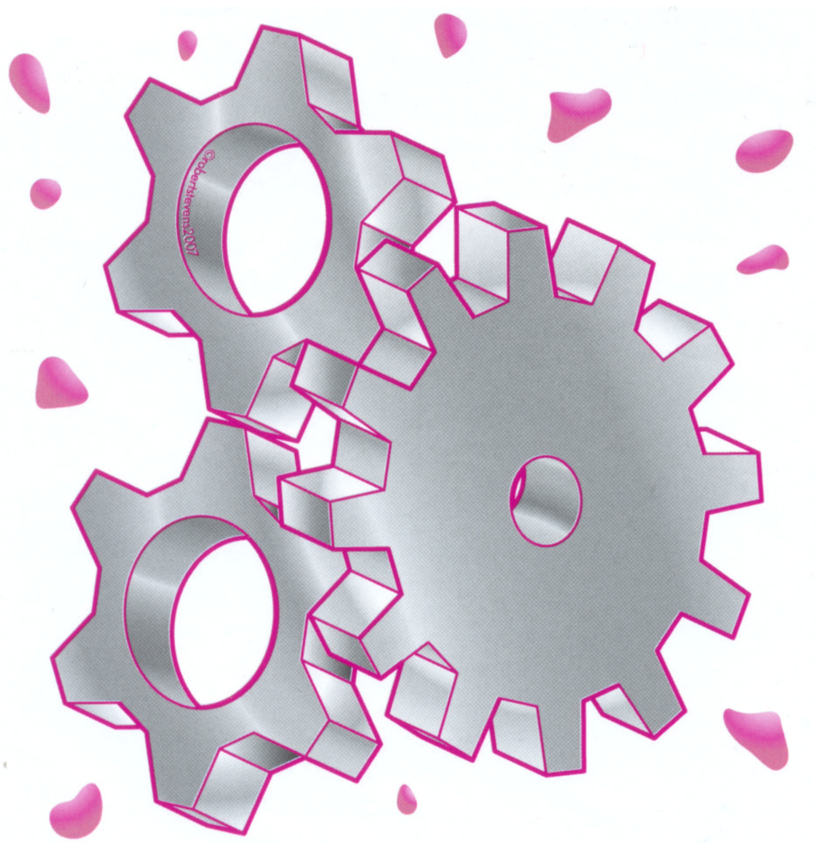
Wiskunde D

Domein: Wiskunde in technologie

Tandwielen en overbrengingen

havo-5



De tandwielen lopen gesmeerd, R. Stevens (naar D. Simanek)

auteurs:

Jos Reuling, HAN afd. werktuigbouwkunde
Henk Reuling, Liemers College, wiskundedocent

Versie 01-09-2010

mede mogelijk gemaakt door cTWO

Inhoudsopgave

Bronnen:

- Werktuigonderdelen, constructie en berekening, deel 3, 3e druk 1979, J. Veerman, ISBN 90-11-21852-3
- Werktuigonderdelen, 2e druk 1943, W.H. Kalb
- Gear Geometry and Applied Theory, 2nd ed., Faydor L. Litvin & Alfonso Fuentes, ISBN-13 978-0-511-23000-4 eBook (EBL)
- Mechanical Engineering, Shigley's Mechanical Engineering Design, 8th Edition, Budynas-Nisbett, ISBN 0-390-76487-6
- Praktijkboek Psychologische Test, Voorbereidende oefeningen, 1995, John Wiering, ISBN 90389-02581
- Roloff /Matek Machineonderdelen, Theorieboek, 4e druk, ISBN 978-90-395-2321-6
- Machineonderdelen, Constructie-elementen voor de aandrijftechniek, Stolk/Ruijter/Kok, 24e druk, ISBN 978-90-01-0338-4
- Cryptografie en getaltheorie, Een module voor Wiskunde D (vwo), 2008, TU-Eindhoven
- Cryptografie, lessenserie in opdracht van cTWO voor vwo wisD, Monique Stienstra & Harm Bakker

Voorwoord

Deze module is tot stand gekomen door het samenwerkingsverband wiskunde D van regio HAN (Hogeschool Arnhem Nijmegen). De module is geschreven voor de havo, passend in domein E: Wiskunde in technologie. De geplande omvang is 40 SLU.

Vanwege de benodigde wiskundige voorkennis en de moeilijkheid van de materie lijkt deze module het meest op z'n plaats in havo-5. De benodigde voorkennis voor deze module is opgenomen in de Appendices. Het kan nodig zijn een of meerdere appendices eerst nog eens door te nemen.

Het is vooral een verbredende module: toepassing van bekende wiskunde in andere situaties en contexten dan de leerlingen gewend zijn. Deze situaties en contexten zijn dan vaak ook wat complexer en er zal regelmatig wat doorzettingsvermogen nodig zijn om te begrijpen wat er gebeurt. Nieuwe wiskunde komt eigenlijk niet aan bod. Extra moeilijkheid bij deze module is de grote hoeveelheid vaktermen en begrippen die een leerling zich eigen moet maken.

Hoe deze module te doorlopen?
De theorie van deze module wordt op school doorgewerkt, al of niet na een kennismakend bezoek aan een technische hogeschool.

In een later stadium, bijvoorbeeld na het doorwerken van hoofdstuk 2 of 3, zou een bezoek aan een technische hogeschool *moeten* volgen. Daar wordt de start gemaakt met een eindopdracht (of eindopdrachten), in overleg met de hogeschool.

Bij deze module hoort een uitgebreid practicum aan een hogeschool waar de leerlingen met een 3d-CAD-pakket – in dit geval SolidWorks – leren werken en hiermee zelf een tandwiel tekenen (met evolvente tandvorm). Dit tandwiel wordt dan ook ter plekke gemaakt, zodat de leerling dit ook mee krijgt naar huis.

Is zo'n intensieve samenwerking met een hogeschool niet mogelijk, dan zou als eindopdracht ook een ingewikkelder apparaat, of onderdeel van een apparaat gedetailleerder onderzocht kunnen worden. Op een hogeschool met een afdeling werktuigbouw of autotechniek, zou men daarvoor expertise, mankracht, materialen, gereedschap en (meet)apparatuur beschikbaar kunnen (of moeten?) stellen.

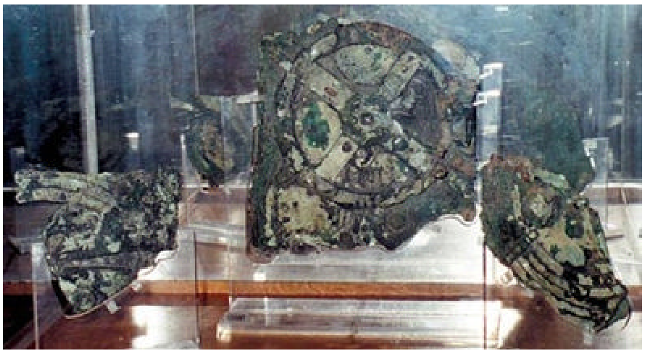
De leerlingen werken de opdracht terug op school verder uit in de vorm van een verslag of presentatie. De eindbeoordeling kan samen met een medewerker van de hogeschool geschieden en – in het ideale geval – op de hogeschool plaatsvinden.

Zo'n bezoek aan een technische hogeschool (en werkplaats) met geavanceerde apparatuur geeft deze module grote meerwaarde.
Ook het presenteren aan een expert – in een andere setting – en/of het (mede) beoordelen door een expert van een presentatie, kan erg motiverend werken.

Najaar 2009 – voorjaar 2010
Jos Reuling, hoofddocent HAN, Werktuigbouwkunde
Henk Reuling, wiskundedocent, Liemers College, Zevenaar

■ Hoofdstuk 1: Inleiding

Geschiedenis



Ze zitten tegenwoordig in allerlei apparaten en machines om ons heen: tandwielen en overbrengingen. Tandwielen zijn heel lang geleden uitgevonden en waren al bij de Grieken in gebruik. Van de wijsgeer Archimedes (287 - 212 v. Chr.) is bekend dat hij tandwielconstructies ontwierp. Ook is er uit een Grieks wrak een oude klok met een tandwielmechanisme opgedoken: het 'Antikythera mechanisme'. Het is een ingenieus apparaat, dat met ruim dertig tandwielen en drie wijzerplaten de toekomstige stand van zon en maan, de maanfasen en zons- en maansverduisteringen kon uitrekenen. Dit bronzen voorwerp is bij Antikythera gevonden, en wordt gedateerd op 150-100 voor Chr.

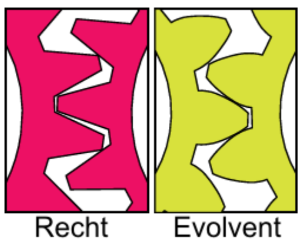
http://en.wikipedia.org/wiki/Antikythera_mechanism

Later is veel van deze kennis verloren gegaan, pas in de 7e eeuw na Chr. zijn er weer tandwielen te vinden in windmolens. Veel later, vooral in de 17e eeuw, zijn ook in Nederland veel windmolens gebouwd, met vaak reusachtige tandwielen van hout.
Een ander gebied waar tandwielen al vroeg in te vinden zijn, zijn torenuurwerken. De eerste zijn in kloostertorens te vinden aan het einde van de 13e eeuw, om ervoor te zorgen dat de kloosterlingen tijdig aanwezig waren voor de vele dagelijkse gebedsmomenten en -diensten.
In het midden van de 15e eeuw verschenen de eerste torenuurwerken in steden met wijzerplaat. Deze klokken vervulden een belangrijke rol in het toenmalige dagelijks leven: voor het aangeven van begin- en eindtijden van markten, werktijden en het openen en sluiten van de stadspoorten was een goede tijdsmeting noodzakelijk.

Tenslotte bevindt zich een mooi voorbeeld van een vroeg gebruik van tandwielen in Franeker. Daar kun je het oudste nog werkende planetarium ter wereld bezoeken.
Dit nauwkeurig bewegend model van het zonnestelsel werd tussen 1774 en 1781 gebouwd door de Fries Eise Eisinga.

http://www.planetarium-friesland.nl/

Door de uitvinding van de stoommachine en voornamelijk door de verbeteringen daaraan door James Watt, was het vanaf einde van de 18e eeuw mogelijk om continu mechanische energie ter beschikking te hebben. Vóór die tijd kon men alleen gebruik maken van mensen, paarden, watermolens en windmolens voor de benodigde aandrijfkracht.
Tijdens de industriële revolutie ontstonden fabrieken die allerlei producten op grotere schaal konden produceren dan tot dan toe in kleine ambachtelijke werkplaatsen aan huis mogelijk was.
Dit had tot gevolg dat er behoefte was aan een nieuw soort tandwielen. De houten tandwielen uit bijvoorbeeld windmolens waren veel te lomp en gaven teveel wrijving. Er was behoefte aan betere, nauwkeurige en sterkere tandwielen, want de krachten werden groter en de snelheden namen toe.
Men ontdekte dat de vorm van de tanden van groot belang is. De driehoekige tand voldeed niet langer en zo ontstond een speciale gekromde tandvorm: de evolvente tandvorm.



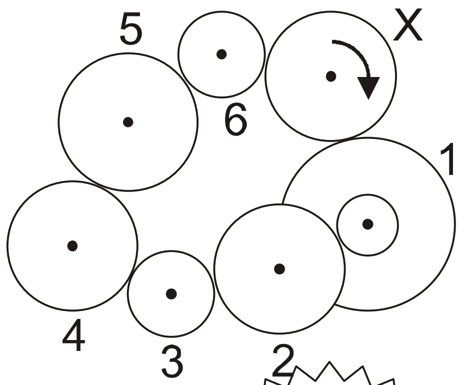
Tegenwoordig

Bijna overal waar een motor in zit, wordt de draaiende beweging van de motor via tandwielen omgezet naar een andere draaiende of rechtlijnige beweging. Maar ze zitten ook in apparaten zonder motor: zelfs in een eenvoudige kurkentrekker – zie afbeelding – wordt gebruik gemaakt van een tandoverbrenging.
Al deze tandwielen en andere overbrengingen zijn zelfs zó vanzelf-sprekend, dat we er niet meer over nadenken dat er toch een aparte tak van wetenschap is die zich met de berekening en constructie van deze tandwielen bezig houdt. Een leek die zich in de materie begint te verdiepen, zal zich waarschijnlijk in eerste instantie verbazen over de grote variatie en verscheidenheid van verschillende soorten tandwielen en overbrengingen.
Bij elk apparaat hoort een passende overbrenging. Er zijn vaak meerdere mogelijkheden. Dat is het werk van (werktuigbouwkundige) ingenieurs.

In deze module gaan jullie kennismaken met enkele (eenvoudige en minder eenvoudige) problemen en berekeningen aan tandwielen die deze ingenieurs bijna dagelijks ontmoeten in hun werk.
Ook zal er uitgebreid ingegaan worden op het hoe en het waarom van de vorm van de tanden.

Opgaven

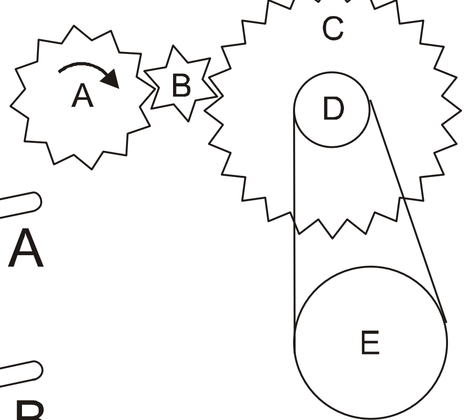
Tandwielen en overbrengingen zijn zó vanzelfsprekend dat de volgende inleidende puzzel-achtige problemen waarschijnlijk niet al te veel problemen op zullen leveren. Dit soort vragen kom je ook nogal eens tegen in psychologische tests waarin ook het technisch inzicht wordt gemeten.



Opgave 1.1

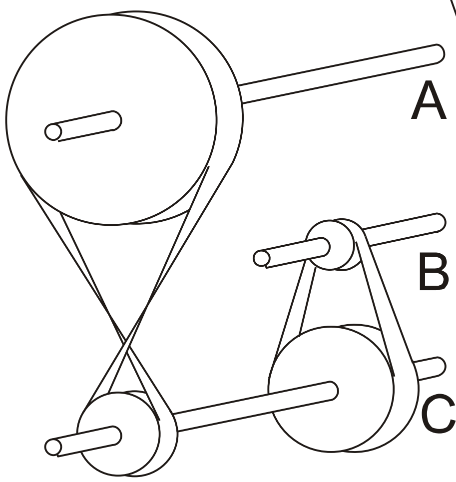
Welke (tand)wielen draaien in dezelfde richting als (tand)wiel X?

A) 2 en 4
B) 3 en 5
C) 1, 3 en 5
D) De (tand)wielen kunnen niet draaien



Opgave 1.2

D is met een riem verbonden met E. De diameter van wiel E is het dubbele van D. Tandwiel A draait 8 keer rond in de richting van de wijzers van de klok. Hoeveel keer draait wiel E rond en in welke richting?

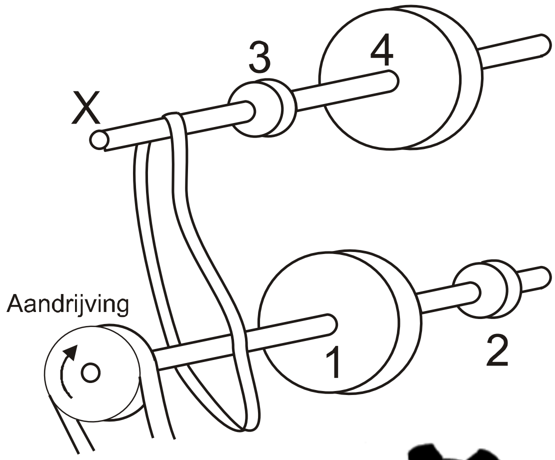


Opgave 1.3

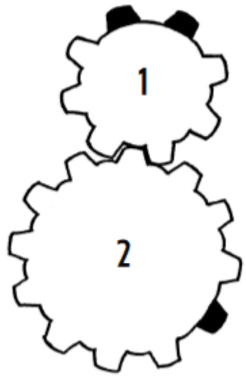
Welke as draait het snelst?

A) A
B) B
C) C
D) Geen verschil

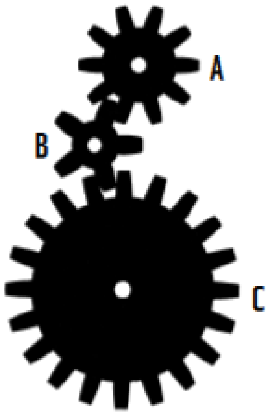
Opgave 1.4
Hoe moet de aandrijfriem worden gespannen, zodat de as X de meeste omwentelingen per minuut kan maken?
A) Tussen 2 en 4
B) Tussen 1 en 3
C) Tussen 2 en 3
D) Tussen 1 en 4



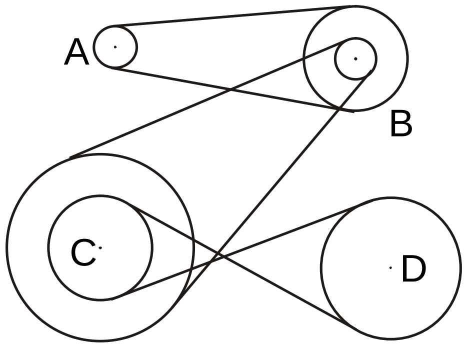
Opgave 1.5
Hoeveel rondjes moet tandwiel 1 maken om te zorgen dat de zwarte tand van tandwiel 2 ingrijpt in tandwiel 1 precies tussen de twee zwarte tanden van tandwiel 1?
a. Als tandwiel 1 met de klok mee draait?
b. Als tandwiel 1 tegen de klok in draait?



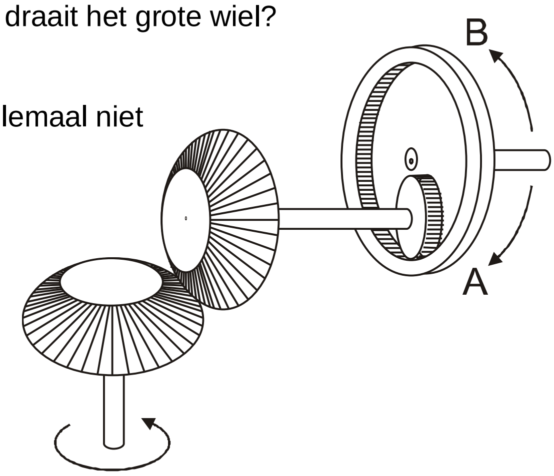
Opgave 1.6
Hoe verhouden zich de draaisnelheden van tandwielen A en C?
A) 2 : 1
B) 4 : 1
C) 1 : 1
D) 5 : 1
E) 1 : 2
F) 1 : 4



Opgave 1.7
Welke van de wielen A, B, C of D draait het langzaamst?



