Hoofdstuk 1: Inleiding

1.1 D
1.2 2 keer rond, met de klok mee
1.3 B
1.4 B
1.5 **a.** ½ rondje rechtsom
b. 2½ rondjes linksom
1.6 A
1.7 D
1.8 A
1.9 Ja: 385 keer rond rechtsom (resultaat is 385 · 5 = 1925 tanden linksom; 1925 = 13 · 148 + 1, dus het grote tandwiel gaat dan 1 tand linksom)

Hoofdstuk 2: Overbrengingen

2.1 $omtrek = \pi \cdot d$; $oppervlakte = \pi \cdot (\tfrac{1}{2}d)^2 = \tfrac{1}{4}\pi d^2$
2.2 **a.** 2,5 keer
b. 144° ; $^{4}/_{5}\,\pi$ rad
c. I: $^{1000\pi}/60 \approx 52{,}4$ mm/s; II: óók 52,4 mm/s
d. Dezelfde antwoorden, alleen de draairichting is anders
2.3 $omtreksnelheid = \dfrac{n_1 \cdot \pi d_1}{60}$ (mm/s)
2.4 **a.** eenheid: mm/mi
b. $v_1 = \dfrac{n_1 \cdot \pi \cdot d_1}{60}$ en $v_2 = \dfrac{n_2 \cdot \pi \cdot d_2}{60}$; $v_1 = v_2$ geeft $\dfrac{n_1 \cdot \pi \cdot d_1}{60} = \dfrac{n_2 \cdot \pi \cdot d_2}{60} \rightarrow n_1 \cdot \pi \cdot d_1 = n_2 \cdot \pi \cdot d_2$;
de rest van de afleiding blijft gelijk
2.5 evenredigheidsconstante = 1
2.6 **a.** $d_2 = 960$ mm; $i = {}^{1}/_{4}$ (of 0,25)
b. $n_2 = 240$ toeren; $i = {}^{1}/_{6}$
2.7 **a.** $\omega_1 = 50 \cdot {}^{2\pi}/_{60} = {}^{5}/_{3}\pi$ rad/s
b. $n_2 = 20$ toeren, dus $\omega_2 = 20 \cdot {}^{2\pi}/_{60} = {}^{2}/_{3}\pi$ rad/s
c. $\omega_2 : \omega_1 = {}^{2}/_{5} = 0{,}4$; $\omega_2 : \omega_1 = d_1 : d_2$
d. dezelfde antwoorden, alleen de draairichting is anders
2.8 $\omega = n \cdot \dfrac{2\pi}{60} = \dfrac{n \cdot \pi}{30}$ rad/s
2.9 **a.** $r_2 = 32$ mm
b. $i = 1{,}5$
2.10 **a.** …
b. bij mooi weer: was er (bijna) geen slip, maar diameter is groter geworden; i wordt kleiner.
bij slecht weer: de slip wordt minder, dus ω_2 wordt groter; i wordt groter;
2.11 Bijvoorbeeld bij een 'mover' op een caravanwiel
2.12 **a.** $d_2 = 912$ mm; $i = {}^{1}/_{4}$ (onveranderd $n_2 : n_1$)
$n_2 = 228$ toeren; $i = {}^{228}/_{1440} \approx 0{,}158$
b. $\frac{v_2}{v_1} = 0{,}9625$ dus 3,75% slip

2.13 $v_{\text{volger}} = \frac{100-s}{100} \cdot v_{\text{drijver}}$ geeft $\frac{v_{\text{volger}}}{v_{\text{drijver}}} = \frac{100-s}{100}$; omdat $v_{\text{volger}} = n_{\text{volger}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\text{volger}}}{60}$ en

$v_{\text{drijver}} = n_{\text{drijver}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\text{drijver}}}{60}$ geeft dit: $\frac{100-s}{100} = \dfrac{n_{\text{volger}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\text{volger}}}{60}}{n_{\text{drijver}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\text{drijver}}}{60}} = \dfrac{n_{\text{volger}} \cdot d_{\text{volger}}}{n_{\text{drijver}} \cdot d_{\text{drijver}}}$

2.14 $v_1 = \omega_1 \cdot r_1$ en $v_2 = \omega_2 \cdot r_2$, dus $\omega_2 \cdot r_2 = \frac{100-s}{100} \cdot \omega_1 \cdot r_1$. Hieruit: $\omega_2 \cdot d_2 = \frac{100-s}{100} \cdot \omega_1 \cdot d_1$

2.15 **a.** oude cassetterecorders, variomatic; scooters; …
b. landbouwwerktuigen; …

2.16 **a.** $\omega = 32\pi$ (≈ 100,5) rad/s; $v = 1600\pi$ mm/s
b. géén slip: dan omtreksnelheden gelijk
wél slip: dan is de omtreksnelheid van de volger kleiner
c. $n_2 = 240$ toeren
d. (gebruik opgave 2.13) $\frac{n_2 \cdot 400}{960 \cdot 100} = 0,97$, dus $n_2 \approx 233$ toeren
of: 0,97 · 240 ≈ 233 toeren.

