 2) = -1$,
- $\lim_{x \uparrow 1} g(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{-x+1} = \lim_{x \uparrow 1} (-x + 2) = 1$.

Conclusie: $\lim_{x \uparrow 1} g(x) \neq \lim_{x \downarrow 1} g(x)$, dus $\lim_{x \to 1} g(x)$ bestaat niet.
De grafiek van g maakt een 'sprong' bij $x = 1$.

3.7 Extra opgaven

1

Gegeven de functie $f: x \rightarrow \frac{ax+3}{2x-4}$, voor alle mogelijke waarden van a.

a Bereken langs algebraïsche weg voor welke waarden van a de grafiek van f een perforatie heeft.

b Bereken langs algebraïsche weg voor welke waarden van a de grafiek van f een horizontale asymptoot $y = 3$ heeft.

2

Gegeven is de functie $f: x \rightarrow \frac{|x|-1}{x-1}$.

a Teken de grafiek van f op de GR of met GeoGebra.

Het ziet er naar uit dat de grafiek bestaat uit een deel van een hyperbool en een deel van een rechte lijn. Dat zie je als je de formule voor $f(x)$ zonder absoluutstrepen schrijft.

b Schrijf de formule van $f(x)$ zonder absoluutstrepen:

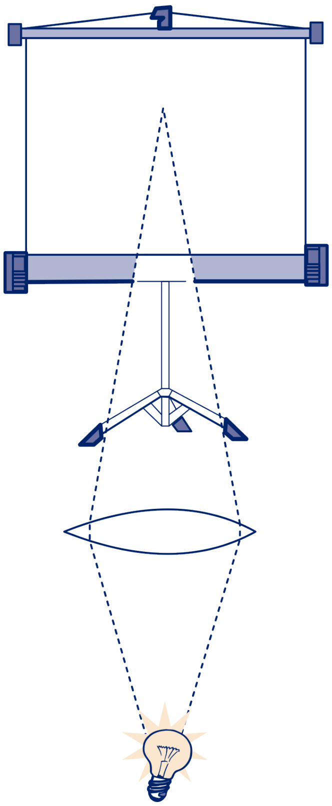
$$f(x) = \begin{cases} \ldots \text{ als } x > 0 \\ \ldots \text{ als } x < 0 \end{cases}$$

c Ga na of de grafiek van f een perforatie heeft.

d Wat is $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ en wat $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

3

Een lampje is opgesteld voor een lens. Achter de lens bevindt zich een scherm waarop het beeld van het lampje wordt opgevangen. Als het lampje verplaatst wordt, moet je het scherm mee bewegen om een scherp beeld te houden.
De afstand lampje-lens noemen we v, de afstand scherm-lens noemen we b (beide in dm).
Bij onze lens geldt: $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$.



a Bereken b als $v = 3$.

Uiteraard kunnen v en b alleen positieve waarden aannemen.

b Leg uit dat hieruit volgt dat v en b zelfs groter dan 2 moeten zijn.

c Wat weet je van b als v een groot getal is?
Wat weet je van b als v maar een klein beetje groter dan 2 is?

De formule $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ kan worden omgewerkt tot de formule $b = 2 + \frac{4}{v-2}$.

d Ga dat na.

De v-b-grafiek is een stuk van een hyperbool.

e Wat zijn de asymptoten van die hyperbool?

4 Gegeven is het verband $y = \frac{ax+2}{bx+1}$, voor zekere getallen a en b.

Er zijn getallen a en b waarbij de grafiek van het verband een horizontale lijn is met een perforatie.

a Geef langs algebraïsche weg een vergelijking van die lijn.

b Bereken a en b exact als de perforatie eerste coördinaat 2 heeft.

Er zijn getallen a en b waarvoor het verband horizontale asymptoot $y = 3$ en verticale asymptoot $x = 2$ heeft.

c Bereken a en b exact.

Er zijn getallen a en b waarvoor de grafiek van het verband een rechte lijn door het punt $(2,6)$ is.

d Bereken a en b exact.

5 Gegeven is de functie f met $f(x) = 2\sqrt{x} + 2$.

De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \sqrt{x}$ door eerst verticaal te vermenigvuldigen en vervolgens verticaal te verschuiven.

a Hoe?

De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \sqrt{x}$ door eerste verticaal te verschuiven en dan verticaal te vermenigvuldigen.

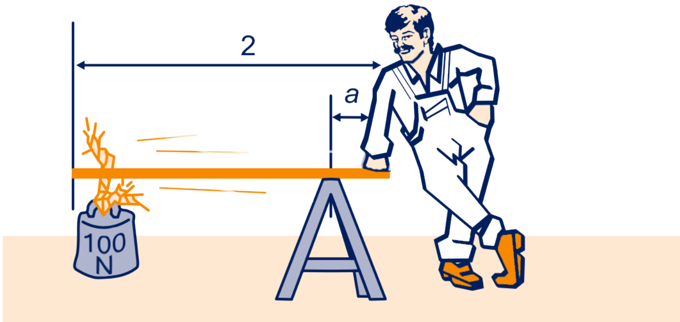
b Hoe?

De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \sqrt{x}$ door eerst horizontaal te vermenigvuldigen en daarna een verticaal te verschuiven.

c Hoe?

3.7 Extra opgaven

6 Een plank van 2 meter lengte wordt in één punt ondersteund.



Aan het linker uiteinde van de plank hangt een gewicht van 100 newton. Iemand houdt de plank in evenwicht door hem aan het rechter uiteinde naar beneden te drukken, zeg met een kracht van k newton. De lengte van het rechter stuk (vanaf het steunpunt) noemen we a meter. We verwaarlozen het gewicht van de plank.

Er geldt de formule: $k = 100(\frac{2}{a} - 1)$.

a Leid deze formule af met de hefboomwet.

Natuurlijk zijn k en a positief.

b Bepaal langs algebraïsche weg welke waarden k en a kunnen aannemen.

c Schrijf a als functie van k, dus druk a in k uit.

7 Gegeven de functie $y = \frac{2x+1}{x}$.

a Schrijf $\frac{2x+1}{x}$ in de vorm: $\frac{1}{x} + \_$ en geef een formule voor de inverse functie.

Gegeven is de functie $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

b Geef een formule voor de inverse functie.

Hint 8.

c Welke symmetrie heeft de grafiek van de functie $y = \frac{2x+1}{x-2}$? Waarom?

Delen door $x - a$

Functies van de vorm $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ heten **veeltermfuncties**.
Een kwadratische functie is bijvoorbeeld een veeltermfunctie.