Opgave 1.8
In welke richting draait het grote wiel?
A) Richting A
B) Richting B
C) Het draait helemaal niet

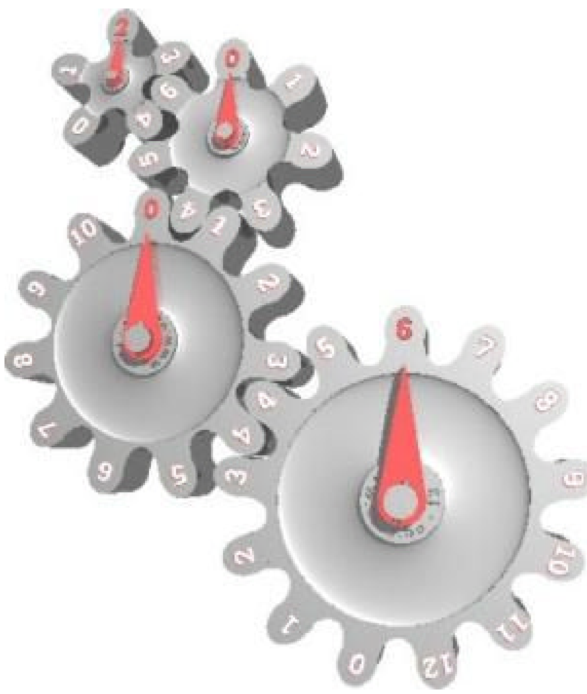


■ Vooruitblik

Deze opgaven waren om er een beetje in te komen.
Twee verschillende soorten overbrengingen ben je in deze opgaven al tegengekomen: riemoverbrengingen en tandwieloverbrengingen. Maar er zijn er nog meer.
In het volgende hoofdstuk worden enkele veel voorkomende soorten overbrengingen behandeld.

Nog een erg pittige laatste vraag:

* Opgave 1.9 *



Vier tandwielen, met respectievelijk vijf, zeven, elf en dertien tanden, grijpen op elkaar in zoals in de figuur hiernaast. De vaste pijlen wijzen telkens naar het getal op de bovenste tand, in de beginstand dus **2 0 0 6**.

Je kan aan elk van de tandwielen draaien, om zo een ander getal in de bovenste positie te zetten. Uiteraard zullen de andere tandwielen dan meedraaien en ook een ander getal aanwijzen.

Is het mogelijk de huidige aanduiding 2 0 0 6 door draaiing te veranderen in 2 0 0 7 ?
En zo ja: hoe vaak en in welke richting moet het bovenste tandwiel dan worden rondgedraaid?

(Bron: Vlaamse wiskunde-olympiade, www.vwo.be)

http://www.vwo.be/vwo/posters/poster-2006-2007/wiskundige-wieltjes

■ Hoofdstuk 2: Overbrengingen

Wikipedia:

> **Overbrenging** of **transmissie** is een verzamelnaam van verschillende technieken voor het overbrengen van een ronddraaiende onafgebroken beweging. Vaak gaat dit overbrengen gepaard met het omvormen van deze beweging (richting en draaisnelheid). De drie belangrijkste groepen van overbrengingen zijn: mechanische overbrengingen, hydraulische overbrengingen en elektrische overbrengingen.

Wij beperken ons tot de oudste en grootste groep: de mechanische overbrengingen.
Er zijn zeer veel verschillende soorten mechanische overbrengingen, elk met zijn toepassingen, kenmerkende eigenschappen, voordelen en nadelen.

De mechanische overbrenging van een ronddraaiende beweging van een machineonderdeel op een andere kan o.a. gebeuren door middel van:

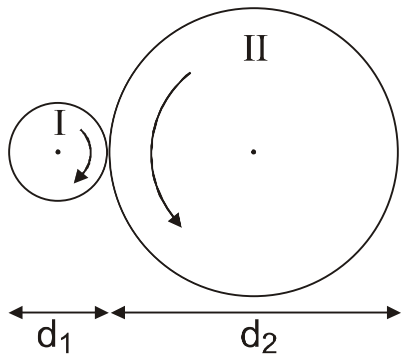
- Wrijvingswielen
- Riemen, snaren en kettingen
- Tandwielen
- Kruk-drijfstangmechanisme

Bij de eerste drie is er sprake van overbrenging van een ronddraaiende beweging naar een andere draaiende beweging. Bij de laatste wordt een draaiende beweging omgezet in een heen-en-weer beweging.
In de volgende paragrafen bekijken we enkele van deze overbrengingen wat nader.

Wanneer een ronddraaiende beweging van een rad of (tand)wiel wordt overgedragen op een ander rad of (tand)wiel, dan heet de eerste de *drijver* of het *drijvende (tand)wiel*. De beweging wordt dan overgedragen op de *volger* of het *volgende (tand)wiel*.
De laatste wordt ook wel eens het *gedreven (tand)wiel* genoemd.

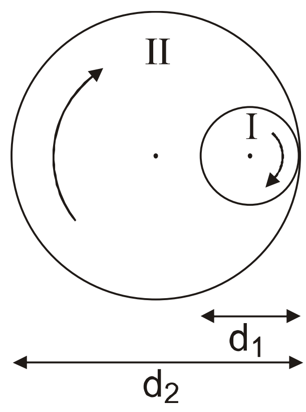
Wanneer twee (tand)wielen een beweging op elkaar overbrengen, dan zegt men ook wel dat de (tand)wielen samenwerken.

■ 2.1 Wrijvingswielen



Bij wrijvingswielen wordt de beweging van het drijvende wiel I door de wrijving aan de omtrek op het andere wiel, de volger II, overgebracht. De wrijving wordt veroorzaakt door de wielen I en II tegen elkaar aan te drukken. Daarbij kan eventueel *slip* optreden.

Deze voortbrenging door middel van wrijvingswielen is een voorbeeld van een *directe overbrenging*, (ook wel *onmiddelijke overbrenging* genoemd) doordat de twee wielen rechtstreeks, ofwel direct op elkaar inwerken.

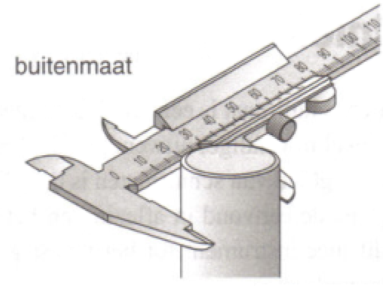


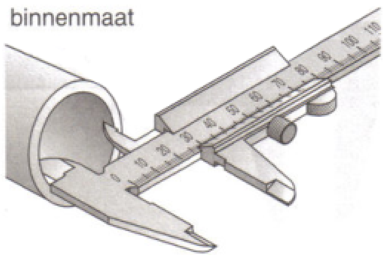
Bij directe overbrenging is de draairichting van de wielen aan *elkaar tegengesteld*, indien ze *uitwendig* samenwerken. Zie in de figuur hiernaast de bovenste situatie.
Werken ze *inwendig* samen, dan draaien beide wielen *in dezelfde* richting. Zie de tweede getekende situatie.

Het is vanzelfsprekend dat wanneer de diameter d_1 van de drijver gelijk is aan de diameter d_2 van de volger, dat de beide wielen even snel ronddraaien (wanneer er geen slip optreedt).
Als $d_1 < d_2$, dan zal de volger minder snel ronddraaien dan de drijver. Dan is er sprake van een *vertragende overbrenging*.
En als $d_2 < d_1$ is er sprake van een *versnellende overbrenging*, omdat dan de volger vanzelfsprekend sneller ronddraait dan de drijver.

Diameter of straal

In de tekst en formules kom je in deze module elke keer de diameter tegen, terwijl je bij wiskunde gewend bent met de straal van een cirkel te werken. In de techniek werkt men echter in de beroepspraktijk altijd met de diameter, omdat die direct te meten is. Bijv. met een *schuifmaat*.
Probeer maar eens van een cirkel de straal direct te meten. Of van een holle pijp. Dat lukt niet als je het middelpunt niet hebt…





Opgave 2.1

Voor een cirkel geldt: $omtrek = 2\pi r$ en $oppervlakte = \pi r^2$.
Hoe zien die formules er uit als je de diameter d in plaats van de straal r gebruikt?

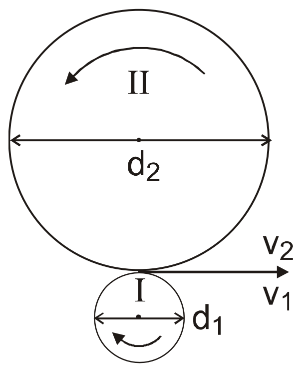
Opgave 2.2

Twee wrijvingswielen werken uitwendig samen. De drijver I heeft een diameter $d_1 = 20$ mm en de volger II heeft een diameter $d_2 = 50$ mm.

a. Bereken hoe vaak wiel I moet ronddraaien om wiel II een keer rond te laten draaien.
b. Bereken over welke hoek wiel II draait als wiel I precies één omwenteling maakt. Geef je antwoord in graden nauwkeurig. Geef ook een antwoord in radialen.
c. Bereken de omtreksnelheid (zie appendix C) van wiel I als deze 50 omwentelingen per minuut maakt. En van wiel II? Geef je antwoorden in mm/s.
d. Wat zijn de antwoorden op de vragen **b** en **c** als de wielen *in*wendig samenwerken?

Opgave 2.3

Een wiel heeft een diameter d_1 (mm) en maakt n_1 omwentelingen per minuut.
Geef een formule voor de omtreksnelheid (in mm/s) van wiel I met diameter d_1 (mm) als deze n_1 omwentelingen per minuut maakt.



Als er geen slip optreedt, dan is de omtreksnelheid in het contactpunt voor beide wielen gelijk, ofwel $v_1 = v_2$.

d_1	=	diameter drijvend wiel (in mm)
n_1	=	aantal omwentelingen per minuut van het drijvend wiel
d_2	=	diameter volgend wiel (in mm)
n_2	=	aantal omwentelingen per minuut van het volgend wiel

Dan geldt (zie bijvoorbeeld opgaven 2.2 en 2.3):

$$v_1 = n_1 \cdot \pi \cdot d_1 \quad \text{en} \quad v_2 = n_2 \cdot \pi \cdot d_2 \qquad (2.1)$$

En omdat $v_1 = v_2$ volgt hieruit:

$$n_1 \cdot \pi \cdot d_1 = n_2 \cdot \pi \cdot d_2$$

$$n_1 \cdot d_1 = n_2 \cdot d_2 \qquad (2.2)$$

Dus: $$\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2} \qquad (2.3)$$

Opgave 2.4

a. In regel (2.1) hierboven is een vreemde eenheid voor de snelheden v_1 en v_2 gebruikt. Wat is die eenheid?

b. Hoe ziet regel (2.1) eruit als je de snelheden v_1 en v_2 uitdrukt in m/s? Ga na dat je dan ook formule (2.2) en (2.3) krijgt.

> De verhouding $n_2 : n_1$ noemt men de *overbrengingsverhouding* en wordt vaak aangeduid met de letter i.
>
> Dus (zonder slip): $$i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}\,. \qquad (2.4)$$
>
> Deze verhouding heet ook wel: *transmissiecijfer* of *drijfwerkverhouding*.

Opmerking: de eenheid ‘omwentelingen per minuut’ noemt men ook wel *toeren* en de waarde van n heet dan het *toerental*.

Uit formule 2.4 volgt: *De verhouding van de toerentallen van twee wrijvingswielen is omgekeerd evenredig met de verhouding van de diameters van de wielen.*

Opgave 2.5

Wat is de evenredigheidsconstante?

Opgave 2.6

a. Een aandrijvende wiel maakt 1440 toeren (= omwentelingen per minuut). De diameter is 240 mm. Bereken de diameter van het aangedreven wiel als deze 360 toeren maakt. Bereken ook de overbrengingsverhouding.

b. Een aandrijvende schijf heeft een diameter van 150 mm en maakt 1440 toeren. Bereken het toerental van de aangedreven schijf die een diameter heeft van 900 mm. Bereken ook de overbrengingsverhouding.

Opgave 2.7 (vervolg op opgave 2.2)

Twee wrijvingswielen werken uitwendig samen. De drijver I heeft een diameter $d_1 = 20$ mm en de volger II heeft een diameter $d_2 = 50$ mm.

a. Bereken de hoeksnelheid ω_1 (in rad/s) van wiel I als deze 50 omwentelingen per minuut maakt.

b. Bereken ook de hoeksnelheid ω_2 (in rad/s) van wiel II.

c. Hoe groot is de verhouding $\omega_2 : \omega_1$? Valt je iets op als je naar de diameters van de wielen kijkt?

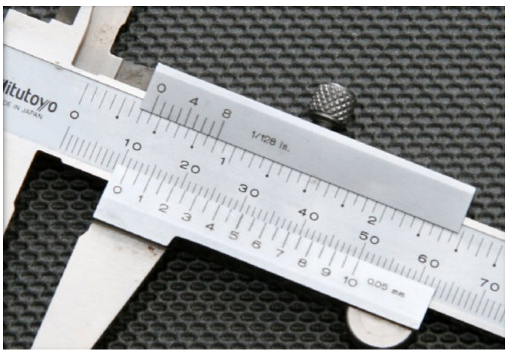
d. Wat zijn de antwoorden op de vragen **a**, **b** en **c** als de wielen *in*wendig samenwerken?

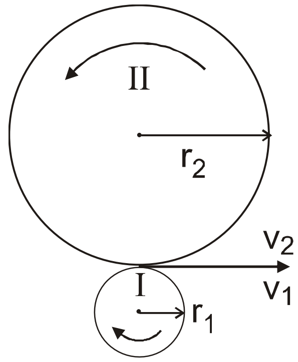
Opgave 2.8 (vervolg op opgave 2.3)

Een wiel heeft een diameter d (mm) en maakt n omwentelingen per minuut (= toeren).
Geef een formule voor de hoeksnelheid ω (in rad/s) van het wiel.

■ **Millimeters**

Misschien is je al opgevallen dat de maten telkens in millimeters worden gegeven. Dat ben je waarschijnlijk niet gewend. Meestal wordt bij de schoolvakken (met name bij natuurkunde) met de eenheid meters gewerkt.
In de werktuigbouw en techniek in het algemeen, werkt men echter in de praktijk altijd met millimeters.





Als er geen slip optreedt, dan is de omtreksnelheid in het contactpunt voor beide wielen gelijk, ofwel $v_1 = v_2$.
Wanneer

r_1 = straal drijvend wiel (in mm)
ω_1 = hoeksnelheid van drijvend wiel (in rad/s)
r_2 = diameter volgend wiel (in mm)
ω_2 = hoeksnelheid (in rad/s) van het volgend wiel

dan geldt:

$v_1 = \omega_1 \cdot r_1$ en $v_2 = \omega_2 \cdot r_2$ (2.5)

En als er geen slip optreedt geldt $v_1 = v_2$ en volgt hieruit:

$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$ (2.6)

Dus: $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{r_1}{r_2}$ (2.7)

Opgave 2.9

Twee wrijvingswielen werken uitwendig samen. De drijver heeft een straal r_1 = 48 mm. De hoeksnelheden ω_1 en ω_2 van de drijver en de volger zijn respectievelijk 2π en 3π rad/s.

a. Bereken de straal van de volger.
b. Bereken de overbrengingsverhouding i.

Voor de *overbrengingsverhouding i* bij samenwerkende wielen (zonder slip) geldt:

$$i = \frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (2.8)$$

Opmerking:
Bij de definitie van de overbrengingsverhouding is wiel 1 altijd de drijver en wiel 2 de volger.
Eigenlijk geldt dus:

$$i = \frac{d_{drijver}}{d_{volger}} = \frac{r_{drijver}}{r_{volger}} = \frac{\omega_{drijver}}{\omega_{volger}} \quad . \qquad (2.8)^*$$

Soms is niet direct duidelijk (of van belang) welk wiel de drijver en welk wiel de volger is.
Dan kiest men meestal de naamgeving zo dat de overbrengingsverhouding een getal groter of gelijk aan 1 is.

Voordelen van wrijvingswielen zijn:
- eenvoudig en goedkoop
- geen breukgevaar bij overbelasting wegens slipmogelijkheid.

Nadelen van wrijvingswielen zijn:
- slechts geschikt voor kleine krachten en vermogens
- geen constant transmissiecijfer wegens het mogelijk slippen.

Toepassingen:
- wordt gebruikt bij overbrengingen zoals een fietsdynamo, aandrijfsysteem cassette-recorders, caravan-mover, ... waar slechts kleine krachten optreden.

Opgave 2.10

a. Bereken de overbrengingsverhouding van jouw fietsdynamo ten opzichte van het fietswiel, door nauwkeurige metingen aan je fiets en dynamo te verrichten.
b. In fietswinkels kun je vaak rubberen dopjes kopen om over het wieltje van de fietsdynamo te schuiven, zodat de dynamo niet zo snel slipt bij slecht weer. Leg uit wat de invloed is van zo'n dopje op de overbrengingsverhouding bij mooi weer. En bij slecht weer?

Opgave 2.11
Kun je nog een apparaat of machine vinden (of bedenken) waarin gebruikt gemaakt is van wrijvingswielen? Als het mogelijk is: probeer de overbrengingsverhouding te berekenen door metingen uit te voeren. Waarom is er in die situatie gekozen voor wrijvingswielen en niet voor (bijvoorbeeld) tandwielen?

■ Slip

Bij het opstellen van de formule voor de overbrengingsverhouding hebben we aangenomen dat de overbrenging gebeurde zonder slip. In werkelijkheid treedt er echter vaak slip op. Dat wil zeggen dat het gedreven wiel iets achterblijft op de drijver. Men noemt slip de verhouding van het verschil in omtreksnelheid tussen de twee wielen tot de omtreksnelheid van de drijver.
De slip wordt uitgedrukt in procenten van de omtreksnelheid van het drijvende wiel. Als men zegt dat de slip 5% bedraagt, betekent dit dat

$$\frac{v_{\text{drijver}} - v_{\text{volger}}}{v_{\text{drijver}}} \cdot 100\% = 5\% \quad \text{of} \quad v_{\text{volger}} = 0{,}95 \cdot v_{\text{drijver}}$$

Algemeen geldt bij een slippercentage s :

$$\frac{v_{\text{drijver}} - v_{\text{volger}}}{v_{\text{drijver}}} \cdot 100\% = s\% \quad \text{of} \quad v_{\text{volger}} = \frac{100-s}{100} \cdot v_{\text{drijver}} \qquad (2.9)$$

Opgave 2.12

a. Beantwoord nogmaals de twee vragen in opgave 2.6, ervan uitgaande dat de slip 5% bedraagt. (Het komt nu niet meer zo mooi uit…)

b. Bereken de slip voor een stel samenwerkende wrijvingsschijven, waarbij d_1 = 20 mm, n_1 = 100 toeren, d_2 = 55 mm en n_2 = 35 toeren.

*** Opgave 2.13 ***

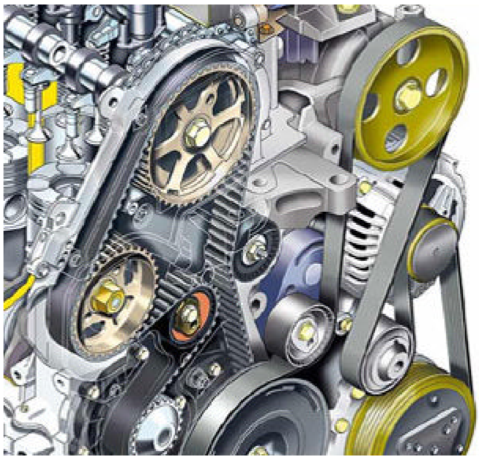
Toon aan dat uit formule (2.9) ook volgt dat $\dfrac{n_{\text{volger}} \cdot d_{\text{volger}}}{n_{\text{drijver}} \cdot d_{\text{drijver}}} = \dfrac{100-s}{100}$.