2.17 **a.** 90°, 90°, 90°, 90°
b. Vanwege vorige vraag zijn PM en SN evenwijdig, evenals QM en RN. Dus $\angle PMQ = \angle SNR$; en omdat 'helemaal rond' 360° is, geldt $\alpha + \beta = 360°$
c. Laat loodlijn neer vanuit N op PM, dit geeft punt T; $MT = 100$; Stelling van Pythagoras in driehoek MTN geeft $TN = \sqrt{260^2 - 100^2} = 240$; dus $PS = QR = 240$ (mm)
d. in driehoek MTN: $\cos(\angle TNM) = {}^{100}/_{260}$, dus $\angle TNM \approx 67,38°$; $\beta \approx 2 \cdot 67,38° \approx 134,8°$; $\alpha = 360° - \beta \approx 360° - 134,8° = 225,2°$
e. Lange boog PQ heeft lengte $\frac{\alpha}{360} \cdot 300\pi \approx 589,68$; korte boog SR heeft lengte $\frac{\beta}{360} \cdot 100\pi \approx 117,60$; totale lengte ≈ 589,7 + 117,6 + 2 · 240 ≈ 1187,3 mm

2.18 **a.** $\alpha \approx 237,5°$; $\beta \approx 122,5°$ (α is groter geworden en β is kleiner geworden)
b. $\alpha \approx 218,9°$; $\beta \approx 141,1°$ (α is kleiner geworden en β is groter geworden)

2.19 $\frac{194,36}{360} \cdot 80\pi + \frac{165,64}{360} \cdot 30\pi + 2 \cdot 198,43 \approx 576$ cm

2.20 **a.** $260 - x$
b. $\angle PTM = \angle RTN$ (overstaande hoeken) en beide driehoeken hebben een rechte hoek (bij P en R, want het zijn raaklijnen), dus zijn alle drie hoeken gelijk → gelijkvormig
c. $PM : TM = RN : TN$, dus $\frac{150}{260-x} = \frac{50}{x} \to \ldots \to x = 65$
d. $\alpha \approx 280,6°$; $\beta \approx 280,6$
e. Nee (er geldt nu $\alpha = \beta$)
f. $\frac{280,6}{360} \cdot 300\pi + \frac{280,6}{360} \cdot 100\pi + 2 \cdot (124,6 + 41,5) \approx 1311,6$ mm
g. De banden kruisen elkaar bij punt T, dat geeft veel wrijving en slijtage; het is ook moeilijk de banden op de wielen te houden, omdat ze eraf willen lopen (bovendien draait de draairichting om)

2.21 Bij een gewone riemoverbrenging draaien beide wielen dezelfde kant op; bij een gekruiste riemoverbrenging draaien ze in tegengestelde richting

2.22 **a.** 90
b. 0,75 (of $^3/_4$)

2.23 **a.** $^{20}/_6 = 3\,^1/_3$ (≈ 3,33)
b. $^6/_{20} = {}^3/_{10} = 0,3$
c. 1
d. $^{60}/_{20} = 3$
e. 1
f. $^{120}/_{20} = 6$
g. 1; $^{720}/_{20} = 36$
h. zelfde draairichting; tegengestelde draairichting; zelfde draairichting

2.24 **a.** 100
b. ook 100
c. 60
d. $^{100}/_{120} = {}^5/_6$ (≈ 0,833); $^{60}/_{100} = {}^3/_5 = 0,6$
e. $^{60}/_{120} = ½ = 0,5$
f. 120

2.25 a. In 1 minuut passeren bij het contactpunt $n_A \cdot z_A$ tanden; tandwiel B draait dan $\frac{n_A \cdot z_A}{z_B}$ keer rond; dus het toerental n_B van B is $\frac{n_A \cdot z_A}{z_B} = n_A \cdot \frac{z_A}{z_B}$

b. $n_C = n_B$ dus $n_C = n_A \cdot \frac{z_A}{z_B}$

c. Net als hierboven: $n_D = n_C \cdot \frac{z_C}{z_D}$; vraag **c** geeft $n_D = \left(n_A \cdot \frac{z_A}{z_B}\right) \cdot \frac{z_C}{z_D} = n_A \cdot \frac{z_A}{z_B} \cdot \frac{z_C}{z_D}$;

En: $n_E = n_D$ en $n_F = n_E \cdot \frac{z_E}{z_F}$; dit geeft $n_F = \left(n_A \cdot \frac{z_A}{z_B} \cdot \frac{z_C}{z_D}\right) \cdot \frac{z_E}{z_F} = n_A \cdot \frac{z_A}{z_B} \cdot \frac{z_C}{z_D} \cdot \frac{z_E}{z_F}$

d. $i = \frac{n_F}{n_A} = \frac{z_A}{z_B} \cdot \frac{z_C}{z_D} \cdot \frac{z_E}{z_F}$

2.26 $^1/_5 = 0{,}2$

2.27 a. 1 en 7
b. alle 1 t/m 13

2.28 a. 5; 2
b. 25; 12

2.29 a. waar
b. niet waar
c. niet waar
d. niet waar
e. waar
f. waar
g. waar

2.30 a. 4; 5; 3
b. 60 (namelijk 4 · 5 · 3)
c. 2 (namelijk 1 en zichzelf)

2.31 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

2.32 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

2.33 a. omdat 1 geen priemgetal is en omdat 1 deler is van elk ander geheel getal zou met stap 3 alle getallen weggestreept moeten worden
b. Stel p is een priemgetal. Dan is het niet deelbaar door de getallen 2, …, $p - 1$. Het wordt dus niet doorgestreept als veelvoud van een kleiner getal
c. getallen die geen priemgetal zijn, zijn veelvoud van een kleiner getal en worden dus weggestreept

2.34 a. samengesteld: 91, 121 en 231
priemgetallen: 41 en 101
b. 91 = 7 · 13; 121 = 11 · 11; 231 = 3 · 7 · 11
c. Zie hiernaast voor een mogelijke programma voor de TI-familie.
Er zijn nog allerlei verbeteringen mogelijk, bijv. controle op invoer van een positieve, gehele waarde. De priemfactorontbinding wordt afgebeeld, maar ook opgeslagen in de lijst L1.

```
:Prompt A
:ClrList L1
:{0} → L1
:A → F
:1 → E
:2 → C
:Lbl A
:A → B
:A/C → D
:B/C → B
:iPart(B) → B
:If C>√(A): Goto C
:If D=1: Goto B
:If D≠B: Goto E
:If D=B: Goto D
:Lbl D
:Disp C
:A/C → A
:C → L1(E)
:E+1 → E
:Goto A
:Lbl E
:If C≥3: C+1→ C
:C+1 → C
:Goto A
:Lbl B
:Disp C
:C → L1(E)
:Stop
:Lbl C
:Disp A
:A → L1(E)
:Disp L1
```