1

$y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ is een veeltermfunctie.

a Wat moet je hierboven voor a, b, c en d kiezen om deze functie krijgen?

Ook de functie $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ is een veeltermfunctie.

b Wat moet je hierboven voor a, b, c en d kiezen om deze functie te krijgen?

c Noem een paar functies die geen veeltermfunctie zijn.

2

We gaan $x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ delen door $x - 2$.

$x^3 -$	$4x^2 +$	$5x - 6 =$
$x^2(x-2) + 2x^2 -$	$4x^2 +$	$5x - 6 =$
$x^2(x-2) +$	$-2x^2 +$	$5x - 6 =$
$x^2(x-2) +$	$-2x(x-2) - 4x +$	$5x - 6 =$
$x^2(x-2) +$	$-2x(x-2) +$	$x - 6 =$
$x^2(x-2) -$	$2x(x-2) +$	$(x-2) - 4 =$

$(x^2 - 2x + 1)(x-2) - 4$

Ga na dat bovenstaande juist is.

Hint 9.

Dus: $\frac{x^3-4x^2+5x-6}{x-2} = \frac{(x^2-2x+1)(x-2)-4}{x-2} = \frac{(x^2-2x+1)(x-2)}{x-2} - \frac{4}{x-2} = x^2 - 2x + 1 - \frac{4}{x-2}$

We zeggen ook:
$x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ gedeeld door $x - 2$ is:
$x^2 - 2x + 1$ rest -4.

3

Gegeven de veeltermfunctie f met $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$.
Neem over en zet de juiste getallen op de invulplaatsen.

a $f(x) = (x^3 + x^2 + x +)(x + 3) +$

b $f(x) = (x^3 + x^2 + x +)(x - 1) +$

c $f(x) = 2x(x^3 + x^2 + x +) +$

d $f(x) = (x^3 + x^2 + x +)(x + 2) +$

Het getal op de laatste invulplaats in de vier onderdelen van opgave 3 noemen we de **rest**.
In onderdeel b is de rest bij deling van $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ door $x - 1$ gelijk aan 0.
We zeggen $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ is **deelbaar** door $x - 1$.

Stelling
Voor elke veeltermfunctie f en elk getal a is er een veeltermfunctie g en een getal c met:
$f(x) = g(x)(x - a) + c$.
c heet **de rest** bij deling van $f(x)$ door $x - a$.
Als $c = 0$, dan heet $f(x)$ **deelbaar** door $x - a$.

4 We bekijken nog eens de veeltermfunctie f met $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ uit opgave 2. Daar heb je gezien dat $f(x) = (2x^3 - 9x^2 + 31x - 95)(x + 3) + 284$.

Zonder te rekenen, kun je zeggen: $f(-3) = 284$.

a Leg dat uit.

Uit de stelling hierboven volgt dat er een veeltermfunctie g is zó, dat $f(x) = g(x)(x - 1) + c$. Zonder de deling uit te voeren kun je gemakkelijk uitrekenen dat moet gelden $c = 0$.

b Hoe?

De rest bij deling door $x + 2$ van $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ kun je ook uitrekenen zonder de deling uit te voeren zoals je dat in opgave 3d gedaan hebt.

c Hoe?

5 $y = x^{10} - 1$
Zonder een deling uit te voeren, kun je weten dat $x^{10} - 1$ deelbaar is door $x - 1$.

a Hoe?
b Ga na dat $x^{10} - 1 = (x^9 + x^8 + x^7 + \ldots x^2 + x + 1)(x - 1)$.
c Voor welke waarde van a is $x^{10} - a$ deelbaar door $x - 2$?

$x^3 + 5x^2 + 6x$ is deelbaar door $x + 2$.

d Door welk getal in te vullen kun je dat zien?

In plaats van een deling uit te voeren, kun je $x^3 + 5x^2 + 6x$ ook ontbinden.

e Doe dat.
In de ontbinding zie je ook dat $x^3 + 5x^2 + 6x$ deelbaar is door $x + 2$.

Als $f(x) = g(x) \cdot (x - a) + c$ voor veeltermfuncties f en g en getallen a en c, dan: $c = f(a)$.

Factorstelling
Voor een veeltermfunctie f en een getal a geldt:
$f(x)$ deelbaar door $x - a \Leftrightarrow f(a) = 0$.

Perforaties

6 Gegeven de functie $f : x \to \frac{2x^4-3x^3+4x^2-2x-1}{x-1}$ en de functie g met $g(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$. Zie opgave 3b.

a Teken de grafieken van de functies f en g op je GR.
Zijn de grafieken van f en g hetzelfde?

De grafiek van f heeft een perforatie.

b Geef langs algebraïsche weg de coördinaten van de perforatie.

c Wat is $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^4-3x^3+4x^2-2x-1}{x-1}$?

7 Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^3-3x^2+x-2}{x-3}$.
Er geldt: $f(x) = g(x)(x-3) + c$ voor een of andere veeltermfunctie g en een getal c.

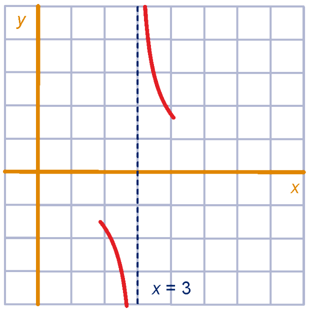
a Bepaal $g(x)$ en c.

Je kunt een vermoeden krijgen van $\lim\limits_{x \uparrow 3} f(x)$ door voor x een getal net kleiner dan 3 in $f(x)$ in te vullen, bijvoorbeeld $2{,}9999$.

b Wat denk je is $\lim\limits_{x \uparrow 3} f(x)$?

c Wat denk je is $\lim\limits_{x \downarrow 3} f(x)$?

Een redenering bij de antwoorden op de vorige twee vragen gaat als volgt.
Als $x \uparrow 3$, dan $x^3 - 3x^2 + x - 2 \to 1$ en $x - 3 \uparrow 0$, je moet 'bijna' 1 delen door een negatief getal steeds dichter bij 0, dus je gaat naar $-\infty$.
Als $x \downarrow 3$, dan $x^3 - 3x^2 + x - 2 \to 1$ en $x - 3 \downarrow 0$, dus je moet 'bijna' 1 delen door een positief getal steeds dichter bij 0, dus je gaat naar ∞.
Dus: $\lim\limits_{x \uparrow 3} f(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x \downarrow 3} f(x) = \infty$.



