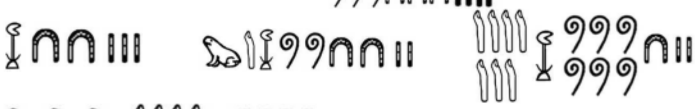
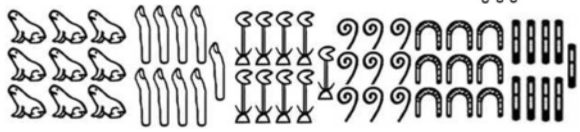
►1 **a.** Zeer onwaarschijnlijk
b. Zeer onwaarschijnlijk

►2 **a.** Dan heb je ergens een schuld uitstaan
b. 1826
c. Dan hadden beide een kopie van de kerfstok; om fraude te voorkomen

►3 **a.** MMXII, MCCCXXVII, DLXXXVI, XCIX, CMXCIX, MCM, bijv. 1996: MCMXCVI
b. 333, namelijk 9 tekens: CCCXXXIII
c. MCCXIV: 369 + 845 = 1214
MMXLV: 799 + 1246 = 2045
LXXXVI: 129 – 43 = 86
CXII: 1111 – 999 = 112
d. Je vervangt elk symbool door een symbool van een orde hoger, dus I wordt X, V wordt L, X wordt C, L wordt D, C wordt M, etc.
e. X keer XVII is CLXX (2 keer), en I keer XVII is XVII,
dus optellen van CLXX + CLXX + XVII geeft het antwoord CCCLVII; 21 x 17 = 357

►4 **a.** 
b. 999, namelijk 27 tekens: 
c. 

d. 345 + 668 = 1013; 61 007 + 50 215 = 111 222; 102 240 – 30 628 = 71 612;
1 000 000 – 1 = 999 999

►5 **a.** 
b. Je vervangt elk symbool door een symbool van een orde hoger

►6 **a.** Na de 1e verdubbeling en uitgave van 12 dinarii heeft hij nog $2x - 12$
Na de 2e verdubbeling en uitgave van 12 dinarii heeft hij $2(2x - 12) - 12 = 4x - 36$
Uiteindelijk geldt dus $2(4x - 36) - 12 = 0$, ofwel $8x - 84 = 0$. Dit geeft $x = 10{,}5$ dinarii dus hij vertrok met 10 en een halve dinarii.
b. Op de laatste dag klimt de leeuw wel omhoog, maar glijdt niet meer omlaag (want hij is er dan uit!). Na x dagen klimmen is hij dus $^1/_7\,x$ voet geklommen en $^1/_9(x - 1)$ voet gedaald; in totaal zit hij na x dagen dus op hoogte $^1/_7\,x - {}^1/_9(x - 1)$ voet.
Dat kun je vereenvoudigen tot $^2/_{63}\,x + {}^1/_9$, dus moet gelden $^2/_{63}\,x + {}^1/_9 \geq 50$.
Oplossen geeft $x \geq 1571{,}5$ dus na 1572 dagen is de leeuw uit de kuil.
c. De afstand tot de toren van 40 m is x, dan is de afstand tot de andere toren $50 - x$.
De vergelijking $\sqrt{40^2 + x^2} = \sqrt{30^2 + (50 - x)^2}$ geeft $x = 18$, dus de fontein bevindt zich 18 meter van de toren van 40 m hoogte en 32 meter van de toren van 30 m hoogte.

►7 **a.** 7 x 8 + 7 = 56 + 7 = 63
b. 1 x 8^2 + 0 x 8 + 0 = 64
c. 1 x 8^3 = 512
d. 1 x 8^3 + 2 x 8^2 + 3 x 8 + 4 = 512 + 128 + 24 + 4 = 668

►8

a.	10	16	61	100
b.	7	70	56	26
c.	7	14	45	235
d.	20	120	514	11104

e. Je zet er een nul achter

f. 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15 , 17, 21, 23, 25, 27, … (telkens 2 erbij)
2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 24, 26, … (telkens 2 erbij)
2, 4, 10, 20, 40, 100, 200, 400, 1000, 2000, 4000, … (telkens verdubbelen)
1, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 25, 42, 67, 131, 220, 351, … (telkens de 2 voorgangers optellen)
g. Het laatste cijfer rechts weghalen (het cijfer dat je weghaalt is de rest)

►9 a.

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

x	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

►10 a. 3 5 15 27
b. 100 110 1001 1000
c. 110 10 1001 10
d. 111 101 110 1
e. 1100011 1111100111 111010110010 10001100101110001

►11 a.

x	0	1
0	0	0
1	0	1

b. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, ….; er komt telkens een nul bij
c. Je zet er een nul rechts achter
d. 100000000000, 10000000000, 1000000000, 100000000, 10000000, 1000000, 100000, 10000, 1000, 100, 10, 1
e. Je hebt dan rest 1; je kunt delen door twee, door het meest rechter cijfer weg te halen; (het cijfer dat je weghaalt is de rest)

►12 Er worden wel twee datums genoemd: 28 oktober 2011 of op 21 december 2012; ze staan beide ter discussie…

►13 a.