*** Opgave 2.14 ***
Geef ook een formule voor een verband tussen de hoeksnelheden ω_1 en ω_2 (en d_1 en d_2) bij een slippercentage s.


Toepassing van een wrijvingswiel: caravan-mover

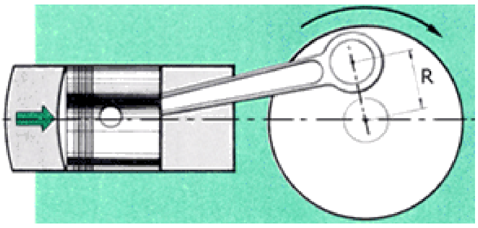
■ 2.2 Riemen, snaren en kettingen

Wanneer een beweging over een grotere afstand moet worden overgebracht, dan kan dat niet met wrijvingswielen. Want bij wrijvingswielen is direct contact tussen de twee draaischijven nodig. En meerdere tussenliggende wrijvingswielen geeft alleen (nog) meer kans op slip.
Een oplossing is dan om de beweging *indirect* over te brengen, door middel van een ander ‘orgaan’. Dat kunnen zijn: een riem, snaar, ketting of stang.



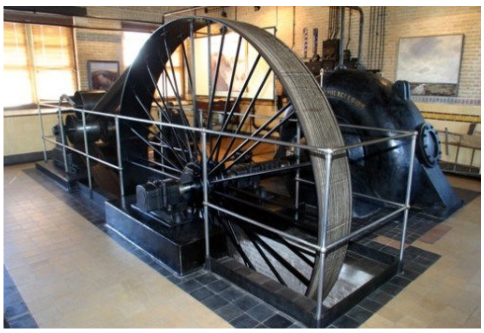
Bij riemen en snaren wordt er een band of snaar over de beide (of meerdere) wielen gespannen.
De wielen waarover de riemen lopen worden dan vaak naar het Engelse woord pulleys (poelies) genoemd.
Bij riemen en snaren is er net als bij wrijvingswielen vaak ook sprake van slip.
De kettingoverbrenging heeft dit niet: slip is niet mogelijk.

Als tussenvorm tussen riemoverbrengingen en tandwielen zijn er ook *getande* riem- of snaaroverbrengingen, waarbij de riem of snaar ribbels bevat die ingrijpen op de getande wiel.
In de afbeelding hiernaast zie je een schematische weergave van een motorblok van een auto. Hierin zie je de toepassing van zowel een riem als een getande riem (de ‘distributieriem’).



Een heel aparte soort van overbrengingen zijn de kruk- en drijfasmechanismen.
Die zitten bijvoorbeeld in elk motorblok. De ‘heen-en-weer’ beweging van de cilinders wordt omgezet in een draaiende beweging van de krukas.
Zie bijv.: **http://auto.howstuffworks.com/engine1.htm**
De omgekeerde omzetting – van draaiend naar heen-en-weer – zie je bijvoorbeeld bij naaimachines.
In dit bundeltje gaan we verder niet op deze soort van overbrengingen in.

■ Voordelen en nadelen



Voordelen van riemoverbrengingen zijn:
- grote afstand te overbruggen
- bij blokkering van het mechanisme is de schade vaak gering, omdat er slip kan optreden en/of alleen de riem breekt
- goedkoop, want relatief eenvoudig te maken
- licht
- geen smering nodig

Nadelen van riem- en snaaroverbrengingen zijn:
- slip, dus (mogelijk) veel vermogensverlies
- relatief korte levensduur van de riemen; ze moeten regelmatig vervangen worden
- regelmatig onderhoud nodig om de spanning te controleren en eventueel bij te stellen
- gevoelig voor hogere temperaturen, vochtigheid en vuil

Toepassingen van riemoverbrengingen:
- ze worden gebruikt bij overbrengingen zoals bij brongemalen, naaimachines, auto’s (V-snaar, startmotor, dynamo), cd-spelers, lopende banden.

Voordelen van kettingoverbrengingen zijn:
- geen slip mogelijk, dus weinig vermogensverlies
- er zijn grote afstanden mee te overbruggen
- tegelijkertijd meerdere tandwielen mee aan te drijven
- grotere betrouwbaarheid dan riemen en snaren
- goedkoper dan tandwieloverbrengingen (maar duurder dan riemoverbrengingen)

Nadelen van kettingoverbrengingen zijn:
- onderhoud: regelmatig smering en spanning controleren
- maken relatief veel lawaai
- altijd schoksgewijs (hoe meer tanden, hoe minder schoksgewijs, zie ook opgaven **2.45** en **2.46**) en veroorzaken daardoor trillingen
- kruisende assen zijn niet mogelijk

Toepassingen van kettingoverbrengingen:
- ze worden gebruikt bij overbrengingen zoals bij fietsen, motorfietsen, grasmaaimachines, fitnessapparaten

Opgave 2.15

a. Kun je nog een apparaat of machine vinden (of bedenken) waarin gebruikt gemaakt is van riemoverbrengingen? Als het mogelijk is: probeer de overbrengingsverhouding te berekenen. Waarom is er in die situatie gekozen voor een riemoverbrenging en niet voor (bijvoorbeeld) tandwielen?

b. Dezelfde vragen voor kettingoverbrengingen.

Opgave 2.16

Een drijvende riemschijf heeft een middellijn van 100 mm en draait rond met toerental 960. De aangedreven schijf heeft een middellijn van 400 mm.

a. Bereken de hoeksnelheid (in rad/s) van de drijver. Bereken ook de omtreksnelheid (in m/s).

b. Leg uit of de omtreksnelheid van de volger groter, kleiner of gelijk is dan de omtreksnelheid van de drijver als geen slip optreedt. En als er wel slip optreedt?

c. Bereken het toerental van de aangedreven schijf als het slippercentage wordt verwaarloosd.

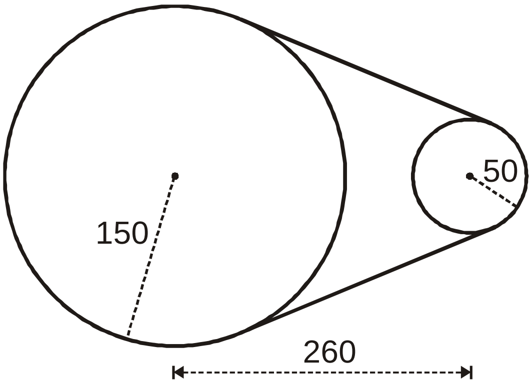
d. Bereken het toerental van de aangedreven schijf als het slippercentage 3% bedraagt.

Romeinse kettingoverbrenging

scooter met getande riem

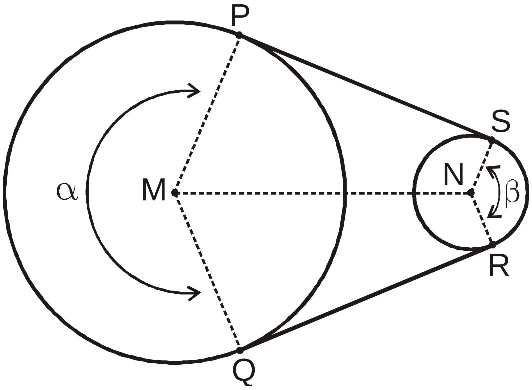
Opgave 2.17: open riemoverbrenging

Twee schijven zijn slipvrij verbonden met een riem. De straal van de drijver is 50 mm en de straal van de volger is 150 mm. De assen bevinden zich op een afstand van 260 mm van elkaar. Zie figuur.



De vraag is nu: hoe lang is de riem?
(We verwaarlozen doorzakking.)

Voordat we met het rekenwerk beginnen, geven we eerst enkele punten in de figuur een naam: de middens van de cirkels noemen we M en N. De punten waar de riemen de schijven ontmoeten noemen we P, Q, R en S. In de figuur zijn ook twee hoeken α en β aangegeven.



a. Hoe groot zijn de volgende hoeken: $\angle MPS$, $\angle MQR$, $\angle NRQ$ en $\angle NSP$?
b. Waarom is $\alpha + \beta = 360^o$?

Door in vierhoeken $QRNM$ (of $SPMN$) een geschikte loodlijn te tekenen en de stelling van Pythagoras te gebruiken, is de lengte van QR (of PS) te berekenen.

c. Toon met een berekening aan dat $QR = PS =$ 240 mm.
d. Toon met een berekening aan dat $\alpha \approx 225{,}2^o$ en $\beta \approx 134{,}8^o$
e. Bereken de (theoretische) lengte van de riem.

Opmerking: in de praktijk zal de lengte van de riem hier natuurlijk iets vanaf wijken, want de stukken PS en QR zullen in de praktijk niet precies recht zijn. Ook is geen rekening gehouden met de dikte van de riem.

De hoeken α en β heten de *omspannen bogen* van de riemoverbrenging. Deze omspannen bogen mogen niet te klein zijn, want dan is het contactoppervlak te klein en is dientengevolge het slippercentage te groot.

Opgave 2.18

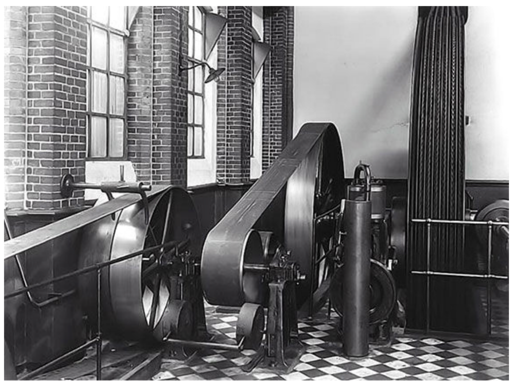
De straal van het kleine wiel in de vorige opgave wordt verkleind naar 25 mm.

a. Bereken hoe groot nu de omspannen bogen zijn.
b. Onderzoek ook wat er gebeurt als niet de straal verkleind wordt, maar bijvoorbeeld de afstand tussen de assen vergroot wordt.

Opgave 2.19

Een wiel met diameter 30 cm wordt aangedreven via een riem door een wiel met diameter 80 cm. De afstand tussen de assen van beide wielen is 2 meter.

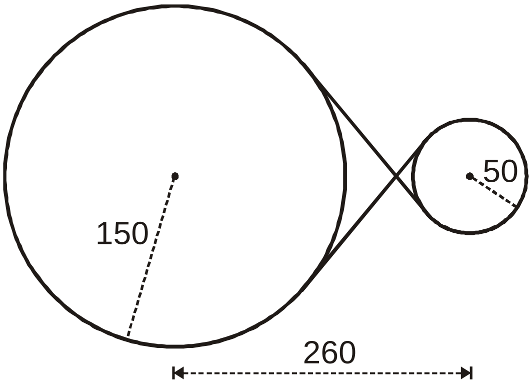
Bereken de lengte van de riem. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

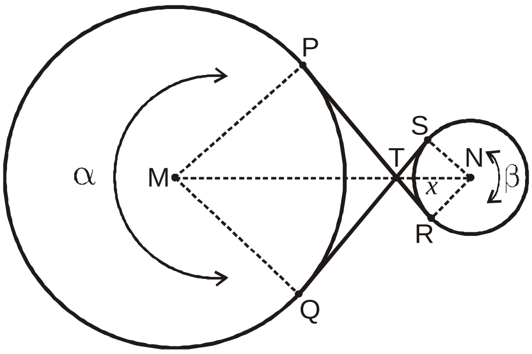


Opgave 2.20: gekruiste riemoverbrenging

We bekijken nogmaals de twee riemschijven van opgave **2.17**, maar nu wordt een gekruiste riem aangebracht.

De berekening van de lengte van de riem is nu een beetje moeilijker. Het punt waar de riemen elkaar kruisen, noemen we T. Zie figuur.





Noem de afstand $NT = x$.

a. Hoe groot is dan MT ?

b. Leg uit dat driehoek TRN gelijkvormig is met driehoek TPM (en driehoek TQM).

c. Bereken x door gebruik te maken van deze gelijkvormigheid.

d. Bereken ook nu de omspannen bogen α en β.

e. Geldt nu ook dat $\alpha + \beta = 360°$?

f. Bereken de lengte van de riem.

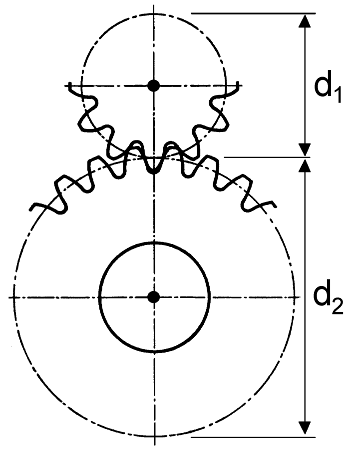
Als je de omspannen bogen vergelijkt met de waarden in opgave **2.17** toen er open riemen waren aangebracht, dan snap je wel dat de slip nu veel minder is. Toch wordt er in de praktijk niet vaak voor gekruiste riemen gekozen.

g. Waarom niet?

Opgave 2.21

Kijk nog eens naar de riemoverbrengingen in de opgaven **2.17** en **2.20**.
Het rechter wiel draait met de klok mee.
Wat is dan de draairichting van het andere wiel bij een gewone wieloverbrenging en bij een gekruiste riemoverbrenging?

■ 2.3 Tandwielen



Bij een tandwieloverbrenging passen de tanden van het ene wiel - de *drijver* – precies tussen de tanden van het andere wiel – de *volger*. De volger wordt hierbij tot meedraaien gedwongen: slip is bij tandwielen duidelijk *niet* mogelijk.
Voor de berekeningen kun je door de contactpunten van de tanden *raakcirkels* denken, die als wrijvingswielen zonder slip functioneren. Zie figuur.
Dezelfde formules als in de paragraaf voor wrijvingswielen zijn bij tandwielen van toepassing.
Wanneer

d_1 = diameter drijver (in mm)
n_1 = toerental drijver (omw/min)
d_2 = diameter volger (in mm)
n_2 = toerental volger (omw/min)

Dan geldt voor de twee samenwerkende tandwielen de eerder gegeven formule (2.4) voor de overbrengingsverhouding i:

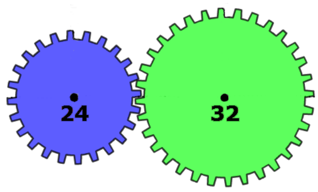
$$i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Let op: deze diameters zijn *niet* de buitendiameters van de tandwielen!!! Dit zijn de diameters van de raakcirkels.

■ Overbrengingsverhouding bij tandwielen

We spreken van een *enkelvoudige* overbrenging als slechts twee tandwielen met elkaar samenwerken.

Opgave 2.22



Twee samenwerkende tandwielen hebben 24 respectievelijk 32 tanden. Het linker tandwiel draait met 120 toeren (= omw/min).

a. Hoe vaak draait het rechter tandwiel rond in 1 minuut, ofwel: wat is het toerental van het rechter tandwiel?
b. Hoe groot is de overbrengingsverhouding i?

Noem het *aantal tanden* van het ene tandwiel z_1 en van het andere z_2.
Maakt tandwiel 1 één omwenteling, dan passeren z_1 tanden bij het contactpunt. Dan moeten in dezelfde tijd ook z_1 tanden van tandwiel 2 deze plek passeren.

Omdat tandwiel 2 z_2 tanden heeft, maakt het dus in die tijd $\frac{z_1}{z_2}$ omwentelingen.

Als tandwiel 1 n_1 omwentelingen maakt, zal tandwiel 2 in dezelfde tijd $n_1 \times \frac{z_1}{z_2}$ omwentelingen maken. Het aantal omwentelingen, of het toerental van tandwiel 2, is dus: $n_2 = n_1 \times \frac{z_1}{z_2}$.

Ofwel: $n_1 \cdot z_1 = n_2 \cdot z_2$. (2.10)

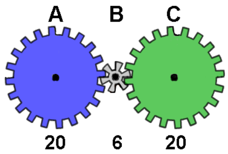
Of anders geschreven: $\frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}$

Conclusie: $i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}$ (2.11)

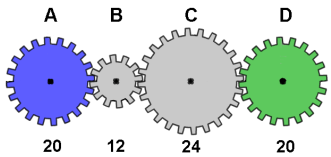
Tussenwielen

Opgave 2.23

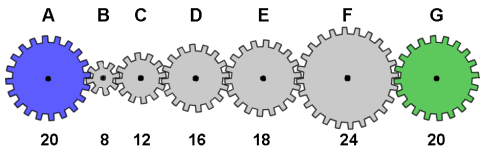
In de afbeelding hiernaast zijn drie tandwielen (A, B, C) geschakeld met een tussenwiel. De tandwielen hebben het aantal tanden zoals eronder vermeld, dus $z_A = 20$, $z_B = 6$ en $z_C = 20$.



a. Bereken de overbrengingsverhouding tussen tandwiel A en B.
b. Bereken de overbrengingsverhouding tussen tandwiel B en C.
c. Hoe groot is de overbrengingsverhouding van tandwiel A naar tandwiel C?
d. Hoe vaak moet tandwiel A minimaal ronddraaien zodat alle drie tandwielen een heel aantal keren zijn rondgedraaid?
e. Hoe groot is de overbrengingsverhouding van tandwiel A naar D voor het geval hiernaast waarbij er 2 tussenwielen zijn?



f. Hoe vaak moet tandwiel A nu minimaal ronddraaien zodat alle 4 tandwielen een heel aantal keren zijn rondgedraaid?
g. Beantwoord beide vragen ook voor de situatie hiernaast met 5 tussenwielen.
h. Vergelijk bij de drie geschakelde tandwieltreinen de draairichtingen van tandwielen A en C.



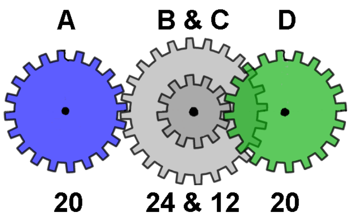
Conclusie:

- Een tussenwiel heeft geen invloed op de overbrengingsverhouding.
- Een tussenwiel dient alleen om de draairichting te wijzigen of om een te grote afstand te overbruggen.

Meervoudige tandwieloverbrengingen

Opgave 2.24

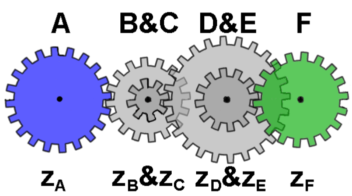
In de tekening hiernaast staan 4 tandwielen, waarbij A met tandwiel B en C met tandwiel D samenwerkt.
De tandwielen B en C zitten vast aan elkaar verbonden.
Tandwiel A draait rond met 120 toeren (= omw/min).



a. Bereken het toerental van tandwiel B.
b. Wat is het toerental van tandwiel C?
c. Bereken het toerental van tandwiel D.
d. Hoe groot is de overbrengingsverhouding van A naar B? En van C naar D?
e. Hoe groot is de overbrengingsverhouding van A naar D?
f. Hoe vaak moet tandwiel A minimaal ronddraaien zodat alle tandwielen een geheel aantal omwentelingen hebben gemaakt?

Opgave 2.25

In de tekening hiernaast staat een tandwieltrein van 6 tandwielen, waarbij A samenwerkt met tandwiel B en C samenwerkt met tandwiel D en E samenwerkt met tandwiel F.
Ze hebben respectievelijk z_A, z_B, z_C, z_D, z_E en z_F tanden.
De tandwielen B en C zitten vast aan elkaar verbonden, evenzo D en E.
Tandwiel A draait rond met n_A toeren (= omw/min).



a. Leg uit dat het toerental n_B van tandwiel B gelijk is aan $n_A \cdot \frac{z_A}{z_B}$.