De grafiek van f heeft een verticale asymptoot $x = 3$, zie plaatje.

d Teken de grafiek van f op de GR of in GeoGebra. Zorg daarbij dat je de lijn $x = 3$ in het WINDOW hebt.

Zonder $x - 3$ te delen op $x^3 - 3x^2 + x - 4$ kun je nagaan of de grafiek van de functie k, met $k(x) = \frac{x^3-3x^2+x-4}{x-3}$ een perforatie heeft in het punt met eerste coördinaat 3.

e Hoe?

Er is een getal a waarvoor de functie $h : x \to \frac{x^3-3x^2+x-a}{x-3}$ een perforatie heeft.

f Bepaal het getal a en de coördinaten van de perforatie.

Voorbeeld

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^3-3x^2+x-2}{x-3}$.

Als $x \uparrow 3$, dan

- geldt voor de teller: $x^3 - 3x^2 + x - 2 \to 1$
- en voor de noemer: $x - 3 \uparrow 0$.

Dus $\lim\limits_{x \uparrow 3} f(x) = -\infty$.

Als $x \downarrow 3$, dan

- geldt voor de teller: $x^3 - 3x^2 + x - 2 \to 1$
- en voor de noemer: $x - 3 \downarrow 0$.

Dus $\lim\limits_{x \downarrow 3} f(x) = \infty$.

Conclusie:
de grafiek van f heeft een verticale asymptoot $x = 3$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie h met $h(x) = \frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$.
Voor $x = 3$ wordt $x^3 - 3x^2 + x - 3$ gelijk aan 0.
Dan heeft de grafiek van de functie h met een perforatie met eerste coördinaat 3.

8 Gegeven de functie $f : x \to \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

a Wat is het domein van f?

b Teken de grafiek van f in GeoGebra of op de GR.

Je kunt aan de getekende grafiek niet zien dat 4 niet in het domein zit.
Zo te zien moet de grafiek van f wel een perforatie hebben en dus zal $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ wel bestaan. Door voor x een getal heel dicht bij 4 in te vullen, bijvoorbeeld $4{,}001$, kun je de coördinaten van de perforatie benaderen.

c Doe dat.

d Wat denk je is $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$?

9 We gaan de coördinaten van de perforatie van de functie f :
$x \to \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ uit de vorige opgave exact berekenen.
Je kunt $x-4$ 'ontbinden'. Als volgt:
$x-4=(\sqrt{x}-2)(\cdots)$

a Wat moet er ingevuld worden?

b Hoe kun je $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ nu exact berekenen?

Je kunt $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ ook anders berekenen.

c Ga na $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x}+2$ als $x \neq 4$.

Uit bovenstaande volgt:
$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}+2 = 4$

Voorbeeld

We berekenen $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-4x^2}{x^3-8}$
Als we voor $x = 2$ invullen, levert dit in teller en noemer 0 op, dus teller en noemer zijn volgens de factorstelling deelbaar door $x-2$. We halen in teller en noemer de factor $x-2$ buiten haakjes. Je krijgt:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x^3+2x)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$.

Vervolgens vereenvoudig je en vult voor $x=2$ in.

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^3+2x)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^3+2x)}{(x^2+2x+4)} = \frac{8+4}{4+4+4} = 1$$

Voorbeeld

We berekenen $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2}$.
Als we voor $x=4$ invullen, levert dit in teller en noemer 0 op.
De factor $x-4$ in de noemer kun je 'zichtbaar' maken door $\frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2}$ met $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$ te vermenigvuldigen.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \to 4} \frac{x(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)}{x-4}\cdot.$$

Vervolgens vereenvoudig je en vult voor $x=4$ in.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \to 4} x(\sqrt{x}+2) = 16$$

10

Bereken exact:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2}{3x^2}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^3}{3x^4}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^4}{3x^3}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2-x}{3x}$

Bron: CTWO Bijsluiter_limieten_vwo_wiskunde B

11

Bereken exact:

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-2}$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$

12

Gegeven de veeltermfunctie f met $f(x) = x^4+2x^3+x^2+3x+1$.

Er geldt: $\frac{f(x)}{x^2+1} = x^2 + 2x + \frac{x+1}{x^2+1}$.

a Laat dat zien.

$\frac{f(x)}{x^2} = \_x^2 + \_x + \_ + \frac{\_x+\_}{x^2}$

b Bepaal welke getallen je in moet vullen.

Machtige verbanden

1

a De ribbe van een kubus noemen we r. $O^3 = 216r^6$ en $V^2 = r^6$, dus $O^3 = 216\,I^2$, dus $c = \frac{1}{216}$.

b Neem beide kanten tot de macht $\frac{1}{2}$, dan krijg je:
$\left(V^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(c \cdot O^3\right)^{\frac{1}{2}}$, dus $V = c^{\frac{1}{2}} \cdot O^{3 \cdot \frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} \cdot O \cdot O^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} \cdot O\sqrt{O}$, dus $k = \sqrt{c}$ $= \frac{1}{36}\sqrt{6}$.

2

a $\frac{8}{\frac{1}{4}\pi} = \frac{32}{\pi}$ m/s

b Per sec gaat er $10v \cdot \frac{1}{4}\pi d^2$ liter door de buis.
Dus $H = 10v \cdot \frac{1}{4}\pi d^2$.

c $v = \frac{40}{\pi} \cdot d^{-2}$, $a = 12{,}73$ en $b = -2{,}00$.

3

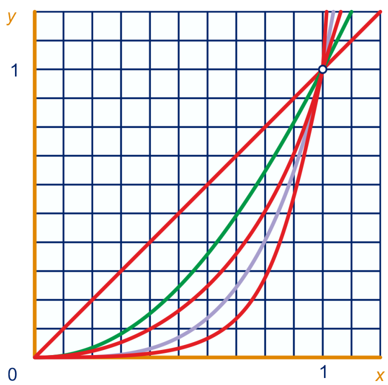
a $12 \cdot 30^{\frac{2}{3}} \approx 116$ gram

b $H = 12 \cdot 521^{\frac{2}{3}} \approx 777$ gram, dus EQ is $2355 : 777 \approx 3{,}0$.

4

a $(0{,}0)$ en $(1{,}1)$
$0^\alpha = 0$ en $1^\alpha = 1$ ongeacht α.

b Zie figuur.



c Je moet x^2 met x^2 (dus een getal kleiner dan 1) vermenigvuldigen om x^4 te krijgen.