2.35 a. 9
b. 3
c. 6
d. 18
e. 61

2.36 a. ze hebben geen gemeenschappelijke deler
b. 1

2.37 a. 216 heeft alleen een factor 3 extra ten opzichte van 72
b. 216 heeft alleen een factor 2 extra ten opzichte van 108
c. nee
d. $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
e. 18900

2.38 a. 960
b. 180180
c. 329868

2.39 **a.** als ggd(z_{volger}, z_{drijver}) = 1 dan slijten alle tanden gelijkmatig af; als ggd(z_{volger}, z_{drijver}) = k, dan vertonen de tanden van de volger met nummer {1 + veelvoud van k} extra slijtage

b. na z_{grootste} / kgv(z_{grootste}, z_{kleinste}) omwentelingen van het kleinste tandwiel staan ze beide weer in dezelfde stand; het grootste tandwiel draait dan z_{kleinste} / kgv(z_{grootste}, z_{kleinste}) keer rond

2.40 **a.** tand A: 1, 21, 11 (in die volgorde); tand G: 7, 27, 17 (in die volgorde)

b. tand A: 1, 21, 16, 11, 6 (in die volgorde); tand G: 7, 2, 22, 17, 12 (in die volgorde)

c. tand A: alle tanden 1 t/m 29; tand G: alle tanden 1 t/m 29

d. tand A: alle tanden 1 t/m 21; tand G: alle tanden 1 t/m 21

e. bijvoorbeeld 23, 27, 31, 33, 37, …

f. dan moet gelden: ggd(20, z) = 1

g. dan moet gelden: ggd(z_1, z_2) = 1

2.41 **a.** kijk naar de draairichtingen: als de onderste tandwiel rechtsom draait, dan zouden de bovenste twee beide linksom moeten draaien; maar dan werken ze elkaar tegen

b. bij een kring van 5 tandwielen is ook geen beweging mogelijk (bekijk weer de draairichtingen); bij een krijg van 19 tandwielen is ook geen beweging mogelijk; bij elke kring met een *oneven* aantal tandwielen is geen beweging mogelijk

c. bij een *even* aantal tandwielen kloppen de draairichtingen wel; verder passeren bij *elk* contactpunt tussen twee tandwielen overal evenveel tanden, dus het kan prima draaien

2.45 **a.** 360° / 6 = 60°

b. gelijkbenige driehoek met tophoek 60°, dus ook de andere twee hoeken zijn 60°; het is dus een gelijkzijdige driehoek en p is gelijk aan de straal, dus $p = 110$ (mm)

c. $v_k = v = \omega \cdot r = 1 \cdot 110 = 110$ (mm/s)

d. $v_k = 110 \cdot \cos 30^\circ \approx 95{,}3$ (mm/s)

e. de snelheid aan de bovenkant en de onderkant zijn dan niet gelijk (de ene is maximaal als de andere minimaal is) dus dat geeft trillingen in de ketting

2.46 **a.** maximale snelheid als scharnier zich precies bovenin bevindt, dan $v_k = \omega \cdot r = ½ \cdot \omega \cdot d$

b. steekhoek is $\alpha = {}^{360^\circ}/_{z}$; net als bij vraag 2.44d geldt dat de snelheid minimaal is in een situatie met een gelijkbenige driehoek met deze steekhoek als tophoek;
dan $v_k = v \cdot \cos(½\alpha) = ½ \cdot \omega \cdot d \cdot \cos(½\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot d \cdot \cos(\frac{180^\circ}{z})$

c. te bepalen de waarden van z waarvoor $\cos(\frac{180^\circ}{z}) > 0{,}99$;
tabel maken op de GR geeft $z \geq 23$

2.47 **a.** ggd(210,57) = ggd(153,57) = ggd(96,57) = ggd(57,39) = ggd(39,18) = ggd(21,18) = ggd(18,3) = 3

b. ggd(64,12) = ggd(52,12) = ggd(40,12) = ggd(28,12) = ggd(16,12) = ggd(12,4) = 4

c. ggd(272,64) = ggd(64,16) = 16

d. ggd(99,45) = ggd(45,9) = 9
ggd(177,15) = ggd(15,12) = ggd(12,3) = 3
ggd(420,246) = ggd(246,174) = ggd(174,72) = ggd(72,30) = ggd(30,12) = ggd(12, 6) = 6
ggd(252,198) = ggd(198,54) = ggd(54,36) = ggd(36,18) = 18
ggd(6466,5429) = ggd(5429,1037) = ggd(1037,244) = ggd(244,61) = 61

e. Zie hiernaast een programmaatje voor de TI-familie.
Er wordt niet gecontroleerd of de ingevoerde getallen positief en geheel zijn. Dat kan nog toegevoegd worden.
Wel worden A en B verwisseld als bij invoer B groter is dan A.
Lastigste is nog om de rest bij deling te bepalen. Dat is hiernaast met de functie int opgelost.
Dat kan ook met de ingebouwde functie fPart. De gemarkeerde regel in het programma wordt dan:
fPart(A/B)*B → R.

```
:Prompt A
:Prompt B
:If A>B:Goto X
:B → R
:A → B
:R → A
:Lbl X
:A – int(A/B)*B → R
:If R=0:Goto Y
:B → A
:R → B
:Goto X
:Lbl Y
:Disp B
```

2.48 **a.** Omdat de hoekensom van een driehoek 180° is (ofwel π radialen), is $\angle TMN = \pi - \frac{1}{2}\pi - \alpha$ $= \frac{1}{2}\pi - \alpha$. De hoek bij M is recht ($\frac{1}{2}\pi$), dus is de aangegeven hoek bij M ook α.
Verder: $\angle SNT$ is recht ($\frac{1}{2}\pi$) en omdat de hoek bij N van de horizontale en verticale lijn ook recht is, is lijn NS dus α 'naar rechts gedraaid'.