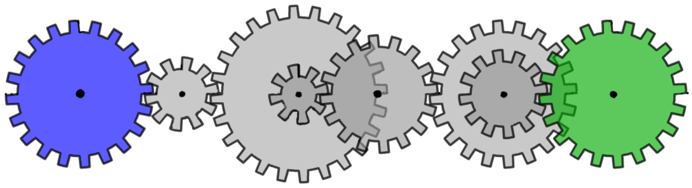
b. Wat is het toerental n_C van tandwiel C?

c. Leg uit dat het toerental $n_D = n_A \cdot \frac{z_A}{z_B} \cdot \frac{z_C}{z_D}$. En dat $n_F = n_A \cdot \frac{z_A}{z_B} \cdot \frac{z_C}{z_D} \cdot \frac{z_E}{z_F}$.

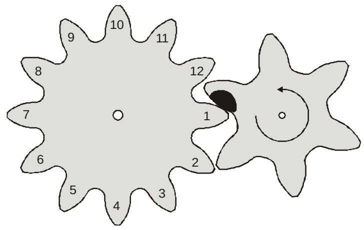
d. Bereken de overbrengingsverhouding van tandwiel A naar tandwiel F.

Conclusie: bij meervoudige tandwieloverbrengingen kun je de tussenliggende overbrengingsverhoudingen achtereenvolgens met elkaar vermenigvuldigen om de totale overbrengingsverhouding te berekenen.

Opgave 2.26
Hiernaast staat een tandwieltrein.
De aantallen tanden staan eronder.
Bereken de overbrengingsverhouding.



Opgave 2.27
De twee tandwielen hiernaast werken samen. Van het kleine tandwiel, de drijver, is één van de zes tanden beschadigd en daardoor treedt er bij de volger extra slijtage op bij de tanden die met deze beschadigde tand in aanraking komen.



a. Bij welke tanden van de volger, genummerd van 1 t/m 12, treedt er extra slijtage op?
b. Nu heeft de volger niet 12 maar 13 tanden, genummerd van 1 t/m 13. Bij welke tanden treedt er dan extra slijtage op?

Opgave 2.28
Twee tandwielen met 12 en respectievelijk 30 tanden werken samen.
a. Na hoeveel omwentelingen van het kleinste tandwiel staan **beide** tandwielen weer in precies dezelfde stand? Hoe vaak draait het grote tandwiel dan rond?
b. Dezelfde vragen voor twee samenwerkende tandwielen met 12 en 25 tanden.

■ Delers en priemgetallen

Een geheel getal a is een deler van een geheel getal b als het getal a precies een geheel aantal keer in het getal b past. Meer wiskundig: een geheel getal a is een *deler* van een geheel getal b als er een geheel getal k is, zodanig dat er geldt $a \cdot k = b$.

In de wiskunde is er een notatie voor “deler zijn van”. Deze notatie is een verticale rechte streep: |. Wanneer je schrijft $a \mid b$, bedoel je dus dat a een deler is van b.

Opgave 2.29
Geef voor elk van de onderstaande beweringen aan of hij waar of niet waar is.
a. $5 \mid 345$
b. $25 \mid 5$
c. $7 \mid 25$
d. $6 \mid 8$
e. $6 \mid 6$
f. $1 \mid 7$
g. $12 \mid 123456$

Opgave 2.30
a. Hoeveel delers hebben 8, 81 en 49 ?
b. Hoeveel delers heeft $8 \cdot 81 \cdot 49$? (Ofwel: hoeveel delers heeft 31752?)
c. Hoeveel delers heeft een positief geheel getal dat groter is dan 1 minimaal?

Een ***priemgetal*** is een positief geheel getal dat precies twee delers heeft, namelijk 1 en zichzelf.

Opgave 2.31
Geef de eerste 10 priemgetallen.

Alle priemgetallen kleiner dan een zeker getal n vinden, is niet zo heel moeilijk. Het kost alleen behoorlijk wat tijd als het getal n groot is. Een systematische manier om priemgetallen te vinden is "*de zeef van Eratosthenes*".
De zeef van Eratosthenes werkt als volgt:

1. Schrijf de getallen van 2 t/m n op.
2. Omcirkel het kleinste getal dat niet doorgestreept of omcirkeld is.
3. Streep alle veelvouden van het getal dat je net omcirkeld hebt door.
4. Ga naar stap 2 als er nog getallen zijn die niet doorgestreept of omcirkeld zijn. Als alle getallen doorgestreept of omcirkeld zijn, ben je klaar. Alle omcirkelde getallen zijn priemgetallen.

Opgave 2.32
Geef met behulp van de zeef van Eratosthenes alle priemgetallen kleiner dan 100. Gebruik daarvoor het rooster op het werkblad.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Opgave 2.33
a. Waarom begin je bij stap 1 met opschrijven bij de 2 en niet lager?
b. Waarom weet je zeker dat priemgetallen niet doorgestreept worden?
c. Waarom weet je zeker dat getallen die geen priemgetallen zijn doorgestreept worden?

Positieve gehele getallen ≥2 met meer dan twee delers heten *samengesteld*.
Ieder samengesteld getal ≥2 kun je schrijven als een product van alleen maar priemgetallen.

- *Voorbeeld:* $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3$

We zeggen dat 24 twee *priemdelers* heeft, nl. 2 en 3, en vier priemfactoren omdat 24 het product is van vier priemgetallen. Een getal schrijven als een product van priemgetallen noemen we *ontbinden in priemfactoren*.

Opgave 2.34
Neem de getallen: 1, 41, 91, 101, 121, 231.
a. Welke van de bovenstaande getallen zijn samengesteld en welke zijn priemgetallen?
b. Geef van de samengestelde getallen de priemfactoren.
c. Voor de liefhebber, wie een beetje kan programmeren op de GR:
Schrijf een programma dat de priemfactorontbinding geeft van een ingevoerd getal.

De *grootste gemene deler* van a en m is het grootste gehele getal dat deler is van zowel a als m. We noteren dit als $\text{ggd}(a,m)$.

Wanneer je de grootste gemene deler van twee getallen zoekt, kun je als volgt te werk gaan. Je zoekt de priemfactoren die in beide getallen voorkomen en schrijft daarom de priemfactor-ontbinding van beide getallen op. Vervolgens neem je het product van de factoren die in beide ontbindingen voorkomen.

- *Voorbeeld*:
  Bereken ggd(980, 504).
- *Uitwerking:*
  $980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.
  In beide priemfactorontbindingen zit twee keer de priemfactor 2 en één keer de priemfactor 7, dus $\text{ggd}(980, 504) = 2^2 \cdot 7 = 28$.

Opmerking: De Engelse afkorting van ggd is gcd, van 'greatest common divisor'.
Op je GR zit de ggd (of gcd) zeer waarschijnlijk voorgeprogrammeerd, maar het is een goede oefening om de ggd van twee getallen zónder deze ingebouwde functie van de GR uit te kunnen rekenen. Je kunt je antwoorden natuurlijk wel controleren met behulp van deze GR-functie.

Opgave 2.35
a. Bereken ggd(99, 45).
b. Bereken ggd(177, 15).
c. Bereken ggd(420, 246).
d. Bereken ggd(252, 198).
e. Bereken ggd(6466, 5429).

Opgave 2.36
a. Voor twee getallen a en b geldt ggd(a, b) = 1. Wat zegt dat over de getallen a en b?
b. Wat is de ggd van twee priemgetallen p en q?

Een *veelvoud* van een getal a is een getal dat a als deler heeft.
Bijvoorbeeld 78 is een veelvoud van 13 want $13 \mid 78$ (namelijk 13 · 6 = 78).

Opgave 2.37
Gegeven zijn $72 = 2^3 \cdot 3^2$ en $108 = 2^2 \cdot 3^3$.
a. Waarom is $216 = 2^3 \cdot 3^3$ een veelvoud van 72?
b. Waarom is $216 = 2^3 \cdot 3^3$ een veelvoud van 108?

216 is dus een gemeenschappelijk veelvoud van 72 en 108.
c. Zijn er kleinere gemeenschappelijke veelvouden?

Het ***kleinste gemene veelvoud*** – ook wel afgekort met kgv – van twee getallen a en b is het kleinste gehele getal waarvan zowel a als b een deler is.
d. Geef de priemfactorontbinding van 1350 en van 1260.
e. Wat is het kgv van 1350 en 1260?

Wanneer je van de twee getallen a en b de **grootste exponenten** neemt van **alle** priemfactoren, dan krijg je blijkbaar het **kleinste gemene veelvoud** van de getallen a en b. We schrijven dan: $\text{kgv}(a, b)$.

- *Voorbeeld:*
  Bereken ggd(1020, 29106) en kgv(1020, 29106).
- *Uitwerking:*
  De priemfactorontbindingen zijn: $1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ en $29106 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$
  Dus ggd(1020, 29106) = 2 · 3 = 6
  Dus kgv(1020, 29106) = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17$ = 4 948 020

Opmerking: De Engelse afkorting van kgv is is lcm, van 'least common multiple'.
Op je GR zit de kgv (of lcm) zeer waarschijnlijk voorgeprogrammeerd, maar het is een goede oefening om de kgv van twee getallen zónder deze ingebouwde functie van de GR uit te kunnen rekenen. Je kunt je antwoorden natuurlijk wel controleren met behulp van deze GR-functie.

Opgave 2.38

a. Bepaal kgv(30,192).
b. Bepaal kgv(420,5148).
c. Bepaal kgv(924,4284).

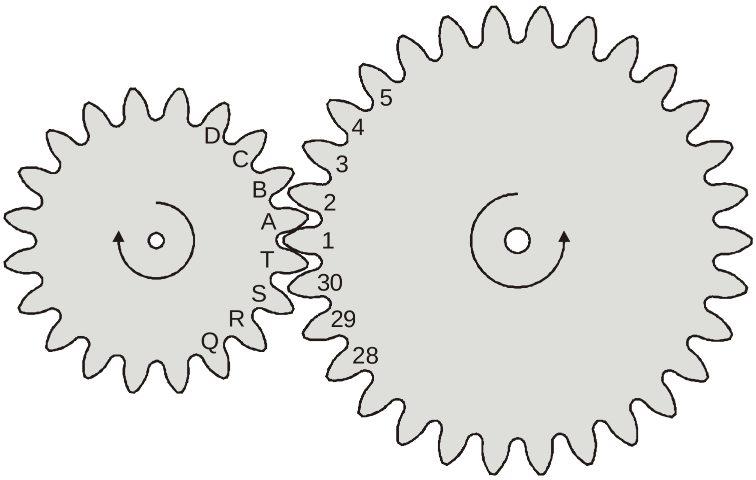
Wat hebben de ggd en het kgv nu met tandwielen te maken?

Opgave 2.39

a. Kijk nog eens naar opgave **2.27**: zie je enig verband met de ggd van de aantallen tanden van beide tandwielen? Breng dit verband onder woorden (of geef een formule).
b. Kijk nog eens naar opgave **2.28**: zie je enig verband met het kgv van de aantallen tanden van beide tandwielen? Breng dit verband onder woorden (of geef een formule).

Opgave 2.40

Twee tandwielen met 20 en 30 tanden werken samen.
De tanden zijn genummerd van A t/m T resp. van 1 t/m 30.
Tand A van het kleinste tandwiel drukt op een bepaald moment tegen tand 1 van het grote tandwiel. Zie de afbeelding.

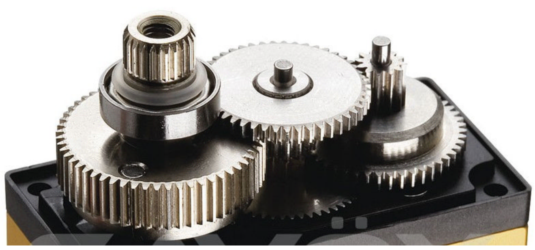


a. Met welke tanden (noem de nummers) komt tand A nog meer in aanraking als het een zeer groot aantal keer ronddraait? En tand G?
b. Dezelfde vraag als het grote tandwiel 25 tanden heeft.
c. Dezelfde vraag als het grote tandwiel 29 tanden heeft.
d. Dezelfde vraag als het grote tandwiel 21 tanden heeft.

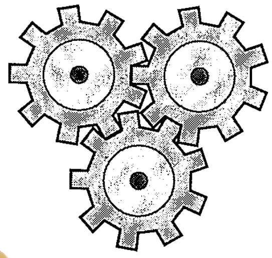
Zoals je (hopelijk) bij de bovenstaande vragen hebt ontdekt, komt tand A soms met alle tanden en soms slechts met een deel van de tanden van het grotere tandwiel in aanraking.
Als tand A een beschadiging of oneffenheid bevat, dan zal in het laatste geval slechts een deel van de tanden van het grote tandwiel worden beschadigd. In het eerste geval zal de slijtage gelijkmatig over het hele tandwiel optreden en dus minder snel optreden.

e. Geef zelf nog twee aantallen tanden voor het grotere tandwiel waarbij tand A met alle tanden van het grote tandwiel in aanraking komt.
f. Wat weet je van het aantal tanden z van het grote tandwiel als tand A met alle tanden in aanraking komt?
g. Wat moet er gelden voor twee tandwielen met z_1 respectievelijk z_2 tanden waarbij elke tand van het ene tandwiel met elke tand van het andere tandwiel in aanraking komt?

Wanneer je zo weinig mogelijk slijtage aan tandwielen wilt hebben (of zo gelijkmatig mogelijke slijtage), moet je er dus voor zorgen dat de aantallen tanden van beide tandwielen geen gemeenschappelijke deler hebben, ofwel de ggd van de aantallen tanden van beide tandwielen moet dan gelijk zijn aan 1.



■ 2.4 Gemengde opgaven



Opgave 2.41

a. Leg uit dat de drie tandwielen hiernaast niet kunnen draaien.
(Opm. Dit was het logo van onderwijskundige onderzoekers aan de universiteit van Saskatchewan, om 'samenwerkend leren' te symboliseren. Als de drie tandwielen drie samenwerkende studenten moeten voorstellen, dan zit er weinig beweging of voortgang in hun leerproces…)

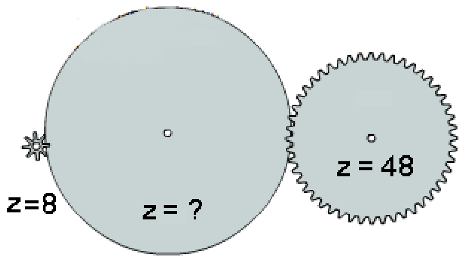
b. Hoe zit dat bij een kring van bijvoorbeeld 5 tandwielen? Of zoals in de munt van 2 pond met 19 tandwielen?

c. Leg uit dat bij een kring van vier (of ander even aantal) tandwielen de tandwielen altijd wél kunnen draaien, onafhankelijk van het aantal tanden of de grootte van de tandwielen.

* **Opgave 2.42** *
Een belangrijke eigenschap van tandwielen is dat met tandwielen een richtingsverandering van een draaiende beweging tot stand gebracht kan worden.
Zoek op internet eens op de onderstaande onderwerpen. Bedenk telkens ook een praktijk-situatie (machine of apparaat) waar het gebruikt wordt en maak daar een kort verslagje van.

- Stand van de assen van twee samenwerkende tandwielen (parallel, snijdend, kruisend)
- Rechte of schuine vertanding
- Wormoverbrenging

Opgave 2.43
Zie afbeelding hiernaast.
Het drijfwiel heeft 8 tanden en het volgwiel heeft 48 tanden. Hoeveel tanden moet het tussenwiel hebben om een overbrengingsverhouding van 1:6 te krijgen?

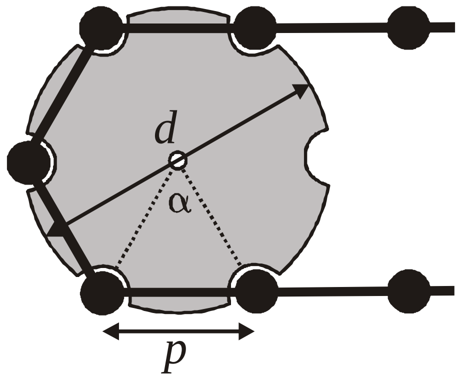


Opgave 2.44
Op internet zijn wel enkele websites te vinden waar je nog wat extra kan oefenen met overbrengingsverhoudingen bij overbrengingen met tussenwielen en meervoudige tandwieloverbrengingen.

http://www.fisme.uu.nl/wiki/index.php/Tandwielen_%28mini-game%29
Set 1 en 2 zijn nogal eenvoudig. Set 3 is al wat meer op niveau…

Opgave 2.45

Een kettingwiel heeft z tanden. Zie de figuur hiernaast, waarbij $z = 6$. Zoals je ziet, omsluit de ketting een (deel van een) 6-hoek.
We gaan in deze opgave laten zien dat de beweging van de ketting schoksgewijs is. Dit heet het *polygooneffect*. (Polygoon betekent 'veelhoek'.)
De 'werkzame' cirkel waarover de scharnieren ketting loopt heeft diameter d.
De afstand tussen twee schakels noemen we de steek p.
De steekhoek α is aangegeven in de figuur.

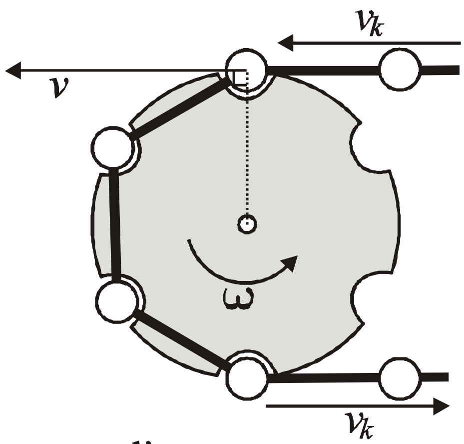


We nemen aan dat het kettingwiel om zijn as met een constante hoeksnelheid ω (rad/s) ronddraait.

Neem $z = 6$, $d = 220$ (mm), $\omega = 1$ (rad/s).

a. Bereken de steekhoek α.

b. Laat zien dat $p = 110$ (mm).



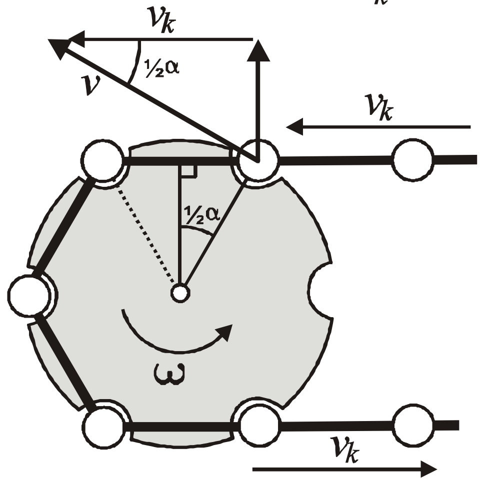
Zie de afbeelding hiernaast, waarbij het kettingwiel zo staat dat een scharnier van de ketting zich precies bovenin bevindt.
Het scharnier heeft omtreksnelheid $\vec{v}$ die loodrecht staat op de straal.
De ketting heeft op datzelfde moment snelheid v_k.

c. Bereken de grootte van v_k.