5
10
12


7
17
0
8

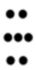

6
18
17
13
19


14
3
0
7
19

b. 13 x 7200 + 0 x 360 + 5 x 20 + 7 = 93.707
5 x 144.000 + 0 x 7200 + 10 x 360 + 0 x 20 + 5 = 723.605
2 x 2.880.000 + 0 x 144.000 + 10 x 7200 + 0 x 360 + 12 x 20 + 4 = 5.832.244

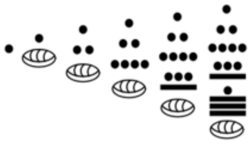
c.

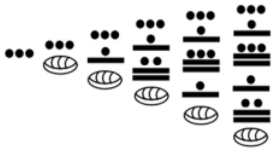
►14 a. Je hebt 19 20-tallen en één 20-tal, dus twintig 20-tallen; dat geeft normaal gesproken één 400-tal, maar bij de Maya's geeft dat dus één 360-tal en twee 20-tallen.
b. Voor het aftrekken van de 20-tallen moet je 'lenen' van de 360-tallen; dat geeft dus 18 20-tallen. Daar haal je er één van af, dus hou je 17 20-tallen over (en nog een 360-tal).

c.


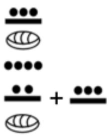

d.

►15 a. Je zet er een nul achter

b. 

c.  (achtereenvolgens 3, 60, 1200, 24.000, 480.000, 9.600.000)

d. Plaats alles een rij omhoog en zet er een nul onder; bij het nieuwe aantal 20-tallen moet je het dubbele van het oude aantal 20-tallen bij optellen; komt het aantal 20-tallen daarbij boven de 19, haal er dan 18 van af en tel eentje bij de 360-tallen bij

e. Pas bovenstaande rekenregel toe:  , ofwel 

(decimaal: 57.687 x 20 = 1.153.740)

►16 …

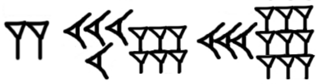
►17 Het getal 70 schrijf je als:  (1 x 60 + 10) en als je dit omdraait krijg je  (10 + 1) en dat is 11.

►18 a. 48 uur, 21 minuten en 33 seconden

b. Ja: 48 uur, 21 min, 33 sec is hetzelfde als 48:21:33 bij de Babyloniërs, ofwel

c. 99 = 1 x 60 + 39, dus 1:39 

999 = 16 x 60 + 39, dus 16:39 

9999 = 2 x 60^2 + 46 x 60 + 39, dus 2:46:39 

99 999 = 27 x 60^2 + 46 x 60 + 39, dus 27:46:39 

999 999 = 4 x 60^3 + 37 x 60^2 + 46 x 60 + 39, dus 4:37:46:39

d. 1:1:1 = 1 x 60^2 + 1 x 60 + 1 = 3600 + 60 + 1 = 3661
59:59:59 = 59 x 60^2 + 59 x 60 + 59 = 215 999

►19 a. 6:00, 38:13, 1:11:10

b. 9:08, 15:49

c. 37:15, 12:46, 50:16

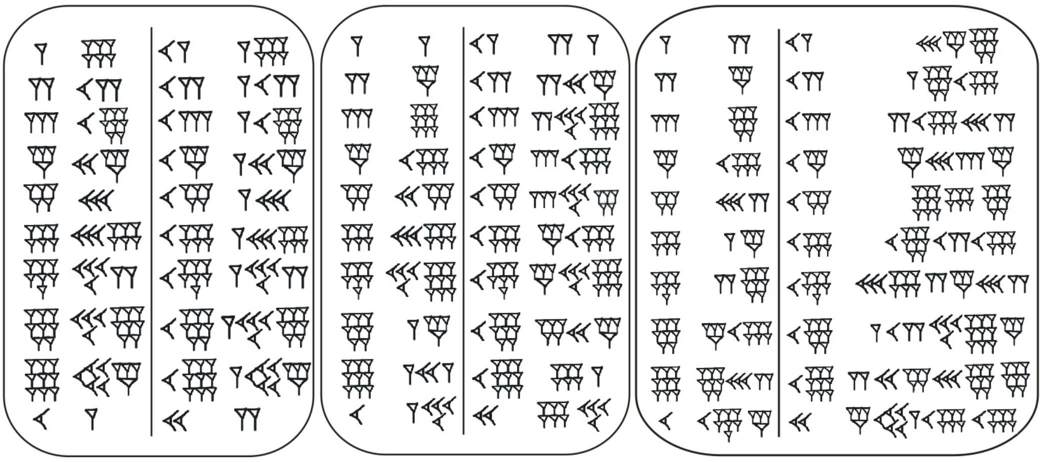
►20 a. In transcriptie 2:05, 2:00:05, 2:05:00; in spijkerschrift allemaal als: 

b. In transcriptie: 1, 1:00, 1:00:00; in spijkerschrift allemaal als: 