b. $MT = r_1 - r_2$, dus in de rechthoekige driehoek MNT geldt dan: $\sin\alpha = \frac{MT}{MN} = \frac{r_1 - r_2}{x}$

c. Toepassen van de stelling van Pythagoras in driehoek MNT geeft dit direct.

d. Boog PQ: Omtrek hele cirkel is $2\pi \cdot r_1$. De omspannen boog PQ heeft hoek $\pi+2\alpha$, dus de lengte is $\frac{\pi+2\alpha}{2\pi}$ deel daarvan, dat geeft lengte $\frac{\pi+2\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi r_1 = (\pi + 2\alpha)\cdot r_1$.
Boog RS: Omtrek hele cirkel is $2\pi \cdot r_2$. De omspannen boog RS heeft hoek $\pi-2\alpha$, dus de lengte is $\frac{\pi-2\alpha}{2\pi}$ deel daarvan, dat geeft lengte $\frac{\pi-2\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi r_2 = (\pi - 2\alpha)\cdot r_2$.

e. $L = 2\cdot\sqrt{x^2 - (\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2})^2} + (\pi + 2\alpha)\cdot\frac{d_1}{2} + (\pi - 2\alpha)\cdot\frac{d_2}{2}$

$= 2\cdot\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}(d_1 - d_2)^2} + (\frac{\pi}{2} + \alpha)\cdot d_1 + (\frac{\pi}{2} - \alpha)\cdot d_2$

f. $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{45-15}{80}\right) \approx 0{,}384\ldots$ (of ≈ 22,02°); invullen geeft $L \approx 359{,}88 \approx 360$ mm.

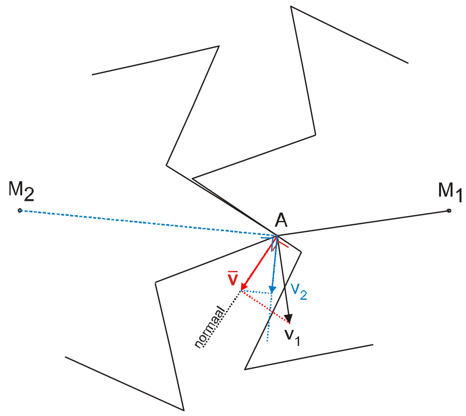
g. Invullen in de benaderingsformule geeft $L \approx 359{,}75 \approx 360$ mm.
De benaderingsformule geeft een erg goede benadering.

2.49 **a.** $MT = r_1 + r_2$, dus in de rechthoekige driehoek MNT geldt dan: $\sin\alpha = \frac{MT}{MN} = \frac{r_1 + r_2}{x}$

b. Stelling van Pythagoras in ΔMNT geeft $PR = NT = \sqrt{x^2 - (r_1 + r_2)^2}$.
Boog PQ: De omspannen boog PQ heeft hoek $\pi+2\alpha$, dus lengte is $\frac{\pi+2\alpha}{2\pi}\cdot 2\pi r_1 = (\pi + 2\alpha)\cdot r_1$
Boog RS: De omspannen boog RS heeft hoek $\pi+2\alpha$, dus lengte is $\frac{\pi+2\alpha}{2\pi}\cdot 2\pi r_2 = (\pi + 2\alpha)\cdot r_2$
Twee keer het rechte stuk en de twee bogen samen geven de gevraagde formule.

c. $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{45+15}{100}\right) \approx 0{,}6435\ldots$ (of ≈ 36,9°)
Invullen in de formule van vraag **b** geeft $L \approx 425{,}7 \approx 426$ mm.
Invullen in de benaderingsformule geeft $L \approx 424{,}5 \approx 425$ mm.
De benaderingsformule geeft ook nu een erg goede benadering.

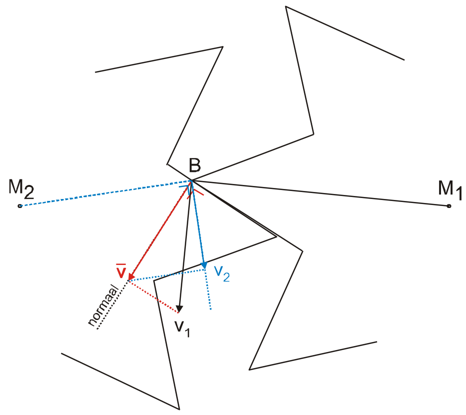
Hoofdstuk 3: Tandprofiel



3.1 **a.** …

b.
- omdat de snelheidsvector van een punt bij een draaibeweging altijd loodrecht staat op de straal
- normaal: lijn tekenen vanuit A loodrecht op de tandflank (zie hiernaast)
- zie hiernaast (rood)
- zie hiernaast (blauw): je moet de component van vector $\vec{v}$ in de richting loodrecht op de verbindingslijn AM_2 tekenen

c.
- $v = \varphi \cdot r$, dus bij constante hoeksnelheid φ is de snelheid evenredig met de afstand van het contactpunt tot middelpunt M_1; dus de snelheid in B is BM_1 / AM_1 keer zo groot als de snelheid in A; door meting is dat hier dus 1,5 keer zo groot
- Zie hiernaast: loodrecht op de tandflank
- Teken de vector $\vec{v_1}$ loodrecht op AM_1 en met lengte 1,5 keer de lengte van $\vec{v_1}$ bij **b**
- Teken eerst weer de vector $\vec{v}$ in de richting



loodrecht op de verbindingslijn AM_2 en $\overrightarrow{v_2}$ is dan de component van $\vec{v}$ in de richting loodrecht op AM_2

d. Het contactpunt springt in een fractie van een seconde van punt A naar punt B, dus het contact in deze twee punten vindt zo ongeveer gelijktijdig plaats.
$\varphi = v/r$, dus als de hoeksnelheid constant is, dan moet gelden dat de lengte van de twee getekende vectoren $\overrightarrow{v_2}$ in punten A en B met de factor BM_2/AM_2 vergroot is;
nauwkeurig tekenen en meten geeft: $BM_2/AM_2 \approx 0{,}67$ en de verhouding van de lengtes van $\overrightarrow{v_2}$ is echter (ongeveer) 1,6.
De hoeksnelheid van het linker tandwiel is dus duidelijk *niet* constant.