Wanneer het tandwiel zich over een hoek ½α verder heeft gedraaid, krijgen we een andere situatie.
De omtreksnelheid van het scharnier wordt dan ontbonden in twee richtingen: in een richting van de straal en in de richting van de ketting.

d. Bereken in dit geval de grootte van v_k.

e. Leg uit wat er gebeurt bij een oneven aantal tanden.



Merk op: de snelheid v_k van vraag **c** is de grootste snelheid ($v_{\max}$) en de snelheid van vraag **d** is de kleinste snelheid ($v_{\min}$) van de ketting.

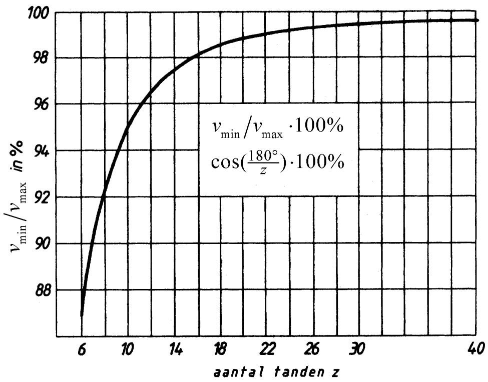
* Opgave 2.46 *

Een kettingwiel heeft z tanden, diameter d en hoeksnelheid ω. De ketting omsluit nu een deel van een regelmatige z-hoek.

a. Leg uit: $v_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot d$

b. Leg uit: $v_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot d \cdot \cos(\frac{180°}{z})$

Hieruit volgt: $\dfrac{v_{\min}}{v_{\max}} = \cos(\frac{180°}{z})$. Zie grafiek hiernaast.



c. Bereken vanaf welke waarde van z de waarden van $v_{\min}$ en $v_{\max}$ minder dan 1% van elkaar verschillen.

Doordat een ketting ook enige elasticiteit vertoont, is dit polygooneffect bij waarden $z \geq 19$ vaak te verwaarlozen.
Kettingwielen met $z \leq 17$ kunnen door het polygooneffect slechts bij handbediening of langzaam lopende kettingen toegepast worden.

* Opgave 2.47: Algoritme van Euclides *

Euclides ook **Euclides van Alexandrië** genoemd, was een grote Griekse wiskundige, die rond het jaar 300 v.Chr. werkzaam was.

Er is ook een andere, effectieve werkwijze om de grootst gemeenschappelijke deler (ggd) van twee natuurlijke getallen te bepalen, zonder dat daarvoor de priemfactorontbinding nodig is.

Het basisprincipe van dit algoritme is:

> Als a en b twee natuurlijk getallen zijn met $a > b$ dan geldt
> ggd(a , b) = ggd($a - b$, b).

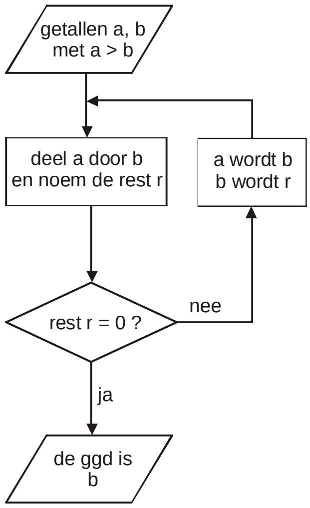
Een bewijs hiervan geven we hier niet.

Bijvoorbeeld:

ggd(34 , 8) = ggd(26 , 8) = ggd(18 , 8) = ggd(10 , 8) = ggd(2 , 8) = 2.

a. Bereken op deze wijze ggd(210, 57).
b. Bereken op deze wijze ook ggd(64, 12).

Dat is nog een hele klus… maar misschien heb je zelf al een snellere manier bedacht…



De ggd-berekening van 34 en 8 in het voorbeeld hierboven kan nog sneller. Je kunt namelijk meteen *zoveel mogelijk* keer 8 van 34 aftrekken.
Je deelt dus 34 door 8 (dat is 4) en kijkt naar de rest (die is 2):

ggd(34 , 8) = ggd(34 – 4*8 , 8) = ggd(2 , 8) = 2.

Deze verkorte methode wordt het algoritme van Euclides genoemd.
In het stroomschema hiernaast is deze werkwijze weergegeven.

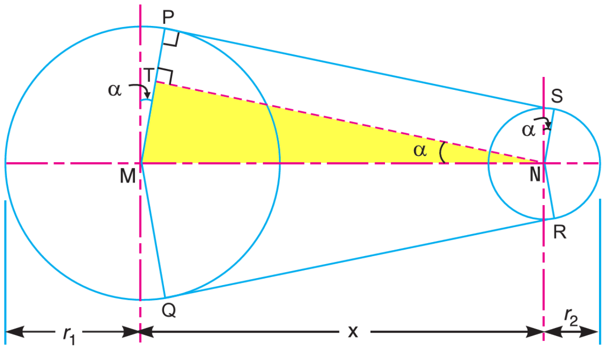
Bijvoorbeeld berekening van ggd(54, 15):

54 gedeeld door 15 geeft rest 9, dus ggd(54, 15) = ggd(15, 9)
15 gedeeld door 9 geeft rest 6, dus ggd(15, 9) = ggd(9, 6)
9 gedeeld door 6 geeft rest 3, dus ggd(9, 6) = ggd(6, 3)
6 gedeeld door 3 geeft rest 0, dus de ggd is 3

Kortere notatie: ggd(54, 15) = ggd(15, 9) = ggd(9, 6) = ggd(6, 3) = 3.

c. Bereken op deze wijze ook ggd(272, 64).
d. Maak nu nog eens op deze wijze opgave **2.35**. Welke werkwijze vind je handiger?
e. Voor de liefhebber:
(Hoewel de GR het standaard al kan, toch leuk om zelf te maken!)
Als je weet hoe je kunt programmeren op de GR, dan kun je aan de hand van het stroomschema vrij eenvoudig een programmaatje maken om de ggd van twee getallen te berekenen. Doe dat.

* Opgave 2.48: open riemoverbrenging * (vervolg opgave 2.17)



We bekijken nogmaals een open riemoverbrenging, zie de afbeelding hiernaast.
De loodlijn vanuit N op MP is getekend; dit geeft punt T.
We noemen nu $\angle MNT = \alpha$ in **radialen**.
De asafstand noemen we x.

a. In de figuur zijn ook nog twee andere hoeken met α aangeduid. Leg uit dat deze hoeken net zo groot zijn.

b. Leg uit dat geldt: $\sin\alpha = \dfrac{r_1 - r_2}{x}$

c. Toon aan: $NT = \sqrt{x^2 - (r_1 - r_2)^2}$

d. Toon aan: lengte boog PQ = $(\pi + 2\alpha)\cdot r_1$ en lengte boog RS = $(\pi - 2\alpha)\cdot r_2$

Voor de lengte L van de riem geldt dus: $L = 2\cdot\sqrt{x^2 - (r_1 - r_2)^2} + (\pi + 2\alpha)\cdot r_1 + (\pi - 2\alpha)\cdot r_2$.

e. Hoe ziet deze formule eruit uitgedrukt in de diameters d_1 en d_2?

Voor het apparaatje hiernaast hebben de pulleys diameters van 90 en 30 millimeter; de asafstand = 80 mm.

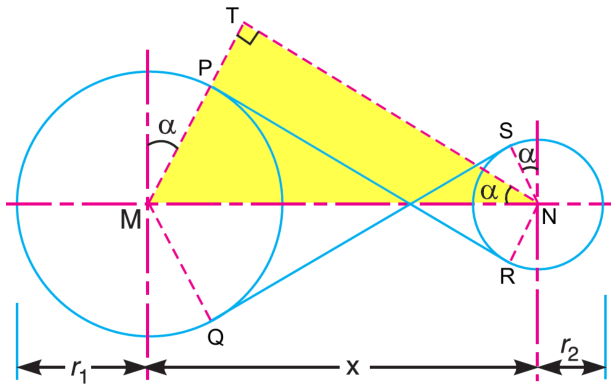
f. Bereken met deze formule de lengte van de riem, afgerond op hele millimeters. (Tip: bereken eerst hoek α (in radialen).)

In handboeken staat vaak de volgende formule die eenvoudiger is in het gebruik, omdat je niet eerst de hoek α hoeft uit te rekenen. De formule geeft echter niet de precieze lengte, maar een benaderde waarde van de lengte van de riem:

$$L = \tfrac{\pi}{2}(d_1 + d_2) + 2x + \frac{(d_1 - d_2)^2}{4x}$$

g. Ga na hoe goed deze benaderingsformule is door ook de lengte van de riem van het apparaat met deze benaderingsformule uit te rekenen. Conclusie?

* Opgave 2.49: gekruiste riemoverbrenging * (vervolg opgave 2.20)



We bekijken nogmaals een gekruiste riem-overbrenging. Zie de afbeelding hiernaast.
De loodlijn uit N op het verlengde van MP geeft punt T. De asafstand noemen we weer x.
We noemen ook nu $\angle MNT = \alpha$ in **radialen**.

a. Leg uit dat geldt: $\sin\alpha = \dfrac{r_1 + r_2}{x}$

b. Toon aan dat voor de lengte L van de riem geldt:
$L = 2\cdot\sqrt{x^2 - (r_1 + r_2)^2} + (\pi + 2\alpha)\cdot r_1 + (\pi + 2\alpha)\cdot r_2$.

In handboeken staat vaak de volgende benaderingsformule voor de lengte van een gekruiste riem: $L = \tfrac{\pi}{2}(d_1 + d_2) + 2x + \dfrac{(d_1 + d_2)^2}{4x}$

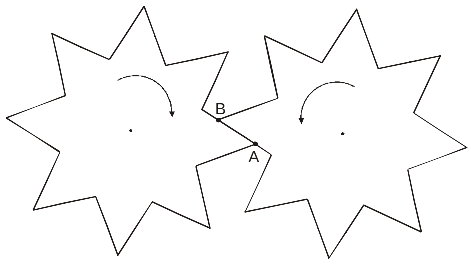
c. Bereken hoe goed deze benaderingformule is voor een situatie met twee pulleys met diameters van 90 en 30 millimeter en asafstand = 100 mm.

■ Hoofdstuk 3: Tandprofiel

In dit hoofdstuk kijken we wat nader naar de vorm, ofwel het profiel, van de tanden op tandwielen.

Voor een goede samenwerking tussen de twee tandwielen, moeten tanden op beide tandwielen onderling nauwkeurig dezelfde afstanden hebben. De tand van het ene wiel moet daarbij precies passen in de tandkuil van het andere wiel.
Het tandprofiel moet ook zo zijn, dat de beweging van de drijver regelmatig, dus zonder schokken, op het gedreven tandwiel wordt overgebracht.
Om slijtage en energieverlies tegen te gaan, moeten de samenwerkende tanden zoveel mogelijk over elkaar *rollen* en zo weinig mogelijk langs elkaar glijden. Bovendien moet het tandprofiel eenvoudig van vorm zijn, zodat de tandwielen eenvoudig en nauwkeurig te maken zijn. Onnauwkeurig gemaakte tandwielen veroorzaken slijtage, extra tandbelasting en lawaai.
Dit alles zorgt ervoor dat het profiel van een tand van een tandwiel niet zomaar elke willekeurige vorm aan kan nemen.

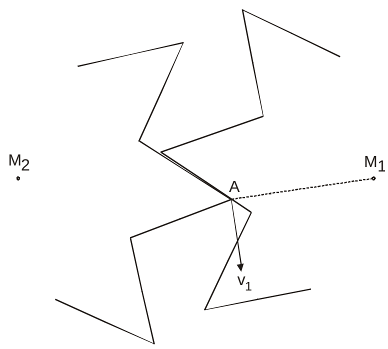
Opgave 3.1



Hiernaast staan twee even grote tandwielen met 8 driehoekige tanden. Eerst maken de twee tanden contact in punt A, dan even op het gehele stuk AB en tenslotte alleen in punt B. Het rechter tandwiel is de drijver en draait met constante hoeksnelheid.
Op het **werkblad** staan de twee tandwielen ook getekend.

a. Plak het werkblad op **dik** karton en knip de twee tandwielen uit. Prik een knopspeld door de middens van de tandwielen en kijk wat er gebeurt als je de tandwielen met elkaar probeert te laten samenwerken.

Op het werkblad staat twee keer een uitvergroting van het contactgebied, net voor en na het contactmoment.
We gaan aan de hand van het tekenen van de snelheidsvectoren in de punten A en B onderzoeken of er sprake is van een regelmatige overbrenging is van het rechter tandwiel op het linker tandwiel.
Het rechter tandwiel is de drijver en draait met constante hoeksnelheid.

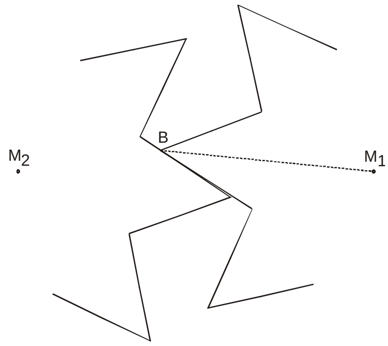


b. Het *rechter* tandwiel maakt contact in punt A. De snelheidsvector $\vec{v_1}$ van het contactpunt van het rechter tandwiel is getekend.

- Waarom staat $\vec{v_1}$ loodrecht op AM_1 ?
- Teken de normaal in punt A.
- Ontbind de vector $\vec{v_1}$ in de richting loodrecht op de normaal en in de richting van de normaal (zie Appendix A). Noem deze vector $\vec{v}$.

Punt A beweegt zich in de richting van de normaal met de zojuist getekende snelheid.
Ten opzichte van het *linker* tandwiel moet de snelheidsvector $\vec{v_2}$ bij ontbinding dezelfde component hebben in de richting van de normaal.
(De normaal ten opzichte van het linker tandwiel is 'bijna' dezelfde normaal als ten opzichte van het rechter tandwiel, omdat de flanken vrijwel gelijk lopen. Neem aan dat de normaal dezelfde lijn is, anders wordt de tekening erg onoverzichtelijk.)

- Teken de vector $\vec{v_2}$ van het contactpunt A ten opzichte van het linker tandwiel.

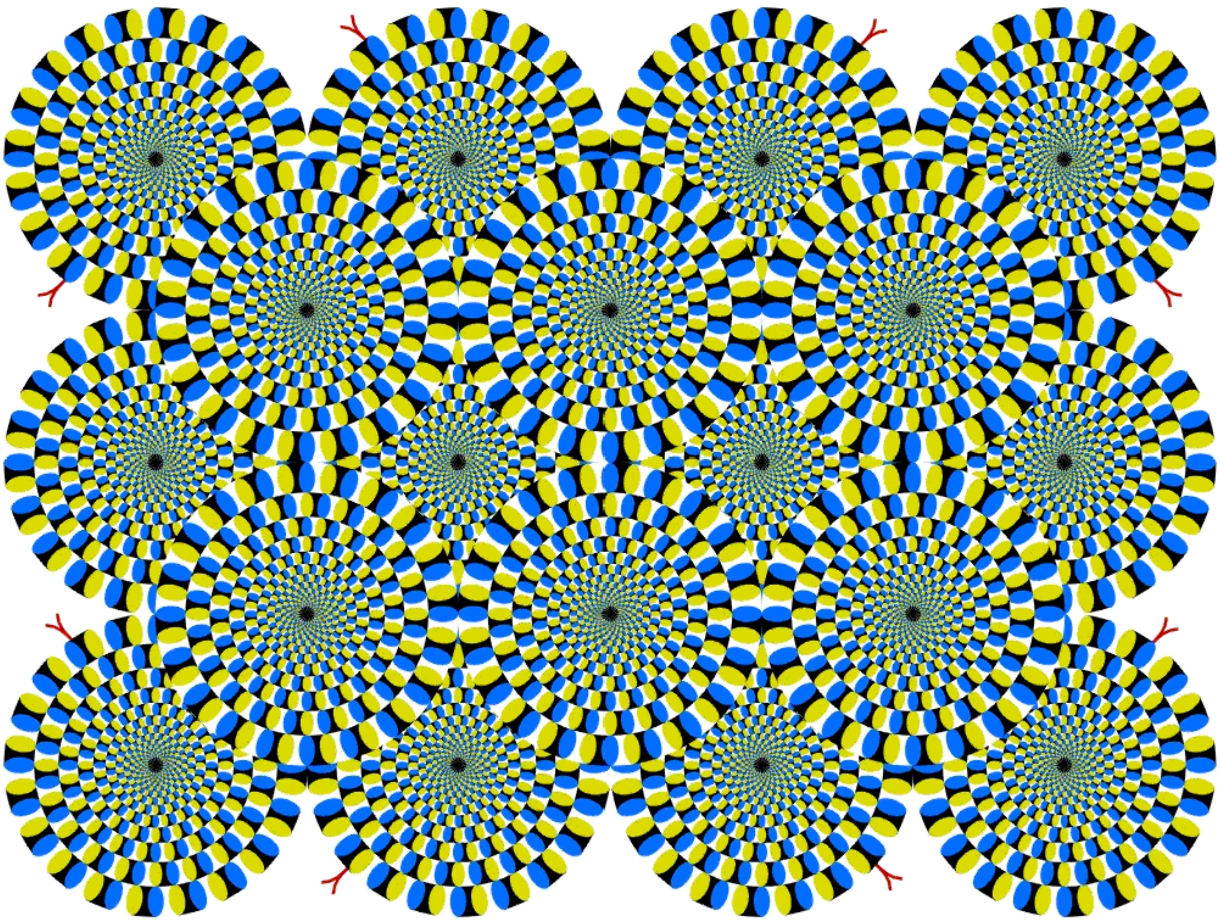


c. Een fractie van een seconde later maken de tandwielen contact in punt B. Zie de tweede getekende situatie op het werkblad.

- Leg uit dat in punt B de lengte van $\vec{v_1}$ groter is dan in punt A. Hoeveel keer zo groot?
- Teken de normaal in punt B.
- Teken **op schaal** de snelheidsvector $\vec{v_1}$ in punt B.
- Teken ook nu weer $\vec{v_2}$ in punt B ten opzichte van het linker tandwiel.

d. Bekijk de twee getekende vectoren $\vec{v_2}$. Draait het linker tandwiel met constante hoek-snelheid?

Driehoekige tandprofielen voldoen niet, zoals uit bovenstaande opgave is gebleken: als de drijvende tandwiel met constante hoeksnelheid draait, dan draait de aangedreven tandwiel *niet* met constante hoeksnelheid. De overbrenging is dan schoksgewijs en dat geeft veel slijtage, lawaai en trillingen.
Maar hoe moet zo'n tand van een tandwiel er dan wel uitzien bij een vloeiende overbrenging?