►21 a. 3:12:00 en 12:34:56:00

b. De schrijfwijzen zijn gelijk!
Conclusie: je kunt bij getallen in spijkerschrift *niet* zien dat een getal met 60 wordt vermenigvuldigd. Het resultaat is gelijk aan het oorspronkelijke getal.

►22 a. A: tafel van 6; recht evenredig verband; $y = 6x$
B: kwadraten; kwadratisch verband (of machtsverband); $y = x^2$
C: machten van twee; exponentieel verband; $y = 2^x$

b. 

►23 a. $0{,}15:15 \leftrightarrow \frac{15}{60}+\frac{15}{60^2}=\frac{15\cdot 60}{3600}+\frac{15}{3600}=\frac{915}{3600}=\frac{61}{240}\ (\approx 0{,}254167...)$

$0{,}12:48 \leftrightarrow \frac{12}{60}+\frac{48}{60^2}=\frac{12\cdot 60}{3600}+\frac{48}{3600}=\frac{768}{3600}=\frac{16}{75}\ (\approx 0{,}2133...)$

$0{,}59:59 \leftrightarrow \frac{59}{60}+\frac{59}{60^2}=\frac{59\cdot 60}{3600}+\frac{59}{3600}=\frac{3599}{3600}\ (\approx 0{,}99972...)$

b. $\frac{1}{3}=\frac{20}{60} \leftrightarrow 0{,}20$

$\frac{1}{4}=\frac{15}{60} \leftrightarrow 0{,}15$

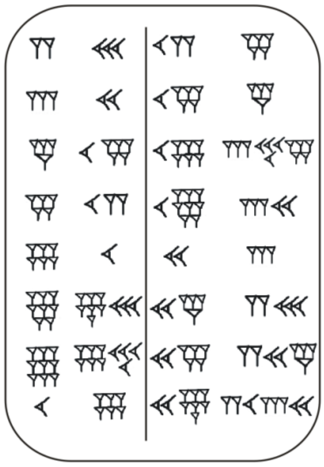
$\frac{2}{9}=2\cdot\frac{1}{9}$ dus $2\cdot 0{,}06:40 \leftrightarrow 0{,}13:20$

$\frac{3}{5}=\frac{36}{60} \leftrightarrow 0{,}36$; $\frac{5}{8}=\frac{5\cdot 450}{3600}=\frac{2250}{3600}=\frac{37\cdot 60}{60\cdot 60}+\frac{30}{3600}=\frac{37}{60}+\frac{30}{3600} \leftrightarrow 0{,}37:30$

$\frac{7}{18}=\frac{7\cdot 200}{3600}=\frac{1400}{3600}=\frac{23\cdot 60}{60\cdot 60}+\frac{20}{3600}=\frac{23}{60}+\frac{20}{3600} \leftrightarrow 0{,}23:20$

$\frac{1}{32}=\frac{6750}{126000}=\frac{3600}{126000}+\frac{3150}{126000}=\frac{1}{60}+\frac{52\cdot 60}{126000}+\frac{30}{126000}=\frac{1}{60}+\frac{52}{3600}+\frac{30}{126000} \leftrightarrow 0{,}01:52:30$

►24 a. Het product is telkens 60; omgekeerd evenredig (of hyperbolisch) verband; $x\cdot y = 60$ of $y=\frac{60}{x}$



b. Decimale waarden achtereenvolgens: 7½ – $6^{2}/_{3}$ – 6 – 5 – 4 – 3¾ – $3^{1}/_{3}$ – 3 – 2½ – $2^{2}/_{5}$ – $2^{2}/_{9}$
In transcriptie achtereenvolgens 7,30 – 6,40 – 6 – 5 – 4 – 3,45 – 3,20 – 3 – 2,30 – 2,24 – 2,13:20