3.2 a. De steek is de afstand tussen twee tanden gemeten langs de ‘rolcirkel’ en omdat bij samenwerkende tandwielen telkens evenveel tanden voorbijkomen (geen ‘slip’ mogelijk zoals bij wrijvingswielen), moet de afstand tussen twee tanden gelijk zijn.

b. Volgt uit $m = \dfrac{p}{\pi}$; omdat de steek p gelijk is voor beide tandwielen, is ook m gelijk

3.3 a. Gegeven: $d_{\text{topcirkel}} = d_{\text{steekcirkel}} + 2m$ en $d_{\text{steekcirkel}} = z \cdot m$
Dus: $d_{\text{topcirkel}} = z \cdot m + 2m = m \cdot (z + 2)$

b. Gegeven: $d_{\text{voetcirkel}} = d_{\text{steekcirkel}} – 2{,}5m$ en $d_{\text{steekcirkel}} = z \cdot m$
Dus: $d_{\text{voetcirkel}} = z \cdot m – 2{,}5m = m \cdot (z – 2{,}5)$

c. Gegeven: $a = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$ en $d_1 = z_1 \cdot m$ en $d_2 = z_2 \cdot m$

Invullen geeft: $a = \dfrac{z_1 \cdot m + z_2 \cdot m}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot m + z_2 \cdot m) = \tfrac{1}{2} m \cdot (z_1 + z_2)$

3.4 a. $d = z \cdot m$, dus $m = {}^{d}/_{z}$: $m = 600/60 = 10$

b. $p = 10\pi$

c. $d_{\text{topcirkel}}$ = 620 mm; $d_{\text{voetcirkel}}$ = 575 mm

d. (620 – 575)/2 = 45/2 = 22,5 mm

3.5 a. z_2 = 92 tanden

b. d_1 = 138 mm; d_2 = 552 mm

c. a = 345 mm

d. rondsel: $d_{\text{topcirkel}}$ = 150 mm; $d_{\text{voetcirkel}}$ = 123 mm
wiel: $d_{\text{topcirkel}}$ = 564 mm; $d_{\text{voetcirkel}}$ = 537 mm

3.6 a. n_1 = 1440 omw/min

b. gecombineerd moet worden $i = z_2/z_1$ = 4,8 en $a = \tfrac{1}{2} m \cdot (z_1 + z_2)$; dit geeft z_1 = 20; z_2 = 96

c. d_1 = 80 mm; d_2 = 384 mm;

d. rondsel: $d_{\text{topcirkel}}$ = 88 mm; $d_{\text{voetcirkel}}$ = 70 mm
wiel: $d_{\text{topcirkel}}$ = 392 mm; $d_{\text{voetcirkel}}$ = 374 mm

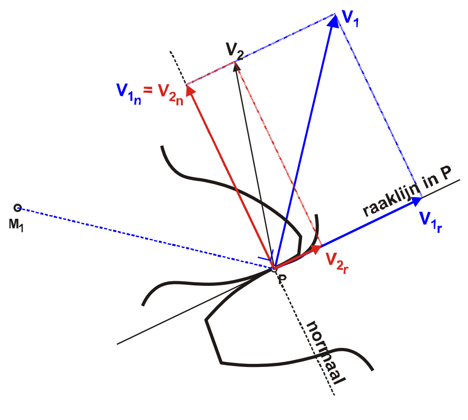
3.7 a. anders zouden de twee tandwielen in elkaar doordringen, of het contact verliezen

b. de twee tandwielen ‘glijden’ langs elkaar (met snelheid $v_{1_r} - v_{2_r}$)

3.8 a. Lijn door P loodrecht op de raaklijn tekenen

b. Zie hiernaast (in rood)

c. De snelheidsvector $\overrightarrow{V_1}$ staat loodrecht op de straal M_1P; teken eerst $\overrightarrow{v_{1n}}$, hieruit volgt $\overrightarrow{V_1}$; zie verder hiernaast (in blauw)



3.9 a. Omdat $\overrightarrow{V_1}$ loodrecht staat op de straal M_1P en ook de normaal en raaklijn per definitie loodrecht op elkaar staan geldt: $\angle M_1PA = \alpha$, dus
$\angle M_1PV_{1_r} = 90° - \alpha$ en $\angle V_{1_r}PV_1 = \alpha$;
volgens Z-hoeken is dan ook $\angle Pv_1v_{1_n} = \alpha$

b. $\vec{V_2}$ staat loodrecht op de straal M_2P dus geldt: $\angle M_2PA = \beta$, dus $\angle V_2PV_{2_n} = 90° - \beta$ en omdat de som van de hoeken van een driehoek 180° is, geldt $\angle Pv_2v_{2_n} = \beta$

c. $\Delta M_1PA \sim \Delta Pv_1v_{1_n}$,geeft gelijke verhoudingen van overeenkomstige zijden, ofwel $M_1A : M_1P = PV_{1_n} : PV_1$, dat geeft $a_1 : R_1 = v_{1_n} : v_1$