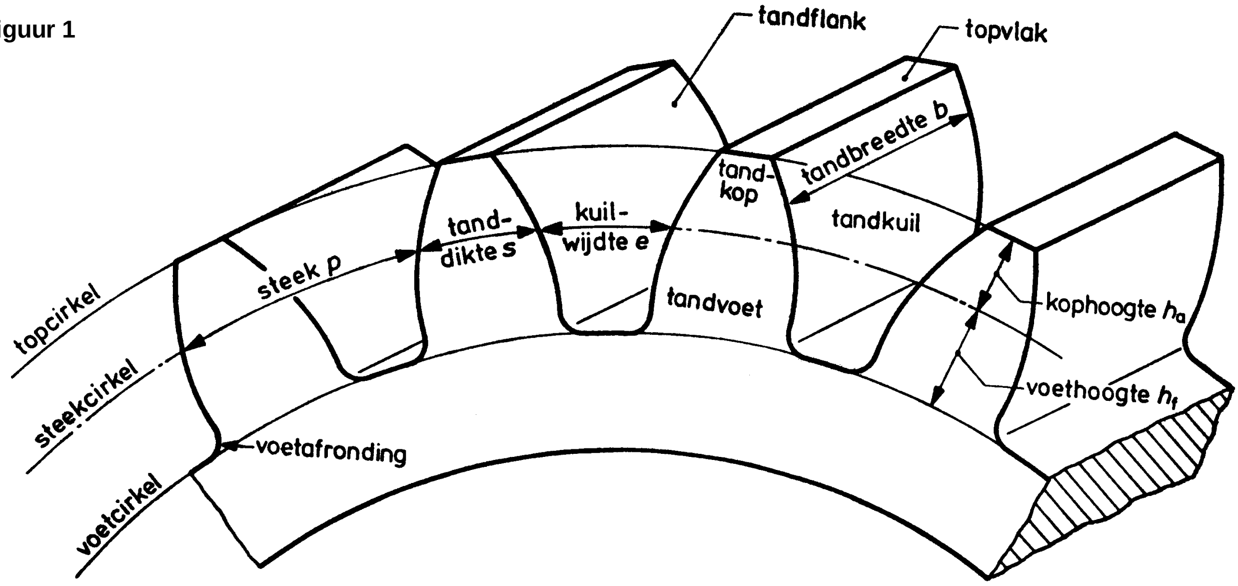
Geen echte tandwielen, maar is hier sprake van beweging?

■ 3.1 Naamgeving

Onder het tandprofiel verstaat men de doorsnede van de tandflank met een plat vlak dat loodrecht staat op de draaias van het wiel.

De ruimte tussen de opeenvolgende tanden van een tandwiel heet *tandkuil*. De *vertanding* van een tandwiel bestaat uit een regelmatige opeenvolging van tanden en tandkuilen Elk tandwiel heeft een *aantal tanden* (z). Het grensvlak tussen een tand en de tandkuil ernaast is de *tandflank*.
De tandflank gaat met een *voetafronding* over in het bodemvlak van de tandkuil. Het bovenvlak van een tand is het *topvlak*. Een tand wordt aan de vóór- en achterzijde begrensd door een *zijvlak*. De afstand tussen de zijvlakken is de *tandbreedte* (b).

figuur 1



De *steekcirkel* dient bij een tandwiel als uitgangspunt voor het vastleggen van de tandafmetingen.
De diameter van deze steekcirkel (d) is de diameter van de eerder genoemde denkbeeldige *raakcirkel* van dit tandwiel bij twee samenwerkende tandwielen (zie §2.3).

De afstand tussen twee opeenvolgende rechter- of linkertandflanken gemeten langs de steekcirkel is de *steek* (p). (In het Engels *pitch* genaamd.)
De steek is een maat voor de tandgrootte.

$$\text{Omtrek steekcirkel} = \text{aantal tanden} \cdot \text{steek}$$

Ofwel:
$$\pi \cdot d = z \cdot p$$

Zodat:
$$d = z \cdot \frac{p}{\pi} \qquad (3.1)$$

Een andere belangrijke maat bij tandwielen is de *modulus*, of *moduul* (m): dat is het aantal malen dat π in de steek (in mm) past. Dus:

$$m = \frac{p}{\pi} \qquad (3.2)$$

Gevolg:
$$d = z \cdot m \qquad (3.3)$$

Om het aantal verschillende grootten van tandwielen te beperken is besloten een aantal tandgrootten te normaliseren. In de tabel zijn de genormaliseerde waarden van de modulus vermeld die men vaak toepast in de algemene machinebouw.

Waarden van de modulus in mm voor toepassing in de algemene machinebouw

I	II	I	II	I	II
1			2,75	8	
	1,125	3			9
1,25			3,5	10	
	1,375	4			11
1,5			4,5	12	
	1,75	5			14
2			5,5	16	
	2,25	6			18
2,5			7	20	

De waarden in kolom I hebben de voorkeur, maar in de fijne-mechanische techniek past men ook nog kleinere en in de zware machinebouw soms grotere waarden toe.
(Voor een volledige overzicht zie NEN 1630.)

De cirkel door de toppen van de tanden is de *topcirkel* (of ook wel *kopcirkel*) en die door de bodems van de tandkuilen de *voetcirkel*.

Er zijn nog meer afspraken over de maten van (standaard) tandwielen: (3.4)

- De kophoogte h_a is gelijk aan de modulus m
  Dus: diameter topcirkel = diameter steekcirkel + $2m$.
- De voethoogte $h_f = 1{,}25 \cdot m$
  Dus: diameter voetcirkel = diameter steekcirkel – $2{,}5m$.
- Door dit verschil tussen voet- en kophoogte ontstaat tussen het topvlak van een tand en de bodem van een tandkuil van het tegenwiel de *topspeling* (c). Deze topspeling is nodig in verband met de *voetafronding* en geeft bovendien ruimte voor de smeerolie.
  $c = h_f - h_a = 0{,}25 \cdot m$

De *hartafstand* (a) van twee samenwerkende tandwielen is de afstand tussen de middens (van de assen) van beide tandwielen. Deze afstand wordt ook wel *asafstand* genoemd.

Ofwel: *hartafstand* $a = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$ (waarbij d_1 respectievelijk d_2 de diameters van de steekcirkels).

Opgave 3.2

a. Leg uit dat bij twee samenwerkende tandwielen van beide tandwielen de steek p gelijk moet zijn.

b. Evenzo: leg uit dat ook het moduul m bij twee samenwerkende tandwielen gelijk moet zijn.

Opgave 3.3

a. Toon aan met de gegeven formules dat voor de diameter van de topcirkel geldt:
$d_{\text{topcirkel}} = m \cdot (z + 2)$ (3.5)

b. Evenzo: $d_{\text{voetcirkel}} = m \cdot (z - 2{,}5)$ (3.6)

c. Laat zien dat voor de hartafstand geldt: $a = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (z_1 + z_2)$ waarbij z_1 en z_2 de aantallen tanden van de tandwielen zijn. (3.7)

Opgave 3.4

Gegeven is een tandwiel met (steek)diameter 600 mm en $z = 60$ tanden.

a. Bereken de modulus m.

b. Bereken de steek p.

c. Bereken de diameter van de topcirkel en van de voetcirkel.

d. Bereken de totale tandhoogte.

Bij een (enkelvoudige) overbrenging wordt het kleinste tandwiel *rondsel* en het andere *wiel* genoemd.

Opgave 3.5

Van een tandwieloverbrenging is het aantal tanden van het rondsel $z_1 = 23$.
Het rondsel draait met een toerental van $n_1 = 480$ toeren (= omw/min). Er is gekozen voor modulus $m = 6$. Er is een overbrengingsverhouding $i = 4$ nodig.

a. Bereken het aantal tanden z_2 van het wiel.
b. Bereken van beide tandwielen de diameters van de steekcirkels.
c. Bereken de hartafstand.
d. Bereken van beide tandwielen de diameters van de top- en voetcirkels.

Opgave 3.6

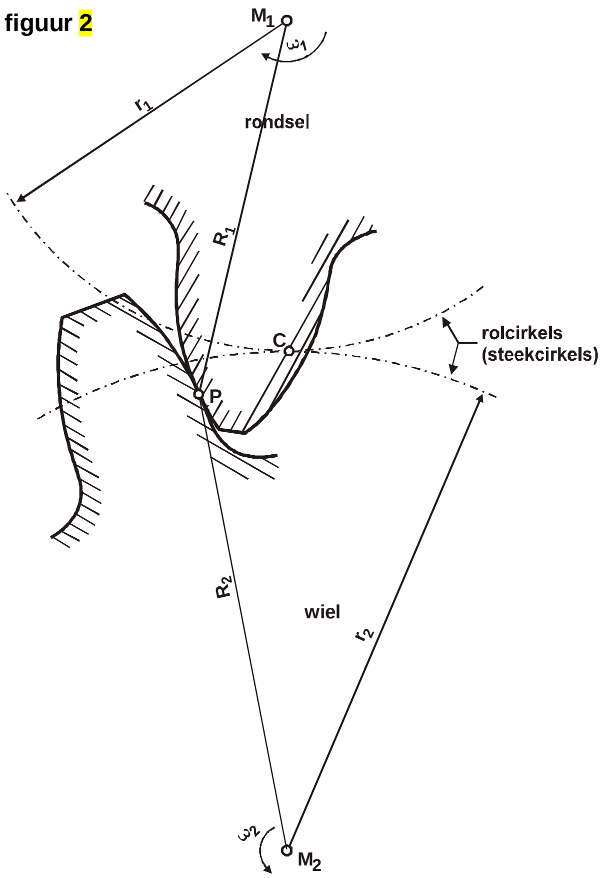
Van een tandwieloverbrenging draait het wiel met een toerental $n_2 = 300$ toeren. Er is gekozen voor modulus $m = 4$. Er is een overbrengingsverhouding $i = 4{,}8$ nodig. De hartafstand $a = 232$ mm.

a. Bereken het toerental n_1 van het rondsel.
b. Bereken de aantallen tanden z_1 en z_2 van beide tandwielen.
c. Bereken van beide tandwielen de diameters van de steekcirkel.
d. Bereken van beide tandwielen de diameters van de top- en voetcirkels.

Maar hoe zien de tandflanken er nu uit? Recht? Krom? Welke kromming?
Daar gaan de volgende paragrafen over.

■ 3.2 * Vertandingregel *

figuur 2



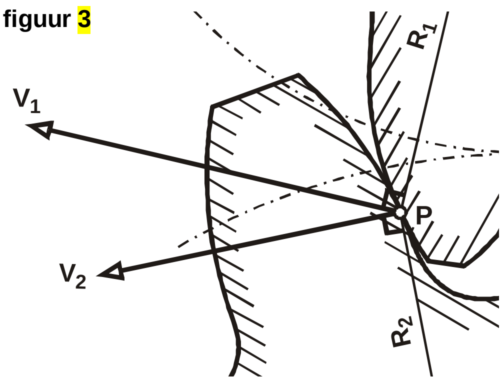
De voorwaarden waaraan samenwerkende tandprofielen moeten voldoen bepalen we met behulp van figuur 2 hiernaast.
Pas op: deze figuur wordt steeds ingewikkelder, doordat er telkens lijntjes bij komen!

In de figuur staan twee samenwerkende tandwielen getekend, waarbij een tand van het rondsel in punt P aan een tand van het wiel raakt:

- Het rondsel heeft middelpunt M_1 en de straal van de steekcirkel is r_1.
- Het wiel heeft middelpunt M_2 en straal van de steekcirkel is r_2.
- De hoeksnelheid van het rondsel is ω_1 en de hoeksnelheid van het wiel is ω_2 (beide in rad/s).
- De twee rol- of steekcirkels raken elkaar in C.
- De afstand van P tot M_1 is gelijk aan R_1 en de afstand van P tot M_2 gelijk is aan R_2.

We zoomen in op punt P. Zie figuur 3.

figuur 3



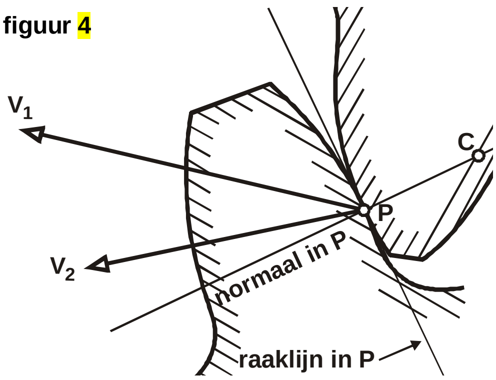
Punt P valt tijdens het contactmoment samen met een punt op het rondsel en heeft dus een snelheids-vector $\vec{V_1}$ die loodrecht staat op de straal die P verbindt met M_1 (zie appendix B).

Punt P valt tijdens het contactmoment ook samen met een punt van het wiel en heeft dus een snelheidsvector $\vec{V_2}$ die loodrecht staat op de straal die P verbindt met M_2.

Voor de groottes van de snelheden v_1 en v_2 geldt: $v_1 = \omega_1 \cdot R_1$ en $v_2 = \omega_2 \cdot R_2$.

Omdat de twee tandflanken elkaar in punt P raken, hebben beide tanden een *gemeenschappelijke raaklijn* in P. Deze tekenen we erbij in figuur 4. Ook tekenen we de *normaal* in P erbij: dat is de lijn loodrecht op de raaklijn.

figuur 4



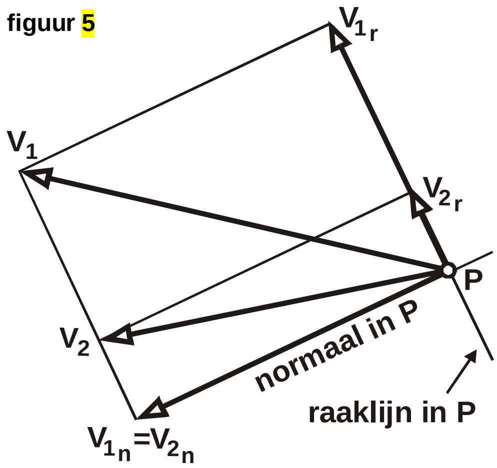
Herinnering: een vector geven we in de tekst aan met een pijltje boven de letter, bijvoorbeeld $\vec{v}$. Bedoelen we de grootte van een vector, dan laten we het pijltje weg. Dus $v = |\vec{v}|$.

De krachten $\vec{V_1}$ en $\vec{V_2}$ gaan we nu ontbinden in de twee loodrechte richtingen (zie appendix A voor het ontbinden van vectoren in twee richtingen). De vectoren in de richting van de gemeenschappelijke raaklijn noemen we $\overrightarrow{V_{1_r}}$ en $\overrightarrow{V_{2_r}}$.

De vectoren in de richting van de normaal noemen we $\overrightarrow{V_{1_n}}$ en $\overrightarrow{V_{2_n}}$.

Zie figuur 5, waarbij we de tandwielen voor de duidelijkheid even niet hebben getekend.

figuur 5



Opgave 3.7

a. Leg uit waarom de componenten v_{1_n} en v_{2_n} in de richting van de normaal bij twee samenwerkende tandwielen altijd gelijk aan elkaar zijn.

b. De componenten v_{1_r} en v_{2_r} in de richting van de gemeenschappelijke raaklijn zijn in het algemeen **niet** gelijk. In de getekende stand in figuur 5 is v_{1_r} bijvoorbeeld groter dan v_{2_r} . Leg uit wat dit in de praktijk betekent.

Opgave 3.8

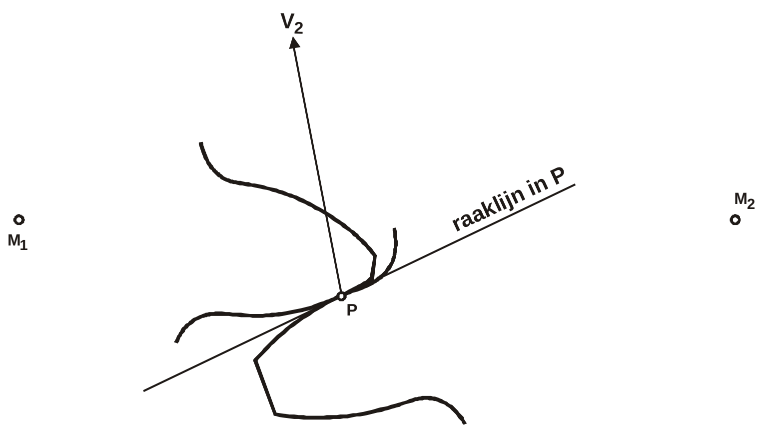
In de figuur hieronder zijn twee samenwerkende tandwielen getekend, met middelpunten M_1 en M_2. Twee tanden raken elkaar in punt P. De gemeenschappelijke raaklijn in P en de snelheidsvector $\vec{V_2}$ van punt P zijn getekend. Deze figuur staat ook vergroot op het werkblad.

a. Teken de normaal in punt P.

b. Teken in de figuur de componenten $\overrightarrow{v_{2_r}}$ en $\overrightarrow{v_{2_n}}$ erbij.

We weten dat $v_{1_n} = v_{2_n}$.

c. Teken in de figuur op het werkblad achtereenvolgens de component $\overrightarrow{v_{1_n}}$, dan de snelheidsvector $\vec{V_1}$ en tenslotte de component $\overrightarrow{v_{1_r}}$ erbij.

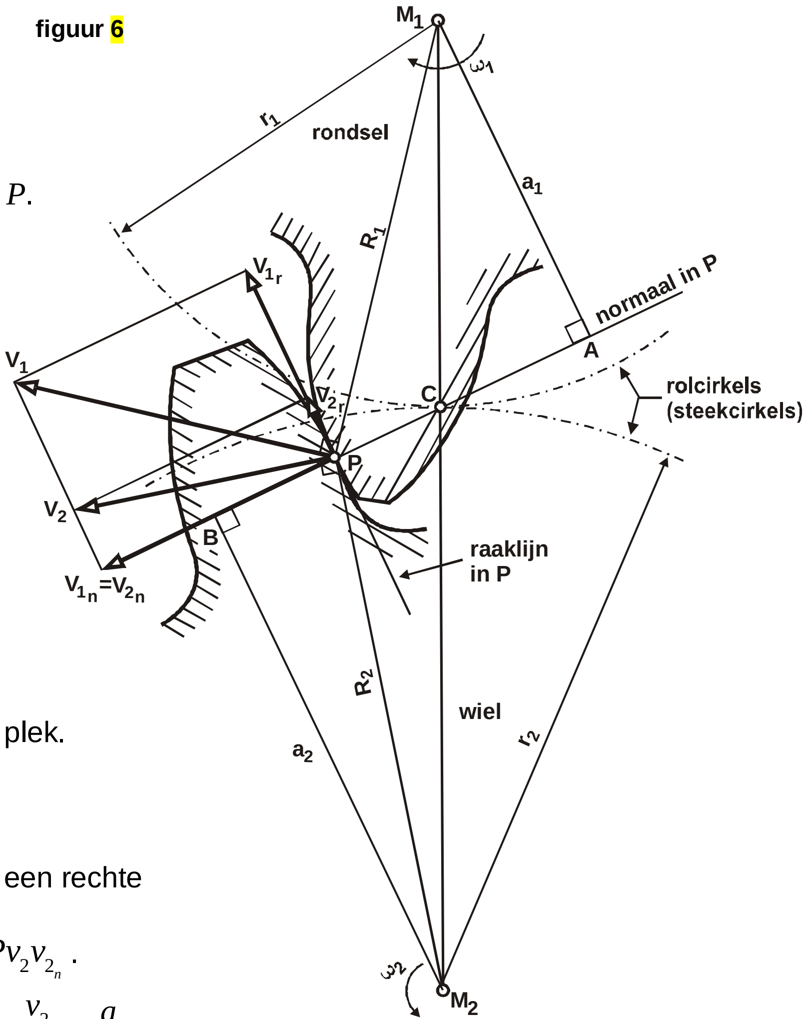


Het spreekt voor zich dat het contactpunt P tijdens het draaien van de tandwielen telkens van plaats verandert.

Omdat in het algemeen $v_{1_r} \neq v_{2_r}$, glijden de tanden in het contactpunt P met een snelheid $v_{1_r} - v_{2_r}$ langs elkaar. Dit veroorzaakt de slijtage en het lawaai van draaiende tandwielen.