c. Dan zijn de eerste 5 waarden die in de tabel staan ½ – $^{1}/_{3}$ – ¼ – $^{1}/_{5}$ – $^{1}/_{6}$; dat schrijf je in transcriptie achtereenvolgens als 0,30 – 0,20 – 0,15 – 0,12 – 0,10 en dat komt overeen met de kleitablet;
Decimale waarden van de lege plekken: $^{1}/_{8}$ – $^{1}/_{9}$ – $^{1}/_{10}$ – $^{1}/_{12}$ – $^{1}/_{15}$ – $^{1}/_{16}$ – $^{1}/_{18}$ – $^{1}/_{20}$ – $^{1}/_{24}$ – $^{1}/_{25}$ – $^{1}/_{27}$
In transcriptie is dat achtereenvolgens 0,07:30 – 0,06:40 – 0,06 – 0,05 – 0,04 – 0,03:45 – 0,03:30 – 0,03 – 0,02:30 – 0,02:24 – 0,02:13:20

d. De twee tabellen zijn gelijk!
$y=\frac{60}{x}=60\cdot\frac{1}{x}$, dus de waarden van de eerste tabel met $y=\frac{60}{x}$ krijg je door de waarden van de tweede tabel bij $y=\frac{1}{x}$ met 60 te vermenigvuldigen; met 60 vermenigvuldigen is niet te zien bij de Babyloniërs (zie vraag …)

►25 a. $d^2 = 30^2 + 30^2 = 900 + 900 = 1800$, dus $d = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2} \approx 42{,}42640687 \approx 42{,}4264$

b. 0,4264 ≈ $^{25}/_{60}$ + $^{35}/_{3600}$, dus 42,4264 is in transcriptie 42,25:35 en dat komt overeen met het Babylonische getal  op het kleitablet

c. 1,24:51:10 = 1 + $^{24}/_{60}$ + $^{51}/_{3600}$ + $^{10}/_{216000}$ ≈ 1,414213

d. 30 x 1,414213 ≈ 42,4264 dus het klopt

e. $30\sqrt{2}$ / 30 = $\sqrt{2}$

►Extra opgave

a. …

b. $\frac{1}{11}=\frac{60}{11{\cdot}60}=\frac{11{\cdot}5}{11{\cdot}60}+\frac{5}{11{\cdot}60}\overset{\text{rest}\,5}{=}\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{300}{11{\cdot}60^2}$

$\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{11{\cdot}27}{11{\cdot}60^2}+\frac{3}{11{\cdot}60^2}\overset{\text{rest}\,3}{=}\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{180}{11{\cdot}60^3}=$

$\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{11{\cdot}16}{11{\cdot}60^3}+\frac{4}{11{\cdot}60^3}\overset{\text{rest}\,4}{=}\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{\mathbf{16}}{60^3}+\frac{240}{11{\cdot}60^4}=$

$\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{\mathbf{16}}{60^3}+\frac{11{\cdot}21}{11{\cdot}60^4}+\frac{9}{11{\cdot}60^4}\overset{\text{rest}\,9}{=}\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{\mathbf{16}}{60^3}+\frac{\mathbf{21}}{60^4}+\frac{540}{11{\cdot}60^5}=$

$\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{\mathbf{16}}{60^3}+\frac{\mathbf{21}}{60^4}+\frac{11{\cdot}49}{11{\cdot}60^5}+\frac{1}{11{\cdot}60^5}\overset{\text{rest}\,1}{=}\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{\mathbf{16}}{60^3}+\frac{\mathbf{21}}{60^4}+\frac{\mathbf{49}}{60^5}+\frac{60}{11{\cdot}60^6}=$

$\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{\mathbf{16}}{60^3}+\frac{\mathbf{21}}{60^4}+\frac{\mathbf{49}}{60^5}+\frac{11{\cdot}5}{11{\cdot}60^6}+\frac{5}{11{\cdot}60^6}\overset{\text{rest}\,5}{=}\frac{\mathbf{5}}{60}+\frac{\mathbf{27}}{60^2}+\frac{\mathbf{16}}{60^3}+\frac{\mathbf{21}}{60^4}+\frac{\mathbf{49}}{60^5}+\frac{\mathbf{5}}{60^6}+\frac{300}{11{\cdot}60^7}\ldots$

enzovoort; de resten herhalen zich (5, 3, 4, 9, 1, 5, 3, 4, 9, 1, 5, …),
dus $\frac{1}{11}=0,05:27:16:21:49:05:27:16:21:49:\ldots$

►**26** **a.** 1010011 = $2^6+2^4+2^1+2^0$ = 64 + 16 + 2 + 1 en dat zijn precies de getallen uit de eerste kolom

b. Elke volgende rij is het dubbele van de rij ervoor; het begint met 154 en bij 16 is het 4 keer verdubbeld, dus 154 x 2 x 2 x 2 x 2 = 154 x 2^4 = 154 x 16
Voor de andere rijen geldt dat net zo: achter 32 staat bijv. 32 x 154

c. 83 x 154 = (64 + 16 + 2 + 1) x 154 = 64x154 + 16x154 + 2x154 + 1x254
en dat zijn precies de getallen in de rechter kolom in die rijen bij elkaar opgeteld waarvan de som in de linkerrij gelijk is aan 83

d. Ja… (?)