5

a Dan $x > 1$ en $x^{-1} - x^{-2} = \frac{5}{36} \Leftrightarrow 5x^2 - 36x + 36 = 0$, dus $x = 6$.

b Dan $x < 1$ en $x^{-2} - x^{-1} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9+12}}{6}$, dus $x = 0{,}60$.

c Kleiner dan $\frac{1}{100}$.

d Groter dan 100.

6

a De grafiek van $y = x^{1{,}6}$ ligt boven die van $y = x^{1{,}7}$ als $0 < x < 1$ en eronder als $x > 1$.

b De grafiek van $y = x^{0,6}$ boven de grafiek van $y = x^{0,7}$ als $0 < x < 1$ en eronder als $x > 1$.

c $y = x^a$ is toenemende stijgend als $a > 1$ en afnemend stijgend als $0 < a < 1$.

7 Ik lees af $1{,}4^{\alpha} = 2{,}3$: vervolgens vul ik voor $\alpha = 2{,}0$, $\alpha = 2{,}1$ enzovoort in.
Ik vind $\alpha = 2{,}5$.

8

a

x	7	10	$\sqrt{7}$	$\sqrt{a}$
y	49	100	7	a

b Als $x = a^{\frac{1}{2}}$, dan $x^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$.

c $(5^{3\frac{1}{2}})^{\frac{2}{7}} = 5^{\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{7}} = 5^1 = 5$

d Als je $x = 5^{3\frac{1}{2}}$ invult in $x^{\frac{2}{7}} = 5$, dan klopt het.

e $5^{-\frac{2}{7}}$

9

a $x = a^{\frac{1}{b}}$ invullen in $x^b = a$ geeft: $(a^{\frac{1}{b}})^b = a^1 = a$.

b $y = x^b$ is stijgend als $b > 0$; $y = x^b$ is dalend als $b < 0$, dus y neemt geen enkele waarde meer dan één keer aan.

10

a $0{,}3 \cdot 2500^{\frac{3}{4}} \approx 106$ gram

b $(\frac{10.000}{0{,}3})^{\frac{4}{3}} \approx 1.072.766$ gram ≈ 1073 kg

c $G = \left(\frac{10}{3} \cdot E\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{4}{3}} E^{\frac{4}{3}} \approx 4{,}98\, E^{\frac{4}{3}}$

11

a $x^2\sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow x^{2\frac{1}{2}} = 10 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{100}$

b $\sqrt[4]{x^3} = 10 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4}} = 10 \Leftrightarrow x = 10^{1\frac{1}{3}} = 10\sqrt[3]{10}$

c

$$\sqrt{x} = 10\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 10x^{\frac{1}{3}}$$

deel door $x^{\frac{1}{3}}$

$$x^{\frac{1}{6}} = 10 \Leftrightarrow x = 1.000.000$$

d

$$x^2\sqrt{2x} = x^4 \Leftrightarrow x^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^4 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{2\frac{1}{2}} = x^4$$

deel door $x^{2\frac{1}{2}}$

$$2^{\frac{1}{2}} = x^{1\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

e

$$\sqrt{(2x)^3} = x^4 \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = x^4$$

deel door $x^{\frac{3}{2}}$

$$2^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8}$$

f

$$x^2\sqrt{x} - 10x\sqrt{x} + 9\sqrt{x} = 0$$

deel door $\sqrt{x}$

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ of } x = 9$$

12

a $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow x^{\frac{8}{3}} = 2 \Leftrightarrow x = 2^{\frac{3}{8}}$. Snijpunt is $(2^{\frac{3}{8}}, 2^{\frac{1}{8}})$.

b $f(x) = 3 \cdot g(x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1\frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow x^{2\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{8}}$

Dus $B(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{8}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}})$ en $AB = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{\frac{2}{3}}$.

13

De eerste coördinaat van Q noemen we a, dan is die van R: $2a$.
Er geldt: $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{2}(2a)^3$.
Dan: $a^{\frac{1}{3}} = 4a^3 \Leftrightarrow a^{\frac{8}{3}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = (\frac{1}{4})^{\frac{3}{8}}$.
De lengte van lijnstuk PR is $2a = 2 \cdot (\frac{1}{4})^{\frac{3}{8}} \approx 1{,}19$.

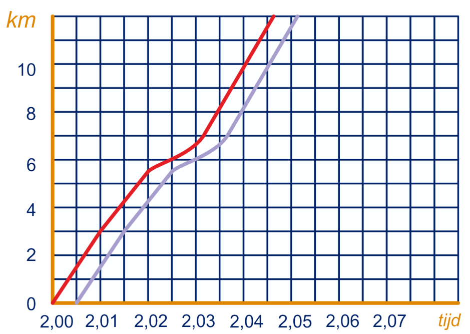
Functies in samenhang

14

a $\frac{6 \text{ km}}{2 \text{ min}} = 180$ km/u; De grafiek loopt daar nagenoeg recht. Het is de helling van de grafiek om 2.00 uur.

b Na 6 km; 60km/uur.

c Zie figuur.



d $1\frac{1}{2}$ km

e Ongeveer 2.02.40 u, 600 meter

f $\frac{1}{2}$ minuut (= 1 hokje) naar rechts verschuiven.

g $Pi(1) = 3$ km ; $Pi(3\frac{1}{2}) = 7\frac{1}{2}$ km ; $t = 4$

h $Po(1\frac{1}{2}) = Pi(1)$; $Po(4) = Pi(3\frac{1}{2})$; $t = 4\frac{1}{2}$

i $Po(t) = Pi(t - \frac{1}{2})$

15

a $w(5) = h(0)$; $w(7) = h(2)$; $w(t) = h(t-5)$

b De grafiek van h moet je 5 eenheden naar rechts schuiven om die van w te krijgen.

c $a(t) = h(t+10)$

d De grafiek van h moet je 10 eenheden naar links schuiven om die van a te krijgen.

16

-

17

$g(x) = f(x) + 10$ voor alle x.

18

a $(3{,}4)$

b $g(x) = f(x-3) + 4 = (x-3)^2 + 4$

19

Als een horizontale lijn de grafiek van f in twee punten met afstand 3 snijdt, dan zijn de eerste coördinaten van die punten $1\frac{1}{2}$ en $-1\frac{1}{2}$.

De tweede coördinaten van die punten is $(1\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4}$, dus $A\,(-4,-3)$ komt af van $(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$.