Uit het gegeven dat telkens, bij elk contactpunt P , moet gelden $v_{1_n} = v_{2_n}$ (want anders laten de tanden elkaar los of dringen in elkaar), gaan we op de volgende pagina's een belangrijke eis voor de vorm van de tandwielen afleiden.

figuur 6



We gaan terug naar het ingewikkelde plaatje…

En voegen nog twee lijnen toe:
Uit M_1 en M_2 laten we de loodlijnen neer op de normaal in het raakpunt P.
We krijgen dan de punten A en B.

De afstand van M_1 tot A noemen we a_1 en de afstand van M_2 tot B noemen we a_2.
Zie figuur 6.

In de figuur kunnen we nu een aantal gelijkvormige driehoeken ontdekken. Deze figuur staat ook op het werkblad.

Opgave 3.9 (*)
Noem $\angle M_1PA = \alpha$ en $\angle M_2PB = \beta$.
Zet ze op het werkblad op de juiste plek.

a. Leg uit dat ook $\angle Pv_1v_{1_n} = \alpha$.

b. Leg uit dat ook $\angle Pv_2v_{2_n} = \beta$

Omdat de driehoeken ook allemaal een rechte hoek hebben geldt:
$\Delta M_1PA \sim \Delta Pv_1v_{1_n}$ en $\Delta M_2PB \sim \Delta Pv_2v_{2_n}$.

c. Hoe volgt hieruit dat $\frac{v_{1_n}}{v_1} = \frac{a_1}{R_1}$ en $\frac{v_{2_n}}{v_2} = \frac{a_2}{R_2}$?

Zoals we weten geldt ook: $v_1 = \omega_1 \cdot R_1$ en $v_2 = \omega_2 \cdot R_2$.
En natuurlijk $v_{1_n} = v_{2_n}$.

d. Leg uit dat hieruit volgt $\omega_1 \cdot a_1 = \omega_2 \cdot a_2$, ofwel $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} = \text{constant}$.

e. Toon aan dat $\Delta M_1CA \sim \Delta M_2CB$.

f. Hoe volgt hieruit dat $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2}$?

Wanneer we nu alle resultaten uit de vorige opgave combineren komen we tot het resultaat:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} = \text{constant, voor elke positie van het raakpunt } P. \qquad (3.8)$$

Opgave 3.10

a. Hoe volgt uit formule 3.8 dat $r_1/r_2 = c$ voor een of andere constante waarde c? Wat is de betekenis van c?

b. Waarom geldt ook dat $r_1 + r_2 = a$, voor een of andere constante waarde a? Wat is de betekenis van a?

c. Geef een formule voor r_1 uitgedrukt in a en c. Doe dat ook voor r_2.

d. Leg nu uit dat de normaal voor elke positie van P door een vast punt C gaat.

Dat geeft de *vertandingregel*:

> *De gemeenschappelijke normaal in het raakpunt van twee tanden gaat steeds door een vast punt C van de centraal (= verbindingslijn tussen de draaipunten) van de tandwielen. De centraal wordt door dit punt C, de pool, verdeeld in twee delen die omgekeerd evenredig zijn met de hoeksnelheden.*

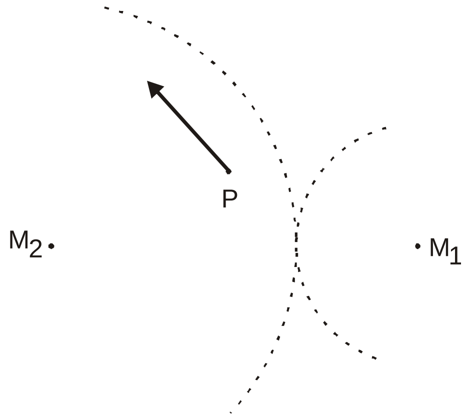
Raken de tanden elkaar in de pool C, dan vallen de snelheden v_1 en v_2 samen.
Dus dan geldt $v_1 = v_2$ en $v_{1_r} - v_{2_r} = 0$.

Alleen in dit contactpunt rollen de tandflanken zuiver over elkaar. De cirkels door de pool met de stralen r_1 en r_2 noemt men daarom de *rolcirkels*.
Merk op: dit zijn dus de *steekcirkels*!!!

De vectoren $\overrightarrow{v_{1_n}}$ en $\overrightarrow{v_{2_n}}$ zijn gelijk en geven dus de richting aan waarin het contactpunt P zich ogenschijnlijk beweegt. **Het contactpunt beweegt zich in de richting van de normaal in het contactpunt.**

Opgave 3.11

In de figuur hiernaast zijn van twee samenwerkende tandwielen de rolcirkels getekend, met middelpunten M_1 en M_2. Twee tanden raken elkaar in punt P.
De getekende vector $\vec{V}$ geeft de richting en snelheid aan waarin het contactpunt P van de twee tanden zich schijnbaar beweegt. Dat is dus eigenlijk $\overrightarrow{v_{1_n}} = \overrightarrow{v_{2_n}}$.
Deze figuur staat ook vergroot op het werkblad.



a. Teken de normaal en de gemeenschappelijke raaklijn van de tandflanken in punt P.

De snelheidsvector $\vec{V_1}$ van P ten opzichte van tandwiel 1 staat loodrecht op M_1P.

Evenzo staat de snelheidsvector $\vec{V_2}$ loodrecht op M_2P.

b. Teken in de figuur de twee snelheidsvectoren $\vec{V_1}$ en $\vec{V_2}$.

c. Bepaal de verhouding van de omtreksnelheden $V_1{:}V_2$ van P van beide tandwielen.

d. Bepaal de verhouding van de hoeksnelheden $\omega_1 : \omega_2$ van beide tandwielen.

e. Controleer of je antwoord overeenkomt met de verhouding van de stralen van de steekcirkels.

Bij het ontwerpen van tandwielen moeten de tandflanken als gevolg van deze vertandingregel zodanig gemaakt worden dat op elk moment de gemeenschappelijke normaal door de pool gaat.
Er zijn meerdere tandprofielen mogelijk die aan deze eis voldoen, maar in de praktijk komen tegenwoordig vrijwel uitsluitend tandwielen met het zogeheten *evolvente* tandprofiel voor. Vooral ook omdat deze eenvoudig en nauwkeurig machinaal te maken zijn.

Een (Engelstalige) filmpje over hoe zo'n tandwiel gemaakt wordt vind je bijvoorbeeld hier:

http://science.howstuffworks.com/gear.htm

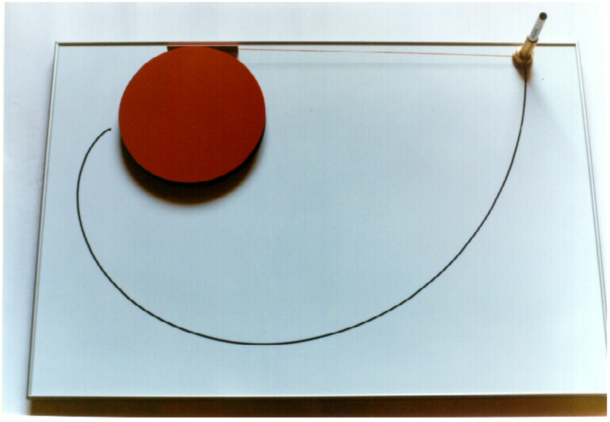
Over dit evolvente tandprofiel gaat de volgende paragraaf.

Hier wordt een tandwiel gemaakt.

■ 3.3 Evolvente

■ Constructie

Een touwtje is opgerond om een cirkelschijf.
Het eindpunt van het touwtje wordt strak gehouden tijdens het afrollen.
Het eindpunt beschrijft dan een *evolvente*.
Zie hiernaast voor een mogelijk resultaat, wanneer aan het eindpunt een stift is bevestigd.



De evolvente wordt niet voor niets ook wel een ‘afwikkelkromme’ genoemd.

Zie ook op internet voor een animatie van de constructie van de evolvente:

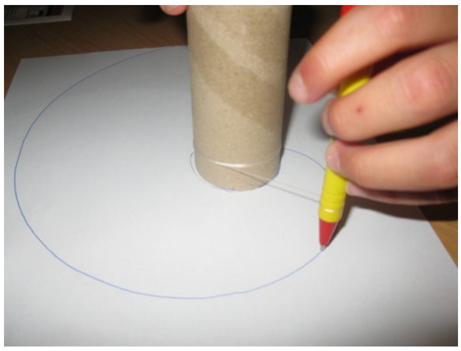
http://www.dct.tue.nl/New/Post/2002/Evolvente.htm

Opgave 3.12

Benodigdheden: closetrol, pen, touwtje van ongeveer 30 cm, kraaltje, papier en schaar.

- Bevestig het touwtje aan de pen, dichtbij de punt.
- Bevestig aan het andere uiteinde het kraaltje (of leg er een grote knoop in).
- Knip de closetrol een klein stukje in.
- Bevestig het touwtje aan de closetrol, door het touwtje (met de kraal) door de insnijding te schuiven.
- Rol het touwtje strak om de closetrol. Hou de lijntjes dicht bij elkaar.
- Zet de closetrol recht op papier en hou lichte druk met een hand.
- Rol met de andere hand het touwtje af en teken daarbij met de pen de weg van het eindpunt op papier. Let erop dat het touwtje goed strak gehouden wordt.

De kromme op papier is dan een evolvente.

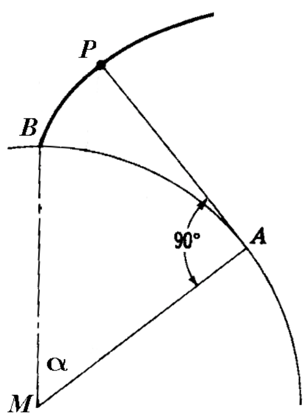


(Je krijgt de evolvente natuurlijk ook door zo’n touwtje juist weer op te winden. Zie bijvoorbeeld het volgende filmpje op YouTube:
http://www.youtube.com/watch?v=321qeO341JY&feature=related)

De volgende eigenschappen volgen direct uit bovenstaande constructie (zie ook figuur 7). De cirkel is hierbij de closetrol en punt M is het (denkbeeldige) middelpunt van de closetrol.

- Doordat tijdens het afrollen het touwtje strak wordt gehouden, is de rechte lijn AP van het touwtje op elk moment een *raaklijn* aan de cirkel.
- De hoek tussen het rechte touwtje AP en de straal MA is op elk moment 90°.
- De lengte van cirkelboog AB is gelijk aan de lengte van lijnstuk AP. Lijnstuk AP heet *kromtestraal*.
- De punten P vormen samen de *evolvente*.

De cirkel waarvan het touwtje wordt afgewikkeld heet de *basiscirkel*.



figuur 7

Opgave 3.13

Neem een basiscirkel met middelpunt M en straal 100 (mm).

a. Bereken de lengte van cirkelboog AB als $\alpha = 10^\circ$.

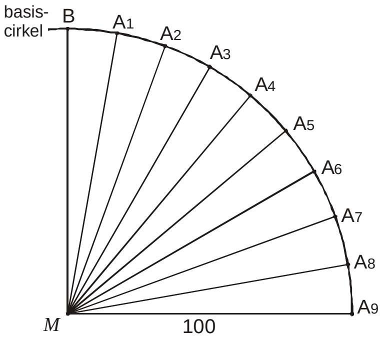
b. Hoe groot is dan de kromtestraal AP?

c. Bereken ook de lengte van MP.

d. Dezelfde vragen voor het geval $\alpha = 20^\circ$.

Opgave 3.14

Neem een basiscirkel met middelpunt M en straal 100 (mm).
Op het werkblad staat de figuur hiernaast getekend, waarbij telkens het punt A_i op de basiscirkel is getekend met stapjes van 10°.



a. Leg uit: lengte van cirkelboog $A_iB = i \cdot \frac{10}{360} \cdot 200\pi \approx 17{,}45 \cdot i$.

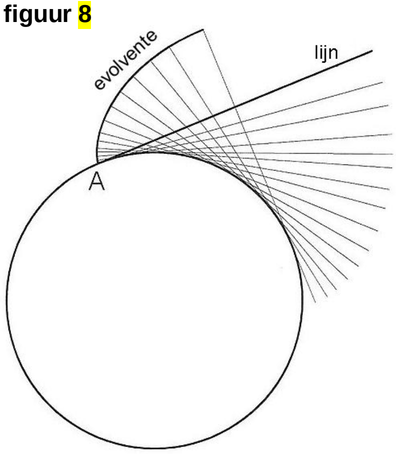
b. Teken op het werkblad bij A_1 de raaklijn aan de cirkel.

c. Teken op het werkblad nauwkeurig de plaats van P bij A_1, door te gebruiken dat $A_1P = A_1B$.

d. Doe hetzelfde voor de punten A_2 t/m A_9.

e. Wanneer je de getekende punten P met een vloeiende lijn met elkaar verbindt heb je (bij benadering) een evolvente. Doe dat.

figuur 8



Er is ook een andere werkwijze om de evolvente te tekenen, die op hetzelfde neerkomt.
De evolvente is ook de kromme die een punt van een lijn beweegt wanneer deze (zonder slip) langs een cirkel rolt.
Zie figuur 8.

Opgave 3.15

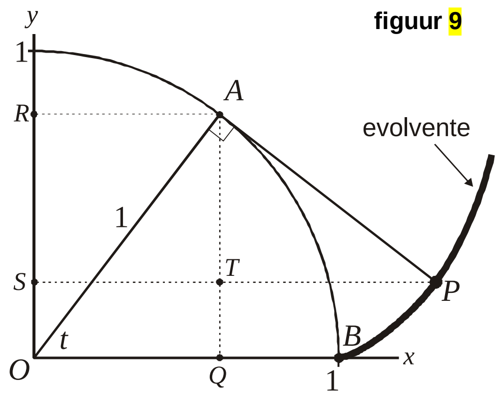
Waarom levert dit precies dezelfde evolvente op als het afwikkelen van een touwtje van dezelfde cirkel?

* Parametervoorstelling van de evolvente *

*** Opgave 3.16 ***

In figuur 9 staat een deel van de eenheidscirkel (dat is de cirkel met straal 1 met het middelpunt in de oorsprong O) getekend.
Punt A is een punt op de cirkel, en draait met constante hoeksnelheid van 1 rad/sec rond.
Zoals je weet (zie appendix C) geldt voor punt A op tijdstip t: $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ met t in radialen.

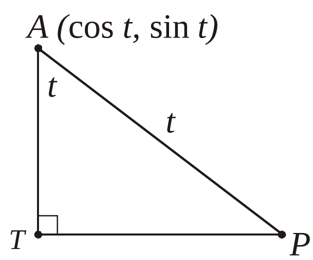
figuur 9



Neem $t = {}^1/_3\,\pi$ (ofwel 60°).

a. Bereken de exacte coördinaten van A.
b. Leg uit dat in de figuur geldt: $\angle PAQ = {}^1/_3\,\pi$.
c. Bereken de exacte lengte van boog BA.
d. Hoe lang is PA?
e. Bekijk driehoek ATP. Bereken de exacte lengtes van AT en PT.
f. Wat zijn de exacte coördinaten van P?
g. Dezelfde vragen **a** t/m **f** voor het geval $t = {}^1/_6\,\pi$ (ofwel 30°).

figuur 10



Nu voor het algemene geval.
PA is raaklijn aan de cirkel, dus is $\angle OAP$ een rechte hoek.
$\angle OAQ = ½\,\pi - t$ (hoekensom driehoek) dus is $\angle PAQ = t$.
De lengte van boog BA is gelijk aan t, dus ook PA heeft lengte t.
Zie ook figuur 10.
Driehoek ATP heeft een rechte hoek, dus $PT = t \cdot \sin t$ en $AT = t \cdot \cos t$.
De coördinaten van P zijn dus: $(\cos t + t \cdot \sin t,\ \sin t - t \cdot \cos t)$

De bewegingsvergelijkingen van punt P die een evolvente beschrijft ten opzichte van de eenheidscirkel zijn dus:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t \cdot \sin t \\ y(t) = \sin t - t \cdot \cos t \end{cases} \qquad (3.5)$$

*** Opgave 3.17 ***

a. Teken de evolvente bij de eenheidscirkel op jouw Grafische Rekenmachine (GR) voor $0 \le t \le 2\pi$ (dus als punt A precies één rondje loopt).
b. Bepaal met de GR wat in dit geval de minimale en maximale waarden van x en y zijn. Rond je antwoorden af op twee decimalen.
c. Hoe zien de bewegingsvergelijkingen er uit van een evolvente om een cirkel met straal 2?
d. Hoe zien de bewegingsvergelijkingen er uit van een evolvente om een cirkel met straal r?

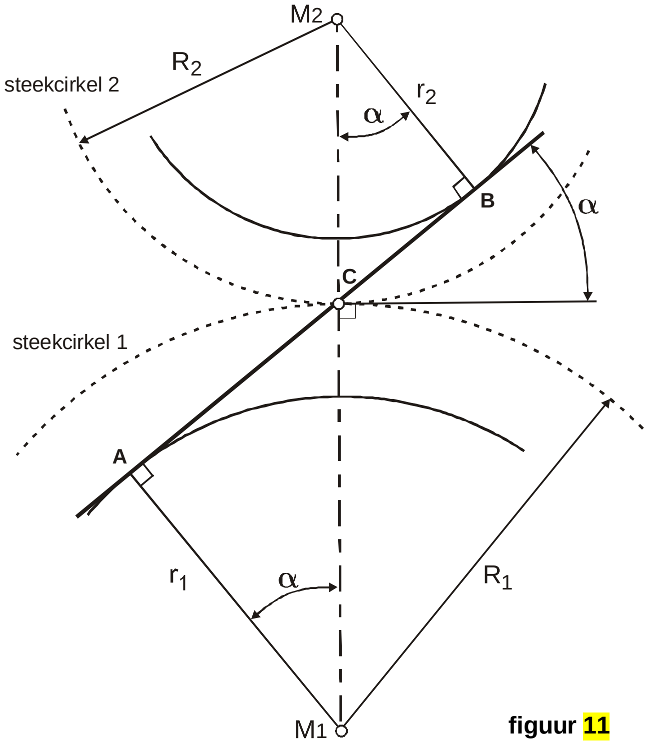
Een mooie applet voor het tekenen van een evolvente vind je via deze link:
http://www.wisfaq.nl/show3archive.asp?id=29837&j=2004
(Sleep met punt X.)

■ 3.4 Evolvente tandprofiel

Hoe zien nu precies de tanden er bij een paar samenwerkende tandwielen uit, gegeven twee middelpunten M_1 en M_2 en de steekcirkels met stralen R_1 en R_2?
We weten uit de vorige paragrafen dat het een evolvente vorm heeft…
Zie figuur 11 hiernaast.

Het punt waar de twee steekcirkels (of rolcirkels) elkaar raken is de pool C.
Neem een hoek α.
Teken de lijn door C met hellingshoek α d.w.z. de hoek van deze lijn met de loodlijn door de centraal M_1M_2 is α.

Teken dan de cirkels met middelpunten M_1 en M_2 die raken aan deze lijn.
De raakpunten noemen we A en B.
De stralen van de twee raakcirkels noemen we r_1 en r_2.



figuur 11

Opgave 3.18

a. Leg uit waarom de twee hoeken $\angle AM_1C$ en $\angle BM_2C$ ook gelijk zijn aan α.