Idem: $\Delta M_2PB \sim \Delta Pv_2v_{2_n}$,geeft $M_2B : M_2P = PV_{2_n} : PV_2$, dat geeft $a_2 : R_2 = v_{2_n} : v_2$

d. Uit $\frac{v_{1_n}}{v_1} = \frac{a_1}{R_1}$ volgt $v_{1_n} = \frac{a_1}{R_1} \cdot v_1$ en dus $v_{1_n} = \frac{a_1}{R_1} \cdot (\omega_1 \cdot R_1) = a_1 \cdot \omega_1$;

Uit $\frac{v_{2_n}}{v_2} = \frac{a_2}{R_2}$ volgt $v_{2_n} = \frac{a_2}{R_2} \cdot v_2$ en dus $v_{2_n} = \frac{a_2}{R_2} \cdot (\omega_2 \cdot R_2) = a_2 \cdot \omega_2$

Omdat $v_{1_n} = v_{2_n}$ geeft dit $a_1 \cdot \omega_1 = a_2 \cdot \omega_2$, dus $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$

Maar $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ is precies de overbrengingsverhouding i en die is constant en gelijk aan $\frac{z_1}{z_2}$

e. De overstaande hoeken bij C zijn gelijk en beide driehoeken hebben een rechte hoek; de twee driehoeken hebben twee gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig

f. $\Delta M_1CA \sim \Delta M_2CB$, dus geeft gelijke verhoudingen van overeenkomstige zijden, ofwel $M_1C : M_1A = M_2C : M_2B$, dat geeft $r_1 : a_1 = r_2 : a_2$; herschrijven geeft $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2}$

3.10 **a.** De verhouding tussen de aantal tanden van de twee tandwielen z_1/z_2 is constant, dus volgt uit formule 3.8 dat ook de verhouding r_1/r_2 constant is. De waarde van c is gelijk aan de overbrengingsverhouding i, dus $c = i$.

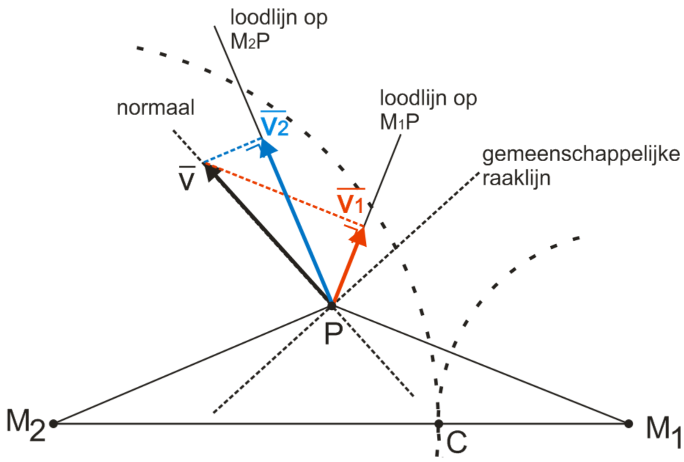
b. De as-afstand a van de twee tandwielen is ook constant, ofwel $r_1 + r_2 = a$.

c. Substitutie $r_2 = a - r_1$ in $r_1/r_2 = c$ geeft $\frac{r_1}{a-r_1} = c \;\rightarrow\; r_1 = c \cdot (a - r_1) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; r_1 = ac - c \cdot r_1 \;\rightarrow r_1(1+c) = ac$, dus $r_1 = \frac{ac}{1+c}$ en $r_2 = a - \frac{ac}{1+c}$

d. Omdat r_1 en r_2 constant zijn, ligt punt C op de verbindingslijn tussen de assen vast.

3.11 **a.** De normaal is langs de getekende vector $\vec{V}$; de gemeenschappelijke raaklijn staat hier loodrecht op.



b. Teken de lijnen M_1P en M_2P en de loodlijnen hierop vanuit P.

Dan de componenten van $\vec{v}$ langs deze twee loodlijnen tekenen.

c. Meten in de tekening lengtes $V_1 : V_2 \approx 2{,}14$

d. $M_1P : M_2P \approx 1{,}06$

dus $M_1P \approx 1{,}06 \cdot M_2P$

Uit vraag **c**: $V_1 \approx 2{,}14 \cdot V_2$

$\omega = v/r$, dus

$$\omega_1 = \frac{V_1}{M_1P} \approx \frac{2{,}14 \cdot V_2}{1{,}06 \cdot M_2P} = \frac{2{,}14}{1{,}06} \cdot \frac{V_2}{M_2P} \approx 2{,}0 \cdot \omega_2$$

Dus $\omega_1 : \omega_2 \approx 1 : 2$

e. Verbind de punten M_1 en M_2 en teken de pool C. De verhouding tussen de stralen M_1C en M_2C (d.w.z. de stralen van de steekcirkels) in de figuur is ook 1 : 2, dus klopt.

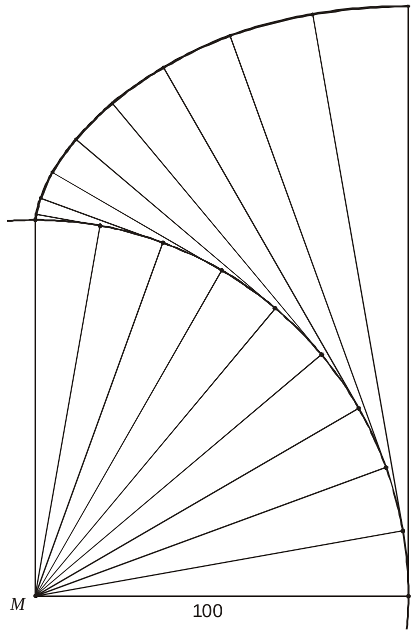
3.12 Zelf doen!