►**27** **a.**

/	1	71
/	2	142
	4	284
	8	568
/	16	1136

dus 19 x 71 = 71 + 142 + 1136 = 1349

b. 252 = 128+64+32+16+8+4, dus binair 11111100;

je moet de rijen achter 4, 8, 16, 32, 64 en 128 optellen:

	1	19
	2	38
/	4	76
/	8	152
/	16	304
/	32	608
/	64	1216
/	128	2432

Dus 252 x 19 = 76 + 152 + 304 + 608 + 1216 + 2432 = 4788

c. 19 = 16 + 2 + 1:

/	1	252
/	2	504
	4	1008
	8	2016
/	16	4032

, dus 252 x 19 = 252 + 504 + 4032 = 4788

d.

	1	33
/	2	66
	4	132
/	8	264
/	16	528

	1	62
/	2	124
	4	248
/	8	496
	16	992
	32	1984
/	64	3968

/	1	85
	2	170
/	4	340
	8	680
/	16	1360

/	1	105
/	2	210
	4	420
/	8	840
/	16	1680
/	32	3360

dus 26 x 33 = 66 + 264 + 528 = 858
dus 74 x 62 = 124 + 496 + 3968 = 4588
dus 85 x 21 = 21 x 85 = 85 + 340 + 1360 = 1785
dus 105 x 59 = 59 x 105 = 105 + 210 + 840 + 1680 + 3360 = 6195

►28 a.

/	1	8
/	2	16
/	4	32
	8	64
/	16	128

	1	12
	2	24
	4	48
/	8	96
/	16	192
	32	384
/	64	768

	1	17
/	2	34
/	4	68
/	8	136

	1	11
/	2	22
/	4	44
	8	88
/	16	176

/	1	9
	2	18
/	4	36
/	8	72
	16	144
/	32	288

184 = 128 + 32 + 16 + 8, dus 184 : 8 = 1 + 2 + 4 + 16 = 23
1056 = 768 + 192 + 96, dus 1056 : 12 = 8 + 16 + 64 = 88
238 = 136 + 68 + 34, dus 238 : 17 = 2 + 4 + 8 = 14
242 = 176 + 44 + 22, dus 242 : 11 = 2 + 4 + 16 = 22
405 = 288 + 72 + 36 + 9, dus 405 : 9 = 1 + 4 + 8 + 32 = 45

b.

	1	17
/	2	34
	4	68
	8	136
/	16	272

/	1	21
	2	42
	4	84
/	8	168
/	16	336

dus 315 : 17 = 2 + 16 = 18 rest (315 – 272 – 34 =) 9
dus 530 : 21 = 1+ 8 + 16 = 25 rest (530 – 336 – 168 – 21 =) 5

►29 a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}+\frac{2}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}$

b. Verdeel 4 broden elk half doormidden (je krijgt 8 halfjes); verdeel de twee overige broden in kwarten; iedereen krijgt dan $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ brood

c. Verdeel 4 van de 5 broden in halfjes, zodat je 8 halfjes hebt; iedereen krijgt een halve brood en er blijft een halfje over: verdeel deze in 7 gelijke delen tot $^{1}/_{14}$ brood; het hele brood dat over is verdeel je in 7 gelijke delen;
Iedereen krijgt dan $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{7}{14}+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$ brood

►30 a. $\frac{12}{32}=\frac{8}{32}+\frac{4}{32}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\dot{4}+\dot{8}$; $\frac{20}{99}=\frac{11}{99}+\frac{9}{99}=\frac{1}{9}+\frac{1}{11}=\dot{9}+\dot{1}1$;

$\frac{27}{1404}=\frac{26}{1404}+\frac{1}{1404}=\frac{1}{54}+\frac{1}{1404}=\dot{5}4+\dot{1}404$

b. $\frac{13}{36}=\frac{9}{36}+\frac{4}{36}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\dot{4}+\dot{9}$; $\frac{9}{20}=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\dot{4}+\dot{5}$;

$\frac{4}{15}=\frac{3}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\dot{5}+\dot{1}5$

c. $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{7}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\dot{2}+\dot{14}$; $\frac{2}{19}=\frac{20}{190}=\frac{19}{190}+\frac{1}{190}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190}=\dot{10}+\dot{190}$;
$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{5}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\dot{3}+\dot{15}$; $\frac{2}{7}=\frac{8}{28}=\frac{7}{28}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\dot{4}+\dot{28}$;
$\frac{3}{11}=\frac{12}{44}=\frac{11}{44}+\frac{1}{44}=\frac{1}{4}+\frac{1}{44}=\dot{4}+\dot{44}$