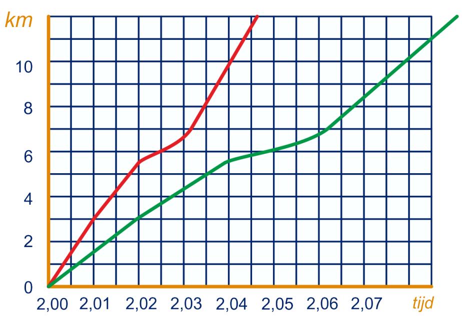
De grafiek van f wordt dus $2\frac{1}{2}$ naar links en $5\frac{1}{4}$ naar beneden verschoven om die van te krijgen.

Dus de top van g is $(-2\frac{1}{2}, -5\frac{1}{4})$.

20

a 2.05 uur

b Zie figuur.



c De afstand tot de verticale as wordt 2 keer zo groot.

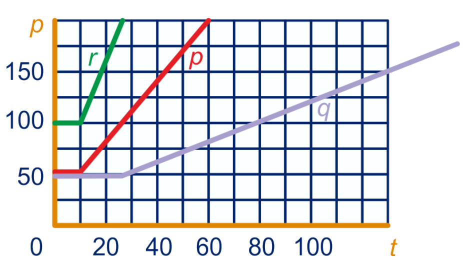
d $Pa(2) = Pi(1) = 3$; $Pa(5) = Pi(2\frac{1}{2}) = 6$; $t = 8$

e $Pa(t) = Pi(\frac{1}{2}t)$

21

a $q(30) = p(10)$; $q(84) = p(28)$; $q(t) = p(\frac{1}{3}t)$

b Zie figuur.



c $r(t) = 2 \cdot p(t)$

d Zie onderdeel **b**.

22 -

23
a -
b 1 eenheid naar links schuiven en dan horizontaal met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen, of:
horizontaal met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen en dan $\frac{1}{2}$ eenheid naar links schuiven.
c Horizontaal met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen en dan 1 eenheid naar links schuiven, of:
2 eenheden naar links schuiven en dan horizontaal met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen.

24
a -
b 1 eenheid naar links schuiven en dan verticaal met 2 vermenigvuldigen.
c Nee.

25
Er geldt: $g(x) = (\frac{1}{2}x)^3 = \frac{1}{8}x^3$
Als je de grafiek van f verticaal met $\frac{1}{8}$ vermenigvuldigt krijg je die van g.

26
a 2 eenheden naar rechts schuiven, je krijgt dan: $x \rightarrow x - 2 + \sqrt{x-2}$ en dan 2eenheden naar boven.
b 2 eenheden naar boven, je krijgt dan: $x \rightarrow x + 2 + \sqrt{x}$ en dan 2 eenheden naar rechts.
(De volgorde maakt niet uit.)

27
$y = \frac{1}{4}(\text{-}x - 2)^3$ of $y = \text{-}\frac{1}{4}(x+2)^3$

Gebroken functies

28
a $\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$, dus $x = 40$.
b Als x erg klein is, dan is $\frac{1}{x}$ erg groot, dus $\frac{1}{R}$ ook, dus R is erg klein.
Als x erg groot is, dan $\frac{1}{R} \approx \frac{1}{10}$, dus dan $R \approx 10$.
c $\frac{1}{R} = \frac{1}{10} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{x}{10x} + \frac{10}{10x} = \frac{x+10}{10x}$ dus: $R = \frac{10x}{x+10}$.
d -
e $10 - \frac{10x}{x+10} = \frac{10(x+10)}{x+10} - \frac{10x}{x+10} = \frac{100}{x+10} = \frac{1}{1.000.000}$, dus $x > 99.999.990$.

29
Er zijn meer mogelijkheden, $a = 10$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 10$ bijvoorbeeld.

30
a $8 : 2 = 4 ; 9 : 3 = 3 ; 12 : 6 = 2$
b $(x+7) : (x+1) = \frac{x+7}{x+1}$
c $\frac{x+7}{x+1} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x + 14 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = 11$
$\frac{x+7}{x+1} = \frac{11}{10} \Rightarrow 10x + 70 = 11x + 11 \Leftrightarrow x = 59$
d -
e Verhouding komt dichter bij 1.
f $a = 1$, $b = 7$, $c = 1$, $d = 1$ bijvoorbeeld

31
a $\frac{1}{4}$; 5 ; $\text{-}1$; $\text{-}\frac{1}{8}$; $\text{-}1\frac{2}{3}$
b 0, alle getallen met uitzondering van 0.

c 0, alle getallen met uitzondering van 0.
d $10\,;\,100\,;\,1000\,;\,10.000$
e $-10\,;\,-100\,;\,-1000\,;\,-10.000$
f $\frac{1}{10}\,;\,\frac{1}{100}\,;\,\frac{1}{1000}\,;\,\frac{1}{10.000}$
g $-\frac{1}{100}\,;\,-\frac{1}{1000}\,;\,-\frac{1}{10.000}$

32
a $1{,}6$. Door die knop nog eens in te drukken.
b $1{,}28^{-1} = 0{,}78125$
c De functie is zijn eigen inverse; 'tegengestelde nemen' is ook zijn eigen inverse.

33
a $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 0$, bijvoorbeeld
b $\frac{3x+4}{2x} = \frac{3x}{2x} + \frac{4}{2x} = 1\frac{1}{2} + \frac{2}{x}$
c -
d Horizontale asymptoot: $y = 1\frac{1}{2}$ en verticale asymptoot: $x = 0$.
e Verticaal met 2 vermenigvuldigen en dan $1\frac{1}{2}$ omhoog schuiven of:
Horizontaal met 2 vermenigvuldigen en dan $1\frac{1}{2}$ omhoog schuiven of:
$\frac{3}{4}$ omhoog schuiven en dan verticaal met 2 vermenigvuldigen of: ....

34
a 1 naar rechts en 3 naar boven of omgekeerd.
b Horizontale asymptoot: $y = 3$ en verticale asymptoot: $x = 1$.
c $\lim\limits_{x \downarrow 1} y = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} y = 3$
$\lim\limits_{x \uparrow 1} y = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} y = 3$
d Het domein van f: alle getallen met uitzondering van 1.
Het bereik van f: alle getallen met uitzondering van 3.

35
a f III, g IV, h II en k I
b Verticale: waar de noemer 0 is (je kunt dan ook een perforatie hebben, zoals bij de grafiek van h in 35).
Horizontale: x naar ∞ of $-\infty$ laten gaan.