3.13 **a.** Omtrek basiscirkel = 2·π·100 = 200π (≈ 628,3 mm)
Dus bij α = 10º is de booglengte $^{10}/_{360}$ · 200π = $5^5/_9$π ≈ 17,45 mm

b. Kromtestraal AP = booglengte AB ≈ 17,45 mm

c. Met de stelling van Pythagoras: $MP = \sqrt{100^2 + AP^2}$ ≈ 101,5 mm

d. Kromtestraal AP = booglengte AB = $^{20}/_{360}$ · 200π = $11^1/_9$π
≈ 34,91 mm (is het dubbele van de lengtes bij α = 10º)
$MP = \sqrt{100^2 + AP^2}$ ≈ 105,9 mm



3.14 **a.** De omtrek van de basiscirkel is 200π.
Voor A_i geldt dat de hoek i · 10º is, dus dan is de booglengte $\frac{i \cdot 10}{360}$ · 200π

b. Lijn door A_1 loodrecht op MA_1 tekenen

c. De lengte van A_1P is 17,5 mm

d. Lengte is achtereenvolgens: 34,9 – 52,4 – 69,8 – 87,3 – 104,7 – 122,2 – 139,6 – 157,1 mm

e. Zie hiernaast op schaal 1:2.

3.15 Als de lijn niet schuift, dan is de lengte van het stuk van de rechte lijn dat 'loskomt' van de cirkel gelijk aan de lengte van de cirkelboog. Bovendien is de lijn telkens raaklijn en staat dus net als het touwtje loodrecht op de straal. Het is dus precies hetzelfde.

3.16 **a.** $A(½, ½\sqrt{3})$

b. OAQ is een rechthoekige driehoek, met $\angle Q$ = ½π (90º),
dus vanwege hoekensom driehoek geldt $\angle OAQ$ = ½π – $\angle AOQ$ = ½π – $^1/_3$π = $^1/_6$π;
ook $\angle OAP$ = ½π (want raaklijn), dus $\angle PAQ$ = ½π – $\angle OAQ$ = ½π – $^1/_6$π = $^1/_3$π

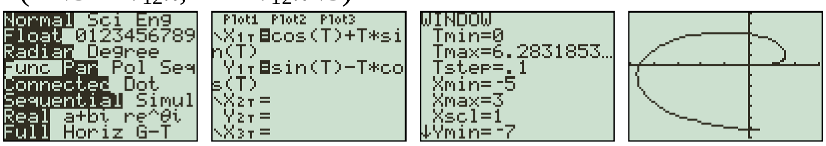
c. De lengte is $\frac{\frac{1}{3}\pi}{2\pi}$ (ofwel $^{60}/_{360}$) = $^1/_6$ deel van hele omtrek, dus $^1/_6$ · 2π = $^1/_3$π

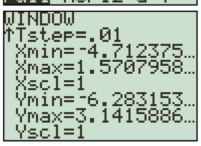
d. Ook $AP = {}^1/_3\pi$

e. $AT = AP \cdot \cos\angle PAT = {}^1/_3\pi \cdot \cos {}^1/_3\pi = {}^1/_3\pi \cdot ½ = {}^1/_6\pi$
$PT = AP \cdot \sin\angle PAT = {}^1/_3\pi \cdot \sin {}^1/_3\pi = {}^1/_3\pi \cdot ½\sqrt{3} = {}^1/_6\pi\sqrt{3}$

f. $P(½ + {}^1/_6\pi\sqrt{3},\ ½\sqrt{3} - {}^1/_6\pi)$

g. $A(½\sqrt{3}, ½)$; $\angle PAQ = {}^1/_6\pi$; lengte boog $BA = {}^1/_6\pi$; $PA = {}^1/_6\pi$; $AT = {}^1/_{12}\pi\sqrt{3}$; $PT = {}^1/_{12}\pi$;
$P(½\sqrt{3} + {}^1/_{12}\pi,\ ½ - {}^1/_{12}\pi\sqrt{3})$

3.17 **a.**


b.


c. $\begin{cases} x(t) = 2\cos t + 2t \cdot \sin t \\ y(t) = 2\sin t - 2t \cdot \cos t \end{cases}$ of $\begin{cases} x(t) = 2 \cdot (\cos t + t \cdot \sin t) \\ y(t) = 2 \cdot (\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}$

d. $\begin{cases} x(t) = r\cos t + rt \cdot \sin t \\ y(t) = r\sin t - rt \cdot \cos t \end{cases}$ of $\begin{cases} x(t) = r \cdot (\cos t + t \cdot \sin t) \\ y(t) = r \cdot (\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}$

3.18 **a.** Bij C geeft lijn AB een gestrekte hoek (180º), dus $\angle ACM_1$ = 180º – 90º – α = 90º – α.
De hoek bij A is recht, dus in ΔACM_1 geldt $\angle AM_1C$ = 180º – 90º – (90º – α) = α.
Bij C zit ook een rechte hoek (van de loodlijn met lijn M_1M_2), dus $\angle BCM_1$ = 90º – α.
De hoek bij B is recht, dus in ΔBCM_2 geldt $\angle BM_2C$ = 180º – 90º – (90º – α) = α.

b. ΔACM_1: $\cos\alpha = \frac{r_1}{R_1}$, dus $r_1 = R_1$ · cos 20º = 50 · cos 20º ≈ 46,98 ≈ 47 mm.

c. ΔBCM_2: $\cos\alpha = \frac{r_2}{R_2}$: $r_2 = R_2$ · cos 20º = 40 · cos 20º ≈ 37,59 ≈ 38 mm.