►**31 a.** $\dot{3}+\dot{5}+\dot{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{15}{45}+\frac{9}{45}+\frac{5}{45}=\frac{29}{45}$, dus klopt

b. Bij een even noemer kan de breuk vereenvoudigd worden door teller en noemer te delen door 2; bijvoorbeeld 2:18 is gelijk aan 1:9

c. $2\times\dot{2}=2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\dot{1}=1$; $2\times\dot{12}=2\times\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}=\dot{6}$; $2\times\dot{100}=2\times\frac{1}{100}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}=\dot{50}$

►**32 a.** $2\times\dot{9}=\frac{2}{9}\overset{tabel}{=}\dot{6}\ \dot{18}$

b. $2\times\dot{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\dot{3}$ en $2\times\dot{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}=\dot{9}$, dus het dubbele van $\dot{6}\ \dot{18}$ is $\dot{3}\ \dot{9}$;
De getallen zijn gehalveerd: dat geldt altijd bij even noemers (zie vorige vraag)!

c. $1\ \dot{7}\xrightarrow{dubbele}2\ \dot{4}\ \dot{28}\xrightarrow{dubbele}4\ \dot{2}\ \dot{14}\xrightarrow{dubbele}9\ \dot{7}\xrightarrow{dubbele}18\ \dot{4}\ \dot{28}$

d. Er is 4 keer verdubbeld, dus vermenigvuldigd met 16, dus de uitkomst is 16

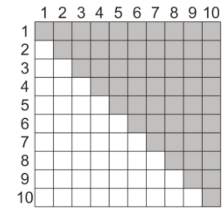
►**33 a.**

	1	2	$\dot{5}$			
	2	4	$\dot{3}$	$\dot{15}$		
	4	8	$\dot{2}$	$\dot{6}$	$\dot{10}$	$\dot{30}$
/	8	17	$\dot{3}$	$\dot{5}$	$\dot{15}$	

dus 17 $\dot{3}\ \dot{5}\ \dot{15}$ gedeeld door $\dot{2}\ \dot{5}$ is 8.

►**34 a.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$, dus het oog komt $\frac{1}{64}$ tekort

b. $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{16}{64}+\frac{4}{64}+\frac{1}{64}=\frac{21}{64}$; het verschil is $\frac{1}{3}-\frac{21}{64}=\frac{64}{192}-\frac{63}{192}=\frac{1}{192}$ $(\approx 0{,}0052)$



►**35 a.** Omdat 3 x 4 = 4 x 3 hoef je maar iets meer dan de helft te kennen;
Je moet er ½ x 10 x 9 + 10 = 55 kennen

b. fout is 36 x 36 = 1296, maar 'slechts' ½ x 36 x 35 + 36 = 666 stuks

c. 3^2 = 9 vermenigvuldigingen; 4^2 = 16 vermenigvuldigingen

►**36 a.** 250.000 euro

b. 5 kratjes (of vaatjes?) bier

c. 155 euro

►**37** Het eerste getal is 02:27, dus decimale waarde 2 x 60 + 27 = 147; 147^2 = 21609 = 6:00:09, dus in het antwoord moet tussen de 6 en de 9 een nul staan: 

►**38 a.** (1, 3, 6, 10,) 15, 21, 28, 36, 45, 55 (namelijk regelmaat +2, +3, +4, +5, +6, etc.)

b. 200; 5050; ½ $n\cdot(n+1)$

c. vierkante getallen: (1, 4, 9, 16,) 25, 36, 49, 64, 81, 100; 20^2 = 400; 100^2 = 10 000; n^2

d. vijfhoekige getallen: (1, 5, 12, 22,) 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287
(nl. +4, +7, +10, +13, +16, +19, etc.);
zeshoekige getallen: (1, 6, 15, 28,) 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325, 378
(nl. +5, +9, +13, +17, +21, +25, etc.)

e. driehoekige getallen k = 3 invullen: $\frac{1}{2}n\big((3-2)(n-1)+2\big)=\frac{1}{2}n((n-1)+2)=\frac{1}{2}n(n+1)$

vierkante getallen k = 4 invullen: $\frac{1}{2}n\big((4-2)(n-1)+2\big)=\frac{1}{2}n(2(n-1)+2)=\frac{1}{2}n(2n)=n^2$

f. vijfhoekig, k = 5 invullen: $\frac{1}{2}n\big((5-2)(n-1)+2\big)=\frac{1}{2}n(3(n-1)+2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$

zeshoekig, k = 6 invullen: $\frac{1}{2}n\big((6-2)(n-1)+2\big)=\frac{1}{2}n(4(n-1)+2)=\frac{1}{2}n(4n-2)=n(2n-1)$