36
a Domein: alle getallen met uitzondering van -3.
Bereik: alle getallen met uitzondering van 0.
b Horizontale asymptoot: $y = 0$, verticale asymptoot: $x = -3$.
c GeoGebra of GR
d $\frac{4}{x+3} = x \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -4$, snijpunten: $(1,1)$ en $(-4,-4)$.
e Teken de lijn $y = x$ in het plaatje van **c**. Met behulp van **d** vind je dan: $x < f(x) \Leftrightarrow x < -4$ of $-3 < x < 1$.

37
a Zo te zien een horizontale lijn.
b Je kunt $\frac{3x+6}{2x+4}$ vereenvoudigen: $\frac{3x+6}{2x+4} = \frac{3(x+2)}{2(x+2)} = \frac{3}{2}$ als $x \neq 2$.
c $\frac{3x+6}{2x+4}$ bestaat niet voor $x = -2$, dus de grafiek is de lijn $y = 1\frac{1}{2}$ met uitzondering van het punt met eerste coördinaat -2.

38
$f(x) = \frac{3x+6}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{6}{4} = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}$, dus de grafiek van f is een rechte lijn.

39

a -

b -

40

a Als $x \to 1$, dan $3x-3 \to 0$. Als $2x+a$ dan niet naar 0 gaat, heeft de functie $y = \frac{2x+a}{3x-3}$ een verticale asymptoot $x = 1$, dus $2x+a = 0$ als $x = 1$, dus $a = \text{-}2$.
Dan $y = \frac{\text{-}2x+2}{3x-3} = \text{-}\frac{2}{3}$, dus als $a = \text{-}2$, heeft de functie een perforatie: de grafiek is de lijn met vergelijking $y = \text{-}\frac{2}{3}$ met perforatie $(1,\text{-}\frac{2}{3})$.

b Als $x \to \frac{3}{a}$, dan $ax-3 \to 0$. Als $2x+4$ dan niet naar 0 gaat, heeft de functie $y = \frac{2x+4}{ax-3}$ een verticale asymptoot $x = \frac{3}{a}$, dus $2x+4 = 0$ als $x = \text{-}2$, dus $a = \text{-}1\frac{1}{2}$.
Dan $y = \frac{2x+4}{\text{-}1\frac{1}{2}x-3} = \text{-}1\frac{1}{3}$, dus als $a = \text{-}1\frac{1}{2}$, heeft de functie een perforatie: de grafiek is de lijn met vergelijking $y = \text{-}1\frac{1}{3}$ met perforatie $(\text{-}2,\text{-}1\frac{1}{3})$.

c De perforatie heeft eerste coördinaat $\text{-}a$ (daar is $x+a = 0$). Dan moet $ax+1 = 0$ als $x = \text{-}a$. Dus $a \cdot \text{-}a + 1 = 0$, dus $a = 1$ of $a = \text{-}1$.
Als $a = 1$, dan $y = \frac{ax+1}{x+a} = 1$ met uitzondering van perforatie $(\text{-}1,1)$.
Als $a = \text{-}1$ dan $y = \frac{ax+1}{x+a} = \text{-}1$ met uitzondering van perforatie $(\text{-}1,\text{-}1)$.

41

a $1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $y = 1\frac{1}{2}$

b Dan is $2x+2 = 0{,}02$ en $3x+6 \approx 3$, dus $y \approx 150$.
Als x dicht bij $\text{-}1$ is dan gaat y naar oneindig.
Verticale asymptoot: $x = \text{-}1$.

42

a Horizontale asymptoot: $y = 3$, verticale asymptoot: $x = \text{-}1$.

b Horizontale asymptoot: $y = 2$, verticale asymptoot: $x = \text{-}1$.

c Horizontale asymptoot: $y = 2$, verticale asymptoot: $x = \text{-}\frac{1}{2}$.

d Horizontale asymptoot: $y = 2$, verticale asymptoot: $x = 0$.

43

a Alle getallen met uitzondering van 1.

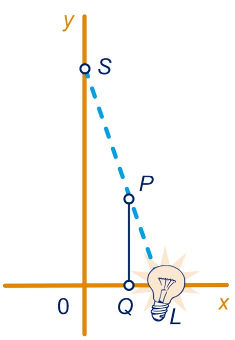
b $\lim_{x \to \infty} f(x) = \text{-}2$ en $\lim_{x \to \text{-}\infty} f(x) = \text{-}2$

c $a + \frac{b}{1-x} = \frac{a-ax+b}{1-x} = \frac{\text{-}ax+a+b}{1-x}$, dus $\text{-}a = 2$ en $a+b = 3$, dus $a = \text{-}2$ en $b = 5$.

d $\lim_{x \to \infty} \frac{b}{1-x} = 0$

44

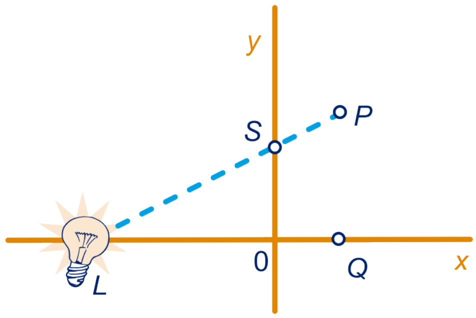
a Zie figuur.



De projectie van P op de x-as noemen we Q. Driehoek SOL is gelijkvormig met driehoek PQL, dus $\frac{OS}{PQ} = \frac{OL}{QL}$, dus $\frac{y}{x} = \frac{2}{x-1}$.

Er geldt: $y = \frac{2x}{x-1}$.

b Zie figuur.



De projectie van P op de x-as noemen we weer Q en het snijpunt van PL met de y-as noemen we S.

Driehoek PQL is gelijkvormig met driehoek SOL, dus $\frac{OS}{OL} = \frac{PQ}{LQ} \Leftrightarrow \frac{OS}{3} = \frac{2}{4}$, dus $OS = 1\frac{1}{2}$.

Als je $x = \text{-}3$ invult in $y = \frac{2x}{x-1}$ krijg je ook $1\frac{1}{2}$.

c -

d Asymptoten: $x = 1$ en $y = 2$.