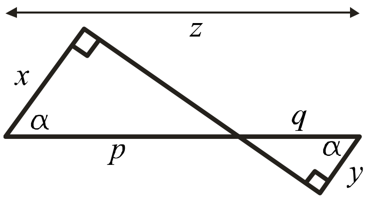
3.19 $r_1 + r_2 = R_1 \cdot \cos\alpha + R_2 \cdot \cos\alpha = (R_1 + R_2) \cdot \cos\alpha$, dus $\cos\alpha = \dfrac{r_1 + r_2}{R_1 + R_2}$

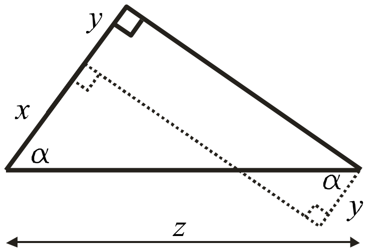
3.20 Noem lijnstukken tot het snijpunt p resp. q. Zie hiernaast.
Linker driehoek: $\cos\alpha = \frac{x}{p}$, ofwel $x = p \cdot \cos\alpha$.

Rechter driehoek: $\cos\alpha = \frac{y}{q}$, ofwel $y = q \cdot \cos\alpha$.

$z = x + y = p \cdot \cos\alpha + q \cdot \cos\alpha = (p + q) \cdot \cos\alpha$,

dus $\cos\alpha = \frac{x+y}{z}$.





Slimmer (zie tweede figuur): verschuif een zijde! Je krijgt dan een nieuwe rechthoekige driehoek met rechthoekszijde x+y en schuine zijde z en je ziet direct dat $\cos\alpha = \frac{x+y}{z}$.

3.21 **a.** aantal tanden $z = d/m = 200/10 = 20$;
steek $p = \pi \cdot m = 10\pi$ (≈ 31,4 mm)
b. diameter topcirkel = $d + 2m = 200 + 2 \cdot 10 = 220$ mm
diameter voetcirkel = $d - 2{,}5m = 200 - 2{,}5 \cdot 10 = 175$ mm
c. diameter basiscirkel $d_b = 200 \cdot \cos 20^\circ \approx 187{,}9$ mm (of 188 mm)

3.22 **a.** Aantal tanden is 200/10 = 20, dus de draaihoek α is 360°/20 = 18°
b. $\alpha = \frac{360^\circ}{z}$: logisch, want je moet 360° delen door het aantal tanden z

Formule (3.3) geeft $d = z \cdot m$, dus $z = d/m$; dit geeft $\alpha = \dfrac{360^\circ}{z} = \dfrac{360^\circ}{d/m} = \dfrac{m \cdot 360^\circ}{d}$

3.23 Tanddikte $s = ½ \cdot$ steek $p = ½ \cdot 10\pi = 5\pi$ (≈ 15,7 mm)

3.24 … zelf maken! …

3.25 **a.** 51 en 105 mm
b. 47,92 en 98,67 mm
c. 26,68 mm
d. De hoek in de driehoeken is 20°; $AC = ½d_1 \cdot \sin 20^\circ = ½ \cdot m \cdot z_1 \cdot \sin 20^\circ$; $BC = ½ \cdot m \cdot z_2 \cdot \sin 20^\circ$;
Optellen geeft $AB = AC + BC = ½ \cdot m \cdot z_1 \cdot \sin 20^\circ + ½ \cdot m \cdot z_2 \cdot \sin 20^\circ = ½ \cdot m \cdot (z_1 + z_2) \cdot \sin 20^\circ$

3.26 $z_1 = 17 \rightarrow d_1 = 17 \cdot 5 = 85$; $z_2 = 67 \rightarrow d_2 = 67 \cdot 5 = 335$; hartafstand = (85+335)/2 = 210 mm
(kan ook in een keer met formule 3.7: $a = ½ \cdot 5 \cdot (17 + 67) = 210$)

3.27 **a.** $a = 15$ (mm); $b = 30$ (mm)
b. Dan worden ook de hartafstanden verdubbeld, want hartafstand $a = ½ \cdot m \cdot (z_1 + z_2)$ (formule 3.7) en als m twee keer zo groot wordt, dan wordt a dus ook twee keer zo groot.

3.28 **a.** Overbrengingsverhouding: $\frac{50}{a} \cdot \frac{b}{20} = 10$, dus $\frac{b}{a} = 4$, ofwel $b = 4a$
Asafstand: $½ \cdot 1 \cdot (50 + a) + ½ \cdot 1 \cdot (20 + b) = 60$, ofwel $a + b = 50$
Combineren geeft: $5a = 50$, dus $a = 10$ en $b = 40$ ($z_2 = 10$ en $z_3 = 40$)
b. Er moet blijven gelden dat $a + b = 50$ (asafstand), en $b \approx 4a$ (overbrengingsverhouding)
$a = 9$ en $b = 41$ is dan de beste keus, want geeft overbrengingsverhouding ≈ 11,4
($a = 11$ en $b = 39$ voldoen niet, want dan is de overbrengingsverhouding kleiner dan 10)

3.29 **a.** $d_1 + d_2 = 80$ en $d_1/d_2 = 1{,}5$: dit geeft $d_1 = 48$ en $d_2 = 32$ (beide in mm)
b. $z_1 = 38{,}4 \rightarrow 38$ tanden; $z_2 = 25{,}6 \rightarrow 26$ tanden
c. $i = 38/26 \approx 1{,}46$ en hartafstand = 38·1,25 + 26·1,25 = 80 mm
d. ggd(38, 26) = 2, dus niet geschikt
e. $z_1 = 39$ en $z_2 = 26$: ggd(39, 26) = 13, dus ook ongeschikt
$z_1 = 38$ en $z_2 = 25$: ggd(38, 25) = 1; $i = 1{,}52$; a = 38·1,25 + 25·1,25 = 78,75
$z_1 = 39$ en $z_2 = 25$: ggd(39, 25) = 1; $i = 1{,}56$; a = 39·1,25 + 25·1,25 = 80
Beide laatste keuzes zijn mogelijk. Bij de ene is de overbrengingsverhouding beter, maar moet de hartafstand in het ontwerp bijgesteld worden; bij de andere is de hartafstand goed, maar is de overbrengingsverhouding een stukje hoger; als dat laatste geen probleem is, dan lijken tandenaantallen van 39 en 25 de beste keus.