►**39 a.** (2, 6, 12, 20,) 30, 42, 56, 72, 90, 110
(1, 4, 9, 16,) 25, 36, 49, 64, 81, 100
(2, 4, 7, 11,) 16, 22, 29, 37, 46, 56

b. $n\cdot(n+1)$ (de hoogte van het rechthoekje is n en de breedte is $n+1$)
n^2 (het zijn de vierkantige getallen)
$\frac{1}{2}n\cdot(n+1)+1$ (het is telkens één stipje meer dan de driehoekige getallen)

►40 a. (2, 3, 5, 7, 11,) 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; 25 stuks
b. $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $2277 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
c. Perfecte getallen zijn positieve gehele getallen waarvan de som van de delers (uitgezonderd zichzelf, wel inclusief de 1) gelijk is aan het getal zelf
6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,
8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064
d. Twee natuurlijke getallen zijn bevriend als de som van de delers van het getal A (behalve A zelf, maar inclusief 1) gelijk is aan getal B, terwijl de delers van B (behalve B zelf, maar inclusief 1) samen het getal A opleveren.
220: 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284
284: 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

►41 a. Voor het maken van rechte, ofwel haakse hoeken, want bij een driehoek met zijden die voldoen aan de vergelijking is de hoek recht; bijvoorbeeld met een touw met knopen
b. (3, 4, 5) – (5, 12, 13) – (6, 8, 10) – (7, 24, 25) – (8, 15, 17) – (9, 12, 15) – (9, 40, 41)
c. $a^2 = (m^2 - n^2)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4$; $b^2 = (2mn)^2 = 4m^2n^2$;
$c^2 = (m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$;
Hieruit volgt: $a^2 + b^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = c^2$, dus klopt

►42 a. 𝍩 𝍧 𝍫, 𝍢 𝍰 𝍦 𝍮, 𝍥 𝍣 𝍫, 𝍱 𝍰 𝍯
b. 112, 606, -7751 en 7080

►43 a. zie hiernaast

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

b. In het midden van de voorlaatste rij moet twee keer 35 naast elkaar staan, maar er staat 34 en 35
c. 1 – 9 – 36 – 84 – 126 – 126 – 84 – 36 – 9 – 1

►44 a. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 21 \xrightarrow[12]{\text{keer}} 4x + 3x = 252 \rightarrow 7x = 252 \rightarrow x = \frac{252}{7} = 36$
b. $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x)^2 = x \rightarrow (\frac{57}{60}x)^2 = x \rightarrow (\frac{19}{20})^2 \cdot x^2 = x$
$\xrightarrow[\text{door } x]{\text{deel}} (\frac{19}{20})^2 \cdot x = 1 \rightarrow \frac{361}{400}x = 1 \rightarrow x = \frac{400}{361} = 1\frac{39}{361}$
c. $\frac{1}{5}x = \frac{1}{7}y$, ofwel $y = \frac{7}{5}x$ en tweede vergelijking $xy = x + y$
Combineren van de twee formules geeft: $x \cdot \frac{7}{5}x = x + \frac{7}{5}x \rightarrow \frac{7}{5}x^2 = \frac{12}{5}x$
$\xrightarrow[\text{keer } 5]{\text{delen door } x} 7x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{7}$; invullen geeft $y = \frac{7}{5} \cdot \frac{12}{7} = \frac{12}{5}$

►45 a. Als $^a/_0 = a$, dan is dus $a \cdot 0 = a$, maar dat klopt niet, want $a \cdot 0 = 0$ voor élke waarde van a.
(Je zou kunnen zeggen: $a \cdot 0 = a$ klopt wél als $a = 0$, dus dan geldt $^0/_0 = 0$.
Is Brahmagupta daardoor misschien op deze foute rekenregel gekomen?)
b. Als je de vergelijking 6 x 0 = 7 x 0 links en rechts deelt door 0, dan zou je krijgen 6 = 7

►46 a. Allemaal gelijk aan 0
b. Dan geldt $0^0 = 0$
c. $\frac{3^8}{3^8} = 1$ want een getal gedeeld door zichzelf is 1, dus $3^0 = 1$
d. Allemaal gelijk aan 1
e. Dan geldt $0^0 = 1$
f. Geen van beide, dus 0^0 bestaat niet

►47 a. Alle stappen lijken te kloppen
b. Er wordt gedeeld door $(x - x)$, ofwel: er wordt gedeeld door 0 en dat is en geeft flauwekul!