Inverse functies

45

a Ongeveer 150 km/u.

b $v = \sqrt{133\frac{1}{3}r}$

46

a $37\frac{7}{9}$

b $C = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$

47

$x \rightarrow$ **[MIN 2]** $\rightarrow y = x - 2$

$x \rightarrow$ **[TEGENGESTELDE]** $\rightarrow y = \text{-}x$

$x \rightarrow$ **[OMGEKEERDE]** $\rightarrow y = \frac{1}{x}$

$x \rightarrow$ **[KWADRAAT]** $\rightarrow y = x^2$

$x \rightarrow$ **[TOT DE MACHT $\frac{4}{3}$]** $\rightarrow y = x^{\frac{4}{3}}$

48

a $3(4 - x^2) = \text{-}12 \Leftrightarrow 4 - x^2 = \text{-}3 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ of $x = \text{-}\sqrt{7}$

b $\sqrt{2 + \sqrt{2 + x}} = 3 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{2 + x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{2 + x} = 7\ 2 + x = 49 \Leftrightarrow x = 47$

c $\frac{7}{2x-1} = 7 \cdot \frac{1}{2x-1} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x-1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2x = 4\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2\frac{1}{4}$

d $\frac{8}{1+\frac{6}{x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{6}{x}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{6}{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{6}{x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$

49

a Klopt niet, $\sqrt{x}$ is niet negatief wat x ook is, kan dus nooit $\text{-}\sqrt{3}$ zijn.

b -2 voldoet niet, vul maar in de oorspronkelijke vergelijking in.
Je krijgt dan $-1 = 1$, dit klopt niet, maar na kwadrateren klopt het wel.

c
- $\sqrt{x+2} = 10 - x$
  kwadrateer
  $x+2 = x^2 - 20x + 100 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 98 = 0 \Leftrightarrow (x-7)(x-14) = 0 \Leftrightarrow x = 7$ of $x = 14$.
  Na controle blijkt alleen $x = 7$ aan de oorspronkelijke vergelijking te voldoen.
- kwadrateer
  $2\sqrt{x} - 1 = x \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x}$
  kwadrateer
  $x^2 + 2x + 1 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
  $x = 1$ voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking.
- kwadrateer
  $2 - \sqrt{x} = x \Leftrightarrow x - 2 = -\sqrt{x}$
  kwadrateer
  $x^2 - 4x + 4 = x \Leftrightarrow x = 1$ of $x = 4$
  Alleen $x = 1$ voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking.
- Voor elke waarde van x (waarvoor deze zin heeft) is de linkerkant van de vergelijking groter of gelijk aan 0 en de rechterkant kleiner of gelijk aan 0.
  Beide zijn niet tegelijkertijd 0.
  Er is geen oplossing.
- kwadrateer
  $6 - \sqrt{x} = x \Leftrightarrow 6 - x = \sqrt{x}$
  kwadrateer
  $x^2 - 12x + 36 = x \Leftrightarrow x = 4$ of $x = 9$.
  Alleen $x = 4$ voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking.

50

a $y = \sqrt[3]{4 - \frac{1}{3}x}$

b $y = x^4 - 4x^2 + 2$ met $x \geq \sqrt{2}$.

c $y = \frac{7}{2x} + \frac{1}{2} = \frac{x+7}{2x}$

d $y = \frac{6x}{8-x}$

51

a Aan de grafiek kun je zien: er zijn verschillende waarden van x waarvoor $f(x)$ hetzelfde is.

b Zie GR.

c $y = x$

d Als (a, b) op de grafiek van f ligt, dan ligt (b, a) op de grafiek van de inverse van f.

e Klopt.

52

a $f(x) = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

b Voor $a \neq 0$; b doet niet ter zake.

c $y = \frac{x-b}{a}$

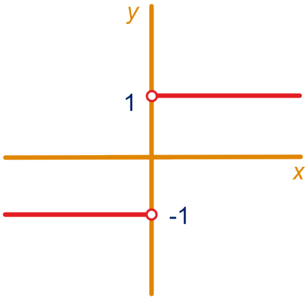
53 $x \to -\sqrt{x}$

Limieten

54
a

x	1	-3	100	0,01	-0,01	-1000
$f(x)$	1	-1	1	1	-1	-1

b Zie figuur.



c $f(x) = 1$
d $f(x) = -1$
e $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = -1$

55
a 1 als $x > 1$ en -1 als $x < 1$.
b Alle getallen met uitzondering van 1.
c -
d $f(x) = \frac{x^2-x}{|x-1|} = x \cdot \frac{x-1}{|x-1|}$, de rest volgt uit **a**.
e $-1\ ;\ 1$

56
a Alle getallen met uitzondering van 1.
b $g(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$ als $x \neq 1$.

57
a Alle getallen met uitzondering van 2.
b -
c Nee.
d $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$
e $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

58
a Alle getallen met uitzondering van 0 en 1.
b -
c $\frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$ als $x \neq 0$, dus $y = \frac{x+1}{x-1}$ als $x \neq 0$.
d $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$

$\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty$

$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$

e Perforatie $(0,-1)$.

f $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ en $\lim_{x \to 1} f(x)$ bestaat niet.

g $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ en $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

h $y = 1$, $x = 1$

59

a Alle getallen met uitzondering van 0 en 1.

b Daarvoor kijken we of we $\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ kunnen vereenvoudigen:

$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}$ als $x \neq 1$.

De grafiek van f is een hyperbool. Een vergelijking van die hyperbool is: $y = \frac{x+2}{x}$, met uitzondering van de perforatie $(1,3)$.

c $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x+2}{x} = \infty$, $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x+2}{x} = -\infty$

$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = 3$

d $\lim_{x \to 0} f(x)$ bestaat niet en $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ en $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

f $y = 1$, $x = 0$

Extra opgaven

1

a Als $x = 2$ moet $ax + 3 = 0$ zijn, dus $a = -1\frac{1}{2}$.

b $\lim_{x \to \infty} \frac{ax+3}{2x-4} = \frac{1}{2}a$, dus $a = 6$.

2

a -

b $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 & \text{als } x > 0 \text{ en } x \neq 1 \\ \frac{|x|-1}{x-1} = \frac{-x-1}{x-1} & \text{als } x < 0 \end{cases}$

c De grafiek van f heeft een perforatie $(1,1)$.

d $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ en $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

3

a $\frac{1}{3} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow b = 6$

b $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{b} > 0$, dus $\frac{1}{v} < \frac{1}{2}$, dus $v > 2$.

c Als v groot dan $\frac{1}{b} \approx \frac{1}{2}$, dus $b \approx 2$.

Als v maar een klein beetje groter dan 2 is, dan $\frac{1}{b} \approx 0$, dus dan b erg groot.

d $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{v} = \frac{v-2}{2v}$, dus $b = \frac{2v}{v-2}$.

En: $2 + \frac{4}{v-2} = \frac{2(v-2)+4}{v-2} = \frac{2v}{v-2}$, dus klopt.

e $v = 2$ en $b = 2$.