Neem $\alpha = 20^\circ$; $R_1 = 50$ (mm), $R_2 = 40$ (mm).

b. Laat met een berekening zien dat $r_1 \approx 47$ (mm).

c. Bereken r_2.

Algemeen geldt: $r_1 = R_1 \cdot \cos\alpha$ en $r_2 = R_2 \cdot \cos\alpha$ (3.6)

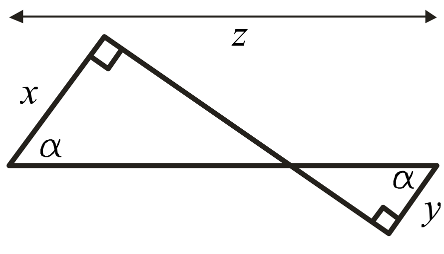
Opgave 3.19

Toon aan dat uit (3.6) volgt: $\cos\alpha = \dfrac{r_1 + r_2}{R_1 + R_2}$.

Opgave 3.20

Zie de figuur hiernaast.

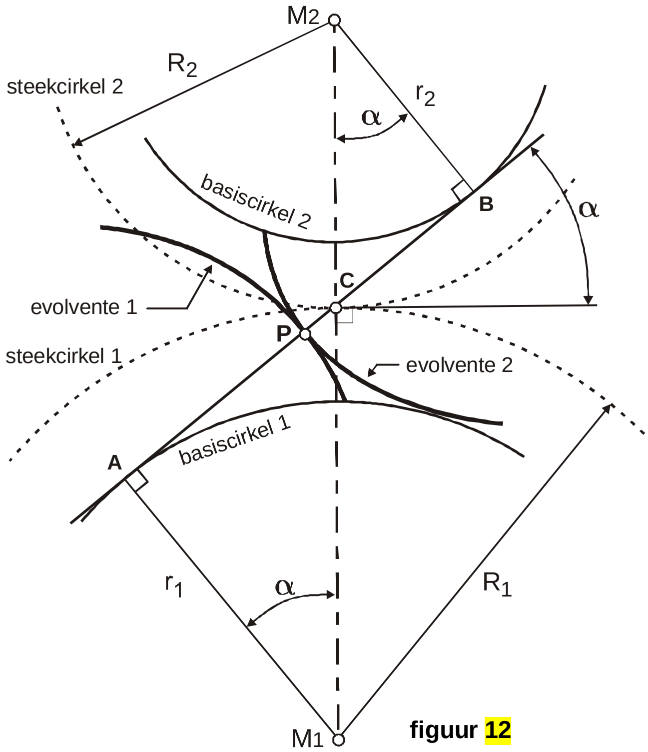
Toon aan: $\cos\alpha = \dfrac{x + y}{z}$



Neem nu zomaar een punt P op lijnstuk AB.

- Het tandprofiel van tand 1 krijg je dan door lijn AP op en af te wikkelen ten opzichte van de basiscirkel met straal r_1.
- Het tandprofiel van tand 2 krijg je dan door lijn BP op en af te wikkelen ten opzichte van de basiscirkel met straal r_2.

Zie figuur 12.



figuur 12

■ Fabricagedrukhoek

Hoewel in theorie voor α elke waarde gekozen kan worden en vroeger de waarde van 15° nog wel eens gebruikt werd, wordt hier in de praktijk tegenwoordig altijd de waarde van 20° voor gekozen.
Door dit met elkaar af te spreken passen alle tandwielen op elkaar.

Deze hoek α heet *fabricagedrukhoek*.
De waarde van deze fabricagedrukhoek α is internationaal *genormaliseerd* op 20°.

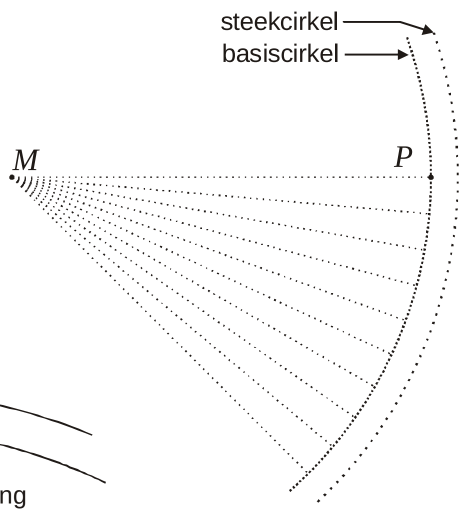
Uit formule (3.6) volgt:

- voor de straal r_b van de basiscirkel voor constructie van de evolvente tandvorm bij een steekcirkel met straal r geldt: $r_b = r \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos 20^\circ$ $(\approx 0{,}940 \cdot r)$
- voor de diameter d_b van de basiscirkel geldt: $d_b = d \cdot \cos\alpha = d \cdot \cos 20^\circ$ $(\approx 0{,}940 \cdot d)$

Opgave 3.21

Voor de constructie van een machine is nodig een tandwiel met steekdiameter $d = 200$ mm en modulus $m = 10$.

a. Bereken het aantal tanden en de steek.
b. Bereken de diameters van de top- en voetcirkels.
c. Bereken de diameter van de basiscirkel voor constructie van de evolvente tandvorm (neem zoals afgesproken $\alpha = 20^\circ$).

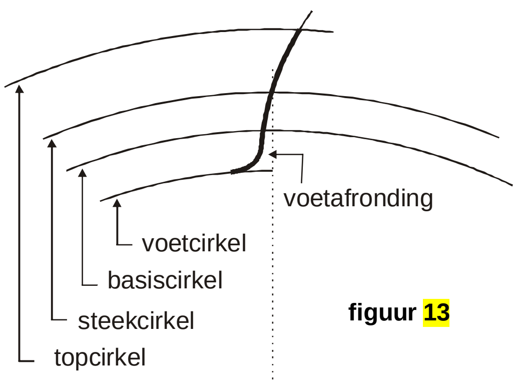


Op het werkblad staan de steekcirkel en de basiscirkel getekend en enkele hulplijntjes om de 5° gedraaid.

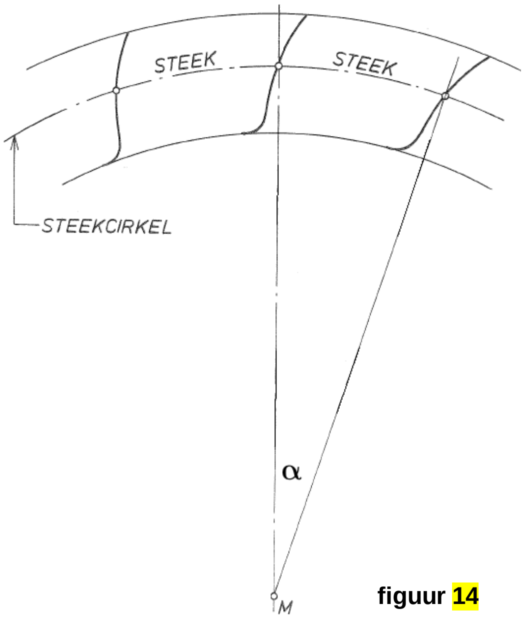
d. Teken het evolvente tandprofiel door punt P af te wikkelen. Gebruik dezelfde werkwijze als in opgave 3.14.
e. Teken ook de voetcirkel en de topcirkel.

Het evolvente tandprofiel loopt tussen de basiscirkel en de topcirkel.
Tussen de basiscirkel en de voetcirkel wordt een voetafronding gemaakt, meestal cirkeldelen.
Zie figuur 13.

f. Maak je tekening van het tandprofiel op het werkblad af.



figuur 13



figuur 14

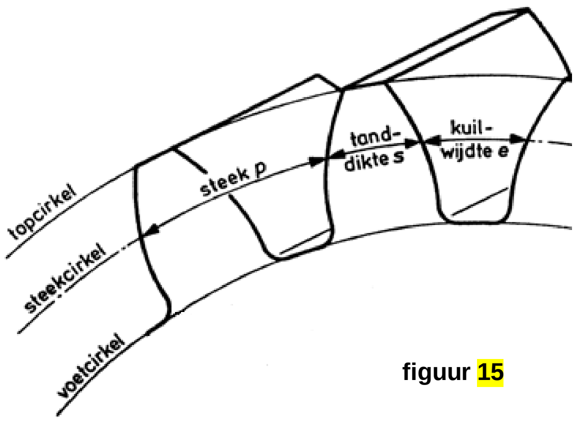
In opgave 3.21 heb je als het goed is een volledig tandprofiel getekend.
Door dit tandprofiel over een hoek α vanuit het middelpunt te draaien en te kopiëren, krijg je het volgende tandprofiel.
Zie figuur 14.

Opgave 3.22

a. Bereken de grootte van deze draaihoek α voor een tandwiel met steekdiameter $d = 200$ mm en modulus $m = 10$ (zie opgave 3.21).

Er geldt in het algemeen:
$\alpha = \dfrac{360°}{z} = \dfrac{m \cdot 360°}{d}$ met z het aantal tanden, m de modulus en d de diameter van de steekcirkel.

b. Leg dat uit.



figuur 15

In figuur 15 staat nog eens een deel van figuur 1 afgebeeld.
De steek p, tanddikte s en de kuilwijdte e worden langs de steekcirkel gemeten.

Omdat twee samenwerkende tandwielen precies in elkaar moeten passen, geldt dat de theoretische tanddikte s gelijk zou moeten zijn aan de kuilwijdte e.
En dus is de tanddikte s dan gelijk aan de halve steek p.
Maar in de praktijk hebben tandwielen vaak kleine fabricage onnauwkeurigheden. En er moet ruimte zijn voor smeermiddelen tussen de tanden. Bovendien zullen de tanden doordat ze warm worden enigszins uitzetten. Daarom moeten de tanden enige ruimte hebben in de tandkuilen van het tegenwiel.
Dat kan op twee manieren worden opgelost:

- de tanddikte iets minder dan de halve steek maken; het verschil van de tanddikte en de kuilwijdte heet dan de *flankspeling*;
- de hartafstand tussen de tandwielen iets groter nemen; dit zorg dan ook voor enige ruimte.

In de praktijk wordt vrijwel altijd voor de tweede oplossing gekozen.

Opgave 3.23

a. Bereken de tanddikte (in mm, afgerond op 1 decimaal) bij het tandwiel van opgave 3.21 (zonder tandspeling).
b. Maak op het werkblad de tekening van twee volledige tanden af.

■ Voorbereiden practicum op Hogeschool

Opgave 3.24
In de opgaven 3.21 t/m 3.23 heb je de eerste paar tanden van een tandwiel met de hand getekend. Dat was een hele klus!
In het computerpracticum op de hogeschool ga je dezelfde werkwijze uitvoeren met een technisch CAD-programma.

Bij het maken van een tandwiel begin je met een plak metaal, waar dan de tandkuilen uit gefreesd worden. Je begint bij het computerpracticum dus eerst met de *topcirkel* en **niet** met de steekcirkel of basiscirkel. De volgorde is dan dus iets anders dan in de opgaven.

Kijk terug naar de opgaven 3.21 t/m 3.23 en maak voor jezelf het onderstaande schematisch overzicht (of samenvatting) van de verschillende stappen af. Vul aan met de formules en berekeningen die je nodig hebt bij het tekenen van zo'n tandwiel.
Neem dit schema (en dit boekje inclusief jouw uitwerkingen) mee bij het bezoek aan de hogeschool.
Let op: je krijgt dan misschien een tandwiel met andere afmetingen, ander aantal tanden, of ander moduul!

- diameter topcirkel = …. mm
- berekening basiscirkel:
- …

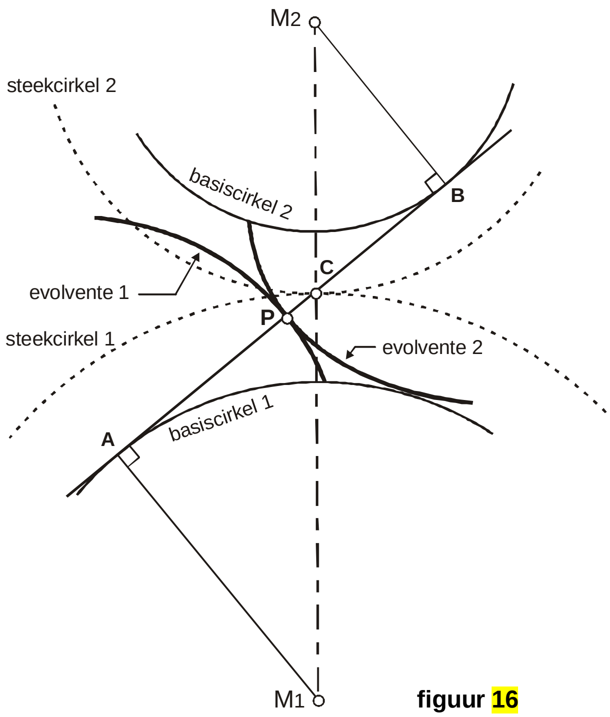
■ 3.5 * Ingrijplijn *

Een van de meest verrassende eigenschappen van de evolvente tandvorm is wel de zogenaamde *ingrijplijn*: dat is de vloeiende lijn die ontstaat wanneer het contactpunt gevolgd wordt tijdens de ingrijping van een tandflank met een andere.
De vorm van de ingrijplijn, recht of gebogen, hangt af van de vorm en kromming van het tandprofiel.

Ongelooflijk maar waar:
Hoewel alles rond en krom is en beide tanden een draaiende beweging maken, blijkt deze ingrijplijn bij evolvente tandwielen een **rechte lijn** te zijn!!!

Dat kun je als volgt begrijpen.
Zie ook figuur 16.
Neem een willekeurig contactpunt P.
Zoals wij in paragraaf 3.2 hebben gezien, beweegt het contactpunt P zich in de richting van de normaal in het contactpunt.
(Zie o.a. opgaven 3.8 t/m 3.11 en de tekst ertussen.)
Maar de tandflank is een evolvente en vanwege de constructie van deze evolvente is de normaal precies de lijn AB, de raaklijn door de pool C aan beide basiscirkels!
Dus punt P beweegt zich in de richting van lijn AB.

Omdat punt P willekeurig gekozen is, beweegt punt P zich gedurende het hele contact van de twee tandflanken over *een deel* van lijn AB.



figuur 16

Opgave 3.25
Twee evolvente tandwielen grijpen in elkaar en zijn goed afgesteld.
Het drijvende tandwiel heeft 17 tanden en het gedreven tandwiel heeft 35 tanden.
Het moduul is 3.

a. Bereken van beide tandwielen de diameters van de steekcirkels.
b. Bereken van beide tandwielen de diameters van de basiscirkels afgerond op 2 decimalen.
c. Bereken met 2 decimalen de lengte van lijnstuk AB (waarbij A en B de raakpunten zijn van de gemeenschappelijke raaklijn van de basiscirkels, de ingrijplijn).
d. (Erg moeilijk!) Toon aan dat in het algemeen geldt: $AB = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (z_1 + z_2) \cdot \sin 20^{\circ}$

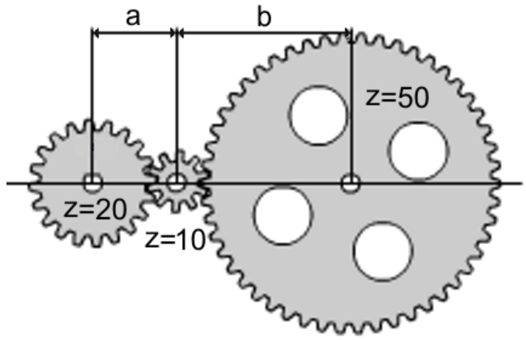
Je kunt ook uitrekenen over welk deel van lijn AB de tandflanken in contact zijn. In de praktijk is deze lengte van de lijn waarbij contact is (de ingrijpweg), van groot belang. Daar gaan wij nu hier niet verder op in, maar deze verrassende eigenschap van evolvente tandvormen wilden wij jullie niet onthouden!

Ben je nieuwsgierig? Dan kun je op internet extra informatie zoeken bij begrippen als:
ingrijpweg, *ingrijpboog* en *ingrijpquotiënt*.

■ 3.6 Gemengde opgaven

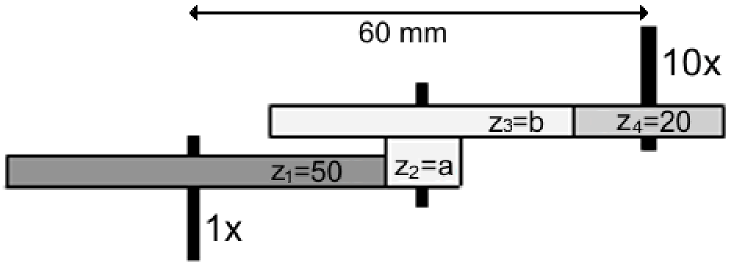
Opgave 3.26
Twee tandwielen grijpen in elkaar en zijn goed afgesteld.
Het drijvende tandwiel heeft 17 tanden en het gedreven tandwiel heeft 67 tanden.
Het moduul is 5.
Bereken de hartafstand van beide tandwielen.

Opgave 3.27
De samenwerkende tandwielen rechts hebben moduul 1.



a. Bereken de hartafstanden a en b.
b. Als het moduul wordt verdubbeld, wat gebeurt er dan met de hartafstanden? Licht toe.

Opgave 3.28
Bij de constructie hiernaast bedraagt de asafstand tussen de twee uiterste assen 60 mm. Deze twee buitenste tandwielen hebben moduul 1. Er is een overbrenging 1:10 vereist en daarvoor wordt een tussenwiel geplaatst zoals aangegeven.



a. Stel twee vergelijkingen op en bereken hiermee de aantallen tanden z_2 en z_3 van het tussenwiel.

De berekende waarden voldoen niet, want ggd(z_1, z_2) ≠ 1 en ook ggd(z_3, z_4) ≠ 1
b. Welke aantallen tanden z_2 en z_3 stel je voor als de asafstand wel precies 60 mm moet blijven, maar de overbrengingsverhouding best iets meer dan 10 mag zijn (maar niet minder)?

Opgave 3.29
Bij het ontwerp van een apparaatje moeten de benodigde tandwielen berekend worden.
Er is een overbrengingsverhouding nodig van (ongeveer) 1,5. De hartafstand is (ongeveer) 40 mm. Omdat het apparaat zich nog in de ontwerpfase bevindt, liggen deze afmetingen nog niet exact vast.
Noem de diameters van beide tandwielen d_1 en d_2.
a. Stel twee vergelijkingen op met en bereken hiermee beide diameters van de tandwielen.

Vanwege overwegingen die buiten ons boekje gaan (sterkte van de tandwielen, vermogen-overdracht en -verlies, etc.), is gekozen voor een moduul van 1,25.
De berekende diameters van vraag **a** geven dan echter geen gehele aantallen tanden.
b. Rond de berekende aantallen tanden z_1 en z_2 af op de dichtstbijzijnde gehele waarden. Welke aantallen tanden z_1 en z_2 krijg je dan?
c. Welke overbrengingsverhouding geeft dit? En welke hartafstand?
d. Bereken de ggd van deze aantallen tanden z_1 en z_2. Conclusie?

Deze berekende waarden voldoen dus **niet**, want de ggd is niet gelijk aan 1.
e. Onderzoek door andere waarden van z_1 en z_2 dicht in de buurt te kiezen van de onafgeronde waarden (zoals berekend in vraag **b**) welke tandenaantallen het best gekozen kunnen worden.