►48 a. De delers van 24 zijn 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; de delers van 100 zijn 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100; dus ggd(24, 100) = 2

b. De delers van 48 zijn 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; de delers van 110 zijn 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110; dus ggd(48, 330) = 2

c. De delers van 107 zijn 1 en 107 (priemgetal); de delers van 239 zijn 1 en 239 (priemgetal); dus ggd(107, 239) = 1

►**49 a.** ggd(24, 42) = 6

b. ggd(105, 252) = 21

c. ggd(1160, 800) = 40

►**50 a.** Met de stelling van Pythagoras: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, dus $AC = \sqrt{2}$

b. Stel dat $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ met a en b zonder gemeenschappelijke delers.

Hieruit volgt: $b\sqrt{2} = a$.
Kwadrateren links en rechts van het gelijkteken geeft: $2b^2 = a^2$, dus a^2 is even.
Omdat het kwadraat van een oneven geheel getal altijd oneven is, kan a niet oneven zijn en dus is a zelf even. Zeg $a = 2p$, met p een geheel getal.
Daaruit volgt weer: $2b^2 = a^2 = (2p)^2 = 4p^2$, dus (deel links en rechts door 2) $b^2 = 2p^2$.
We zien dat b^2 even is, en op dezelfde manier als hierboven bij a, trekken we de conclusie dat b ook even is.
Zowel a als b zijn dus even en bijgevolg beide deelbaar door 2. Dit is echter in tegenspraak met onze keuze van a en b, die geen gemeenschappelijke deler hebben.
Onze veronderstelling was bijgevolg verkeerd en daarmee is bewezen dat er geen gehele getallen a en b bestaan zodat $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

c. Met Pythagoras: $AC = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$, dus $AB : AC = 8 : 17$

d. Als de zijden van de rechthoek samen met de diagonaal een Pythagoreïsche drietal vormen

►**51 a.** … (lijnstuk met lengte 2 cm)

b. … (lijnstuk met lengte 3 cm)

c. ggd(6, 14) = ggd(2·3, 2·7) = 2, dus de gemeenschappelijke maat heeft lengte 2
ggd(6, 15) = ggd(2·3, 3·5) = 3, dus de gemeenschappelijke maat heeft lengte 3

►**52 a.** $AC : AB = 8 : 13$; $CB : AB = 5 : 13$

b. 5/8 = 0,625; 8/13 ≈ 0,615; 5/13 ≈ 0,385; ja: $AC : CB \approx AC : AB$

c. $AC : AB = 6 : 13$; $CB : AB = 7 : 13$
6/7 ≈ 0,857; 6/13 ≈ 0,462; 7/13 ≈ 0,538; nee

►**53 a.** …; (Punt C ligt 8 cm van A af; $AC : CB = 8 : 13 \approx 0{,}615 \approx 0{,}619 \approx 13 : 21 = CB : AB$)

b. Ja, bij $x = 8$ zijn de uitkomsten bijna gelijk

c. Invoeren op GR: $AC : CB = \frac{x}{34-x}$ en $CB : AB = \frac{34-x}{34}$; verschillen het minst als $x = 13$;
$AC : CB = 13 : 21 \approx 0{,}619 \approx 0{,}618 \approx 21 : 34 = CB : AB$

d. Met Intersect: bij $AB = 21$ geeft dat $x \approx 8{,}02129$ en verhouding 0,61803
Met Intersect: bij $AB = 34$ geeft dat $x \approx 12{,}98684$ en verhouding 0,61803

►**56 a.** Door kruislings te vermenigvuldigen krijg je $x^2 = 1 + x$ en dat geeft $x^2 - x - 1 = 0$

b. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$;
$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ is negatief en vervalt daardoor, dus blijft over $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \approx 1{,}61803$

►**57 a.** $AD = \frac{1}{2}\cdot AB = 2$; met de stelling van Pythagoras: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

b. DE is gelijk aan AD, dus $DE = 1$; $BE = BD - DE = \sqrt{5} - 1$

c. $\frac{AB}{CB} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 1{,}61803$

►**58 a.** Door bij $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ links en rechts 1 op te tellen krijg je: $\varphi^2 - \varphi = 1$, dus $1 = \varphi^2 - \varphi$

b. $1 = \varphi^2 - \varphi$ links en rechts delen door φ geeft $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$

►**59 a.** Het 17^e^ getal, namelijk 1597 (en het 16^e^ is 987)

b. 1+1+2+3+5 = 12 = 13 – 1; eerste 6 geeft het 8^e^ getal min 1; eerste 7 geeft het 9^e^ getal min 1; algemeen: de eerste n getallen uit de rij optellen geeft het (n+2)^e^ getal min 1

c. Afwisselend is het product van de buitenste twee getallen van elk drietal opeenvolgende getallen uit de rij telkens 1 meer of 1 minder dan het kwadraat van het middelste getal

d. Het quotiënt van twee opeenvolgende getallen gaat steeds meer lijken op $\varphi \approx 1{,}61803$

►60 a. …

b. …