4

a Er is een perforatie als $ax + 2 = 0$ en $bx + 1 = 0$.

Uit het laatste volgt: $x = -\frac{1}{b}$, dit in de eerste vergelijking invullen geeft: $a = 2b$, dus: $y = \frac{ax+2}{bx+1} = \frac{2bx+2}{bx+1} = 2$ als $bx + 1 \neq 0$. Een vergelijking van die lijn is dus: $y = 2$.

b Dan $b \cdot 2 + 1 = 0$, dus $b = -\frac{1}{2}$ en $a = -1$.

c Dan $b \cdot 2 + 1 = 0$, dus $b = -\frac{1}{2}$ en $\frac{a}{b} = 3$, dus $a = -1\frac{1}{2}$.

d Dan $b = 0$, je krijgt dan de lijn $y = ax + 2$, die gaat door $(2{,}6)$ als $a = 2$.

5

a Verticaal met 2 vermenigvuldigenen vervolgens 2 eenheden omhoog schuiven.

b 1 eenheid omhoog schuiven en vervolgens verticaal met 2 vermenigvuldigen.

c Horizontaal vermenigvuldigen met $\frac{1}{4}$ en 2 eenheden omhoog schuiven.

6

a *kracht maal arm links = kracht maal arm rechts*

Dit geeft: $k \cdot a = 100 \cdot (2 - a)$. Dus (deel beide kanten door a): $k = 100 \cdot \frac{2-a}{a}$.

Dus $k = 100(\frac{2}{a} - 1)$, want $\frac{2-a}{a} = \frac{2}{a} - 1$.

b a ligt tussen 0 en 2 (lengte van de plank); k loopt dan van ∞ naar 0.

c $a = \frac{200}{100+k}$

7

a $\frac{1}{x} + 2$; $y = \frac{1}{x-2}$

b $y = 2 + \frac{5}{x-2}$, dus deze functie is de ketting

$x \to$ **[MIN 2]**$\to$ **[OMG]**$\to$ **[MAAL 5]**$\to$ **[PLUS 2]**$\to y$,

dus de inverse bestaat uit de ketting

$x \to$ **[MIN 2]**$\to$ **[DEEL DOOR 5]**$\to$ **[OMG]**$\to$ **[PLUS 2]**$\to y$, dus de inverse functie is:$y = 2 + \frac{5}{x-2}$

c De grafiek is symmetrisch in de lijn $y = x$, want de functie is zijn eigen inverse.

Rekentechniek

1

a $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$, dus $a = 2$, $b = -2$, $c = \frac{1}{2}$ en $d = 0$.

b $a = 2$; $b = -1$; $c = 0$; $d = \frac{1}{3}$

c $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + x^2$, logaritmische en exponentiële functies

2

-

3

a $(2x^3 - 9x^2 + 31x - 95)(x + 3) + 284$

b $(2x^3 - x^2 + 3x + 1)(x - 1)$

c $2x(x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1) - 1$

d $(2x^3 - 7x^2 + 18x - 38)(x + 2) + 75$

4

a $(2x^3 - 9x^2 + 31x - 95)(x + 3)$ is gelijk aan 0 als je voor $x = -3$ invult.

b $f(x) = g(x)(x - 1) + c$;

Omdat $f(1) = 0$ en $g(x)(x - 1)$ ook 0 is voor $x = 1$, geldt: $c = 0$.

c De rest krijg je door -2 in te vullen in $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$.

5

a $x^{10} - 1 = 0$ als $x = 1$

b Werk de haakjes aan de rechterkant weg.

c 1024
d $x = -2$; er moet dan 0 uit komen.
e $x^3 + 5x^2 + 6x = x(x^2 + 5x + 6) = x(x + 2)(x + 3)$

6
a Nee, ze zien er misschien wel hetzelfde uit op de GR, maar in het domein van g zit het getal 1 niet.
b $\frac{2x^4-3x^3+4x^2-2x-1}{x-1} = g(x)$ als $x \neq 1$ en $g(1) = 5$, dus de perforatie is $(1,5)$.
c 5

7
a $g(x) = x^2 + 1$ en $c = 1$
b $-\infty$
c ∞
d -
e Door voor $x = 3$ in te vullen in $x^3 - 3x^2 + x - 4$.
Als dat een getal $\neq 0$ oplevert, krijg je een verticale asymptoot $x = 3$, zie de redenering aan het einde van onderdeel **d**.
f Zie ook onderdeel **a**.
Dan moet $h(3) = 0$, dus $a = 3$, dan krijg je: $h(x) = g(x) = x^2 + 1$ als $x \neq 3$, dus de perforatie is $(3,10)$.

8
a Het domein bestaat uit de getallen x met $x \geq 0$ en $x \neq 4$.
b -
c -
d 4

9
a $\sqrt{x} + 2$
b $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} + 2 = 4$
c $\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \sqrt{x} + 2$

10
$\frac{2}{3}$; bestaat niet want: $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{2x^3}{3x^4} = -\infty$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{2x^3}{3x^4} = \infty$
0; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2-x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x-1}{3} = -\frac{1}{3}$

11
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \frac{0}{-1} = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} x + 2 = 3$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x} \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-x}{(x^2-x)(x+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ of
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{x(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$

12

a Vermenigvuldig bijvoorbeeld beide kanten met $x^2 + 1$

b $x^2 + 2x + 1 + \frac{3x+1}{x^2}$

3 Verbanden

1 Noem de eerste coördinaat van A: x. Er geldt: $f(x) = 3 \cdot g(x)$.
2 Noem de eerste coördinaat van Q: a, dan is die van R: $...a$.
Dat Q en R op dezelfde hoogte liggen, geeft je een vergelijking in a.
3 Teken in één plaatje de grafiek van f en de lijn $y = x$.
Los de ongelijkheid op met behulp van het vorige onderdeel en het plaatje.
4 Gebruik gelijkvormigheid van bijvoorbeeld de driehoeken PQL en SOL,
waarbij Q de projectie van P op de x-as is.
5 $\frac{7}{2x-1} = 7 \cdot \frac{1}{2x-1}$
6 $\sqrt{x+2} = 10 - x$
7 Gebruik het eerste onderdeel van de opgave.
8 Schrijf y in de vorm $\ + \frac{}{x-2}$.
9 De gekleurde uitdrukkingen in regel 1 en 2 zijn gelijk, evenals die in regel 3 en 4
en die in regel 5 en 6.

Index